APPROXIMANTS DE PADÉ DES q-POLYLOGARITHMES

C. KRATTENTHALER[†] ET T. RIVOAL[‡]

Dédié à Wolfgang Schmidt, pour son soixante-dixième anniversaire

Résumé. Nous résolvons un problème d'approximation simultanée de type Padé mettant en jeu des q-analogues spécifiques des polylogarithmes et des puissances du logarithme. Ce problème est fortement lié aux résultats récents des auteurs et de Wadim Zudilin [« Séries hypergéométriques basiques, fonction q-zêta et séries d'Eisenstein », J. Inst. Math. Jussieu **5** (2006), 53–79] sur la dimension de l'espace vectoriel engendré par des q-analogues des valeurs de la fonction zêta de Riemann aux nombres entiers. Nous montrons aussi que ce résultat peut être considéré comme q-analogue d'un résultat de Stéphane Fischler et du deuxième auteur [J. Math. Pures Appl. **82** (2003), 1369–1394].

Abstract. We solve a Padé-type problem of approximating three specific functions simultaneously by q-analogues of polylogarithms, respectively by powers of the logarithm. This problem is intimately related to recent results of the authors and Wadim Zudilin [« Séries hypergéométriques basiques, fonction q-zêta et séries d'Eisenstein », J. Inst. Math. Jussieu **5** (2006), 53–79] on the dimension of the vector space generated by q-analogues of values of the Riemann zeta function at integers. We also show that our result can be considered as a q-analogue of a result of Stéphane Fischler and the second author [J. Math. Pures Appl. **82** (2003), 1369–1394].

1. Introduction

Considérons la série

$$\zeta_q(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{s-1} \frac{q^k}{1-q^k},$$

qui converge pour tout complexe $|q| < 1$ et tout entier $s \geq 1$. La notation ζ_q est justifiée par le fait que cette fonction est un q-analogue de la fonction zêta de Riemann $\zeta(s)$ au sens

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 41A21 ; Secondary 33D15.

Key words and phrases. Approximants de Padé, q-analogue du logarithme, q-analogues des polylogarithmes, confluence.

[†] Recherche partiellement supportée par le Programme « Accroître le potentiel humain de recherche » de la Commission Européenne, contrat HPRN-CT-2001-00272, "Algebraic Combinatorics in Europe", et par la Fondation Autrichienne de Recherche FWF, contrat S9607-N13, dans le cadre du Réseau National de Recherche "Analytic Combinatorics and Probabilistic Number Theory"

Adresse actuelle : Fakultät für Mathematik, Universität Wien, Nordbergstraße 15, A-1090 Vienna, Austria

[‡]Adresse actuelle : Institut Fourier, CNRS UMR 5582, Université Grenoble 1, 100 rue des Maths, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères cedex, France.

suivant (voir [5, paragraphe 4.1], [3, Theorem 2] ou [8]) :

$$\lim_{q\to 1}(1-q)^s\zeta_q(s) = (s-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s} = (s-1)!\,\zeta(s).$$

Dans [5], les deux auteurs et W. Zudilin ont montré que la dimension de l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{Q}$ par 1, $\zeta_q(3)$, $\zeta_q(5)$, …, $\zeta_q(A)$ ($A\geq 3$ impair) est minorée par $\dfrac{\pi+o(1)}{2\sqrt{\pi^2+12}}\sqrt{A}$ lorsque $1/q\in\mathbb{Z}\setminus\{\pm 1\}$. La démonstration utilise les fonctions q-polylogarithmes, définies pour tout entier $s\geq 1$ par

$$\mathrm{Li}_s(z;q) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^k}{(1-q^k)^s}\,z^k, \tag{1.1}$$

où z et q désignent des nombres complexes tels que $|q|<1$ et $|zq|<1$. Ces fonctions constituent des q-analogues des polylogarithmes usuels $\mathrm{Li}_j(z)$ au sens suivant :

$$\lim_{q\to 1}(1-q)^s\,\mathrm{Li}_s(z;q) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^s} = \mathrm{Li}_s(z).$$

