Erste Schularbeit Mathematik Klasse 5B am 07.11.2017

Korrigiervorlage für Gruppe A

Aufgabe 1.

Ergänze den folgenden Satz:

Die Steigung der linearen Funktion $f(x) = kx + d$, deren Graphen durch die zwei Punkte $A = (1|3)$ und

$B = (2|5)$ geht, beträgt $k = 2$.

Drei Methoden: (1) $f(x+1) - f(x) = k$ für $x = 1$, also $k = f(2) - f(1) = 5 - 3 = 2$. (2) $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-3}{2-1} = 2$. (3) Gleichungssystem, etwas aufwendig, aber wieso auch nicht? $f(1) = 3$, also $k+d = 3$; $f(2) = 5$, also $2k+d = 5$. Dann lösen: $5-3 = 2k+d-(k+d) = k$ und daher $k = 2$ und $d = 1$.

Aufgabe 2.

Es seien folgende drei Mengen gegeben:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$ und $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$.

Welche zwei der folgenden Beziehungen sind richtig? Kreuze die beiden an!

(1). $A = B \cup C$.	☐
(2). $A = B \cap C$.	☐
(3). $A = B \setminus C$.	☒
(4). $B = (-\infty; 3)$.	☐
(5). $B = (-\infty; 3]$.	☒

Aufgabe 3.

Gegeben ist die quadratische Gleichung $2x^2 + 3x - 5 = 0$. Gib die Lösungen an!

Entweder gleich einsehen, dass $2x^2 + 3x - 5 = (2x+5)(x-1)$ oder mit *abc*-Formel finden $x = 1$ oder $x = -5/2 = -2,5$.

Aufgabe 4.

Kreuze an, welche der unterstehenden Aussagen richtig sind!

(1).	Die Zahl $3 \cdot 10^{-7}$ ist negativ.	☐
(2).	Der Kehrwert von $2 \cdot 10^7$ ist $5 \cdot 10^{-8}$.	☒
(3).	Die Zahl $3,7 \cdot 10^1$ ist eine Primzahl.	☒
(4).	$\{x \in \mathbb{R} \mid \lvert x\rvert > 2\} = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.	☒
(5).	Das Komplement von $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ist die Menge $(-\infty; 0)$.	☐

(1) Klar nicht, denn es ist $\frac{3}{10^7}$, also drei durch zehn Million. (2) Produkt ist $2 \cdot 10^7 \cdot 5 \cdot 10^{-8} = 10 \cdot 10^{-1} = 1$. (3) 37 ist eine Primzahl. (4) Wenn $|x| > 2$, so also für positive x bedeutet dies, $x > 2$, also $x \in (2; \infty)$, und für negative x, $-x > 2$, also $x < -2$, also $x \in (-\infty; -2)$. (5) Nein, denn die Verneinung von $x > 0$ ist nicht $x < 0$, sondern $x \leq 0$.

Aufgabe 5.

Die Anzahl der Lösungen der quadratischen Gleichung

$$X^2 + bX + 5 = b^2$$

in X hängt vom Wert von b ab. Bestimme all jene Werte von b, sodass es genau eine Lösung gibt.

Umschreiben zu $X^2 + bX + 5 - b^2 = 0$. Diskriminante ist $b^2 - 4(5 - b^2) = 5b^2 - 20$. Dies muss Null sein. Also $5b^2 = 20$, also $b^2 = 4$ also $b = \pm 2$. Die negative Lösung wurde oft vergessen.

Aufgabe 6.

Finde den einzigen Wert von X, sodass $X + \dfrac{4}{X} = 4$.

Begründe (rechnerisch), dass es keine positiven Zahlen X gibt, sodass $X + \dfrac{4}{X} < 4$.

Ausmultiplizieren: $X^2 + 4 = 4X$ also $X^2 - 4X + 4 = 0$. Entweder gleich sehen, dass dies $(X - 2)^2 = 0$ bedeutet, und daher sehen, dass nur $X = 2$ geht, oder mit *abc*-Formel, $D = 16 - 16 = 0$ und somit $X = -b/2a = 4/2 = 2$.

