# О группах, в которых подгруппы с заданным числом порождающих свободны

**Г. Н. АРЖАНЦЕВА**
*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

УДК 519.40

**Ключевые слова:** комбинаторная теория групп, группы с условием малого сокращения, графы.

**Аннотация**

В статье доказано, что в определенном статистическом смысле почти в каждой группе с $m$ порождающими и $n$ соотношениями ($m$ и $n$ фиксированы) любая $\leqslant L$-порожденная подгруппа бесконечного индекса свободна ($L$ — произвольная наперед заданная граница, возможно, $L \gg m$), а все подгруппы конечных индексов несвободны. Для доказательства найдено условие на определяющие соотношения, при котором в конечно определенной группе подгруппы бесконечного индекса с заданным числом порождающих свободны. Это условие формулируется при помощи конечных размеченных графов.

**Abstract**

*G. N. Arjantseva, On the groups in which the subgroups with fixed number of generators are free, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* vol. 3(1997), № 3, p. 675–683.

We prove here that, in a definite statistical meaning, in almost every group with $m$ generators and $n$ relations (we suppose $m$ and $n$ to be fixed) all $\leqslant L$-generated subgroups of infinite index are free ($L$ is an arbitrary preassigned bound, possibly $L \gg m$) and all subgroups of finite index are not free. To prove this fact we found the condition on relations which guarantee that all subgroups of infinite index with fixed number of generators in a finitely presented group are free. This condition is formulated by means of the finite marked graphs.

## Введение

Рассмотрим класс конечно определенных групп с $m$ порождающими и $n$ соотношениями. Назовем подкласс этого класса групп общим, если отношение числа копредставлений вида $G = \langle x_1, \ldots, x_m \mid r_1 = 1, \ldots, r_n = 1 \rangle$, $|r_i| = d_i$, $d_i \leqslant d$, задающих группы этого подкласса, к числу всех таких копредставлений стремится к 1 при $d \to \infty$.

В работе [1] (см. также [2, 11.75]) ставился вопрос об «общности» класса $m$-порожденных групп, в которых любая $k$-порожденная подгруппа (для

*Фундаментальная и прикладная математика* 1997, том 3, № 3, с. 675–683.

любого $k < m$) свободна. Эта задача решена (см. [3]). В настоящей работе снято ограничение «$k < m$» на число порождающих и доказана «общность» класса $m$-порожденных групп, в которых любая $\leqslant L$-порожденная подгруппа бесконечного индекса свободна ($L$ — произвольная наперед заданная граница, возможно, $L \gg m$), а все подгруппы конечных индексов несвободны.

Для формулировки основных теорем рассмотрим групповой алфавит $X_m = \{x_1^{\pm 1}, \ldots, x_m^{\pm 1}\}$ и множество $\{r_1, \ldots, r_n\}$ циклически приведенных слов в этом алфавите, имеющих длины $|r_i| \leqslant t$. Обозначим $N_{m,n,t}$ число всех копредставлений групп вида

$$G = \langle x_1, \ldots, x_m \mid r_1 = 1, \ldots, r_n = 1 \rangle \tag{1}$$

с этим условием, а $N^L_{m,n,t}$ — число таких копредставлений, что любая $\leqslant L$-порожденная подгруппа бесконечного индекса в $G$ свободна, $L$ — произвольная наперед заданная граница (возможно, $L \gg m$), а все подгруппы конечного индекса в $G$ не являются свободными.

**Теорема 1.** *Найдется число $c = c(m, n, L) > 0$, такое что для всех натуральных $t$ отношение $N^L_{m,n,t}/N_{m,n,t}$ больше $1 - \exp(-ct)$.*

Как следствие (см. вывод аналогичного следствия в [3]) получим следующий результат. Именно, пусть $N_d = N_d(m, n)$ — число всех копредставлений групп вида (1), таких что $|r_1| + \cdots + |r_n| = d$, а $N^L_d$ — число таких копредставлений среди них, что любая $\leqslant L$-порожденная подгруппа бесконечного индекса в $G$ свободна и все подгруппы конечного индекса в $G$ несвободны.