Notons que les polylogarithmes sont aussi utilisés au cours de la démonstration du théorème suivant (dont celui rappelé ci-dessus est un q-analogue) : la dimension de l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{Q}$ par 1, $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, …, $\zeta(A)$ ($A\geq 3$ impair) est minorée par $\dfrac{1+o(1)}{1+\log(2)}\log(A)$ (voir [2, 6]). Dans les deux cas, la démonstration est en fait basée sur une étude très fine d'une série (q-)hypergéométrique bien choisie que l'on commence par exprimer comme une combinaison linéaire polynomiale en les (q-)polylogarithmes. Plus précisément, soient A, n, r des entiers positifs tels que $0\leq r\leq A/2$. Définissons les factorielles décalées (ou symboles de Pochhammer) $(\alpha)_m=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+m-1)$ et les factorielles q-décalées $(\alpha;q)_m=(1-\alpha)(1-\alpha q)\cdots(1-\alpha q^{m-1})$, avec la convention usuelle que les produits vides pour $m=0$ valent 1. On pose alors

$$S_n(z;q) = (q;q)_n^{A-2r}\sum_{k=1}^{\infty}q^k\frac{(q^{k-rn};q)_{rn}\,(q^{k+n+1};q)_{rn}}{(q^k;q)_{n+1}^A}\,q^{(k-1/2)(A-2r)n/2}z^{-k},$$

avec $|q|<1\leq|z|$ et A pair, ainsi que

$$S_n(z) = n!^{A-2r}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k-rn)_{rn}\,(k+n+1)_{rn}}{(k)_{n+1}^A}\,z^{-k},$$

avec $|z|\geq 1$. Il est alors facile de montrer l'existence de deux familles de polynômes $P_{j,n}(z;q)\in\mathbb{C}(q)[z]$ et $P_{j,n}(z)\in\mathbb{C}[z]$, de degré au plus n, tels que

$$S_n(z;q) = P_{0,n}(z;q)+\sum_{j=1}^{A}P_{j,n}(z;q)\,\mathrm{Li}_j(1/z;q) \tag{1.2}$$

et

$$S_n(z) = P_{0,n}(z) + \sum_{j=1}^{A} P_{j,n}(z)\,\mathrm{Li}_j(1/z). \tag{1.3}$$

Par ailleurs, les numérateurs des sommandes dans les définitions de $S_n(z;q)$ et $S_n(z)$ s'annulent pour les indices $k \in \{1, \dots, rn\}$, ce qui assure que l'ordre en $z = 0$ des deux séries est exactement $rn + 1$: les équations (1.2) et (1.3) peuvent donc être vues comme des problèmes d'approximations de type Padé pour les séries entières 1 et $\mathrm{Li}_j(z;q)$, respectivement 1 et $\mathrm{Li}_j(z)$. L'information n'est cependant pas suffisante pour affirmer qu'il n'existe, à constante multiplicative près, qu'une seule fonction $S_n(z;q)$, resp. $S_n(z)$, vérifiant (1.2), resp. (1.3), et qui s'annule à l'ordre $rn + 1$.

Dans [4], sont énoncées des conditions supplémentaires, de type Padé, portant sur des objets liés à la série $S_n(z)$ et qui suffisent à assurer que $S_n(z)$ est bien la seule solution de (1.3) pour des polynômes $P_{j,n}(z)$ de degré au plus n. Voici l'énoncé précis.

Étant donnés des entiers $A \geq 1$, $n \geq 0$, $\rho \geq 0$, $\sigma \geq 0$ tels que $\rho + \sigma + 2 \leq A(n + 1)$, on cherche à résoudre le problème d'approximations simultanées de Padé suivant : déterminer des polynômes (dépendants de A, n, ρ, σ) $P_0(z)$, $\overline{P}_0(z)$ et $P_j(z)$ (pour $j = 1, \dots, A$), de degré au plus n et à coefficients dans $\mathbb{Q}$, tels que

$$\begin{cases} S(z) = P_0(z) + \displaystyle\sum_{j=1}^{A} P_j(z)\,\mathrm{Li}_j(1/z) = \mathcal{O}(z^{-\rho-1}) \quad \text{quand} \quad z \to \infty\,; \\ \overline{S}(z) = \overline{P}_0(z;q) + \displaystyle\sum_{j=1}^{A} P_j(z)\,\mathrm{Li}_j(z) = \mathcal{O}(z^{\sigma+n+1}) \quad \text{quand} \quad z \to 0\,; \\ I(z) = \displaystyle\sum_{j=1}^{A} P_j(z) \frac{\log^{j-1}(1/z)}{(j-1)!} = \mathcal{O}((z-1)^{A(n+1)-\rho-\sigma-2}) \quad \text{quand} \quad z \to 1. \end{cases} \tag{1.4}$$

(Ici et dans toute la suite, la fonction logarithme est définie avec sa branche principale : $\log(z) = \log|z| + i\arg(z)$, avec $-\pi < \arg(z) \leq \pi$. On notera $\mathbb{R}_-$ l'ensemble des réels négatifs.) On a alors le résultat suivant, qui résout conplètement ce problème.

