Abzählung von Matchings in speziellen Graphen

Diplomarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades

Magistra der Naturwissenschaften

an der formal– und naturwissenschaftlichen

Fakultät der Universität Wien

Eingereicht von: Theresia Eisenkölbl

Wien, im März 1998

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Abzählung von Matchings mit Hilfe von Pfaffschen Formen

1. Grundlegende Definitionen

Diese Arbeit soll einige Methoden zusammenstellen, mit denen die Anzahl von perfekten Matchings eines Graphen abgezählt werden können. Perfekte Matchings kommen in der Kombinatorik in vielen Zusammenhängen vor. So läßt sich die Abzählung von Plane Partitions, spannenden Bäumen und alternierenden Vorzeichenmatrizen auf die Abzählung von perfekten Matchings zurückführen.

Aber auch in der statistischen Physik ist man an der (asymptotischen) gewichteten Abzählung von perfekten Matchings interessiert. So hat Kasteleyn bei der Untersuchung des Dimermodells die Anzahl der perfekten Matching im Rechteckgitter bestimmt. Auch für die Chemie sind perfekte Matchings von Bedeutung. Es gibt Hinweise darauf, daß die Stabilität von gewissen chemischen Verbindungen mit der Anzahl der perfekten Matchings im Graph des Moleküls zusammenhängt.

Wir wollen jetzt die wichtigsten Begriffe definieren.

Ein **Graph** soll immer eine endliche Menge von Knoten zusammen mit einer Menge von Kanten sein, wobei eine Kante eine Menge von zwei verschiedenen Knoten ist.

Wir werden auch den Begriff eines **orientierten Graphen** verwenden. Das ist ein Graph, bei dem zu jeder Kante auch eine Richtung vorgegeben wird. Man kann also die Kanten statt durch Mengen durch Paare von zwei Knoten angeben. Eine orientierte Kante (a, b) führt dann vom Knoten a zum Knoten b.

Ein **Kreis** der Länge n in einem Graphen besteht aus n Knoten $v_1, v_2, \ldots, v_n$ und den n Kanten $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}$.

Ein **perfektes Matching** eines Graphen ist eine Menge von Kanten im Graphen, wobei jeder Knoten **in genau einer** dieser Kanten enthalten ist (siehe Abbildung 1). Der Kürze halber werde ich in dieser Arbeit statt „perfektes Matching“ meistens nur „Matching“ schreiben. Da an jeder Kante eines Matchings zwei Knoten sitzen, muß ein Graph gerade Knotenanzahl haben, um ein Matching zu besitzen.

Wenn in einem Graphen jeder Kante ein Gewicht zugeordnet ist, so soll das **Gewicht eines Matchings** das Produkt der Gewichte der enthaltenen Kanten sein. Die Gewichte können dabei Elemente eines beliebigen (kommutativen) Ringes sein.

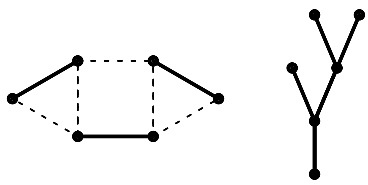


ABBILDUNG 1. Ein perfektes Matching und ein Graph, der keines besitzt.

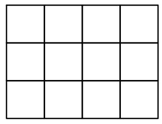


ABBILDUNG 2. Ein 4×5–Rechteck.

Die **gewichtete Abzählung** der Matchings ist die Summe der Gewichte aller möglichen Matchings des Graphen und soll für einen Graphen G mit $M(G; w)$ bezeichnet werden, wobei w die Funktion ist, die den Kanten ihre Gewichte zuordnet. Ein gewöhnlicher Graph kann als gewichteter Graph mit Gewicht 1 auf allen Kanten betrachtet werden. Die gewichtete Abzählung ergibt dann einfach die Anzahl der Matchings und soll mit $M(G)$ bezeichnet werden. Wenn es zwischen zwei Knoten eines Graphen keine Kante gibt, kann das immer als Kante mit Gewicht 0 aufgefaßt werden, da die Matchings, die diese Kante enthalten, dann ebenfalls Gewicht 0 haben. Ähnlich können Mehrfachkanten immer als eine Kante aufgefaßt werden, deren Gewicht die Summe der Gewichte der ursprünglichen Kanten ist.

Wir können uns also auf Graphen ohne Mehrfachkanten beschränken. Außerdem reicht es, zusammenhängende Graphen zu betrachten. Denn es gilt

$$M(G; w) = M(G_1; w_1) M(G_2; w_2), \tag{1.1}$$

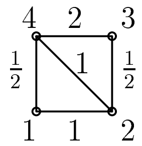
wenn G in zwei Zusammenhangskomponenten G_1 und G_2 zerfällt und w_1 und w_2 die Einschränkungen von w auf die entsprechenden Komponenten sind, da die Wahl der Kanten dann für ein Matching in G_1 und G_2 voneinander unabhängig ist.

Die Methode, die im nächsten Abschnitt beschrieben wird, funktioniert nur für Graphen, die sich in die Ebene einbetten lassen, wo also jedem Knoten ein Punkt in der Ebene zugeordnet werden kann und jeder Kante eine Kurve zwischen den beiden beteiligten Knoten, sodaß sich die Kurven nur in gemeinsamen Knoten schneiden. Solche Graphen heißen **planar** oder **eben** und teilen die Ebene in zusammenhängende Flächen.

2. Abzählung mit Hilfe von Pfaffschen Formen

In diesem und im nächsten Abschnitt soll die Methode vorgestellt werden, die Kasteleyn in [**13**] zur Abzählung der Matchings in einem Rechteck bestehend aus lauter Quadraten verwendet hat (siehe Abb. 2). Diese Methode läßt sich bei allen zusammenhängenden ebenen Graphen anwenden und führt auf eine Determinante. Da aber die Anzahl der Matchings in einem Graphen das Produkt der Anzahlen der Matchings in den einzelnen Zusammenhangskomponenten sind, kann man mit dieser Methode die Matchings in beliebigen ebenen Graphen auf das Ausrechnen von Determinanten zurückführen (vgl. [**15**]).

Wir wollen jetzt für einen gewichteten Graphen einen Ausdruck für die Anzahl der Matchings finden. Dabei können wir die nicht vorhandenen Kanten als Kanten mit Gewicht 0 betrachten. Wenn wir die Knoten mit einer beliebigen Numerierung versehen, können wir zu so einem Graphen G mit Gewicht w die **Adjazenzmatrix** $A(G; w)$ bilden, deren Zeilen und Spalten jeweils durch die Knoten indiziert sind. Der Eintrag a_{ij} in Zeile i und Spalte j ist das Gewicht der Kante zwischen dem Knoten mit Nummer i und dem Knoten mit Nummer j, also $a_{ij} = w(\{i, j\})$ (siehe Abb. 3).



