Planungsblatt Mathematik für die 5B

Woche 22 (von 29.01 bis 02.02)

Hausaufgaben [1]

Bis Dienstag 30.01:
Erledige und/oder lerne die Aufgaben des Kompetenzchecks auf Seiten 125 und weiteren

Bis Mittwoch 31.01:
Erledige und/oder lerne die Aufgaben 8.03 und 8.04

Bis Montag 12.02:
Erledige und/oder lerne die Aufgaben 8.05 und 8.06

Kernbegriffe dieser Woche:

Reelle Funktionen, Werte, Stellen, Definitionsbereich, Wertemenge, $f : A \to B$, $f : x \mapsto f(x)$, $f(x) = y$, Maximum, Minimum, fallend, steigend, Nullstelle, Steigung

Ungefähre Wochenplanung

Schulübungen.

(a) Montag (4. Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. mSWH, (ii) Kompetenzcheck zu Funktionen und lineare Funktionen, (iii) Arbeitsblatt zu Funktionen Allgemein

(b) Dienstag (3. Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. mSWH, (ii) Arbeitsblatt zu Funktionen Allgemein

(c) Mittwoch (6. Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. mSWH (ii) Arbeitsblatt zu Funktionen Allgemein, (iii) Projektwoche Planung?

(d) Grundkompetenzkatalog:

`http://www.erlgasse.at/wp-content/uploads/2013/11/Grundkompetenzen_alle_nachKlassen.pdf`

Unterlagen auf `www.mat.univie.ac.at/~westra/edu.html`

[1] Für manche Aufgaben wird auf Rückseite/Anhang/Buch/Arbeitsblatt verwiesen.

Funktionen Allgemein (aber mit Beispielen) – Woche 22

Mit diesem Arbeitsblatt werden wir einige Allgemeinheiten von Funktionen besprechen, und zwar vor allem, wie man sie kombinieren kann.
Bei diesem Arbeitsblatt werde ich einige Details ab und zu nicht so hervorheben, wie man sei eigentlich hervorheben sollte; wenn es um die Definitionsmengen geht, werde ich eher eine Ad-Hoc-Methode benutzen.

Rechnerisch Kombinieren

Es seien f und g irgendwelche zwei reelle Funktionen. Wir definieren dann:
(1) Die Summe der beiden $f+g$ und $f+g$ bildet x auf $f(x)+g(x)$ ab. Notation: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$.
(2) Ähnlich geht auch $f-g$, und $(f-g)(x) = f(x)-g(x)$.
(3) Das Produkt fg bildet x auf $f(x)g(x)$ ab; $(fg)(x) = f(x)g(x)$.
(4) Die Division $\frac{f}{g}$ bildet x auf $\frac{f(x)}{g(x)}$

Aufgabe 1.
- **(a)** Sei nun $f(x) = 3x$ und $g(x) = x^2+1$ und gib die Funktionsvorschrift für $f+g$, $f-g$, fg und $\frac{f}{g}$.
- **(b)** Kontrolliere folgende Aussagen, eventuell mit Beispielen: (a) Die Summe oder Differenz zweier linearen Funktionen ist wieder linear. (b) Die Steigung der Summe zweier linearer Funktionen ist die Summe der Steigungen. (c) Das Produkt aus zwei linearen Funktionen ist eine quadratische Funktion falls keine der Steigungen Null ist.

Mit Zahlen Kombinieren

Funktionen vom Typ $f(x) = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ sind konstante Funktionen. Falls man die vorher genannten Rechenoperationen mit solchen Funktionen verwendet, kombiniert man also Zahlen und Funktionen. Somit sehen wir Zahlen auch als Funktionen, und zwar als konstante Funktionen.

Aufgabe 2.
- **(a)** Nimm $f(x) = x^2$ und kontrolliere, dass $f(2x) \neq 2f(x)$.
- **(b)** Was passiert mit dem Graphen einer Funktion f, falls du (i) f mit 4 multiplizierst, (ii) f mit -1 multiplizierst, (iii) 3 zu f addierst?

Kombinieren und verknüpfen

Wenn wir mal Definitionsmengen außer acht lassen, ist es kein Problem, zwei Funktionen zu verknüpfen. Dies bedeutet folgendes: Stellen wir uns vor, wir haben zwei Funktionen f und g. Wir wenden zuerst g auf x an und bekommen $g(x)$, und nun wenden wir f auf dieses Ergebnis ab, also wir berechnen $f(g(x))$. Auf diese Weise haben wir eine neue Funktion bekommen, f nach g, welche als $f \circ g$ geschrieben wird, und es gilt $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Achtung: Fast niemals gilt $f \circ g = g \circ f$.
Beispiel $f(x) = x+1$ und $g(x) = x^2$. Dann $f(g(1)) = f(1) = 2$. Aber $g(f(1)) = g(1+1) = g(2) = 4$. Allgemein sehen wir $f(g(x)) = f(x^2) = x^2+1$ und $g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2 = x^2+2x+1$.