**Теорема 2.** *При любом $m > 1$ и любых фиксированных $n$ и $L$*

$$\lim_{d \to \infty} N^L_d / N_d = 1.$$

Как и в [3], для доказательства теорем требовалось найти некоторые специальные условия на определяющие соотношения, при которых конечно определенная группа принадлежит рассматриваемому классу. Такие условия найдены, они являются достаточно «общими» и формулируются при помощи конечных размеченных графов.

# 1 Размеченные графы и подгруппы

Всякая конечно порожденная подгруппа $H \subset F_m$ (где $F_m = F(X_m)$ — свободная группа с базисом $X_m$) может быть задана конечным связным $X_m$-размеченным графом $\Gamma$ с выделенной вершиной $O$ (см. [3]). Достаточно выбрать в $H$ какую-то систему порождающих $\{h_1, h_2, \ldots\}$ и отождествить начальные вершины простых циклов длин $|h_1|, |h_2|, \ldots$ с метками $h_1, h_2, \ldots$ каждый (метка одного ребра — буква из $X_m$). Тогда элементами из $H$ являются в точности те, которые представляются словами, читаемыми на замкнутых путях с началом в $O$. О таком способе задания подгруппы свободной группы см., например, [4].

Понятно и обратное, что всякий связный граф $\mathit{\Gamma}$ с отмеченной вершиной задает подгруппу $H = H(\mathit{\Gamma})$.

Если $G$ — группа, заданная копредставлением (1), то любая ее подгруппа $H$ также может быть задана некоторым графом $\Gamma$ — достаточно рассмотреть какой-то ее прообраз при естественном гомоморфизме $F_m \to G$.

**Определение 1.** Размеченный связный граф $\mathit{\Gamma}$ назовем приведенным, если в $\mathit{\Gamma}$ нет вершины, из которой выходит два ребра с одинаковыми метками и нет вершин валентности 1, кроме, может быть, отмеченной вершины $O$.

Ясно, что метка пути $p$ с началом $O$ в приведенном графе задает элемент из подгруппы $H = H(\mathit{\Gamma})$ только тогда, когда $O$ — конец пути $p$.

**Определение 2.** Под дугой будем понимать такой путь $p$, все вершины которого, кроме, быть может, начальной $p_-$ и конечной $p_+$, отличны от выделенной вершины $O$ и имеют валентность 2.

Любой граф $\mathit{\Gamma}$, задающий подгруппу $H$, можно заменить приведенным (см., например, [4]) с помощью преобразований 1-го рода (склеивание пары ребер с общим началом и одинаковыми метками) и 2-го рода (удаление вершины степени 1, отличной от $O$, вместе с входящим в нее ребром).

Для графа $\mathit{\Gamma}$, задающего подгруппу $H$ в группе $G$ с копредставлением (1), определено еще преобразование 3-го рода (см. [3]):

— присоединение дуги. Пусть вершины $O_1$ и $O_2$ в $\mathit{\Gamma}$ соединены некоторым путем $p$, таким что $\varphi(p) \equiv w$ и $w$ равно в $G$ некоторому слову $v$. Присоединим тогда к $\mathit{\Gamma}$ новый граф, состоящий из одной дуги $q$ с меткой $\varphi(q) \equiv v$ и имеющий с $\mathit{\Gamma}$ только $O_1$ и $O_2$ (начало и конец пути $q$) в качестве общих точек.

— обратное преобразование. Пусть $q$ — некоторая дуга в $\mathit{\Gamma}$, $q_- = O_1$ и $q_+ = O_2$, причем вершины $O_1$ и $O_2$ можно соединить в $\mathit{\Gamma}$ другим путем $p$, таким что $p$ и $q$ не имеют общих неориентированных ребер, а $\varphi(p) = \varphi(q)$ в группе $G$. Тогда разрешается удалить из $\mathit{\Gamma}$ все ребра и вершины пути $q$, кроме $O_1$ и $O_2$.