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbildung 3. Gewichteter Graph mit zugehöriger Adjazenzmatrix.

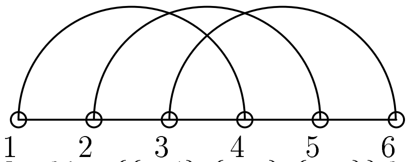


Abbildung 4. Das Matching $\{\{1,4\},\{2,5\},\{3,6\}\}$ hat in dieser Darstellung drei Schnittpunkte und daher das Vorzeichen -1.

Es gilt daher offensichtlich $a_{ij} = a_{ji}$. Die Summe der Gewichte der Matchings ist definitionsgemäß

$$M(G;w) = \sum_{m} \prod_{\substack{\{i,j\}\in m \\ i<j}} a_{ij},$$

wobei die Summe über alle Matchings des Graphen mit allen Knoten von G und allen Kanten zwischen diesen genommen wird. Der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung heißt **Hafnische Form** der Matrix A und soll mit $\operatorname{Hf} A$ bezeichnet werden, er hängt natürlich nur von den a_{ij} mit $i < j$ ab.

Um diese Summe ausrechnen zu können, wollen wir die **Pfaffsche Form** $\operatorname{Pf} A$ einer Matrix A einführen, die sich von $\operatorname{Hf} A$ nur durch die Vorzeichen der Summanden unterscheidet. Eine Pfaffsche Form einer schiefsymmetrischen Matrix läßt sich auf die Wurzel aus deren Determinante zurückführen und kann daher besser berechnet werden.

Um zu erklären, was Pfaffsche Formen sind, müssen wir zuerst das **Vorzeichen** $\operatorname{sgn} m$ **eines Matchings** m des Graphen mit $2n$ Knoten und allen möglichen Kanten zwischen diesen definieren. Dazu numerieren wir die Knoten des Graphen in beliebiger Reihenfolge durch, ordnen sie der Reihe nach auf einer horizontalen Gerade an und stellen alle Kanten als Kurven in der oberen Halbebene dar. Dabei muß man darauf achten, daß sich in jedem Punkt höchstens zwei Kurven schneiden und daß zwei Kurven jeweils nur endlich viele Schnittpunkte miteinander haben und sich nur in Knoten tangential berühren dürfen. Das läßt sich immer erreichen. Man kann zum Beispiel die Kanten durch Halbkreise in der oberen Halbebene darstellen und diese in der Nähe der Schnittpunkte von mehr als zwei Halbkreisen ein wenig abändern. Unter diesen Bedingungen ist die Anzahl modulo 2 der Schnittpunkte der Kanten eines bestimmten Matchings m unabhängig von der Wahl der Kurven.

Das Vorzeichen von m ist dann definiert als

$$\operatorname{sgn} m = (-1)^{\#\text{Schnittpunkte der Kanten von } m} \tag{1.2}$$

So hat zum Beispiel das Matching $m = \{\{1,2\},\{3,4\},\ldots,\{2n-1,2n\}\}$ das Vorzeichen $\operatorname{sgn} m = 1$ und das Matching $m = \{\{1,4\},\{2,5\},\{3,6\}\}$ das Vorzeichen $\operatorname{sgn} m = -1$ (siehe Abb. 4).

DEFINITION 1.1. *Die* **Pfaffsche Form** $\operatorname{Pf} A$ *einer schiefsymmetrischen* $2n \times 2n$*–Matrix* $A = (a_{ij})$ *ist definiert als*

$$\operatorname{Pf} A = \sum_m \operatorname{sgn} m \prod_{\substack{\{i,j\} \in m \\ i<j}} a_{ij}, \tag{1.3}$$

wobei die Summe über alle Matchings des vollständigen Graphen mit $2n$ *Knoten genommen wird und* $\operatorname{sgn} m$ *wie in* (1.2) *definiert ist.*

Der zum Matching m gehörige Summand $\operatorname{sgn} m \prod_{\substack{\{i,j\} \in m \\ i<j}} a_{ij}$ in der Definition soll mit $T(m)$ bezeichnet werden.

Für einen beliebigen orientierten Graphen $\vec{G}$ mit Gewichtsfunktion w läßt sich eine schiefsymmetrische Matrix $B(\vec{G}; w)$ definieren, wenn man die Knoten zuvor wieder beliebig durchnumeriert: b_{ij} ist das Gewicht $w(\{i,j\})$ der Kante von i nach j, wenn die Kante auch in diese Richtung orientiert ist, sonst $-w(\{i,j\})$.

Da B und damit die zugehörige Pfaffsche Form von der Wahl der Numerierung der Knoten abhängt, wollen wir überlegen, wie sich der Summand $T(m)$ ändert, wenn man zwei Knoten vertauscht.

LEMMA 1.2. *Unterscheiden sich zwei Matchings* m_1 *und* m_2 *nur in zwei Kanten, sodaß* $\{i_1,i_2\},\{i_3,i_4\} \in m_1$ *und* $\{i_1,i_3\},\{i_2,i_4\} \in m_2$*, dann gilt*

$$b_{i_1 i_3} b_{i_2 i_4} T(m_1) = -b_{i_1 i_2} b_{i_3 i_4} T(m_2). \tag{1.4}$$

BEWEIS. Es ist nur zu überprüfen, daß die Vorzeichen der beiden Seiten übereinstimmen. Die Zahl der Schnittpunkte der unveränderten Kanten untereinander bleibt natürlich gleich. Außerdem bilden die Kanten zwischen den i_k aus beiden Matchings zusammen Kreise, die alle oberhalb der Geraden liegen, auf der sich die Knoten befinden. Die anderen Kanten müssen diese Kreise also in einer geraden Anzahl von Schnittpunkten schneiden. Deshalb ist die Anzahl der Schnittpunkte von Kanten unter den i_k und anderen Kanten in beiden Matchings von gleicher Parität.

Es bleibt also zu zeigen, daß sich die Vorzeichenänderung relativ zu den entsprechenden a_{ij} durch den Wechsel von $b_{i_1 i_3} b_{i_2 i_4}$ auf $-b_{i_1 i_2} b_{i_3 i_4}$ gerade mit der Änderung bei der Anzahl der Schnittpunkte von Kanten unter den i_k weghebt.

Diese Aussage bleibt gleich, wenn man die Bezeichnungen der Knoten i_1 und i_4 vertauscht. Dasselbe gilt für i_2 und i_3. Also reicht es, sich auf $i_1 < i_4$, $i_2 < i_3$ zu beschränken. Da bei einer Spiegelung an einer Vertikalen (und entsprechender Umnumerierung aller Knoten von G) die Anzahl der Schnittpunkte gleich bleibt, kann man sich auf die 4 Fälle $i_2 < i_3 < i_1 < i_4$, $i_2 < i_1 < i_3 < i_4$, $i_1 < i_2 < i_3 < i_4$ und $i_2 < i_1 < i_4 < i_3$ beschränken.

