Vierte Schularbeit Mathematik Klasse 5B

am 24. Mai 2018

KORREKTURVORLAGE – Version 1.0 (13:41 evt. Noch Fehlerchen)

Aufgabe 1. (2P) **Zahlenmengen** **AG 1.1**

Kreuzen Sie diejenige Menge an, zu welcher die Zahl $5 \cdot 10^{-1}$ gehört!

$\mathbb{N}$	☐
$\mathbb{Z}$	☐
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	☐
$\mathbb{Q}^+$	☒
$\mathbb{Q}^-$	☐
$[-1; 0] \cap \mathbb{Q}$	☐

Aufgabe 2. (2P) **Vektoren 1** **AG 3.3**

Es sind $A, B, C \in \mathbb{R}^2$. Kreuzen Sie diejenigen beiden Ausdrücke an, die Vektoren in $\mathbb{R}^2$ sind!

$(2 \cdot A + B) \cdot C$	☐
$A \cdot (B + C)$	☐
$A - 2 \cdot B$	☒
$(A \cdot B)(C \cdot A)$	☐
$(A \cdot B)C$	☒

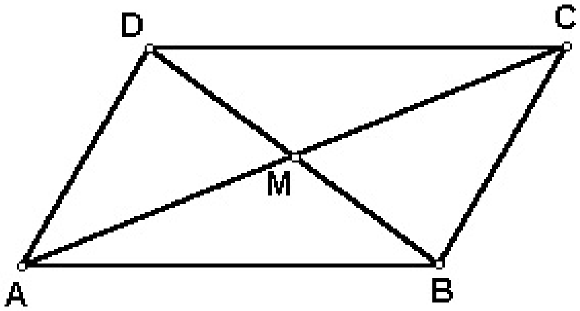
Aufgabe 3. (3P) **Vektoren 2** **AG 3.1**

In einem Wald gibt es zwei Krähenarten, die Nebelkrähe und die Schwarze Krähe. Der Naturschutzverein dokumentiert jedes Jahr einen Vektor $K_J = (N|S)$ mit den Beständen der beiden Krähenarten in dem Wald, hierbei ist N die Anzahl der Nebelkrähen und S die Anzahl der Schwarzen Krähen in dem Jahr J. Im Jahr 2016 war $K_{2016} = (1500|1800)$. Im Jahr 2017 gab es 10% **mehr** Nebelkrähen und 5% **weniger** Schwarze Krähen als in 2016. Schreiben Sie den Vektor K_{2017} an!

Ihre Antwort: $K_{2017} = (1650|1710)$

Aufgabe 4. (2P) **Vektoren 3** **AG 3.2**

Es sei M der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD eines Parallelogramms $ABCD$. Kreuzen Sie die beiden im Allgemeinen zutreffenden Gleichungen an!



$\overrightarrow{BM} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$	☒
$M = 0,5 \cdot \overrightarrow{AC}$	☐
$D = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$	☐
$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MD}$	☐
$A + B + C + D = 4M$	☒

Aufgabe 5. (2P) **Ganz normale Vektoren** **AG 3.5**

Die Vektoren $A = (3|4)$ und $B = (10|b)$ stehen normal auf einander.

Bestimmen Sie den Wert von b!

Ihre Antwort: $b = -7\frac{1}{2}$

Aufgabe 6. (2P) **Quadratische Gleichungen** **AG 2.3**

Bestimmen Sie den Wert von a, sodass die Gleichung

$$(x-2)^2 = 2x - a$$

genau eine Lösung x hat!

Ihre Antwort: $a = 5$.

Aufgabe 7. (2P) **Lineare Funktion** **FA 2.2**

Der Punkt $P = (3|7)$ liegt auf dem Graphen der linearen Funktion $f(x) = kx + 1$.

Bestimmen Sie den Wert von k!

Ihre Antwort: $k = 2$

Aufgabe 8. (2P) **Zugeordnete Vektoren** **AG 3.3**

Orden Sie jedem Vektor aus der linken Tabelle den richtigen Ausdruck aus der rechten Tabelle zu!