**Лемма 1 (см. [3, лемма 1]).** *Если граф $\mathit{\Gamma}'$ получен из графа $\mathit{\Gamma}$ с помощью нескольких преобразований 1–3 рода (или обратных), то он задает в $G$ ту же подгруппу, что и граф $\mathit{\Gamma}$.*

**Предложение.** *Пусть $F_m$ — свободная группа с базисом $X_m$, $H$ — конечно порожденная подгруппа в $F_m$, $\mathit{\Gamma}$ — связный $X_m$-размеченный приведенный граф, задающий подгруппу $H$.*

*Если степень любой вершины графа максимальна (то есть равна $2m$), то $H$ — подгруппа конечного индекса в $F_m$ и количество вершин графа $\mathit{\Gamma}$ равно индексу $|F_m : H|$.*

□ Максимальная степень любой вершины графа $\mathit{\Gamma}$ действительно равна $2m$, так как граф $\mathit{\Gamma}$ предполагается приведенным.

Укажем взаимооднозначное соответствие между вершинами графа и смежными классами группы $F_m$ по подгруппе $H$. Так как граф $\Gamma$ конечен из-за конечной порожденности $H$, предложение будет доказано. Ввиду максимальности степеней вершин графа $\Gamma$ любое слово из $F_m$ может быть прочитано на некотором пути графа $\Gamma$ с началом в выделенной вершине $O$.

Пусть $p$ — некоторый путь в графе $\Gamma$, $p_-$ — начальная вершина, $p_+$ — конечная вершина пути $p$ и $p_- = O$ (совпадает с выделенной вершиной графа $\Gamma$), а $p_+$ — любая вершина графа $\Gamma$, отличная от $O$. Тогда путь однозначно определяется своей меткой ввиду приведенности графа $\Gamma$. Пусть $\varphi(p) = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_t}^{\varepsilon_t}$, $\varepsilon_j = \pm 1$, $i_k \in \{1, \dots, m\}$, $\varphi$ — функция метки. Покажем, что соответствие

$$p_+ \to H\varphi(p)$$

является искомым.

**Замечание.** По построению графа $\Gamma$ и в силу его приведенности существует однозначное соответствие между приведенными циклами графа $\Gamma$ с началом и концом в выделенной вершине $O$ и элементами из $H$.

1. Корректность (независимость от выбора пути). Пусть $q$ — любой другой путь в графе $\Gamma$ с началом $q_- = O$ и концом $q_+ = p_+$. Рассмотрим цикл $pq^{-1}$. По построению графа $\Gamma$ метка каждого цикла с началом в $O$ задает элемент из $H$. Тогда $\varphi(p)(\varphi(q))^{-1} \in H$, и поэтому $H\varphi(p) = H\varphi(q)$.

2. Инъективность. Пусть $H\varphi(p) = H\varphi(q)$, то есть $\varphi(q)(\varphi(p))^{-1} \in H$. Тогда для пути $t$ с меткой $\varphi(p)^{-1}$, такого что $t_- = q_+$, должно быть $t_+ = O$. В силу приведенности из $\varphi(t^{-1}) \equiv \varphi(p)$ и $t_+ = p_-$ следует, что $t_- = p_+$, то есть $q_+ = p_+$.

3. Сюръективность. Смежный класс $Hg$ есть образ вершины $p_+$ для пути $p$ с меткой, равной $g$. Так как степень любой вершины графа максимальна, то такой путь $p$ существует.