Théorème 1. *Dans les conditions ci-dessus, le problème (1.4) a une solution unique, à une constante multiplicative près. En choisissant cette constante égale à 1, on a*

$$S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-\rho)_\rho\,(k+n+1)_\sigma}{(k)_{n+1}^A}\, z^{-k} \quad \text{et} \quad I(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{(s-\rho)_\rho\,(s+n+1)_\sigma}{(s)_{n+1}^A}\, z^{-s}\, \mathrm{d}s,$$

où $\mathcal{C}$ est n'importe quelle courbe fermée orientée dans le sens direct qui entoure les pôles de l'intégrande, i.e. $0, -1, \dots, -n$.

Le but de cette note est de prouver un q-analogue du théorème précédent. On suppose dorénavant que $q \notin \mathbb{R}_-$ ce qui permet de définir $\log_q(z) = \log(z)/\log(q)$.

Étant donnés des entiers $A \geq 1$, $n \geq 0$, $\rho \geq 0$, $\sigma \geq 0$ et $\nu \geq 0$ tels que $\rho + \sigma + \nu + 2 \leq A(n+1)$, on cherche à résoudre le problème d'approximations simultanées de Padé suivant :

déterminer des polynômes (dépendants de A, n, ρ, σ et ν) $P_0(z;q)$, $\overline{P}_0(z;q)$ et $P_j(z;q)$ (pour $j=1,\dots,A$) en la variable z, de degré au plus n et à coefficients dans $\mathbb{Q}(q)$, tels que

$$\begin{cases} S(z;q) = P_0(z;q) + \displaystyle\sum_{j=1}^{A} P_j(z;q)\,\mathrm{Li}_j(1/z;q) = \mathcal{O}(z^{-\rho-1}) \quad \text{quand} \quad z\to\infty\,; \\ \overline{S}(z;q) = \overline{P}_0(z;q) + \displaystyle\sum_{j=1}^{A} P_j(z;q)\,\mathrm{Li}_j(z;1/q) = \mathcal{O}(z^{\sigma+n+1}) \quad \text{quand} \quad z\to 0\,; \\ I(z;q) = -\displaystyle\sum_{j=1}^{A} P_j(zq^{1-j};q)\frac{\big(-\log_q(1/z)\big)_{j-1}}{(j-1)!} = \mathcal{O}(z-q^{-\ell}) \quad \text{quand} \quad z\to q^{-\ell} \\ \qquad \text{pour tout } \ell\in\{-\nu,-\nu+1,\dots,A(n+1)-\rho-\sigma-\nu-2\}. \end{cases} \tag{1.5}$$

Théorème 2. *Dans les conditions ci-dessus, le problème* (1.5) *a une solution unique, à une constante multiplicative près. En choisissant cette constante égale à 1, on a*

$$S(z;q) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \frac{(q^{k-\rho};q)_\rho\,(q^{k+n+1};q)_\sigma}{(q^k;q)_{n+1}^A}\,q^{\nu k} z^{-k}$$

et

$$I(z;q) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}} \frac{(sq^{-\rho};q)_\rho\,(sq^{n+1};q)_\sigma}{(s;q)_{n+1}^A} s^{\nu-\log_q(z)}\,\mathrm{d}s,$$

où $\mathcal{C}$ est n'importe quelle courbe fermée orientée dans le sens direct qui entoure les pôles de l'intégrande, i.e. $1, q^{-1},\dots,q^{-n}$, *sans traverser la coupure $\mathbb{R}_-$.*

Avant de passer à la démonstration du Théorème 2, faisons quelques remarques :

Les Théorèmes 1 et 2 sont formellement très similaires, à ceci près que le paramètre « q-analogique » ν n'a pas d'équivalent dans le cas classique. La différence majeure se situe dans l'énoncé des conditions d'annulation des fonctions $I(z)$ et $I(z;q)$: cela n'a cependant rien surprenant puisqu'il est fréquent dans ce genre de situation que des singularités en certaines puissances de q confluent vers une unique singularité en 1 (avec une certaine multiplicité) lorsque $q\to 1$. Nous explicitons plus en détail la « convergence » du Théorème 2 vers le Théorème 1 au paragraphe 3.