$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$	C
$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$	D
$\overrightarrow{x} = 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) - (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC})$	E
$\overrightarrow{x} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$	A

A	$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{AB}$
B	$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{AC}$
C	$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{CB}$
D	$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$
E	$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{DC}$

Aufgabe 9. (3P) **Dreiecke** **AG 3.3**

Gegeben sind die Eckpunkte eines Dreiecks $\triangle ABC$:

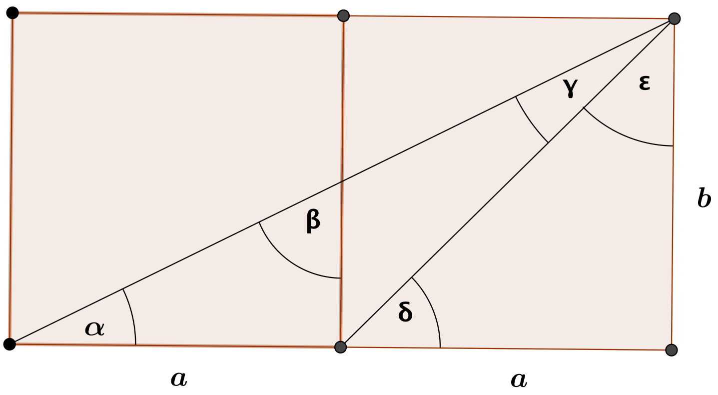
$$A = (-1|2)\,, \quad B = (3|1)\,, \quad C = (4|5)\,.$$

Bestimmen Sie die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{AC}$ und begründen Sie, dass dieses Dreieck rechtwinklig ist.

Ihre Antwort: $\overrightarrow{AB} = (4| - 1)$, $\overrightarrow{BC} = (1|4)$ und $\overrightarrow{AC} = (5|3)$. Die Vektoren $(4| - 1)$ und $(1|4)$ stehen normal auf einander, da ihr Skalarprodukt Null ist.

Aufgabe 10. (2P) **Winkel** **AG 4.1**

Gegeben ist die folgende Figur, welche aus zwei identischen Rechtecken mit Seitenlängen a und b besteht:



Kreuzen Sie die beiden auf die abgebildete Figure zutreffenden Aussagen an!

$\alpha = \arcsin\left(\frac{b}{2a}\right)$.	☐
$\beta = \arctan\left(\frac{2a}{b}\right)$.	☒
$\gamma = \arctan\left(\frac{2a}{b}\right) - \arcsin\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.	☒
$\delta = \arccos\left(\frac{b}{\sqrt{b^2+a^2}}\right)$.	☐
$\epsilon = \arctan\left(\frac{b}{2a}\right)$.	☐

Aufgabe 11. (2P) **Doppelt Linear** **AG 2.5**

Es sei $g: \; 2x + 3y = 5$ eine Gerade, welche parallel zur Geraden $h: \; 3x + c \cdot y = 2$ ist.

Bestimmen Sie den Wert von c!

Ihre Antwort: $c = 4\frac{1}{2}$

Vierte Schularbeit Mathematik Klasse 5B

am 24. Mai 2018

Zweiter Teil

Aufgabe 1 (zu 9P). Punkte auf Kreisen.

Wir betrachten eine Menge an Punkten in der Ebene, die von einem Parameter t abhängen; für jeden Wert von t gibt es einen Punkt $P(t)$ in der Ebene. Die Punkte $P(t)$ sind durch folgende Vorschrift gegeben:

$$P(t) = \Big(\frac{2t}{1+t^2} \;\Big|\; \frac{1-t^2}{1+t^2} \Big) \qquad \text{Gleichung (1)}$$

(a). **(1 AP)** Begründen Sie, dass wenn $t \in \mathbb{Z}$, die Koordinaten von $P(t)$ rationale Zahlen sind.

Wenn t eine ganze Zahl ist, dann sind $2t$, $1+t^2$ und $1-t^2$ auch ganze Zahlen. Per Definitionem sind rationale Zahlen von der Form $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$. Die Koordinaten von $P(t)$ sind $\frac{2t}{1+t^2}$ und $\frac{1-t^2}{1+t^2}$, wobei also für $t \in \mathbb{Z}$ Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, also sind die Koordinaten rational.

(b). (2P) Begründen Sie, dass alle Punkte $P(t)$ auf dem Einheitskreis liegen, das heißt, Sie müssen zeigen, dass $|P(t)| = 1$.