In jedem dieser Fälle läßt sich die gewünschte Eigenschaft direkt überprüfen. Wir führen hier nur den ersten Fall $i_2 < i_3 < i_1 < i_4$ aus. Wie man aus Abbildung 5

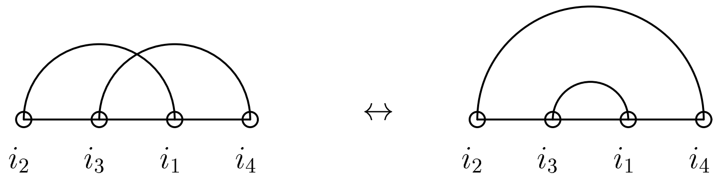


ABBILDUNG 5. Der Fall $i_2 < i_3 < i_1 < i_4$.

sieht, ändert sich die Anzahl der Schnittpunkte von 1 auf 0. Deshalb sollte sich auch beim Wechsel von $b_{i_1i_3}b_{i_2i_4}$ auf $-b_{i_1i_2}b_{i_3i_4}$ das Vorzeichen ändern. Das gilt aber wegen $b_{i_1i_3} = -a_{i_1i_3}$, $b_{i_2i_4} = a_{i_2i_4}$, $b_{i_1i_2} = -a_{i_1i_2}$ und $b_{i_3i_4} = a_{i_1i_3}$. Die übrigen drei Fälle lassen sich völlig analog behandeln. □

Für spezielle Orientierungen des Graphen läßt sich noch mehr zeigen:

LEMMA 1.3. *Der (planare) Graph $\vec{G}$ sei so orientiert, daß in jeder Fläche eine ungerade Zahl von Kanten im Uhrzeigersinn zeigt.*

Wenn sich zwei Matchings m_1 und m_2 von G nur dadurch unterscheiden, daß es einen Kreis von Knoten $v_1, v_2, \ldots, v_{2k}$ gibt mit $\{v_2, v_3\}, \{v_4, v_5\}, \ldots, \{v_{2k}, v_1\} \in m_1$ und $\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \ldots, \{v_{2k-1}, v_{2k}\} \in m_2$, so ist das Vorzeichen von $T(m_1)$ und $T(m_2)$ gleich, wenn die ursprünglichen Gewichte $w(\{i, j\})$ als positiv angenommen werden.

BEWEIS. Zuerst zeigen wir, daß unter dieser Voraussetzung auch jeder Kreis in G, dessen Länge gerade ist und in dessen Innerem sich eine gerade Zahl von Knoten befindet, eine ungerade Anzahl von Kanten im Uhrzeigersinn besitzt.

Wenn ein Kreis mit Länge $2k$ aus f Flächen besteht und $2l$ Knoten in seinem Inneren besitzt, so läßt es sich leicht überlegen, daß er in seinem Inneren $2l + f - 1$ Kanten besitzt. Jede davon zählt für genau eine Fläche als im Uhrzeigersinn orientiert. Wenn wir von den einzelnen Flächen bereits wissen, daß sie eine ungerade Anzahl von Kanten im Uhrzeigersinn besitzen, erhalten wir für die Anzahl u der Kanten des Kreises im Uhrzeigersinn:

$$u \equiv f - (2l + f - 1) \mod 2,$$

also ist u ungerade wie gewünscht.

Betrachten wir jetzt die Überlagerung von zwei Matchings, wie sie im Lemma beschrieben sind. So eine Überlagerung zerfällt in disjunkte Kreise gerader Länge. Außerdem hat jeder dieser Kreise eine gerade Anzahl von Knoten im Inneren, da jedes Matching die Knoten im Inneren nur untereinander verbindet. Aus dem ersten Teil des Beweises wissen wir also, daß auf dem Kreis $(v_1, v_2, \ldots, v_{2k})$, auf dem sich die Matchings unterscheiden, eine ungerade Anzahl von Kanten im Uhrzeigersinn orientiert sind.

Die Behauptung läßt sich jetzt mit Induktion nach k zeigen, wenn man Gleichung (1.4) für $i_1 = v_{2k-2}$, $i_2 = v_{2k-1}$, $i_3 = v_1$, $i_4 = v_{2k}$ anwendet.

Ist $k = 2$, so sieht man, daß die Zahl der b_{ij} mit $b_{ij} = -a_{ij}$ auf beiden Seiten verschieden sein müssen und daher das vorhandene Minus wegheben. Die Vorzeichen von $T(m_1)$ und $T(m_2)$ sind dann also gleich.

Ist $k > 2$, so heben sich die Vorzeichen der vorkommenden b_{ij} wieder mit dem bereits vorhandenen Minus weg, und man erhält ein Matching, das dasselbe Vorzeichen wie m_1 hat und sich von m_2 nur mehr in einem Kreis der Länge $2k - 2$ unterscheidet. Damit erhält man induktiv das Ergebnis. □

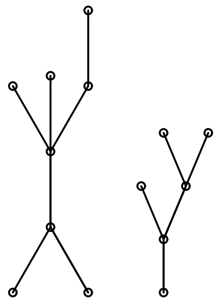


ABBILDUNG 6. Zwei Bäume.

Aus diesem Lemma ergibt sich leicht der folgende Satz.

SATZ 1.4. *Der (planare) Graph $\vec{G}$ mit Gewicht w sei so orientiert, daß in jeder Fläche eine ungerade Zahl von Kanten im Uhrzeigersinn zeigt.*
Dann gilt:

$$|M(G;w)| = |\mathrm{Pf}\, B|,$$

wobei B die Matrix ist, die zu dieser Orientierung von G gehört.

BEWEIS. Betrachten wir zwei beliebige Matchings m_1, m_2 auf G. Dann wissen wir aus dem Beweis von Lemma 1.3, daß die Überlagerung der beiden Matchings den Graphen in disjunkte Kreise gerader Länge zerlegt. Auf jedem dieser Kreise unterscheiden sich m_1 und m_2 wie die beiden Matchings aus Lemma 1.3. Deshalb können wir schrittweise auf jedem Kreis von den Kanten in m_1 zu den Kanten in m_2 übergehen. In jedem Schritt bleibt das Vorzeichen von $T(m)$ nach Lemma 1.3 gleich. Also sind auch die Vorzeichen von $T(m_1)$ und $T(m_2)$ gleich. Da diese Vorzeichen immer relativ zum Produkt der entsprechenden Gewichte a_{ij} im Graphen betrachtet werden, gilt

$$\mathrm{Pf}\, B = \pm\, \mathrm{Hf}\, A = \pm M(G;w).$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

BEMERKUNG 1.5. *Wenn man den Beweis von Lemma 1.3 durchgeht, sieht man, daß man die Bedingung an die Orientierung für die äußere Fläche nirgends verwendet hat. Also gilt auch Satz 1.4, wenn man über die Orientierung von G nur weiß, daß in jeder inneren Fläche eine ungerade Zahl von Kanten im Uhrzeigersinn orientiert ist.*

Im folgenden Lemma zeigen wir, daß so eine Orientierung immer möglich ist.

