Mehrere Herleitungen für Lösungsformeln für quadratische Gleichungen

Für die 5B

von DBW

Eine Gleichung von der Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$, oder jede, die du auf diese Form bringen kannst, heißt eine quadratische Gleichung. Vorige Woche waren schon mehrere Beispiele, es wäre sinnvoll, wenn du die richtig gut studiert hast.

Die pq-Formel

Betrachten wir zuerst den normierten Fall:

$$x^2 + px + q = 0\,.$$

Wir bringen zuerst q auf die andere Seite:

$$x^2 + px = -q\,.$$

Nun möchten wir $(x + A) = x^2 + 2Ax + A^2$ benutzen; dann muss aber $2A = p$ sein, und auch ein A^2 fehlt. Aber kein Problem, dann addieren wir das, was fehlt. Da $A = p/2$ muss also $A^2 = p^2/4$. Wir addieren also $p^2/4$ und bekommen

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q\,.$$

Der große Trick ist jetzt, dass die linke Seite mit $\Big(x + \frac{p}{2}\Big)^2$ übereinstimmt (kontrolliere das!), also

$$\Big(x + \frac{p}{2})^2 = \frac{p^2}{4} - q\,.$$

Dann können wir nun vielleicht die Wurzel ziehen, aber das geht nicht, wenn die rechte Seite negativ ist. Wir nennen die rechte Seite nun die verkürzte Disktriminante und schreiben dafür d, also, wir nennen

$$d = \frac{p^2}{4} - q\,.$$

Dann gibt es jetzt drei Fälle zu unterscheiden: Fall 1: Die verkürzte Diskriminante ist kleiner als Null. Dann können wir die Wurzel nicht ziehen und es gibt keine Lösungen.
Fall 2: Die verkürzte Diskriminante ist Null. Dann ist die Wurzel davon auch Null, und dann bekommen wir also

$$x + \frac{p}{2} = 0\,,$$

mit anderen Worten, es gibt dann genau eine Lösung und zwar $x = -\frac{p}{2}$.
Fall 3: Die verkürzte Diskriminante ist positiv, dann können wir die Wurzel ziehen, müssen aber auch die negative Wurzel betrachten:

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{d} \implies x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{d} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,.$$

Dies lässt sich elegant wie $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{d}$ zusammenfassen.

Die abc-Formel – auf elegante Weise

Wir nehmen die Form $ax^2 + bx + c = 0$. Dabei darf a nicht Null sein. Somit ist das Dividieren durch oder Multiplizieren mit a eine Äquivalenzumformung. Wir multiplizieren mit a und bekommen:

$$a^2x^2 + bax + ac = 0\,.$$

Nun sehen wir, dass eigentlich die Kombination ax vorkommt; um dies deutlich zu machen nenne ich $t = ax$ und dann ist obige Gleichung die folgende

$$a^2x^2 + bax + ac = (ax)^2 + b(ax) + ac = t^2 + bt + ac = 0\,.$$

Dies ist genau die Gleichung in pq-Form! Wir könnten also zwei Dinge tun: Entweder das obige Wiederholen, oder die Formel benutzen mit $p = b$ und $q = ac$. Tun wir zuerst das erste (das zweite ist unten bei $***$, und formen um:

$$t^2 + bt = -ac$$

wir adderen das Quadrat von $b/2$

$$t^2 + bt + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} - ac$$

und bringen die rechte Seite auf einen Nenner

$$t^2 + bt + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2 - 4ac}{4}$$

und wiedererkennen, dass die linke Seite das Quadrat von $t + \frac{b}{2}$ ist

$$\left(t + \frac{b}{2}\right) = \frac{b^2 - 4ac}{4}\,.$$

Nun hängt alles sehr kritisch von der sogenannten Diskriminante ab, wobei die Diskriminante D der Ausdruck im Zähler der rechten Seite ist:

$$D = b^2 - 4ac\,.$$

Wir haben wieder drei Fälle:
Fall 1: $D < 0$, und es gibt keine Lösungen.
Fall 2: $D = 0$, dann gibt es genau eine Lösung und zwar $t = -\frac{b}{2}$. Nun müssen wir uns aber erinnern, dass $t = ax$, also $x = t/a$ und somit $x = -\frac{b}{2a}$.
Fall 2: $D > 0$ und dann gibt es zwei Lösungen:

$$t = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}} = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2}\,.$$