Berechnen wir mal $|P(t)|^2$. Wir sehen, dass $\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 = \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}$ und $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 = \frac{1+t^4-2t^2}{(1+t^2)^2}$. Die Summe dieser Terme ergibt also

$$\frac{1+2t^2+t^4}{(1+t^2)^2} = \frac{1+2t^2+t^4}{1+2t^2+t^4} = 1$$

was zu beweisen war.

Weil die Punkte $P(t)$ auf dem Einheitskreis liegen, kann jeder Punkt $P(t)$ auch in Polarkoordinaten geschrieben werden als $P(t) = (\cos(\alpha)|\sin(\alpha))$; der Winkel α ist natürlich von t abhängig, sodass wir $P(t) = (\cos(\alpha(t))|\sin(\alpha(t)))$ schreiben sollten. Wenn wir das ausschreiben, haben wir die Gleichungen

$$\cos(\alpha(t)) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \sin(\alpha(t)) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

(c). **(1AP)** Geben Sie einen Termausdruck für $\tan(\alpha(t))$.

$$\tan(\alpha(t)) = \frac{1-t^2}{2t}$$

(d). (3P) Berechnen Sie den Wert / die Werte von t, für welche (i) $P(t) = (1|0)$, (ii) $P(t) = (0|1)$ und (iii) $\cos(\alpha(t)) = \sin(\alpha(t))$.

Bei (i) $t = 1$, (ii) $t = 0$, (iii) t ist die Lösung von $t^2 + 2t - 1 = 0$, also $t = -1 \pm \sqrt{2}$

$$P(1) = (1|0), \quad P(0) = (0|1) \quad , \quad P(-1-\sqrt{2}) = \Big(\frac{-1-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \Big| \frac{-1-\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}\Big),$$

$$P(-1+\sqrt{2} = \left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\middle|\frac{-1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)$$

Pythagoreische Zahlentripel sind als Vektoren $(a|b|c) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{(0|0|0)\}$ zu betrachten, welche die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen. Zu beachten ist, dass alle drei Komponenten ganze Zahlen sind. Aus so einem Pythagoreischen Zahlentripel $(a|b|c)$ kann man auch einen zweidimensionalen Vektor machen, und zwar wie folgt:

$$(a|b|c) \longrightarrow (x|y) = \left(\frac{a}{c}\middle|\frac{b}{c}\right).$$

(e). (2P) Begründen Sie, dass auf diese Weise aus jedem Pythagoreischen Zahlentripel ein Punkt auf dem Einheitskreis mit rationalen Koordinaten gemacht wird.

Wie bei (a): eine rationale Zahl ist ein Verhältnis von zwei ganzen Zahlen, und da die Möglichkeit $c = 0$ automatisch wegen $a^2 + b^2 = c^2$ und $(a|b|c) \neq (0|0|0)$ ausgeschlossen ist, so sind die Ausdrücke $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{c}$ rationale Zahlen. Achtung: $c = 0$ impliziert $a^2 + b^2 = 0$, also $a = b = 0$, was dann implizieren würde $a = b = c = 0$, was ausgeschlossen ist.

Aufgabe 2 (zu 6P). Lagerhaltung

Ein Händler lagert Notebooks und Tablets in zwei Lagern. Die Angaben in der unterstehenden Tabelle beziehen sich auf einen bestimmten Zeitpunkt. Alle Preise sind in Euro.

	Stückzahl in Lager 1	Stückzahl in Lager 2	Bestellzahl	Einkaufspreis pro Stück	Verkaufspreis pro Stück
Notebook	s_1	t_1	b_1	e_1	v_1
Tablets	s_2	t_2	b_2	e_2	v_2

Betrachten Sie die folgenden Vektoren:

Stückzahlvektor im Lager 1: $S = (s_1|s_2)$

Stückzahlvektor im Lager 2: $T = (t_1|t_2)$

Bestellvektor: $B = (b_1|b_2)$

Einkaufspreisvektor: $E = (e_1|e_2)$

Verkaufspreisvektor: $V = (v_1|v_2)$

(a). - **(1AP)** Es werden nicht alle gelagerten Notebooks und Tablets bestellt. Beschreiben Sie, was der Vektor $S + T - B$ angibt!

- (2P) Geben Sie den Vektor $V - E$ in Koordinatenform an und interpretieren Sie ihn!

(b). - (1P) Geben Sie an, was mit dem Skalarprodukt $V \cdot B$ berechnet wird!

