Logik & Mathematik & Mengen

Zusammenfassung

Die Logik behandelt Wahrheitsbeziehungen zwischen Aussagen. Aussagen werden oft mit Buchstaben A, B, C, ... angedeutet. Zum Beispiel $A =$ „Lehrer sind Menschen“.

Aussagen können auch Variablen enthalten; $A(x) =$ „x ist ein Mensch“. Hierbei ist es eigentlich schon wichtig, bestimmte Mengen für die Auswahl der Objekte x zu wählen - sonst wird die Aussage vielleicht sinnlos.

$\Longrightarrow$ bedeutet eine Implikation. $A \Longrightarrow B$ ist zu lesen wie, „aus A folgt B“ oder „Wenn A wahr ist, so auch B“.

Manchmal weist der Pfeil auch in die andere Richtung: $A \Longrightarrow B$ bedeutet aber dasselbe wie $B \Longleftarrow A$.

$\neg A$ ist die Verneinung von A. Es gilt $\neg(\neg A) = A$.

Aus der Beziehung $A \Longrightarrow B$ folgt $\neg B \Longrightarrow \neg A$.

Das Symbol $\forall$ bedeutet „für alle“. Bsp. $\forall x > 1 : \ x > 0$.

Das Symbol $\exists$ bedeutet „es existiert“. Bsp. $\exists x > 1 : \ x^2 - 3x - 4 \geq 0$. (Versuch mal mit $x = 4$, oder $x = 4,1$)

Das Symbol $\exists!$ bedeutet „es existiert genau ein(e)“. Bsp. $\exists! x > 1 : \ x^2 - 3x - 4 = 0$; es gibt zwar zwei Lösungen zu $x^2 - 3x - 4 = 0$ ($x = -1$ und $x = 4$, und andere gibt es nicht), aber nur eine davon ist größer als 1.

Das Symbol $\wedge$ steht zwischen Aussagen und bedeutet „und“. Also $A \wedge B$ ist nur wahr, wenn A wahr ist, und B auch wahr ist; beide müssen also wahr sein.

Das Symbol $\vee$ steht zwischen Aussagen und bedeutet „oder“. $A \vee B$ isr nur wahr wenn A oder B (oder beide) wahr ist (sind). Also, mindestens eine der beiden muss wahr sein.

Es gilt $A \wedge B \Longrightarrow A \vee B$. Ist auch logisch, denn wenn A und B beide wahr sind, dann auch mindestens eine der beiden.

Beispiele. Seien $A(x) =$ „$3 \leq x \leq 6$“ und $B(x) =$„$4 \leq x \leq 10$“.

1. $A(x) \Longrightarrow B(x)$ gilt nicht, denn $A(3)$ ist wahr, aber $B(3)$ nicht.
2. $A(x) \wedge B(x) =$„$4 \leq x \leq 6$“.
3. $A(x) \vee B(x) =$ „$3 \leq x \leq 10$“.

4. $\neg A(x)$ ist nur dann wahr, wenn $x < 3$ oder $x > 6$.

Beispiele. Es seien A und B beliebige Aussagen.

1. $A \wedge B \Longrightarrow A$. Wenn A und B beide wahr sind, dann auch A.
2. $A \wedge B \Longrightarrow A \vee B$. Wenn A und B beide wahr sind, dann auch mindestens eine der beiden von A und B.
3. $\neg(A \vee B) \Longleftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$. $\neg(A \vee B)$ ist genau dann wahr, wenn $A \vee B$ falsch ist. $A \vee B$ ist nur dann falsch, wenn A und B beide falsch sind, also genau dann wenn $(\neg A) \wedge (\neg B)$ wahr ist. Also $\neg(A \vee B)$ ist nur dann wahr, wenn auch $(\neg A) \wedge (\neg B)$ wahr ist.

Das letzte Beispiel beweist man auch leicht mit einer Wahrheitstafel. Da A und B noch nicht bekannt sind, müssen wir alle Möglichkeiten auflisten, 1 steht dabei für wahr, 0 für falsch.

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

In der Wahrheitstafel sieht man dann, dass die Einträge bei $\neg(A \vee B)$ und $(\neg A) \wedge (\neg B)$ gleich sind.

Übersetzung in Mengen

Aussagen über reelle Zahlen kann man in Mengen umwandeln. Zu einer Menge $A(x)$ nehmen wir einfach alle reellen Zahlen x, sodass $A(x)$ wahr ist:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid A(x)\}.$$

Also, $x \in A$ genau dann, wann $A(x)$ (wahr ist); $x \in A \Longleftrightarrow A(x)$.

Um dies richtig machen zu können, brauchen wir einige Mengenoperationen:

- $A \cup B$ ist die Vereinigung von A und B; diese Menge enthält die Elemente von A, und die von B. Also, $x \in A \cup B$, wenn $x \in A$ oder $x \in B$. Wenn x in mindestens einer der beiden liegt, so auch in $A \cup B$. Beispiel $[1;5] \cup [3;8] = [1;8]$.
- $A \cap B$ ist der Durchschnitt von A un B – A geschnitten B; diese Menge enthält die Elemente von A, die auch in B liegen. Also, $x \in A \cap B$ genau dann wenn sowohl $x \in A$ wie auch $x \in B$.