Nun aber, $x = t/a$, also

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}\,.$$

$***$
Dann jetzt die andere Methode, wir starten wieder bei $t^2 + bt + ac = 0$ und wiedererkennen, dass $p = b$ und $q = ac$. Die verkürzte Diskriminante ist dann

$$d = \frac{p^2}{4} - q = \frac{b^2}{4} - ac = \frac{b^2 - 4ac}{4}\,.$$

Den Zähler der rechten Seite nennen wir D, die Diskriminante. Es gibt wieder drei Fallunterscheidungen. Wenn $D = b^2 - 4ac < 0$, dann gibt es keine Lösungen. Wenn $D = 0$, dann gibt es genau eine und zwar

$$t = -\frac{p}{2} = -\frac{b}{2} \quad\Longrightarrow\quad x = \frac{t}{a} = -\frac{b}{2a}\,.$$

Falls $D > 0$, dann $t = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(p/2)^2 - q}$ also, mit $x = t/a$ ist das

$$x = \frac{-p}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2/4 - ac}}{a} = \frac{-p}{2a} \pm \frac{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4}}}{a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}.$$

Die abc-Formel – auf kurze Weise

Wir nehmen die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ und dividieren durch a und bekommen dann

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0\,.$$

Wir identifizieren dann $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$. Somit ist die verkürzte Diskriminante d gegeben durch

$$d = \frac{p^2}{4} - q = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

und dies bringen wir auf einen Nenner $4a^2$:

$$d = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\,.$$

Nun nennen wir den Zähler $D = b^2 - 4ac$ und bekommen dann also

$$d = \frac{D}{4a^2}\,.$$

Wenn wir die pq-Formel mal anschauen $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{d}$, sehen wir folgendes

$$\pm\sqrt{d} = \pm\frac{\sqrt{D}}{2a}\,,$$

weil wir BEIDE Vorzeichen betrachten, und $\sqrt{4a^2} = 2|a|$, aber da $\pm a = \pm|a|$. Kontrolliere mal für Zahlen: wenn a positiv ist, dann ist $a = |a|$ und also kein Problem, wenn $a < 0$, dann $|a| = -a$ und daher mit pm haben wir beide Vorzeichen, nur in anderer Reihenfolge. Darum ist wegen $\frac{p}{2} = \frac{b}{2a}$ die gesuchte Lösung

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}\,,$$

falls $D > 0$. Wenn $D = 0$ gibt es nur eine Lösung, und wenn $D < 0$ dann gar keine.

Die abc-Formel – auf brutale Weise

Wir nehmen die Formel einfach an und kontrollieren sie! Hierbei müssen wir also direkt schon mal annehmen, dass $D = b^2 - 4ac \geq 0$.
Wir nehmen zuerst $x = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ und bilden das Quadrat

$$x^2 = \left(\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 2b\sqrt{D} + D}{4a^2}\,.$$

Wir multiplizieren dies mit a und bekommen

$$(1): \quad ax^2 = \frac{b^2 - 2b\sqrt{D} + D}{4a}\,.$$

Dann mulitplizieren wir den Ausdruck für x mit b und bekommen

$$(2): \quad bx = \frac{-b^2 + b\sqrt{D}}{2a}\,.$$

Nun nehmen wir die Summe von (1), (2) und c und bringen dies auf den gemeinsamen Nenner, welcher $4a$ ist:

$$ax^2 + bx + c = \frac{b^2 - 2b\sqrt{D} + D}{4a} + \frac{-2b^2 + 2b\sqrt{D}}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$

und bekommen also im Zähler den Ausdruck

$$b^2 - 2b\sqrt{D} + D - 2b^2 + 2b\sqrt{D} + 4ac = -b^2 + 4ac + D$$

aber das ist Null! Eben weil $D = b^2 - 4ac$. Mit dem Minus, also für $x = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ geht es auf dieselbe Weise, und überlasse ich EUCH als Übung.
Also, falls $D > 0$ kontrollieret man einfach aber brutal die Korrektheit der Lösung. Falls es keine Lösung gibt, wenn $D < 0$ sieht man jetzt aber nicht so deutlich. Nur, dass dann die Formel nicht funktioniert. Wenn $D = 0$ sieht man aber dass die Formel nur eine Lösung ergibt, denn $\pm\sqrt{0} = \pm 0 = 0$.