- (2P) Es sei G der Gewinn beim Verkauf *aller* bestellten Notebooks und Tablets. Drücken Sie G durch B, V und E aus!

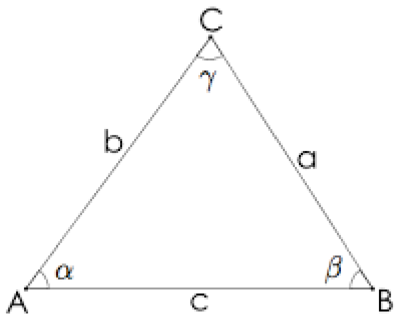
- Wie viele Notebooks und Tablets nach Abschicken der Bestellungen noch im Lager sind.

- $(v_1 - e_1|v_2 - e_2)$ gibt an, wie viel Gewinn man pro Notebook und pro Tablet macht.

- Mit $V \cdot B$ berechnet man den Ertrag beim Verkauf der bestellten Notebooks und Tablets.

- $G = V \cdot B - E \cdot B$.

Aufgabe 3 (zu 9P). Winkel in einem Dreieck



Ein Dreieck $\triangle ABC$ sei durch die folgenden Vektoren aufgespannt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

(a). – **(1AP)** Drücken Sie den Vektor $\vec{c} = \overrightarrow{BC}$ in $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus!

$\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$.

Es seien $a = |\vec{a}|$, $b = |\vec{b}|$ und $c = |\vec{c}|$. Es ist möglich c^2 in a, b und $\vec{a} \cdot \vec{b}$ auszudrücken.

(b). (2P) Drücken Sie c^2 in a, b und $\vec{a} \cdot \vec{b}$ aus!

$c^2 = \vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$, welches man schreiben kann als:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Aus der elementaren Geometrie von Dreiecken ist auch bekannt, dass folgende Formel gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

wobei γ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist – sehen Sie die Figur.

(c). (2P) Zeigen Sie, dass für den Winkel γ zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt, dass

$$\cos(\gamma) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} \qquad \text{(Kosinusformel)}\,.$$

Aus Obigem: $a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) = a^2 + b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$ und somit gilt $ab\cos(\gamma) = \vec{a} \cdot \vec{b}$, was direkt zum Gefragten führt.

(d). (4P) Nehmen Sie ein ganz konkretes Beispiel $\vec{a} = (5|3)$ und $\vec{b} = (3|-2)$ und (i) berechnen Sie den Umfang des Dreiecks $\triangle ABC$, (ii) berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$ und (iii) überprüfen Sie die Kosinusformel.

Idee der Aufgabe: Zeichne die Figur $\triangle ABC$ mit $A = (0|0)$, $B = (5|3)$ und $C = (3|-2)$ in ein Koordinatensystem ein. Dann umschreiben mit einem Rechteck mit Koordinaten $(0|3)$, $(0|-2)$, $(5|3)$ und $(5|-2)$.

(i) Umfang mit Pythagoras: $U = \sqrt{34} + \sqrt{13} + \sqrt{29}$.

(ii) Fläche: Rechteck hat Fläche 25. Dann rechtwinkligen Dreiecke subtrahieren. Ergibt: $9,5$.

(iii) Die Strecke AB hat Steigung $k_1 = 3/5$ und somit Neigungswinkel $\alpha_1 = \arctan(0,6) \approx 30,96^o$. Die Strecke AC hat Steigung $k_2 = -2/3$ und somit Neigungswinkel $\alpha_2 = -\arctan(2/3) \approx -33,69^o$, und dann ist der Winkel $\gamma = \alpha_1 - \alpha_2 = \arctan(3/5) + \arctan(2/3)$, also etwa 64,65 Grad.

Andererseits $a = \sqrt{34}$, $b = \sqrt{13}$ und $\vec{a} \cdot \vec{b} = 15 - 6 = 9$, also

$$\cos(\gamma) = \frac{9}{\sqrt{13}\sqrt{34}} = \frac{9}{\sqrt{442}}$$

und daher $\gamma = \arccos\left(\frac{9}{\sqrt{442}}\right)$, was dasselbe ergibt. Interessanterweise ist die Zahl 442 genau $21^2 + 1$, und somit gilt annäherungsweise $\cos(\gamma) = 3/7$, weil $9/21 = 3/7$.

HABEN SIE VIEL ERFOLG!
(Ende der Schularbeit)