Dritte Schularbeit Mathematik Klasse 5B
am 14. März 2018

KORREKTURVORLAGE

Notenschlüssel:
In Teil 1 gibt es 10 Aufgaben zu insgesamt 24 Punkten. In Teil 2 gibt es 24 Punkte, davon sind 4 Ausgleichspunkte.

Falls die Summe der erzielten Ausgleichsunkte und der erzielten Punkte in Teil 1 weniger als 16 ist, so ist die Note `Nicht Genügend`. Falls diese Summe 16 oder mehr beträgt, dann wird folgender Notenschlüssel benutzt:

NOTENSCHLÜSSEL	
41 - 48 Punkte	Sehr Gut (1)
33 - 40 Punkte	Gut (2)
25 - 32 Punkte	Befriedigend (3)
16 - 24 Punkte	Genügend (4)

Aufgabe 1. (3P) **Zahlenmengen** **AG 1.1**

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	☒
$\mathbb{Q} \subset \mathbb{N}$	☐
$\mathbb{R} \subset \mathbb{Z}$	☐
$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$	☒
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$	☒

Bei einem Fehler noch 1 Punkt.

Aufgabe 2. (2P) **Fussball** **AG 2.3**

Bei einem Fussballspiel wird der Ball vom Boden ab weggeschossen. Die Bahn, der der Ball folgt, ist eine Parabel, und die Höhe des Balls wird durch die Funktion

$$h(t) = -5t^2 + 10t\,,$$

wobei t die Zeit nach dem Abschuss ist und in Sekunden gemessen wird.

Berechnen Sie, wie viel Sekunden nach dem Abschuss der Ball (das erste Mal!) eine Höhe von 2 Metern erreicht!

Antwort: $1 - \sqrt{0,6} \approx 0,225$ Sekunden nachdem der Ball weggeschossen wurde, erreichte er das erste Mal eine Höhe von 2 Metern.

2 Punkt bei korrektem Ergebnis.

Aufgabe 3. (3P) **Quadratisch umgeformt** **AG 1.2 (& 2.3)**

Betrachten Sie die folgenden Umformungen:

$$5x^2 = x \quad |:x$$

$$5x = 1 \quad |:5$$

$$x = \frac{1}{5}$$

Diese Art eine Gleichung zu lösen ist nicht korrekt. **Geben Sie den Fehler an, und lösen Sie die Gleichung** $5x^2 = x$ **richtig!**

Ihre Antwort: Es wurde durch x dividiert, aber da x potentiell auch Null sein kann, muss dies berücksichtigt – sprich: ausgenommen – werden.

Falls $x = 0$, dann gilt Gleichheit, das ist also eine Lösung. Dann kann man weiter wie oben rechnen, da dann weiter angenommen werden darf, dass $x \neq 0$. Somit gibt es zwei Lösungen: $x = 0$ und $x = 1/5$.

Alternativ: $5x^2 - x = 0$, dann Diskriminante $D = 1 - 4 \cdot 5 \cdot 0 = 1$, also $x = \frac{1 \pm 1}{10}$, also $x = 0$ und $x = 1/5$.

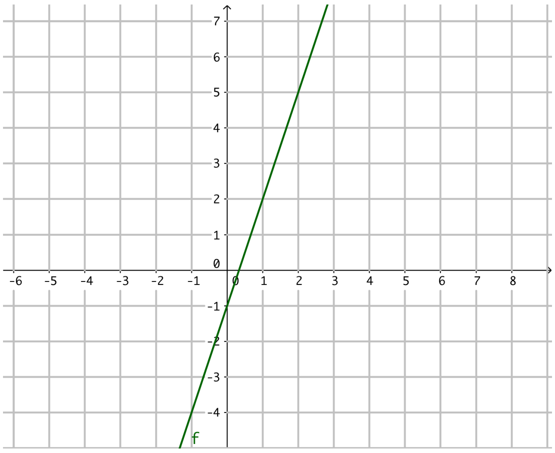
Alternativ: $5x^2 - x = 0$ also $x \cdot (5x - 1) =$, daher $x = 0$ oder $5x - 1 = 0$, und somit im letzten Fall $x = 1/5$.

Achtung: Mann muss also nicht die Formel für quadratische Gleichungen anwenden. Die Methode ist nicht die Notwendigkeit!