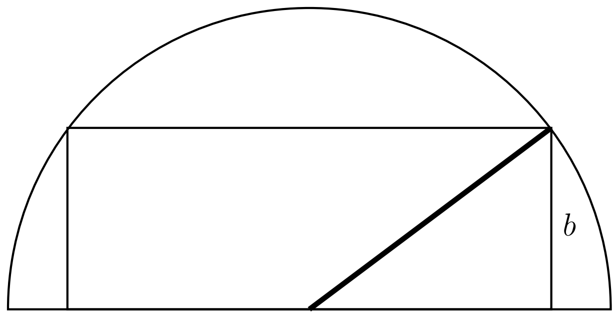
Zur Begründung, drei Methoden

(1) Wenn $X > 0$, dann ist $X + \dfrac{4}{X} > 0$. Sei aber nun $b \in (0; 4)$ so, dass $X + \dfrac{4}{X} = b$, dann $X^2 - bX + 4 = 0$. Diskriminante ist $b^2 - 16$, welche aber negativ ist, wenn $b \in (0; 6)$. Also gibt es so ein b nicht.

(2) Wenn $X + \dfrac{4}{X} < 6$ und $X > 0$, so haben wir $X^2 + 4 < 4X$, also $X^2 - 4X + 4 < 0$. Aber weil $X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$, würde dies bedeuten, dass $(X - 2)^2 < 0$, aber ein Quadrat is niemals negativ.

(*3*) Wir hatten ja schon mal die Identität $\sqrt{AB} \geq \frac{A+B}{2}$ für positive Zahlen (das geometrische Mittel ist kleiner als das arithmetische Mittel. Nimm jetzt $A = X$ und $B = 4/X$, dann $AB = 4$, also $\sqrt{AB} = 2$ und $(A+B)/2 \geq 2$ bedeuet also $A+B \geq 4$, was zu beweisen war.

Aufgabe 7.
Einem Halbkreis vom Radius $r = 2$ Meter wird ein Rechteck mit Verhältnis der Seitenlängen $a : b = 2 : 1$ wie in nebenstehender Abbildung eingeschrieben werden. Bestimme a und b.



Siehe Figur: Die eingezeichnete Linie komplettiert ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse $r = 2$ und Katheten $a/2$ und b. Daher mit Pyhtagoras:

$$(a/2)^2 + b^2 = 4$$

da aber $a = 2b$ steht hier nichts anderes als $b^2 + b^2 = 4$. Also $b^2 = 2$ und somit $b = \sqrt{2}$ und daher $a = 2\sqrt{2}$.

Aufgabe 8. Zerlege den quadratischen Term in ein Produkt von Linearfaktoren:

$$X^2 - 29X + 100$$

$(X-4)(X-25)$ entweder mit *abc*-Formel zuerst Nullstellen finden, oder mit dem Satz von Viète.

Erste Schularbeit Mathematik Klasse 5B am 07.11.2017

Korrekturvorlage für Gruppe B

Aufgabe 1.

Ergänze den folgenden Satz:

Die Steigung der linearen Funktion $f(x) = kx + d$, *deren Graphen durch die zwei Punkte* $A = (1|3)$ *und*

$B = (2|6)$ *geht, beträgt* $k = 3$.

Am leichtesten $f(x+1) - f(x) = k$ mit $x = 1$. Also $f(2) - f(1) = k$. Also $6 - 3 = k$.

Auch geht $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-3}{2-1} = 3$.

Etwas kompliziert: Wenn $f(x) = kx+d$, dann haben wir zwei Gleichungen: $3 = f(1) = k+d$ und $6 = f(2) = 2k+d$. Dann dieses Gleichungssystem lösen: $6-3 = (2k+d)-(k+d) = k$ und dann findet man $k = 3$ und $d = 0$.

Aufgabe 2.

Es seien folgende drei Mengen gegeben:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$ und $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$.

Welche zwei der folgenden Beziehungen sind richtig? Kreuze die beiden an!

(1). $A = B \setminus C$.	☒
(2). $A = B \cap C$.	☐
(3). $A = B \cup C$.	☐
(4). $B = (-\infty; 3)$.	☒
(5). $B = (-\infty; 3]$.	☐

Aufgabe 3.

Gegeben ist die quadratische Gleichung $2x^2 + 5x - 3 = 0$. Gib die Lösungen an!

Entweder mit *abc*-Formel oder wiedererkennen, dass $2x^2 + 5x - 3 = (2x - 1)(x + 3)$ also $x = 1/2$ oder $x = -3$.

Aufgabe 4.

Kreuze an, welche der unterstehenden Aussagen richtig sind!

(1). Die Zahl $-3 \cdot 10^{-7}$ ist negativ.	☒
(2). Der Kehrwert von $2 \cdot 10^7$ ist $2 \cdot 10^{-7}$.	☐
(3). Die Zahl $3,6 \cdot 10^1$ ist eine Primzahl.	☐
(4). $\{x \in \mathbb{R} \mid \lvert x \rvert > 2\} = (2; +\infty)$.	☐
(5). Das Komplement von $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ist die Menge $(-\infty; 0]$.	☒

(1) Klar. (2) Das Produkt der beiden ist $4 \cdot 10^0 = 4$, also nicht 1. (3) 36 ist keine Primzahl. (4) sollte sein $(2; +\infty) \cup (-\infty; -2)$. (5) Wenn nicht $x > 0$, dann schon $x \leq 0$.