Il est à noter l'utilisation, naturelle dans notre contexte, de $\log(z)/\log(q)$ comme q-analogue de la fonction logarithme. Cet analogue, qui possède donc une monodromie non-triviale en 0, est un choix historiquement classique : voir [1]. Certaines théories géométriques récentes (étudiant l'analogie entre équations aux q-différences et équations différentielles) ont mis en avant un q-analogue différent du logarithme : J. Sauloy [7] utilise comme q-logarithme la fonction $\ell_q(z) = z\theta_q'(z)/\theta_q(z)$, avec $\theta_q(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{-n(n-1)/2}z^n$, qui est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et dont les pôles confluent le long d'une spirale lorsque $q\to 1$, cette spirale agissant alors comme une coupure du plan pour le logarithme usuel.

2. Démonstration du Théorème 2

Remarquons tout d'abord que les polynômes $P_0(z;q)$ et $\overline{P}_0(z;q)$ sont déterminés de façon unique, une fois connus les autres polynômes du problème (1.5). De plus, celui-ci se traduit par un système linéaire dont les inconnues sont les $A(n+1)$ coefficients des polynômes $P_j(z;q)$ $(j \geq 1)$ et dont le nombre d'équations est $A(n+1)-1$: il y a donc au moins une solution non-triviale (*i.e.* non identiquement nulle).

On utilise temporairement la notation $P_j(z;q)$ pour désigner des polynômes génériques de degré au plus n en z et à coefficients dans $\mathbb{Q}(q)$, sans présager qu'il s'agisse des solutions du problème (1.5). On pose

$$P_j(z;q) = \sum_{t=0}^{n} p_{j,t}(q) z^t, \tag{2.1}$$

où $p_{j,t}(q) \in \mathbb{Q}(q)$, de telle sorte que

$$\sum_{j=1}^{A} P_j(z;q)\,\mathrm{Li}_j(1/z;q) = \sum_{k=1-n}^{\infty} q^k z^{-k} \sum_{j=1}^{A} \sum_{t=\max(0,1-k)}^{n} \frac{q^t p_{j,t}(q)}{(1-q^{k+t})^j}.$$

Il est utile à ce point d'introduire la fraction rationnelle (qui dépend aussi de A) :

$$R(s;q) = \sum_{j=1}^{A} \sum_{t=0}^{n} \frac{q^t p_{j,t}(q)}{(1-sq^t)^j} \tag{2.2}$$

$$= \frac{\Pi(s;q)}{(s;q)_{n+1}^{A}}, \tag{2.3}$$

où $\Pi(s;q)$ est un polynôme en s, à coefficients dans $\mathbb{Q}(q)$, et de degré $< A(n+1)$ puisque la décomposition en éléments simples (2.2) de $R(s;q)$ est sans partie principale. Il est clair que la connaissance de $\Pi(s;q)$ détermine *de facto* les polynômes $P_j(z;q)$ $(j \geq 1)$. On en déduit que si l'on connaˆ$\Pi(s;q)$, alors on a

$$S(z;q) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k R(q^k;q) z^{-k}$$

et aussi, par un simple calcul de résidus utilisant l'expression (2.2),

$$I(z;q) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} R(s;q) s^{-\log_q(z)}\,\mathrm{d}s,$$

où $\mathcal{C}$ est n'importe quelle courbe fermée entourant dans le sens direct les pôles de $R(z;q)$ et qui ne traverse pas la coupure $\mathbb{R}_-$. Nous allons maintenant montrer que la solution du problème de Padé (1.5) est unique, à une constante multiplicative près, et la déterminer en explicitant le polynôme « codant » $\Pi(s;q)$. Pour cela, nous interprétons chacune des conditions de (1.5) par quatre lemmes : il en découlera alors que

$$\Pi(s;q) = (sq^{-\rho};q)_\rho\,(sq^{n+1};q)_\sigma\, s^\nu,$$

à une constante multiplicative près.