LEMMA 1.6. *In jedem zusammenhängenden ebenen Graphen (mit gerader Knotenanzahl) können die Kanten so orientiert werden, daß in jeder Fläche eine ungerade Zahl von Kanten im Uhrzeigersinn orientiert ist.*

BEWEIS. Zuerst suchen wir so eine Orientierung für einen Baum, d.h. ein zusammenhängender Graph ohne Kreis (siehe Abb. 6). So ein Graph hat nur eine Fläche, nämlich die unbegrenzte äußere, und die Anzahl der Kanten ist um 1 kleiner als die Anzahl der Knoten. Da der Graph eine gerade Zahl von Knoten hat, ist die Anzahl der Kanten ungerade. Jede Kante grenzt aber an beiden Seiten an die einzige Fläche und zählt daher bei jeder Orientierung einmal im Uhrzeigersinn und einmal gegen den Uhrzeigersinn. Eine beliebige Orientierung erfüllt also die Bedingung.

Den allgemeinen Fall erledigen wir mit Induktion nach der Anzahl der Kanten. Ist nämlich der Graph kein Baum, so muß es einen Kreis geben. Eine beliebige Kante auf so einem Kreis grenzt an zwei verschiedene Flächen. Entfernt man diese, so bleibt der Graph zusammenhängend und hat eine Kante weniger. Also kann man im verbleibenden Graphen nach Induktionsvoraussetzung die Kanten so orientieren, daß in jeder Fläche eine ungerade Zahl von Kanten im Uhrzeigersinn orientiert sind. Gibt man jetzt die herausgenommene Kante wieder dazu, so teilt man damit eine Fläche F in zwei Teile F_1 und F_2.

Da F eine ungerade Zahl von Kanten im Uhrzeigersinn hatte, hat eine der Flächen F_i eine gerade Zahl davon geerbt, die andere eine ungerade. Die zusätzliche Kante orientiert man so, daß sie für die Fläche mit der geraden Anzahl im Uhrzeigersinn orientiert ist. Damit hat man eine passende Orientierung für den ganzen Graphen gefunden. □

Mit Hilfe von Satz 1.4 können wir also die Berechnung von $M(G;w)$ immer auf die Berechnung einer Pfaffschen Form zurückführen. Um dies leichter berechnen zu können, beweisen wir noch folgende Rechenregel für Pfaffsche Formen.

Lemma 1.7. *Für eine schiefsymmetrische Matrix A gilt:*

$$(\operatorname{Pf} A)^2 = \det A$$

Beweis. Sei n die Dimension von A. Dann betrachten wir den Graphen G mit den Knoten $1, 2, \ldots, n$ und Gewichten a_{ij} auf den Kanten $\{i, j\}$. Die schiefsymmetrische Matrix A entspricht dann der Orientierung aller Kanten vom Knoten mit kleinerer Nummer zum Knoten mit größerer Nummer. Die Gleichung ist dann äquivalent zu

$$\sum_{(m_1,m_2)} T(m_1)T(m_2) = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)},$$

wobei m_1, m_2 Matchings von G sind und σ alle Permutationen der n Knoten durchläuft.

Zuerst zeigen wir, daß sich die Terme in der Determinante, die Permutationen entsprechen, die nicht nur Kreise gerader Länge enthalten, gegenseitig wegheben. Denn wenn die Permutation einen Fixpunkt i hat, verschwindet der Term wegen $a_{ii} = 0$. Wenn eine Permutation σ keinen Fixpunkt besitzt, sucht man den Kreis k, der von allen Kreisen ungerader Länge den Knoten mit der kleinsten Nummer enthält. Die Permutation $\bar{\sigma}$, die auf k mit σ^{-1} und auf allen anderen Kreisen mit σ übereinstimmt, erfüllt $\operatorname{sgn} \bar{\sigma} = \operatorname{sgn} \sigma$. Die beiden zugehörigen Produkte unterscheiden sich aber im Vorzeichen, weil für jede Kante des Kreises k $a_{i\sigma(i)}$ durch $a_{\sigma(i)i}$ ersetzt wird.

Um die Gleichheit der restlichen Terme zu zeigen, geben wir eine Bijektion zwischen Paaren von Matchings und Permutationen mit Kreisen gerader Länge an. Wie wir im Beweis von Lemma 1.3 gesehen haben, zerlegt die Überlagerung zweier Matchings den Graphen in disjunkte Kreise gerader Länge, die auch eine gerade Zahl von Knoten im Inneren enthalten. Deshalb läßt sich daraus eine Permutation σ mit Kreisen gerader Länge konstruieren, wenn man verlangt, daß in jedem dieser Kreise für den Knoten mit kleinster Nummer i_{min} gilt: $\{i_{min}, \sigma(i_{min})\} \in m_1$. Ein Beispiel für diese Konstruktion ist in Abbildung 7 dargestellt. Die Überlagerung der beiden abgebildeten Matchings $m_1 = \{\{1,4\},\{2,5\},\{3,6\}\}$ und $m_2 = \{\{1,4\},\{2,3\},\{5,6\}\}$ im 2×3–Quadratgitter ergeben die Permutation $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 6 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

Wegen dieser Bedingung für den Knoten mit der kleinsten Nummer in jedem Kreis kommt man von einer Permutation mit Kreisen gerader Länge auch wieder zurück zu den Matchings. Da wir die verwendeten Kanten bei dieser Bijektion unverändert

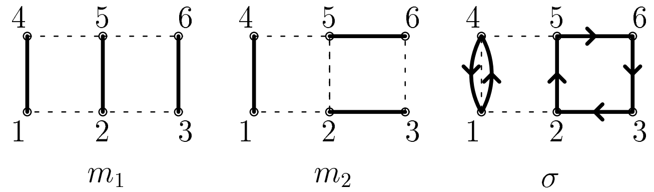


ABBILDUNG 7. Zwei Matchings und ihre Überlagerung.