2 Punkte fürs richtig Lösen. 1 Punkt für das Finden des Fehlers.

Aufgabe 4. (2P) **Lineare Funktion bildlich dargestellt** **AG 2.2**

Hier unten sehen Sie ein Diagramm, in dem der Graph einer linearen Funktion f mit $f(x) = kx+d$ dargestellt ist. **Bestimmen Sie die Steigung und den Achsenabschnitt dieser linearen Funktion f:**



Antwort: Steigung $k = 3$, Achsenabschnitt $d = -1$

Punkt für Steigung. Punkt für Achsenabschnitt.

Aufgabe 5. (2P) **Lineare Gleichungen in Doppelpack** **AG 2.5**

Gegeben sind die Geraden $g_1: \quad 5x - 2y = 10$ und $g_2: \quad 3x - y = 5$.

Die Geraden g_1 und g_2 schneiden sich in einem Punkt S.

Bestimmen Sie die Koordinaten vom Punkt S:

$S = (0|-5)$ 2 Punkt nur bei Korrektheit beider Koordinaten.

Aufgabe 6. (3P) **Es gab einmal ein rechtwinkliges Dreieck** **AG 4.1**

Das Dreieck $\triangle ABC$ ist rechtwinklig und $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = 90^o$ und $\angle ACB = \gamma$. Des Weiteren werden die Seitenlängen wie folgt angedeutet $|AB| = p$, $|BC| = q$ und $|AC| = r$.
Kreuzen Sie die beiden richtigen Aussagen an!

$r \cdot \tan\alpha = p$	☐
$r \cdot \sin\alpha = q$	☒
$q \cdot \cos\alpha = r$	☐
$q \cdot \cos\gamma = r$	☐
$q \cdot \tan\gamma = p$	☒

1 Punkt falls 1 Kreuzchen richtig, das andere nicht.

Aufgabe 7. (2P) **Lineare Funktion** **FA 2.2**

Kreuzen Sie *die* zutreffende Aussage an!

Eine lineare Funktion hat stets genau eine Nullstelle.	☐
Es gibt lineare Funktionen, die keine Nullstelle haben.	☒
Es gibt keine lineare Funktion, die mehr als eine Nullstelle hat.	☐
Die Stelle 0 kann keine Nullstelle einer linearen Funktion sein.	☐
Eine direkte Proportionalitätsfunktion kann keine Nullstelle besitzen.	☐

Achte auf die Funktionen $f(x) = 1$ und $g(x) = 0$.

2 Punkte bei völlig richtigem Ankreuzen.

Aufgabe 8. (3P) **Karussel** **FA 1.2**

Steht man auf einem sich drehenden Karussel, so empfindet man eine Beschleunigung nach außen; man fühlt sich nach außen geschleudert. Diese sogenannte Fliehbeschleunigung a_f ist gegeben durch die Formel:

$$a_f = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

wobei R die Distanz zum Mittelpunkt (Drehachse) des Karussels ist (in m gemessen), T die Zeit in Sekunden ist, die das Karussel für eine Umdrehung braucht, und π die bekannte Kreiszahl ist $\pi \approx 3,14$.

Bestimmen Sie, auf welche Weise die Fliehbeschleunigung von R und T abhängt und kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an!

a_f ist bei konstantem T direkt proportional zu R.	☒
Werden R und T verdoppelt, so verdoppelt sich auch a_f	☐
Werden R und T halbiert, so verdoppelt sich a_f.	☒
a_f ist bei konstantem R indirekt proportional zu T.	☐
Wird R vervierfacht und T verdoppelt, so bleibt a_f gleich.	☒

1 Punkt bei einer Fehlentscheidung.

Aufgabe 9. (2P) **Erhöhung** **FA 2.4**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2 \cdot x + 3$. **Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!**

Wenn x um 1 erhöht wird, dann wächst $f(x)$ um 3.	☐
Wenn x um 2 vermindert wird, dann fällt $f(x)$ um 6.	☐
Wenn x um $0,5$ erhöht wird, dann wächst $f(x)$ um 1.	☒
Wenn x verdoppelt wird, dann wächst $f(x)$ um 4.	☐
Um $f(x)$ um 2 zu erhöhen, muss x um 1 wachsen.	☒

Alles oder Nichts. Falls alles korrekt 2 Punkte, falls nicht alles korrekt 0 Punkte.