Lemme 1. *Les polynômes $P_1, \dots, P_A$ vérifient la première condition de* (1.5) *si, et seulement si,*

$$\prod_{i=1}^{\rho}(1 - sq^{-i}) = (sq^{-\rho}; q)_\rho \quad \text{divise} \quad \Pi(s; q).$$

Démonstration. La première condition de (1.5) se traduit par l'annulation des coefficients de Taylor de $S(z;q)$ d'indices $1, 2, \dots, \rho$, ce qui équivaut à l'annulation de la fonction $k \mapsto \Pi(q^k; q)$ en $k = 1, 2, \dots, \rho$. Cela équivaut en fait à l'annulation du polynôme $\Pi(s;q)$ en $s = q, q^2, \dots, q^\rho$, d'où l'assertion. $\square$

Lemme 2. *Les polynômes $P_1, \dots, P_A$ vérifient la deuxième condition de* (1.5) *si, et seulement si,*

$$\prod_{i=n+1}^{n+\sigma}(1 - sq^{i}) = (sq^{n+1}; q)_\sigma \quad \text{divise} \quad \Pi(s; q).$$

Démonstration. Dans la deuxième condition de (1.5), on change z en $1/z$, puis on multiplie par z^n, de telle sorte que $z^n\overline{S}(1/z;q) = \mathcal{O}(z^{-\sigma-1})$. On a

$$\begin{aligned} z^n \sum_{j=1}^{A} P_j(1/z;q)\,\mathrm{Li}_j(1/z;1/q) &= \sum_{k=1-n}^{\infty} q^{-k} z^{-k} \sum_{j=1}^{A} \sum_{t=\max(0,1-k)}^{n} \frac{q^{-t} p_{j,n-t}(q)}{(1-q^{-k-t})^j} \\ &= q^{-n} \sum_{k=1-n}^{\infty} q^{-k} z^{-k} \sum_{j=1}^{A} \sum_{t=0}^{\min(n,n+k-1)} \frac{q^{t} p_{j,t}(q)}{(1-q^{t-k-n})^j}. \end{aligned}$$

Pour $k \geq 1$, le coefficient de z^{-k} dans la série $z^n\overline{S}(1/z;q)$ est donc donné par $q^{-n-k}R(q^{-k-n};q)$. L'annulation des coefficients de Taylor de $z^n\overline{S}(1/z;q)$ d'indices $1, 2, \dots, \sigma$ équivaut donc à l'annulation du polynôme $\Pi(s;q)$ en $s = q^{-n-1}, \dots, q^{-n-\sigma}$, d'où l'assertion. $\square$

Lemme 3. *La condition $I(q^{-j};q) = 0$ pour $j \in \{-\nu, \dots, -1\}$ équivaut à*

$$s^\nu \quad \text{divise} \quad \Pi(s;q).$$

Démonstration. Rappelons que

$$I(z;q) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{\Pi(s;q)}{(s;q)_{n+1}^A} s^{-\log_q(z)}\,\mathrm{d}s.$$

où $\mathcal{C}$ est n'importe quelle courbe fermée orientée dans le sens direct et entourant les pôles de l'intégrande, *i.e.* $1, q^{-1}, \dots, q^{-n}$, sans traverser la coupure $\mathbb{R}_-$.

Soit $-n \leq j \leq -1$, et supposons que $I(q^{-j}, q) = 0$. Alors, pour tout contour $\mathcal{C}$ entourant les points $1, q^{-1}, \dots, q^{-n}$ mais ne traversant pas la coupure, donc n'entourant pas 0, on a

$$0 = I(q^{-j};q) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{\Pi(s;q)}{s^{-j}(s;q)_{n+1}^A}\,\mathrm{d}s,$$

où l'intégrande est une fraction rationnelle dont 0 est peut-être un pôle : nous allons montrer que ce n'est (éventuellement) le cas que si $j < -\nu$, ce qui prouvera que s^ν divise $\Pi(s;q)$.