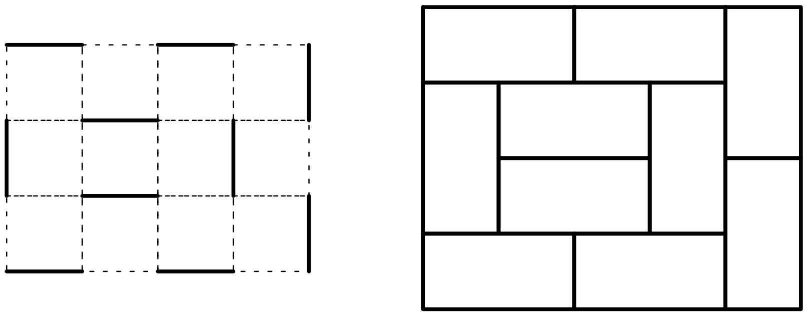


ABBILDUNG 8. Ein Matching mit entsprechendem Dominotiling.

gelassen haben, stimmen die entsprechenden Summanden links und rechts sicher betragsmäßig überein. Es ist also nur mehr zu überprüfen, daß sie dasselbe Vorzeichen haben.

Auf der rechten Seite steht $\prod_i a_{i\sigma(i)}$. Das entspricht auf jedem Kreis von σ der Orientierung aller Kanten im Uhrzeigersinn oder aller Kanten dagegen und unterscheidet sich also an einer ungeraden Anzahl von Stellen von der Orientierung aus Lemma 1.6. Dieser Unterschied ergibt also einen -1er für jeden Kreis. Das hebt sich mit $\operatorname{sgn}\sigma$ weg, weil alle Kreise gerade Länge haben. Die übrigen Vorzeichen, die der Orientierung aus Lemma 1.6 entsprechen, ergänzen aber $\operatorname{sgn} m_1$ und $\operatorname{sgn} m_2$ nach dem Beweis von Satz 1.4 jeweils zum selben Vorzeichen η. Wegen $\eta^2 = 1$ ergibt sich daraus die Gleichheit der Vorzeichen auf beiden Seiten, womit alles bewiesen ist. $\square$

3. Anwendung auf ein quadratisches Gitter

Wir wollen jetzt mit dieser Methode die Anzahl der perfekten Matchings eines rechteckigen Graphen bestehend aus lauter Quadraten ausrechnen, der in jeder Zeile n Knoten und in jeder Spalte m Knoten besitzt. Diese Anzahl läßt sich auch als Zahl der Überdeckungen mit Dominos des $(n + 1) \times (m + 1)$–Quadratgitters interpretieren, indem man jeden Knoten durch ein Quadrat ersetzt. Eine Kante zwischen zwei Knoten kann man dann durch ein Domino über den beiden entsprechenden Quadraten ersetzen (siehe Abb. 8).

Um die Methode aus dem vorigen Abschnitt anwenden zu können, geben wir eine Orientierung an, die die Bedingung erfüllt, daß jede begrenzte Fläche eine ungerade Anzahl von Kanten im Uhrzeigersinn besitzt:

Die Zeilen werden alle nach rechts orientiert, die Spalten abwechselnd abwärts und aufwärts (siehe Abb. 9).

Wenn wir die Knoten entlang jeder Spalte von oben nach unten durchnumerieren und die Spalten von links nach rechts durchgehen, kann die zugehörige Matrix B als Blockmatrix aufgeschrieben werden, wobei jeder Block einer Spalte im quadratischen

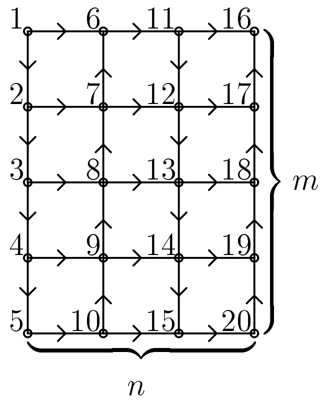


Abbildung 9. Orientierung eines quadratischen Gitters.

Gitter entspricht. Die Matrix B hat dann n Blöcke in jeder Zeile und Spalte, und es gilt

$$B = \begin{pmatrix} A_m & I_m & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -I_m & -A_m & I_m & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & -I_m & A_m & I_m & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & -I_m & -A_m & I_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -I_m & (-1)^n A_m & I_m \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -I_m & (-1)^{n+1} A_m \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

wobei I_m die $m \times m$–Einheitsmatrix ist und

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{eine } m \times m\text{–Matrix.} \tag{1.6}$$

Die Determinante von B muß als Quadrat von Pf B eine positive Zahl sein, deshalb muß sie nur bis auf das Vorzeichen bestimmt werden. Wir multiplizieren deshalb alle Zeilen in der Blockmatrix B mit -1, deren Nummern die Reste 3 oder 0 modulo 4 haben, und alle Spalten, deren Nummern die Reste 0 oder 1 modulo 4 haben. (Damit meinen wir die Blockzeilen und Blockspalten.) Dann ergibt sich

$$B = \begin{pmatrix} -A_m & I_m & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ I_m & -A_m & I_m & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & I_m & -A_m & I_m & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & I_m & -A_m & I_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & I_m & -A_m & I_m \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & I_m & -A_m \end{pmatrix} = \hat{A}_n \otimes I_m - I_n \otimes A_m, \quad (1.7)$$

wobei

$$\hat{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{eine } n \times n\text{–Matrix ist.} \quad (1.8)$$

Ist λ_k ein Eigenwert von $\hat{A}_n$ mit zugehörigem Eigenvektor v_k und μ_l ein Eigenwert von $(-A_m)$ mit Eigenvektor w_l, so gilt

$$\begin{aligned} \left(\hat{A}_n \otimes I_m - I_n \otimes A_m\right)(v_k \otimes w_l) &= (\lambda_k v_k) \otimes w_l + v_k \otimes (\mu_l w_l) \\ &= (\lambda_k + \mu_l)(v_k \otimes w_l). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Daher lassen sich alle Eigenwerte von B aus den Eigenwerten von $\hat{A}_n$ und A_m bestimmen, wenn diese beiden Matrizen diagonalisierbar sind. Wenn wir mit p_m das charakteristische Polynom von $(-A_m)$ und mit q_n das charakteristische Polynom von $\hat{A}_n$ bezeichnen, lassen sich leicht Rekursionen für p_k, q_k finden. Durch Vergleich mit der Rekursion und den Anfangswerten für die Tschebyscheffpolynome 2. Art $U_k(z) = \frac{\sin((k+1)z)}{2^k \sin z}$ ergibt sich leicht

$$p_m(\mu) = (-i)^m \frac{\sin((m+1)z)}{\sin z}, \qquad \text{wobei } z = \arccos \frac{i\mu}{2} \quad (1.10)$$

$$q_n(\lambda) = \frac{\sin((n+1)z)}{\sin z}, \qquad \text{wobei } z = \arccos \frac{\lambda}{2}. \quad (1.11)$$