Aufgabe 10. (2P) **Steigungen und linear** **FA 2.1**

Betrachten Sie folgende Tabelle:

x	$f(x)$
-1	1
1	2
5	3

Entscheiden Sie, ob f eine lineare Funktion sein kann, und begründen Sie ihre Entscheidung (kurz)!

Antwort: Nein, f kann keine lineare Funktion sein. Im Intervall $[-1;1]$ wäre dann die Steigung $1/2$. Im Intervall $[1;5]$ wäre dann die Steigung $1/4$. Diese Steigungen hätten dann aber gleich sein sollen.

Alternativ: berechne anhand von zwei Punkten die Funktionsvorschrift, und kontrolliere, dass der dritte Punkte nicht auf dem Graphen liegt.

Alternativ: Die Änderung in $f(x)$ ist direkt proportional zur Änderung in x, aber Δf ist in den Intervallen $[-1;1]$ und $[1;5]$ gleich, obwohl Δx sich geändert hat.

Zweiter Teil

Aufgabe 1 (zu 6P). Spielen mit Parabeln.

Wir betrachten in dieser Aufgabe die Familie von Parabeln, gegeben durch die Graphen der Funktionen

$$f_a(x) = x^2 + ax - 2\,, \qquad a \in \mathbb{R}\,,$$

wobei a ein freier Parameter ist.

(a). (1 Ausgleichspunkt) Zeigen Sie, dass f_a immer zwei Nullstellen hat, egal welchen Wert a hat.

Die Nullstellen x_1 und x_2 von f_a hängen von a ab. Wir schreiben daher auch $x_1(a)$ und $x_2(a)$, um die Abhängigkeit von a explizit zu machen.

(2 Punkte) Finden Sie die beiden Nullstellen von $f_a(x)$; drücken Sie diese Stellen $x_1(a)$ und $x_2(a)$ in a aus.

Der Scheitelpunkt S_a hat Koordinaten, die auch von a abhängen.

(b). (1 Punkt) Drücken Sie die Koordinaten vom Scheitelpunkt S_a in a aus!

(2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Scheitelpunkte S_a alle auf einer Parabel von der Form $y = -x^2 - c$ liegen und bestimmen Sie c.

Antworten:

Diskriminante $D = a^2 + 8$, da aber $a^2 \geq 0$, so ist $D \geq 8$, insbesondere also $D > 0$.

$x_{\pm}(a) = \frac{-a\pm\sqrt{a^2+8}}{2}$

Scheitelpunkt zwischen den beiden Nullstellen, also bei $x = -\frac{a}{2}$. Das einsetzen:

$$f_a(-\frac{a}{2}) = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} - 2 = -2 - \frac{a^2}{4}$$

daher $S_a = (-\frac{a}{2}| - \frac{a^2}{2} - 2)$.

Man sieht dass, $-\frac{a^2}{2}-2 = -\left(\frac{a}{2}\right)^2-2$. Also liegen diese Punkte auf der Parabel $y = -x^2-2$, somit $c = 2$. Um c effektiv zu finden, gegeben ist, dass $y = -x^2 - c$, also $y + x^2 = -c$, nun einsetzen mit $x = -a/2$ und $y = -a^2/2 - 2$. Dann findest du auch $c = 2$.

Aufgabe 2 (zu 7P). Straßenbau

Straßenbauprojekte sind oft schwierig zu realisieren, die verschiedensten Interessengruppen reden dabei mit, sei es die Lobby der LKW-Fahrer oder die Ortsbewohner.