Aufgabe 3.
- **(a)** Berechne $f \circ g$ und $g \circ f$ falls (i) $f(x) = x^3$ und $g(x) = x+1$, (ii) $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = 2x$, (iii) $f(x) = 3x-1$ und $g(x) = 2x+5$.
- **(b)** Nehmen wir $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$. Finde die Definitionsmengen von $f \circ g$ und $g \circ f$. Sind beide gleich?
- **(c)** Nehmen wir $f(x) = x+1$ und $g(x) = \frac{1}{x+1}$. Finde $f \circ g$ und $g \circ f$ und ihre Definitionsmengen. Ist $f \circ g$ dasselbe wie fg?

Falls $f = g$ schreibt man $f \circ f = f^2$, was eventuell mit ff verwechselt werden kann. Wie mit Potenzen bedeutet dann aber $f^3 = f \circ f \circ f$, $f^4 = f \circ f \circ f \circ f$ und so weiter.

Aufgabe 4.

(a) Berechne $f^2(x)$, $f^3(x)$, $f^4(x)$, und $f^5(x)$ falls (i) $f(x) = x^2$, (ii) $f(x) = 2x$, (iii) $f(x) = x + 1$, und explizit für $x = 0, 1, 2$.

(b) Nehmen wir $f(x) = \sqrt{x}$ und wähle selbst ein $x > 0$, aber $x \neq 1$. Kontrolliere, dass $f^n(x)$ stets näher zu 1 kommt, wenn n größer und größer gewählt wird.

(c) Nimm $f(x) = \frac{1}{x}$ und kontrolliere, dass $f^2(x) = x$.

(d) Im Kompetenzcheck zu Kapitel 6 war eine Aufgabe mit dem Fischbestand. Ich habe versucht zu zeigen, dass sich der Bestand dem Fixpunkt annähert. Versucht mein Argument mit f^n zu vereinfachen; $f^n(x)$ nähert sich dem Fixpunkt an, wenn n immer größer wird.

(e) Wähle eine positive Zahl a und betrachte die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$. Berechne $f^n(1)$ für $n = 1, 2, 3, \ldots, 10$. Vergleiche das Ergebnis mit $\sqrt{a}$. Löse dann die Gleichung $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$. Kannst du diese Aufgabe mit einem Diagramm graphisch erklären?

Von y zurück zu x; Inverse Funktionen

Auch hier werde ich zuerst mal die Definitionsmengen außer acht lassen; das ist eventuell eine Übung für dich.
Falls wir $y = f(x)$ schreiben, wie kann ich dann falls y gegeben ist, wieder den zugehörigen x finden?
Ein Beispiel $f(x) = 2x - 1$. Wenn $f(x) = y$, dann können wir nach x lösen; $x = \frac{y+1}{2}$. Nun definieren wir $g(x) = \frac{x-1}{2}$. Und eine kleine Berechnung ergibt dann: $f \circ g(x) = x$ und $g \circ f(x) = x$.
Noch ein Beispiel: sei $f(x) = x^2$. Dann wenn $y \geq 0$, dann $y = f(x)$ wird gelöst von $x = \sqrt{y}$ und von $x = -\sqrt{y}$. Definieren wir $g(x) = \sqrt{x}$, dann $f \circ g(x) = g \circ f(x) = x$ falls $x > 0$. Hier sehen wir, dass wir nur partiell zuückkommen können.
Im ersten Fall gibt es eine sogenannte inverse Funktion f^{-1}, im zweiten Fall gibt es eine partielle inverse Funktion f^{-1}, und in so einem Fall ist zu beachten, was die Definitionsmengen sind.
Noch ein Beispiel $f(x) = \sin(x)$ hat als partielle Inverse die Funktion $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$.

Aufgabe 5.

(a) Finde die (partiellen?) inversen Funktionen zu (i) $f(x) = x^3$, (ii) $f(x) = x^2 + 2x$, (iii) $f(x) = 5x - 3$, (iv) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, (v) $f(x) = \sin(2x)$, (vi) $f(x) = (x + 1)^2$.

(b) Wie verhalten sich die Graphen von f und f^{-1} im Allgemeinen? Benutze eventuell (a) um eine Idee zu bekommen!

(c) Aufpassen, wenn man $f \circ f^{-1}(x) = x$ im Fall anwendet, wo f nur eine partielle Inverse besitzt! Finde Werte von x, sodass (i) $\sqrt{x^2} \neq x$, (ii) $\arcsin(\sin(x)) \neq x$. Zeige, dass $f \circ f^{-1}(x) = x$ auch nicht für alle x sinnvoll ist, wenn $f(x) = \frac{1}{x}$.

(d) Finde mindestens noch zwei andere Funktionen mit $f^{-1} = f$.