Die Eigenwerte von $(-A_m)$ sind also

$$\mu_l = -2i \cos\left(\frac{l\pi}{m+1}\right), \qquad l = 1, 2, \dots, m.$$

Die Eigenwerte von $\hat{A}_n$ sind

$$\lambda_k = 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

Damit ergibt sich für die Eigenwerte von $\hat{A}_n \otimes I_m - I_n \otimes A_m$ wegen Gleichung (1.9)

$$\lambda_k + \mu_l = 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) - 2i\cos\left(\frac{l\pi}{m+1}\right), \qquad k = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, m.$$

Also gilt für ein quadratisches $m \times n$–Gitter folgendes:

$$\begin{aligned} M(G) = \sqrt{|\det B|} &= \sqrt{\left|\det(\hat{A}_n \otimes I_m - I_n \otimes A_m)\right|} \\ &= \sqrt{\left|\prod_{k=1}^{n}\prod_{l=1}^{m}\left(2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) - 2i\cos\left(\frac{l\pi}{m+1}\right)\right)\right|} \\ &= 2^{\frac{mn}{2}}\sqrt{\left|\prod_{k=1}^{n}\prod_{l=1}^{m}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) - i\cos\left(\frac{l\pi}{m+1}\right)\right)\right|}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Sind n und m gerade mit $n = 2a, m = 2b$, dann gilt

$$\begin{aligned} M(G) &= 2^{2ab}\sqrt{\left|\prod_{k=1}^{2a}\prod_{l=1}^{2b}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{2a+1}\right) - i\cos\left(\frac{l\pi}{2b+1}\right)\right)\right|} \\ &= 2^{2ab}\sqrt{\left|\prod_{k=1}^{2a}\prod_{l=1}^{b}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{2a+1}\right) - i\cos\left(\frac{l\pi}{2b+1}\right)\right)\right|} \\ &\quad \times \sqrt{\left|\prod_{k=1}^{2a}\prod_{l=1}^{b}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{2a+1}\right) + i\cos\left(\frac{l\pi}{2b+1}\right)\right)\right|} \\ &= 2^{2ab}\sqrt{\left|\prod_{k=1}^{2a}\prod_{l=1}^{b}\left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{2a+1}\right) + \cos^2\left(\frac{l\pi}{2b+1}\right)\right)\right|} \\ &= 2^{2ab}\sqrt{\left|\prod_{k=1}^{a}\prod_{l=1}^{b}\left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{2a+1}\right) + \cos^2\left(\frac{l\pi}{2b+1}\right)\right)^2\right|} \\ &= 2^{2ab}\prod_{k=1}^{a}\prod_{l=1}^{b}\left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{2a+1}\right) + \cos^2\left(\frac{l\pi}{2b+1}\right)\right). \end{aligned} \tag{1.13}$$

4. Anwendung auf ein hexagonales Gitter

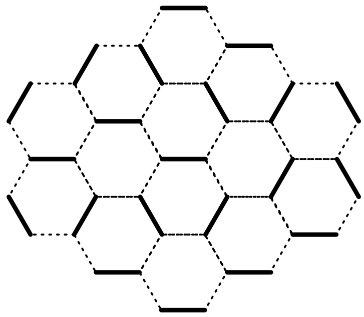
Ordnet man die Knoten in einem bipartiten Graphen so, daß die weißen vor den schwarzen kommen, erhält man eine Blockmatrix der Form

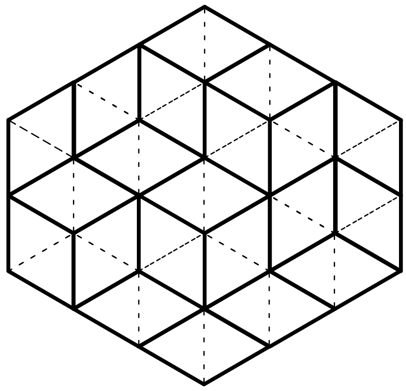
$$A = \begin{pmatrix} 0 & M \\ -M & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

Also ergibt sich

$$|\operatorname{Pf} A| = \sqrt{\det A} = \sqrt{(\det M)^2} = |\det M|. \tag{1.15}$$

Es reicht also, die Determinante der Matrix M auszurechnen, die als Zeilen die weißen und als Spalten die schwarzen Knoten enthält. Auch die Orientierungsregel läßt sich vereinfachen. Wenn wir zunächst alle Kanten von weiß nach schwarz orientieren, bleiben alle Einträge in M unverändert. In jeder Fläche sind genau die Hälfte aller Kanten im





a. Ein Sechseckgitter mit Matching. b. Das entsprechende Dreiecksgitter mit Rhombustiling.

Abbildung 10.

Uhrzeigersinn orientiert. Das ist für Flächen, deren Kantenanzahl von der Form $4k + 2$ ist, eine ungerade Anzahl wie gewünscht. In Flächen mit einer Kantenanzahl der Form $4k$ muß die Orientierung einer Kante verändert werden oder stattdessen das Gewicht einer Kante mit negativem Vorzeichen versehen werden.

Zusammengefaßt müssen wir bei bipartiten Graphen folgendes tun: Die Vorzeichen der Gewichte der Kanten müssen so geändert werden, daß in jeder Fläche mit Kantenanzahl der Form $4k+2$ eine gerade Anzahl von Gewichten geändert werden und in den anderen Flächen eine ungerade Anzahl. Dann ist die Matrix mit den weißen Knoten als Zeilen und den schwarzen Knoten als Spalten zu bilden und deren Determinante auszurechnen.

Diese Methode wollen wir auf ein hexagonales Gitter anwenden, bei dem die gegenüberliegenden Seiten gleiche Länge haben. Ein hexagonales Gitter ist ein Graph wie in Abbildung 10a, der aus lauter Sechsecken besteht, die eine Kante gemeinsam haben können. Wir können so einem Gitter einen Graphen aus lauter gleichseitigen Dreiecken zuordnen, sodaß jedem Knoten im Sechseckgitter ein gleichseitiges Dreieck im neuen Graphen entspricht (siehe Abb. 10b). Dann gibt es auch eine Bijektion zwischen Matchings im alten Graphen und Überdeckungen mit Rhomben im neuen Graphen.

Wenn die gleichseitigen Dreiecke ein Sechseck bilden, bei dem gegenüberliegende Seiten gleich lang sind, dann hängt die Anzahl der Matchings mit **Plane Partitions** zusammen.