**Следствие.** *Если $H$ — конечно порожденная подгруппа бесконечного индекса в группе $G$, заданной копредставлением* (1), *то в графе $\Gamma$, определяющем подгруппу $H$, существует хотя бы одна вершина степени $< 2m$.*

□ Утверждение следует из предложения, так как образ подгруппы конечного индекса имеет конечный индекс в гомоморфном образе группы. □

**Лемма 2.** *Пусть в связном $X_m$-размеченном приведенном графе $\Gamma$ существует хотя бы одна вершина степени $< 2m$, тогда в любом связном подграфе $\Gamma'$ графа $\Gamma$ также есть вершина немаксимальной степени $O$.*

□ Допустим обратное. Все вершины подграфа $\Gamma'$ имеют максимальную степень, равную $2m$. Рассмотрим $e$ — ребро графа $\Gamma$, такое что $e \notin \Gamma'$, а $e_+ \in \Gamma'$ ($e$ существует ввиду связности графа $\Gamma$), и вершину $v = e_+$ в подграфе $\Gamma'$.

По предположению степень $v$ в $\Gamma'$ максимальна, но в нее входит еще одно ребро $e$. Получили противоречие с приведенностью графа $\Gamma$. □

## 2 $(\mu, L)$-читаемые слова

**Определение 3.** Непустое несократимое слово $w$ длины $l$ в алфавите $X_m$ назовем $(\mu, L)$-читаемым для некоторого $\mu$, где $0 < \mu \leqslant 1$, и любого фиксированного целого $L$, если существует $X_m$-размеченный связный приведенный граф $\Gamma$ со следующими свойствами:

(a) число ребер этого графа не больше $\mu l$;

(b) эйлерова характеристика графа $\Gamma$ не меньше $1 - L$;

(c) в графе $\Gamma$ существует хотя бы одна вершина степени $< 2m$;

(d) слово $w$ читается на некотором пути графа $\Gamma$.

Оценим число $(\mu, L)$-читаемых слов длины $l$. Рассмотрим граф $\Gamma$ из определения. Число вершин степени $\geqslant 3$ в графе $\Gamma$ не больше $2L - 1$, а число максимальных дуг $\leqslant 3L - 1$. Это следует из ограничений на эйлерову характеристику и приведенности графа. Следовательно, число топологических типов таких графов ограничено некоторой константой $C(L)$.

Число разбиений простых дуг графа определенного типа на $\leqslant \mu l$ ребер оценивается величиной

$$\sum_{1 \leqslant s \leqslant [\mu l]} \binom{s-1}{k-1} \leqslant (\mu l)^k \leqslant (\mu l)^{3L-1},$$

здесь $k$ — число максимальных дуг, $s$ — число ребер в графе $\Gamma$. Заметим, что $k \leqslant s$.

Каждому ребру графа приписывается одна из $2m$ букв, что можно сделать $\leqslant (2m)^{\mu l}$ способами.

Следовательно, число размеченных графов из определения меньше

$$C(L)(\mu l)^{3L-1}(2m)^{\mu l}. \tag{2}$$

Поскольку в $\Gamma$ есть хотя бы одна вершина валентности $< 2m$, а число максимальных дуг $\leqslant 3L - 1$, то понятно, что такую вершину можно найти на расстоянии $< d = d(L)$ от любой вершины графа $\Gamma$. Достаточно взять $d(L) = 3L$.

Оценим число несократимых слов длины $l$, которые читаются на данном графе $\Gamma$ начиная с произвольной вершины. Начальное ребро с меткой из алфавита $X_m$ может быть выбрано $\leqslant 2m$ способами. После прохождения первого ребра есть $\leqslant 2m - 1$ способов для продолжения пути (так как максимальная степень вершины равна $2m$), аналогично после прохождения второго, третьего и т. д. ребер, пока не дойдем до вершины степени $< 2m$. Понятно, что число слов длины $d$, читаемых на $\Gamma$, не больше $(2m(2m-1)^{d-1} - 1)$ (по крайней мере одна возможность для продолжения пути не реализуется из-за немаксимальности степени вершины). Далее, рассуждая по индукции, получаем, что число слов длины $dk$, читаемых на $\Gamma$, не больше

$$(2m(2m-1)^{d-1} - 1)((2m-1)^d - 1)^{k-1}.$$

Вместе с (2) получаем, что число $(\mu, L)$-читаемых слов длины $l$ не больше

$$C(L)(\mu l)^{3L-1}(2m)^{\mu l}(2m(2m-1)^{d-1}-1)((2m-1)^d-1)^{k-1}(2m-1)^r, \qquad (3)$$

где $l = dk + r$ и $0 \leqslant r < d$.