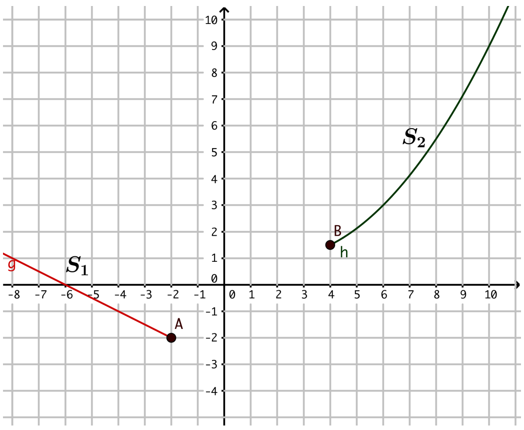
(a) Auf dem Straßenbauamt einer Gemeinde liegt der Plan für eine Umfahrungsstraße auf, von der erst die beiden Teilstücke S_1 und S_2 fertig gestellt wurden. Das Straßenstück S_1 kann durch eine lineare Funktion g mit der Gleichung

$$g(x) = -0,5 \cdot x - 3\,, \qquad \text{für} \;\; x \leq -2$$

beschrieben werden. Das zweite Straßenstück wird durch eine Funktion h mit der Funktionsgleichung

$$h(x) = 0,125 \cdot (x-2)^2 + 1\,, \qquad \text{für} \;\; x \geq 4$$

beschrieben. Das fehlende Straßenstück zwischen den Punkten A und B will man mit einer linearen Funktion $f(x) = kx + d$ beschreiben, und dabei es soll so gebaut werden, dass es „nahtlos“ in die bestehenden Straßenstücke übergeht.



(a). (2 Punkte) Geben Sie die zwei mathematischen Bedingung an, die die Funktion f erfüllen muss, um eine nahtlose Verbindung zwischen A und B zu realisieren.

(2 Punkte) Bestimmen Sie mit diesen Bedingungen die Funktionsvorschrift von f.

(b). (2 Punkte) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Straßenstücken, die bei A auf einander treffen. Falls (a) nicht gelöst wurde, nehmen Sie $f(x) = x$.

(c). (1 Ausgleichspunkt) Bestimmen Sie die Länge des Straßenstrücks zwischen A und B.

Bedingungen: $f(-2) = g(-2) = -2$ und $f(4) = h(4) = 3/2$.

Somit sind k und d in $f(x) = kx + d$ ausrechenbar: $k = \frac{7}{12}$ und $d = -\frac{5}{6}$. Achtung, Bruchzahlen sind ganz gute Zahlen! Verwende sie effektiv! Immer in Dezimaldarstellung rechnen und runden ist eine Gewohnheit mit innewohnender Ungenauigkeit!

Mit einer Skizze sieht man schnell, dass der gefragte Winkel durch den Ausdruck $180 - \arctan(0,5) - \arctan(7/12)$ gegeben ist, und dies gleicht etwa 123 Grad.

Da $A = (-2|-2)$ und $B = (4|1,5)$ findet man $d_{AB}^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = 6^2 + (3,5)^2$ usw.

Aufgabe 3 (zu 6P). Ideale Gase

Viele Gase lassen sich annäherungsweise gut als sogenanntes „ideales Gas" beschreiben. Druck p (in Pa gemessen), Volumen V (in m^3 gemessen), Temperatur T (in K gemessen) und Anzahl der Moleküle N stehen dann in folgender Beziehung zu einander:

$$p \cdot V = N \cdot k \cdot T \,,$$

wobei k die sogenannte Boltzmann-Konstante ist, und den Wert $k = 1,38 \cdot 10^{-23} J \cdot K^{-1}$.

(a). Bei einem Experiment wird ein ideales Gas in einem Behälter bei gleichbleibender Temperatur komprimiert[1]; das Volumen wird allmählich verkleinert. Der Druck wird dann durch das Volumen bestimmt.

(1 Ausgleichspunkt) Bestimmen Sie, welche Proportionalität zwischen p und V besteht.

(2 Punkte) Bestimmen Sie, wie sich der Druck verändert, wenn das Volumen auf 25% komprimiert wird.

(b). Bei einem anderen Experiment wird ein ideales Gas in einem Behälter bei gleichbleibendem Druck erhitzt[2]. In diesem Fall hängt das Volumen von der Temperatur ab.

(1 Punkt) Bestimmen Sie, welche Proportionalität zwischen V und T besteht.

(2 Punkte) Bestimmen Sie, um wie viel Prozent sich das Volumen ändert, wenn die Temperatur von 300 K auf 420 K erhöht wird.

(a) Indirekte Prop. Das Volumen auf $0,25\%$ reduzieren heißt, dass das Volumen geviertelt wird. Somit wird der Druck vervierfacht. Das ist eine Zunahme von 300%.