Eine **Plane Partition** einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist eine Funktion $P : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$, die in beiden Variablen monoton fallend ist und deren Funktionswerte sich auf n aufsummieren. Es gilt also:

$$\sum_{k,l} P(k,l) = n, \quad a < b \quad \Rightarrow \quad \forall k,l : P(a,l) \geq P(b,l), \quad P(k,a) \geq P(k,b).$$

So eine Funktion muß natürlich fast überall 0 sein. Außerdem kann man sie darstellen, indem man über dem Quadrat mit Mittelpunkt $(k - \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2})$ $P(k,l)$ Würfel stapelt (siehe Abb. 11). Die Bedingungen an die Funktion bedeuten, daß es beim Stapeln keine Lücken gibt. Deshalb genügt es zu wissen, wie die Vorderseite aussieht. Wenn die Plane

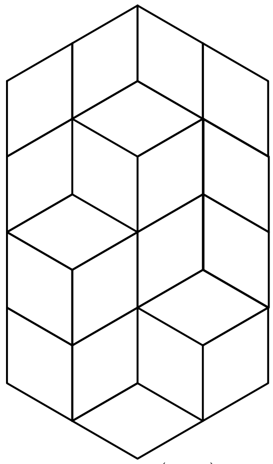


Abbildung 11. Plane Partition mit $P(1,1) = 3$, $P(1,2) = 2$ und $P(2,1) = 1$ in der Box mit Seitenlängen 2,2,4.

Partition in eine Box mit Seiten a, b, c paßt, bedeutet das gerade, daß die Projektion der Box ein Sechseck mit Seiten a, b, c, a, b, c wird. Die Projektion der Würfel ist aber gerade eine Überdeckung mit Rhomben (siehe Abb. 11).

Also kann man die Anzahl der Plane Partitions von beliebigen Zahlen in einer festen Box ermitteln, indem man die Anzahl der Rhombustilings im entsprechenden Sechseck bestimmt. Dieser Zusammenhang wurde zuerst in [**6**] dazu verwendet, um zu zeigen, daß in einem Rhombustiling eines regelmäßigen Sechsecks mit Seitenlänge n die drei Rhombussorten gleich oft vorkommen müssen.

Das erkennt man im Bild der aufgestapelten Würfel sofort, denn jede Rhombussorte entspricht einer Ebene, die normal auf eine bestimmte Koordinatenachse steht. Wenn man aber entlang einer Koordinatenachse auf die aufgestapelten Würfel (und den Rand der Box) blickt, sieht man immer ein $(n \times n)$–Quadrat, also gibt es n^2 Rhomben jeder Sorte.

Die Anzahl der Plane Partitions in einer festen Box wurde als erstes von MacMahon in [**16**] ausgerechnet. Das Ergebnis ist im folgenden Satz in der Schreibweise von Macdonald aufgeschrieben.

Satz 1.8. *Die Anzahl der Plane Partitions in einer Box mit Seiten a, b, c, a, b, c beträgt*

$$\prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\prod_{k=1}^{c}\frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}.$$

Bemerkung 1.9. *Oft stellt man an eine Plane Partition gewisse Symmetrieanforderungen. Beispielsweise kann man verlangen, daß die Plane Partition invariant unter bestimmten Permutationen der Achsen bleibt, wenn auch die betrachtete Box die entsprechende Symmetrie hat.*

Bemerkung 1.10. *Ist man an der Anzahl der Plane Partitions in einer festen Box interessiert, die außerdem noch eine bestimmte Zahl n partitionieren, so kann man jede Plane Partition P mit dem Gewicht $q^{n(P)}$ versehen, wobei $n(P)$ die Zahl ist, die von der Plane Partition P partitioniert wird. Das entspricht wieder Matchings im hexagonalen Gitter, wenn man dessen Kanten mit passenden Gewichten versieht.*

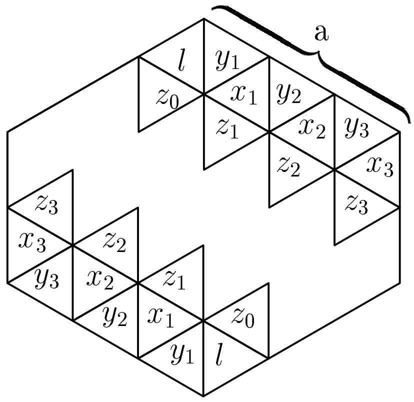


ABBILDUNG 12. Bezeichnungen der ersten und letzten Zeilen.

Wir werden jetzt mit der Methode für bipartite Graphen, die wir am Anfang dieses Abschnitts besprochen haben, die Anzahl der Rhombustilings in einem Sechseck ausrechnen. Der Term aus Satz 1.8 läßt sich leicht in die Form bringen, die wir beweisen werden.

SATZ 1.11. *Die Anzahl der Rhombustilings eines Sechseck mit Seiten a, b, c, a, b, c beträgt*

$$\frac{\prod_{j=0}^{a-1} j! \prod_{j=0}^{b-1} j! \prod_{j=0}^{c-1} j! \prod_{j=0}^{a+b+c-1} j!}{\prod_{j=0}^{a+b-1} j! \prod_{j=0}^{b+c-1} j! \prod_{j=0}^{a+c-1} j!}.$$

BEWEIS. Wenn wir die Methode für bipartite Graphen, die wir am Anfang dieses Abschnitts besprochen haben, auf das hexagonale Gitter mit Seitenlängen a, b, c, a, b, c anwenden wollen, brauchen wir gar kein Gewicht zu verändern, weil alle inneren Flächen Kantenanzahl 6 haben, was von der Form $4k + 2$ ist (siehe Abb. 10a). Wenn man das entsprechende Dreiecksgitter betrachtet, sieht man, daß ein Rhombus immer ein Dreieck der Form $\triangleright$ und ein Dreieck der Form $\triangleleft$ überdeckt. Das bedeutet, daß das hexagonale Gitter bipartit ist. Die Zeilen der Matrix M sollen deshalb mit den Dreiecken $\triangleright$, die Spalten mit den Dreiecken $\triangleleft$ indiziert werden.

Wenn eine Seite des Sechsecks die Länge 0 hat, so besitzt das Sechseck nur ein Matching, was mit der Aussage des Satzes übereinstimmt.

Deshalb reicht es, die Determinante der Matrix $M(a, b, c)$, die zum hexagonalen Gitter mit den Seiten a, b, c, a, b, c gehört, auf die Determinante von $M(a+1, b-1, c-1)$ zurückzuführen. Wir müssen zeigen, daß diese beiden Determinanten das Verhältnis

$$\frac{(b-1)!(c-1)!(a+b+c-1)!}{a!(b+c-1)!(b+c-2)!} \tag{1.16}$$

haben. Der Übergang von $M(a, b, c)$ auf $M(a + 1, b - 1, c - 1)$ entspricht im Sechseck dem Streichen der Zeile ganz rechts oben und der Zeile ganz links unten.