Пусть $\mu$ удовлетворяет неравенству

$$\mu < \frac{1}{d}\log_{2m}\left(1 + \frac{1}{2((2m-1)^d-1)}\right). \qquad (4)$$

**Лемма 3.** *При условии* (4) *существует константа* $A = A(\mu, L, m)$, *такая что число* $(\mu, L)$-*читаемых слов длины* $l$ *в алфавите* $X_m$ *меньше*

$$A\left((2m-1)^d - \frac{1}{2}\right)^{\frac{l}{d}}.$$

□ Доказательство сразу следует из оценки (3) и ограничения (4). □

## 3 Условие на определяющие слова

Далее будем всегда рассматривать $\mu$, удовлетворяющее условию (4), и некоторое $\lambda > 0$.

**Определение.** Будем говорить, что кортеж $\{r_1, \dots, r_n\}$ циклически несократимых слов в алфавите $X_m$ удовлетворяет $(\lambda, \mu, L)$-условию, если для него справедливы следующие ограничения:

(a) $\{r_1, \dots, r_n\}$ удовлетворяет условию $C'(\lambda)$;

(b) среди слов $r_1, \dots, r_n$ нет истинных степеней;

(c) если $w$ является циклическим подсловом некоторого $r_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, и $|w| \geqslant |r|/2$, то $w$ не является $(\mu, L)$-читаемым.

Напомним (см. также [5]), что условие малого сокращения $C'(\lambda)$ на копредставление (1) означает, что если $R$ — множество всех циклических перестановок слов $\{r_1, \dots, r_n\}$ и им обратных, то для различных $r, r' \in R$ длина общего начала слов $r$ и $r'$ меньше $\lambda \min(|r|, |r'|)$.

**Лемма 4 (см. [3, лемма 3]).**

(1) *Среди всех кортежей* $\{r_1, \dots, r_n\}$ *циклически несократимых слов, длины которых не больше* $t$, *доля тех, которые удовлетворяют условию* $C'(\lambda)$, *не меньше, чем* $1 - B(2m-1)^{-\frac{\lambda t}{5}}$ *при* $t \geqslant B$, *где* $B = B(m, n, \lambda) > 0$.

(2) *число всех кортежей* $\{r_1, \dots, r_n\}$ *циклически несократимых слов длины* $\leqslant t$, *не удовлетворяющих условию* (b), *меньше*

$$nt(2m-1)^{(n-\frac{1}{2})t}.$$

Очевидно, что число $N_{t,m}$ циклически несократимых слов длины $\leqslant t$ не меньше $(2m-1)^{t-1}$, а значит, число кортежей $N_{t,m,n}$, составленных из них, не меньше

$$(2m-1)^{n(t-1)}. \tag{5}$$

**Лемма 5.** *Если $\mu$ удовлетворяет условию (4), то доля кортежей $\{r_1, \ldots, r_n\}$ циклически приведенных слов в алфавите $X_m$ с $(\lambda, \mu, L)$-условием среди всех кортежей, в которых $|r_i| \leqslant t$, $1 \leqslant i \leqslant n$, не меньше $1 - \exp(-Dt)$ при всех $t > T = T(\mu, \lambda, m, n, L)$, где $D = D(\mu, \lambda, m, n, L) > 0$.*