Pour cela, notons que, par le théorème des résidus et parce que le résidu à l'infini de l'intégrande $F(s;q)$ de $I(q^{-j};q)$ est nul (car le degré du numérateur de $F(s;q)$ est $\leq A(n+1)-1$, et celui de son dénominateur $\geq A(n+1)+1$), on a

$$\begin{aligned} 0 = -\mathrm{Res}_\infty(F) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}'} F(s;q)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}} F(s;q)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}_0} F(s;q)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}_0} F(s;q)\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

où $\mathcal{C}'$ est un cercle entourant tous les pôles de F ainsi que 0, et $\mathcal{C}_0$ un cercle entourant 0 et aucun autre pôle de F, les deux orientés dans le sens direct. Donc

$$0 = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}_0} F(s;q)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{(-j-1)!}\left((s;q)_{n+1}^{-A}\Pi(s;q)\right)^{(-j-1)}\Big|_{s=0}. \tag{2.4}$$

Puisque la fonction $s \mapsto (s;q)_{n+1}^{-A}$ ne s'annule pas en $s=0$, on déduit de (2.4), par récurrence sur $j \in \{-1,-2,\dots,-\nu\}$, que $0 = \Pi(0;q) = \Pi^{(1)}(0;q) = \cdots = \Pi^{(\nu-1)}(0;q)$, ce qui prouve que s^ν divise $\Pi(s;q)$. La réciproque se montre facilement en renversant cet argument. □

Lemme 4. *La condition* $I(q^{-j};q) = 0$ *pour* $j \in \{0,\dots,A(n+1)-\rho-\sigma-\nu-2\}$ *équivaut à*

$$\deg(\Pi) \leq \rho+\sigma+\nu.$$

Démonstration. Développons $\Pi(s;q)/(s;q)_{n+1}^A$ en série entière en $s=\infty$:

$$\frac{\Pi(s;q)}{(s;q)_{n+1}^A} = \sum_{k=\omega}^{\infty}\frac{c_k}{s^k},$$

où $\omega = A(n+1)-\deg(\Pi)$ est l'ordre de cette fraction rationnelle à l'infini et les c_k sont des nombres complexes. Notons que cette série converge au moins pour $|s|$ assez grand puisque $\omega \geq 1$, disons pour $|s| \geq S$. On choisit alors un cercle suffisamment grand pour que l'on puisse intégrer cette série terme à terme, disons le cercle $\overline{\mathcal{C}} = \{z : |z| = S+1\}$. On a alors

$$I(q^{-j};q) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\overline{\mathcal{C}}}\frac{\Pi(s;q)}{(s;q)_{n+1}^A}s^j\,\mathrm{d}s = \sum_{k=\omega}^{\infty} c_k\int_{\overline{\mathcal{C}}} s^{j-k}\,\mathrm{d}s = c_{j+1}.$$

L'annulation de $I(q^{-j};q)$ pour $j \in \{0,\dots,A(n+1)-\rho-\sigma-\nu-2\}$ équivaut donc à

$$\omega \geq A(n+1)-\rho-\sigma-\nu,$$

ce qui équivaut plus simplement à $\deg(\Pi) \leq \rho+\sigma+\nu$. □

Démonstration du Théorème 2. Puisque les polynômes s^ν, $(sq^{-\rho};q)_\rho$ et $(sq^{n+1};q)_\sigma$ n'ont pas de racines communes, les trois premiers lemmes montrent que $s^\nu(sq^{-\rho};q)_\rho(sq^{n+1};q)_\sigma$ divise $\Pi(s;q)$. Or le dernier lemme montre que $\deg(\Pi) \leq \rho+\sigma+\nu$, ce qui achève la démonstration. □

3. Confluence du Théorème 2 vers le Théorème 1

Dans ce paragraphe, nous explicitons le sens précis en lequel le Théorème 2 « tend » vers le Théorème 1.

Pour commencer, on remarque que, évidemment, on a

$$\lim_{q\to 1}(1-q)^{A(n+1)-\sigma-\rho}S(z;q) = S(z) \quad \text{et} \quad \lim_{q\to 1}(1-q)^{A(n+1)-\sigma-\rho}\overline{S}(z;q) = \overline{S}(z).$$

De plus, en faisant la substitution $s \to q^t$ dans l'intégrale définissant $I(z;q)$, on voit que

$$\lim_{q\to 1}(1-q)^{A(n+1)-\sigma-\rho-1}I(z;q) = -I(q).$$

D'autre part, la définition (2.1) des polynômes $P_j(z;q)$ est donnée par leurs coefficients $p_{j,t}(q)$ qui figurent dans (2.2), avec $\Pi(s;q) = (sq^{-\rho};q)_\rho\,(sq^{n+1};q)_\sigma\, s^\nu$. Explicitement, les $p_{j,t}(q)$ sont donnés par

$$p_{j,t}(q) = \frac{(-1)^{A-j}q^{t(A-j-1)}}{(A-j)!}\frac{\partial^{A-j}}{\partial s^{A-j}}\left(\frac{(1-sq^t)^A\Pi(s;q)}{(s;q)_{n+1}^A}\right)\bigg|_{s=q^{-t}}.$$