- A^c ist das Komplement von A; das sind alle Zahlen, die nicht in A liegen. Beispiel $(-\infty, 1]^c = (1; \infty)$.
- $A \setminus B$ ist die Menge, die alles von A enthält, was aber nicht in B liegt. ℹ Es gilt $A \setminus B = A \cap B^c$, denn wenn $x \in A \setminus B$, dann liegt x in A, aber nicht in B, also in B^c, also liegt $x \in A$ und in B^c, also in $A \cap B^c$. Wenn aber $x \in A \cap B^c$, dann liegt x in A, aber eben nicht in B, also in $A \setminus B$.

↯ Wenn eine Aussage keine Variablen enthält, so wie $A =$„Alle Bären essen Beeren“, oder $B =$ „$2 > -4$ “, dann ist der Wahrheitsgehalt unabhängig von einer gewählten Zahl, somit ist dann die Menge zu der Aussage entweder ganz $\mathbb{R}$ oder $\emptyset$.

Einige Korrespondenzen:

1. Eine Tautologie korrespondiert mit $\mathbb{R}$; falls $A(x)$ immer wahr ist, so kann man jede x nehmen und es gilt $A(x)$. In logischer Sprache: falls $\forall x \in \mathbb{R} :\ A(x)$, dann $A = \mathbb{R}$.
2. Eine Aussage, die immer unwahr ist, korrespondiert mit der leeren Menge $\emptyset$. Sei $A(x) =$ „$x^2 + 1 = 0$“, dann $\nexists x \in \mathbb{R} :\ A(x)$ (es existiert kein x in $\mathbb{R}$, sodass $A(x)$ wahr ist). Daher korrespondiert $\emptyset$ mit $\nexists$.
3. Das Komplement A^c einer Teilmenge A der reellen Zahlen ist die Menge, die genau die reellen Zahlen enthält, die nicht in A sind. Also $A^c = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin A\}$. Das Komplement einer Menge korrespondiert mit der Verneinung einer Aussage. Nimm mal als Aussage$A(x) =$ „$x > 9$“, dann gehört dazu die Menge $A = (9; \infty)$. Das Komplement ist also $A^c = (-\infty; 9]$ und dies besteht genau aus die Zahlen x für welche $\neg A(x)$ zutrifft.
4. Zur Aussage $A(x) \wedge B(x)$ korrespondiert die Menge $A \cap B$.
5. Zur Aussage $A(x) \vee B(x)$ korrespondiert die Menge $A \cup B$.
6. Falls die Aussge $A(x)$ nur für einen Wert x wahr ist, schreibt man $\exists! x : A(x)$, und dann korrespondiert eine Menge mit einem Punkt zu dieser Aussage. Bsp. $A(x) =$ „$x^3 = 8$“, dann ist nur $A(2)$ wahr, somit ist die damit korrespondierende Menge $\{2\}$.

↯ Es gibt einen Unterschied zwischen $\{2\}$ und 2. 2 ist eine Zahl und keine Menge, $\{2\}$ ist eine Menge und keine Zahl. Es gilt $2 \in \{2\}$, aber umgekehrt ist es sinnlos, aber $\{2\} \subset \mathbb{R}$. Man darf halt keine Äpfel und Birnen vergleichen. Aufpassen also! Achte auch auf den subtilen Unterschied: Die Zahl 2 löst die Gleichung $x^3 = 8$ einerseits, $\{2\}$ ist die Lösungsmenge (die Menge, die alle Lösungen enthält) der Gleichung $x^3 = 8$.

✍ Zeige jetzt selbst, dass für zwei Aussagen $A(x)$ und $B(x)$ die Menge $A \setminus B$ mit der Aussage $A(x) \wedge \neg(B(x))$ korrespondiert. Finde auch ein gutes Beispiel dazu.

✍ Zeige jetzt selbst, dass die Aussage $A(x) \Longleftarrow B(x)$ mit der Mengenaussage $A \subset B$ korrespondiert. Finde auch gute Beispiele!

☞ Es gibt natürlich auch Aussagen mit mehreren Variablen. Betrachte mal „X und Y sind Familie“. Bei Zahlen geht das auch recht gut. Einige Beispiele die recht interessant sind:

- Betrachte die Aussage $A(x, y) =$„$x - 2y = 3$“. Dazu korrespondiert dann die Teilmenge der Ebene die durch $x - 2y = 3$ definiert ist, also eine Gerade. Für die Ebene schreibt man oft $\mathbb{R}^2$ und sie besteht aus allen Punkten $(x|y)$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Die Bedeutung der zwei bei $\mathbb{R}^2$ ist damit hoffentlich klar.
- Betrachte die Aussage $B(x, y) =$ „$x^2 + y^2 \leq 1$“. ✍ Welche Menge korrespondiert damit?
- Die Menge definiert durch die Ungleichung $C(x, y) = |x| + |y|$ ist ein Quadrat mit Eckpunkten $(0; 1)$, $(1; 0)$, $(-1; 0)$ und $(0; -1)$. ✍ Kannst die Aussage zur Raute mit den Eckpunkten $(0; 2)$, $(1; 0)$, $(-1; 0)$ und $(0; -2)$ finden?