□ Оценим число кортежей, для которых нарушен пункт (c) $(\lambda, \mu, L)$-условия для $i = 1$. Число таких слов $r_1$ по лемме 3 меньше

$$\sum_{1 \leqslant s \leqslant t} s \sum_{s/2 \leqslant l \leqslant s} A \left( (2m-1)^d - \frac{1}{2} \right)^{\frac{l}{d}} \left( (2m-1)^d \right)^{\frac{s-l}{d}} < At^3 \left( (2m-1)^d - \frac{1}{4} \right)^{\frac{t}{d}}.$$

Следовательно, число кортежей $\{r_1, \ldots, r_n\}$, где $r_1$ не удовлетворяет условию (c), меньше $At^3 \left( (2m-1)^d - \dfrac{1}{4} \right)^{\frac{t}{d}} (2m-1)^{t(n-1)}$. Далее с помощью этой оценки, утверждения леммы 4 и оценки (5) получаем утверждение леммы. □

# 4 Подгруппы бесконечного индекса в группах с $(\lambda, \mu, L)$-условием

В этом пункте докажем свободу $\leqslant L$-порожденных подгрупп бесконечного индекса в любой группе $G$, заданной копредставлением (1) и удовлетворяющей $(\lambda, \mu, L)$-условию для некоторого фиксированного $L$, $\mu$, удовлетворяющего неравенству (4) (где $d$ выражается через $L$) и $\lambda \leqslant \dfrac{\mu}{(15L + 3\mu)}$.

Пусть $H$ — подгруппа бесконечного индекса в $G$, минимальное число порождающих которой $\leqslant L$. Тогда граф $\Gamma$, определяющий подгруппу $H$, имеет эйлерову характеристику $\geqslant 1 - L$ и содержит хотя бы одну вершину степени $< 2m$ (см. следствие). Будем считать, что граф $\Gamma$ имеет минимальное число ребер, в частности, является приведенным.

Предположим, что $H$ несвободна. Тогда в $\Gamma$ есть цикл $p$ ненулевой длины, метка которого — тривиальное в $G$ слово. При этом путь $p$ не содержит подпутей вида $ee^{-1}$, а слово $w \equiv \varphi(p)$ приведено.

По лемме Гриндлингера для групп с условием малого сокращения при $\lambda \leqslant \dfrac{1}{6}$ (см. [5]) в $w$ найдется подслово $v$, которое одновременно является подсловом циклической перестановки $r$ некоторого определяющего слова $r_i^{\pm 1}$, причем $|v| > (1 - 3\lambda)|r|$.

Пусть $p = p_1 \dots p_t$ — разложение пути $p$ на максимальные дуги, а слово $v$ читается на дугах $\overline{p}_k, \overline{p}_{k+1}, \dots, \overline{p}_l$, то есть $v = v_k v_{k+1} \dots v_l$, где $\varphi(\overline{p}_{k+1}) = v_{k+1}, \dots, \varphi(\overline{p}_{l-1}) = v_{l-1}$, а $\varphi(\overline{p}_k) = v_k$, $\varphi(\overline{p}_l) = v_l$, где $\overline{p}_k$ — конец дуги $p_k$, $\overline{p}_l$ — начало дуги $p_l$, $\overline{p}_j = p_j$ при $j = k+1, \dots, l-1$.

Рассмотрим различные случаи.

1. Среди слов $v_k, v_{k+1}, \dots, v_l$ найдется слово $v_j$, где $|v_j| \geqslant 5\lambda|r|$. Этот случай приводится к противоречию с минимальностью в выборе $\varGamma$ ввиду условий (a) и (b), возможно, с помощью преобразования 3-го рода графа $\varGamma$ (подробности см. в [3]).

2. $|v_j| < 5\lambda|r|$ для $j = k, \dots, l$.