Aufgabe 5.

Die Anzahl der Lösungen der quadratischen Gleichung

$$X^2 + bX + 4 = X$$

in X hängt vom Wert von b ab. Bestimme all jene Werte von b, sodass es genau eine Lösung gibt.

Auf folgende Form bringen: $X^2 + (b-1)X + 4 = 0$. (Das haben einige vergessen!) Dann $D = (b-1)^2 + 16$. Dies muss Null sein. Also

$$(b-1)^2 = 16 \implies b - 1 = \pm 4 \implies b = 1 \pm 4 \implies b \in \{-3, 5\}.$$

Aufgabe 6.

Finde den einzigen Wert von X, sodass $9X + \dfrac{1}{X} = 6$.

Begründe (rechnerisch), dass es keine positiven Zahlen X gibt, sodass $9X + \dfrac{1}{X} < 6$.

Ausmultilpizieren: $9X^2 + 1 = 6X$, also $9X^2 - 6X + 1 = 0$.

Entweder: gleich sehen, dass $9X^2 - 6X + 1 = (3X-1)^2$, und dann also $3X - 1 = 0$, also $X = 1/3$.

Oder: mit abc-Formel: $D = (-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 36 - 36 = 0$. Also $X = \frac{-b}{2a} = 1/3$.

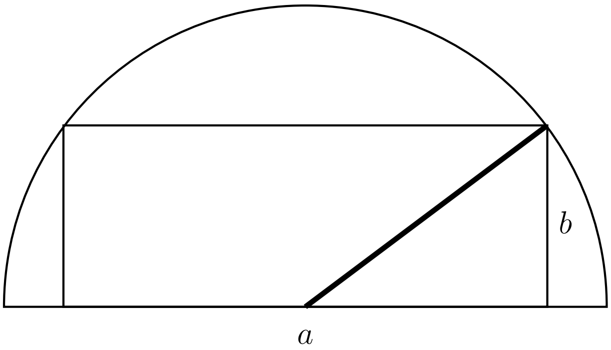
Zur Begründung, drei Methoden

(1) Wenn $X > 0$, dann ist $9X + \dfrac{1}{X} > 0$. Sei aber nun $b \in (0; 6)$ so, dass $9X + \dfrac{1}{X} = b$, dann $9X^2 - bX + 1 = 0$. Diskriminante ist $b^2 - 36$, welche aber negativ ist, wenn $b \in (0; 6)$. Also gibt es so ein b nicht.

(2) Wenn $9X + \dfrac{1}{X} < 6$ und $X > 0$, so haben wir $9X^2 + 1 < 6X$, also $9X^2 - 6X + 1 < 0$. Aber weil $9X^2 - 6X + 1 = (3X-1)^2$, würde dies bedeuten, dass $(3X-1)^2 < 0$, aber ein Quadrat is niemals negativ.

(*3*) Wir hatten ja schon mal die Identität $\sqrt{AB} \geq \frac{A+B}{2}$ für positive Zahlen (das geometrische Mittel ist kleiner als das arithmetische Mittel. Nimm jetzt $A = 9X$ und $B = 1/X$, dann $AB = 9$, also $\sqrt{AB} = 3$ und $(A+B)/2 \geq 3$ bedeuet also $A + B \geq 6$, was zu beweisen war.

Aufgabe 7.
Einem Halbkreis vom Radius $r = 2$ Meter wird ein Rechteck mit Verhältnis der Seitenlängen $a : b = 3 : 1$ wie in nebenstehender Abbildung eingeschrieben werden. Bestimme a und b.



Siehe Figur. Die eingezeichnete Strecke bildet die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit Katheten $a/2$ und b. Die Hypotenuse ist r, also 2. Daher gilt

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 = 4$$

Da aber $a = 3b$ ist die gleichwertig mit

$$\left(\frac{3b}{2}\right)^2 + b^2 = 4$$

und somit:

$$\frac{9b^2}{4} + b^2 = 4$$

also $13b^2 = 16$, und somit $b = 4/\sqrt{13}$ und dann $a = 12/\sqrt{13}$.

Aufgabe 8.

Zerlege den quadratischen Term in ein Produkt von Linearfaktoren:

$$X^2 - 25X + 100$$

Entweder mit dem Satz des Viète, oder zuerst die Lösungen mit der *abc*-Formel finden: $(X - 5)(X - 20)$.