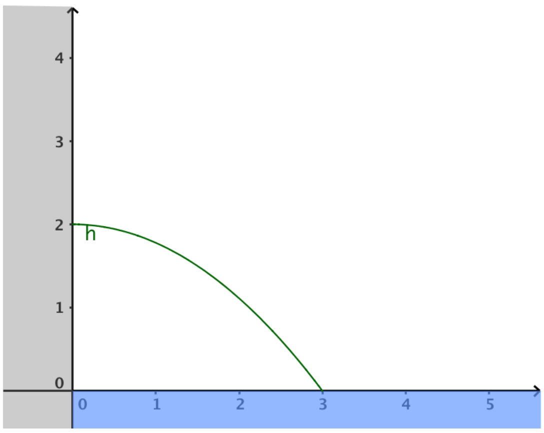
[1] Dies lässt sich realisieren indem man den Behälter in einem großen Wasserbecken mit einer gegebenen Temperatur gibt; jeder Temperaturunterschied wird dann direkt mit dem Wasserbecken ausgeglichen.

[2] Dies lässt sich realisieren indem man zum Beispiel mit einem beweglichen Teil das Volumen variieren lässt, sodass sich der Druck immer dem der Umgebung anpasst.

(b) Direkte Prop. Von 300K auf 420K ist eine Zunahme von 40%. Das heißt, die Temperatur wird $1,4-$mal so groß. Das Volumen wird also auch $1,4-$mal so groß, also nimmt auch um 40% zu! Dies ist eine äquivalente Sichtweise auf Direkte Proportionalitäten (falls beide Variablen positiv) sind: Eine Zunahme in der einen Variablen von $p\%$ in der einen Variablen verursacht eine Zunahme von $p\%$ in der anderen Variablen.

Aufgabe 4 (zu 5P). Wasserbrunnen

Bei einem Brunnen tritt ein Wasserstrahl horizontal aus einer Maueröffnung aus und trifft auf die Wasseroberfläche in einem darunterliegenden Becken. Die Maueröffnung befindet sich 2m über der Wasseroberfläche des Beckens und der Wasserstrahl schlägt 3m von der Mauer entfernt auf die Wasseroberfläche ein.



Es sei $h(x)$ die Höhe des Wasserstrahls über der Wasseroberfläche in x m Entfernung von der Mauer. Die Funktion h kann näherungsweise durch $h(x) = ax^2 + c$ beschrieben werden, wenn man den Ursprung wie in der Abbildung wählt.

(2 Punkte) Ermitteln Sie a und c.

(b). Jemand behauptet: In $2m$ Entfernung von der Mauer hat der Wasserstrahl genau die Hälfte seiner Fallhöhe zurückgelegt.

(2 Punkte) Entscheiden Sie, ob diese Aussage stimmt oder nicht, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

(c). **(1 Ausgleichspunkt)** Berechnen Sie die Steigung der Sekante zwischen Scheitelpunkt und Nullpunkt der bei (a) gefundenen Parabel und interpretieren Sie diesen Wert im gegebenen Kontext!

$h(x) = -\frac{2x^2}{9} + 2$ Auch hier bitte beachten, dass $2/9$ durch $0,222$ ersetzen eine nicht optimale Gewohnheit ist. Bruchzahlen sind ganz gut einzusetzen, und in der Oberstufe sollte man daher keine Angst mehr haben. Habe eher Angst, dass bei Runden und Dezimaldarstellung Ungenauigkeiten deine Antwort zu weit vom echten Ergebnis entfernen.

Wenn wir $x = 2$ einsetzen, finden wir $h(2) = 10/9$, dies ist aber nicht 1, was die halbe Höhe wäre. Ist somit falsch. Aber, man könnte begründen, dass dies mit sehr ungenauem Auge betrachtet annähernd richtig ist. Dann muss das aber sehr genau beschrieben sein...

Die Sekante zwischen $(0|2)$ und $(3|0)$ hat Steigung $-\frac{2}{3}$. (Hier habe ich einen Punkt gegeben, falls eine Begründung vorhanden war, auch wenn $k = 2/3$ gefunden wurde, also das Vorzeichen weggelassen wurde.) Eine Interpretation ist: Im Schnitt nimmt die Höhe des Wasserstrahls pro Meter um 2/3 Meter ab.