Ввиду приведенности графа $\varGamma$ и ограничения на эйлерову характеристику число различных максимальных дуг в $\varGamma \leqslant 3L-1$. Следовательно, слово $v$ читаемо по некоторому связному подграфу графа $\varGamma$ с эйлеровой характеристикой $\geqslant 1 - L$ (при переходе к любому связному подграфу эйлерова характеристика не уменьшается) и числом ребер $\leqslant 3L5\lambda|r| \leqslant \mu(1-3\lambda)|r| \leqslant \mu|v|$ по выбору $\lambda$ и $v$. По лемме 2 в рассматриваемом подграфе графа $\varGamma$ существует вершина степени $< 2m$. Поскольку $v$ — подслово в $r$ длины $> \dfrac{1}{2}|r|$, получили противоречие с $(\lambda, \mu, L)$-условием.

Заметим, что любая группа рассматриваемого класса является группой без кручения (см. [5, гл.V, теорема 10.1]).

По теореме Дж. Столлингса конечно порожденная группа без кручения, в которой есть свободная подгруппа конечного индекса, сама свободна (см. пункт 1.В.9. в [6]).

Покажем, что почти любая группа $G$ с $(\lambda, \mu, L)$-условием несвободна.

Понятно, что если теорема 1 справедлива для некоторого $L = L_0$, то она также верна для всех меньших значений $L$. Поэтому далее можно считать $L \geqslant m - 1$.

Допустим, $G$ свободно порождается элементами $y_1, \dots, y_k, k < m$. Пусть $\varGamma_y$ — граф с минимальным числом ребер, задающий подгруппу, порожденную элементами $y_1, \dots, y_k$ (совпадающую с $G$). Поскольку $k < m$, граф $\varGamma_y$ определяет в свободной группе подгруппу бесконечного индекса и имеет хотя бы одну вершину немаксимальной степени. Ясно, что эйлерова характеристика этого графа равна $1-k$, что не меньше $1-L$ (так как $L \geqslant m-1$ и $k < m$). В $\varGamma_y$ существуют нетривиальные редуцированные (в силу приведенности графа) петли $p_1, \dots, p_m$, такие что $\varphi(p_i) = x_i$ в группе $G$. Если все эти равенства графические, то в $\varGamma_y$ есть $m$ независимых циклов, что противоречит ограничению на эйлерову характеристику. Иначе существует индекс $i$, такой что $\varphi(p_i) = x_i$ в группе $G$, но $\varphi(p_i)$ графически не равно $x_i$. То есть $\varphi(p_i)x_i^{-1}$ — нетривиальное слово, и пусть $w$ — его циклически приведенная форма. Применяя к $w$ лемму Гриндлингера, получим противоречие либо с минимальностью графа, либо с $(\lambda, \mu, L)$-условием так же, как и выше при доказательстве свободы подгрупп с числом порождающих $\leqslant L$. Поэтому почти каждая группа, заданная копредставлением (1), является несвободной группой с $(\lambda, \mu, L)$-условием, если только определяющие соотношения достаточно длинны. А в такой группе все подгруппы конечного индекса несвободны.

Как и в [3], можно показать, что любая группа $G$ с $(\lambda, \mu, L)$-условием содержит свободную подгруппу ранга 2.

В заключение я хотела бы выразить глубокую признательность научному руководителю А. Ю. Ольшанскому за постановку задачи и полезные замечания.

# Литература

[1] Губа В. С. Об условиях, при которых 2-порожденные подгруппы в группах с малым сокращением свободны // Известия вузов. Сер. Математика. — 1986. — № 7. — С. 12–19.

[2] Коуровская тетрадь (Нерешенные вопросы теории групп). Изд. 11-е. — Новосибирск, 1990.

[3] Аржанцева Г. Н., Ольшанский А. Ю. Общность класса групп, в которых подгруппы с меньшим числом порождающих свободны // Мат. заметки. Принята к печати.

[4] Margolis S. W., Meakin J. C. Free inverse monoids and graph immersions // International Journal of Algebra and Computation. — 1993. — V. 3, № 1. — P. 79–100.

[5] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. — М.: Мир, 1980.

[6] Масси У., Столлингс Дж. Алгебраическая топология. Введение. — М.: Мир, 1977.

*Статья поступила в редакцию в январе 1996 г.*