Par conséquent, $p_{j,t}(q)$ est une fraction rationnelle en q ; si cette fraction rationnelle est écrite sous forme réduite, la plus grande puissance de $1-q$ qui divise le dénominateur est $(1-q)^{A(n+1)-\sigma-\rho-j}$. En particulier, la limite $\lim_{q\to 1}(1-q)^{A(n+1)-\sigma-\rho-j}P_j(z;q)$ existe : c'est un polynôme en z, que l'on notera $Q_j(z)$. De façon similaire, la limite $\lim_{q\to 1}(1-q)^{A(n+1)-\sigma-\rho}\overline{P}_0(z;q)$ existe et sera notée $\overline{Q}_0(z)$.

Si l'on combine ces remarques avec (1.1) et le fait que

$$\lim_{q\to 1}(1-q)\log_q(z) = -\log(z),$$

on en déduit que, en multipliant les deux premières conditions dans (1.5) par $(1-q)^{A(n+1)-\sigma-\rho}$, en multipliant la troisième par $(1-q)^{A(n+1)-\sigma-\rho-1}$, puis en faisant finalement tendre q vers 1, on obtient

$$\begin{cases} S(z) = Q_0(z) + \displaystyle\sum_{j=1}^{A} Q_j(z)\,\mathrm{Li}_j(1/z) = \mathcal{O}(z^{-\rho-1}) \quad \text{quand} \quad z\to\infty\,; \\ \overline{S}(z) = \overline{Q}_0(z) + \displaystyle\sum_{j=1}^{A} Q_j(z)\,\mathrm{Li}_j(z) = \mathcal{O}(z^{\sigma+n+1}) \quad \text{quand} \quad z\to 0\,; \\ I(z) = \displaystyle\sum_{j=1}^{A} Q_j(z)\frac{\log^{j-1}(1/z)}{(j-1)!} = \mathcal{O}(\,?) \quad \text{quand} \quad z\to 1. \end{cases} \tag{3.1}$$

Il nous reste à montrer que l'on peut mettre $\mathcal{O}((z-1)^{A(n+1)-\rho-\sigma-2})$ à la place de $\mathcal{O}(\,?)$. Pour le faire, supposons donnée une fonction $f(z;q)$ analytique en z dans un voisinage ouvert suffisamment grand de 1, et telle que

$$f(z;q) = \mathcal{O}(z-q^{-\ell}) \quad \text{quand} \quad z\to q^{-\ell} \tag{3.2}$$

pour tout $\ell \in \{-m, -m+1, \dots, p\}$. Pour simplifier, on considère le cas où $p = 0$, car l'argument qui va suivre se généralise sans difficulté au cas où p est quelconque. On développe tout d'abord $f(z; q)$ en série de Taylor autour de $z = 1$:

$$f(z; q) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(q)(z-1)^k, \tag{3.3}$$

ce développement ne contenant pas de terme constant à cause de la condition (3.2) pour $\ell = 0$. Nous supposons alors une condition supplémentaire : la limite $\lim_{q\to 1} f_k(q)$ existe pour tout k et

$$\lim_{q\to 1} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(q)(z-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{q\to 1} f_k(q)(z-1)^k.$$

Cette condition est satisfaite dans notre cas, c'est-à-dire pour

$$f(z; q) = -(1-q)^{A(n+1)-\sigma-\rho-1} \sum_{j=1}^{A} P_j(zq^{1-j}; q) \frac{\left(-\log_q(1/z)\right)_{j-1}}{(j-1)!}. \tag{3.4}$$

La condition (3.2) pour les valeurs non-nulles de ℓ implique le système d'équations

$$0 = f(q^{-\ell}; q) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(q)(q^{-\ell}-1)^k, \quad \ell \in \{-m, -m+1, \dots, -1\}. \tag{3.5}$$

On multiplie la ℓ-ième équation par

$$c_\ell = \frac{1}{(q^{-\ell}-1) \prod\limits_{\substack{h=1 \\ h\neq -\ell}}^{m} (q^{-\ell}-q^h)}$$

et en faisant la somme de ces équations multipliées par le facteur c_ℓ correspondant sur $\ell \in \{-m, -m+1, \dots, -1\}$, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\ell=-m}^{-1} c_\ell f(q^{-\ell}; q) \\ &= \sum_{\ell=-m}^{-1} c_\ell \sum_{k=1}^{\infty} f_k(q)(q^{-\ell}-1)^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k(q) \sum_{\ell=-m}^{-1} c_\ell (q^{-\ell}-1)^k. \end{aligned} \tag{3.6}$$

À ce point, on note que le choix des coefficients c_ℓ implique que les coefficients de $f_k(q)$ dans la somme (3.6) sont nuls pour $k = 1, 2, \dots, m-1$, et que le coefficient de $f_m(q)$ est exactement 1. Dans le résultat

$$0=f_m(q)+\sum_{k\geq m+1}^{\infty} f_k(q)\sum_{\ell=-m}^{-1}\frac{(q^{-\ell}-1)^k}{(q^{-\ell}-1)\prod\limits_{\substack{h=1\\ h\neq -\ell}}^{m}(q^{-\ell}-q^h)},$$

on fait maintenant tendre q vers 1 : comme la somme extérieure porte sur les $k>m$, la limite du sommande de la somme intérieure est toujours zéro. Par conséquent, on obtient bien que $f_m(1)=0$. De plus, si l'on applique le même argument pour $\ell\in\{-\bar m,-\bar m+1,\dots,-1\}$ avec $\bar m=m-1,m-2,\dots,1$, alors on obtient que $f_{\bar m}(1)=0$ pour tout $\bar m\in\{1,2,\dots,m\}$, ce qui prouve que

$$f(z;1)=\mathcal{O}\big((z-1)^m\big).$$

Cet argument, appliqué à (3.4), montre que l'on peut bien remplacer $\mathcal{O}(\,?)$ dans (3.1) par $\mathcal{O}((z-1)^{A(n+1)-\rho-\sigma-2})$, comme annoncé. Le problème d'approximation (3.1) est donc exactement le problème (1.4). Comme il est démontré dans [4] que ce problème a une solution unique, on a forcément l'égalité $Q_j(z)=P_j(z)$ pour tout j.

Bibliographie

[1] C. R. Adams, *On the linear ordinary q-difference equations*, Ann. Math. **30** (1929), no. 2, 195–205.

[2] K. Ball et T. Rivoal, *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs*, Invent. Math. **146** (2001), no. 1, 193–207.

[3] M. Kaneko, N. Kurokawa et M. Wakayama, *A variation of Euler's approach to values of the Riemann zeta function*, Kyushu J. Math. **57**.1 (2003), 175–192. Disponible sous `http://arXiv.org/abs/math.QA/0206171`.

[4] S. Fischler et T. Rivoal, *Approximants de Padé et séries hypergéométriques équilibrées*, J. Math. Pures Appl. **82** (2003), no. 10, 1369–1394.

[5] C. Krattenthaler, T. Rivoal et W. Zudilin, *Séries hypergéométriques basiques, fonction q-zêta et séries d'Eisenstein*, J. Inst. Math. Jussieu **5** (2006), 53–79. Disponible sous `http://arXiv.org/abs/math.NT/0311033`.

[6] T. Rivoal, *La fonction Zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I Math. **331** (2000), no. 4, 267–270. Disponible sous `http://arXiv.org/abs/math.NT/0008051`.

[7] J. Sauloy, *Systèmes aux q-différences singuliers réguliers : classification, matrice de connexion et monodromie*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **50** (2000), no. 4, 1021–1071.

[8] W. Zudilin, *Diophantine problems for q-zeta values*, (en russe) Mat. Zametki **72**.6 (2002), 936–940 ; trad. en anglais dans Math. Notes **72**.6 (2002), 858–862. Disponible sous `http://arXiv.org/abs/math.NT/0206179`.

Institut Girard Desargues, Université Claude Bernard Lyon-I, 21, avenue Claude Bernard, F-69622 Villeurbanne Cedex, France

E-mail address: kratt@euler.univ-lyon1.fr

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme, CNRS UMR 6139, Université de Caen, BP 5186, 14032 Caen cedex, France.

E-mail address: rivoal@math.unicaen.fr