Wir wollen die Dreiecke dieser Zeilen wie in Abbildung 12 mit den Buchstaben $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_a, y_a, l$ bezeichnen. Die Dreiecke, die an ein x_i– Dreieck oder an ein l–Dreieck angrenzen, sollen mit z_i bezeichnet werden. Dabei wird jede Bezeichnung einmal für ein $\triangleright$–Dreieck und einmal für ein $\triangleleft$–Dreieck verwendet. Da die x_i–Dreiecke immer an die y_i–Dreiecke grenzen, gilt $m_{x_i y_i} = m_{y_i x_i} = 1$. Also kann man durch Subtrahieren der Spalte y_1 von anderen Spalten alle anderen Eintragungen in Zeile x_1 annullieren. Dabei werden nur die Spalten z_1 und y_2 in den Zeilen x_1 und l verändert. Danach kann man mit der Zeile x_1 alle anderen Eintragungen in der Spalte y_1 vernichten, ohne irgendeine andere Spalte zu verändern. Dasselbe macht man mit der *Zeile* y_1 und der Spalte x_1.

Denselben Vorgang führt man auch mit allen anderen x_i und y_i durch, wobei i von 1 bis c läuft. Bei jedem solchen Schritt werden jeweils nur die Spalten z_i und y_{i+1} (so es das noch gibt) in den Zeilen x_i und l verändert. Danach sind in den Zeilen und Spalten x_i und y_i alle Einträge 0 außer $m_{x_i y_i} = m_{y_i x_i} = 1$.

Da das Umordnen der Zeilen und Spalten keinen Einfluß auf den Betrag der Determinante hat, können wir annehmen, daß Zeilen und Spalten mit $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_a, y_a, l$ beginnen. Die Matrix hat dann Blockdiagonalform beginnend mit 2×2–Blöcken der Form $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Da diese Blöcke alle Determinante -1 haben, ändern sie nichts am Betrag der Determinante von $M(a, b, c)$. Daher können Zeilen und Spalten x_i und y_i einfach weggelassen werden.

Damit bleiben außer der Matrix $M(a+1, b-1, c-1)$, die ja schon die ganze Zeit in der größeren Matrix sitzt, nur Zeile und Spalte l übrig. Die Spalte l hatte ursprünglich nur in Zeilen y_1 und z_0 einen Eintrag $\neq 0$. Die Zeile y_1 ist jetzt verschwunden, aber die Zeilen z_i wurden beim Eliminieren verändert. In der Spalte l passiert im Schritt i folgendes: Der Eintrag $(-1)^{i-1}$ in Zeile y_i wird von den Einträgen 0 in den Zeilen y_{i+1} und z_i abgezogen und dann auf 0 geändert. Also erhält man den Eintrag $(-1)^i$ in Zeile y_{i+1} für den nächsten Schritt und den Eintrag $(-1)^i$ in Zeile z_i, der dort auch bleibt. Da dasselbe Argument auch für die Zeile l funktioniert, gilt für die entstandene Matrix $\hat{M}(a, b, c)$

$$\hat{m}_{l z_i} = \hat{m}_{z_i l} = (-1)^i \qquad \text{für } i = 0, \dots, a. \tag{1.17}$$

Wenn wir diese Eintragungen in Zeile l mit Hilfe der anderen Zeilen eliminieren können, hat die neue Matrix $\widetilde{M}(a, b, c)$ die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \widetilde{m}_{ll} & 0 \dots 0 \\ * & \\ \vdots & M(a+1, b-1, c-1) \\ * & \end{pmatrix}.$$

Es gilt also $|\det M(a, b, c)| = |\widetilde{m}_{ll} \det M(a+1, b-1, c-1)|$.

Da das Sechseck für alle positiven Seitenlängen offensichtlich Rhombustilings besitzt (siehe Abb. 13) und die Determinante von M diese Anzahl angibt, ist $M(a+1, b-1, c-1)$ invertierbar, und somit gibt es tatsächlich eine Linearkombination der Zeilen $\neq l$, die alle Eintragungen in Zeile l außer $\hat{m}_{ll}$ annulliert. Der Koeffizient einer Zeile w in der Linearkombination soll mit α_w bezeichnet werden. α_{z_i} soll dabei kurz α_i genannt werden. Auf $\widetilde{m}_{ll}$ können nur Zeilen Einfluß haben, die in der Spalte l einen Eintrag $\neq 0$ haben. Das sind gerade die Zeilen z_i, von denen wir wissen, daß $\widetilde{m}_{z_i l} = (-1)^i$ gilt.

Daraus ergibt sich

$$\widetilde{m}_{ll} = \sum_{i=0}^{a} (-1)^i \alpha_i.$$

Außerdem gilt für vier Dreiecke s, t, u, v, die wie in Abb. 14a angeordnet sind und unter denen kein x_i ist,

$$\alpha_s + \alpha_t + \alpha_u = 0,$$

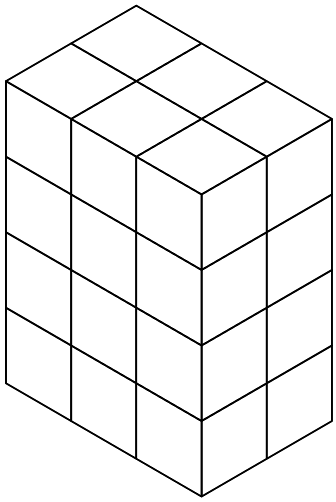
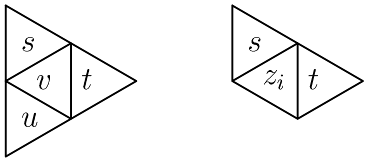


Abbildung 13. Tiling, das es in jedem Sechseck gibt.



a b

Abbildung 14.

weil nur diese Zeilen nichtverschwindende Einträge in Spalte v haben. Betrachtet man die Spalte z_i, erhält man analog für die Dreiecke s, t aus Abbildung 14b

$$\alpha_s + \alpha_t + (-1)^i = 0.$$

Also ist jeder Koeffizient die negative Summe der Koeffizienten des Dreiecks links darüber und des Dreiecks rechts. Wenn man sich überlegt, auf wieviele Arten jeder Koeffizient α_i durch wiederholte Summenbildung zu den $(-1)^{a-j}$ beiträgt, ergibt sich leicht

$$(-1)^{a-j} = \sum_{i=0}^{a} (-1)^{b+c-2} \binom{b+c-2}{c-1+j-i} \alpha_i, \tag{1.18}$$

wobei $j = 0, \ldots, a$.

Um erzeugende Funktionen verwenden zu können, sollten wir für alle j eine entsprechende Gleichung haben. Deshalb definieren wir

$$\beta_j = \sum_{i} (-1)^{b+c-2} \binom{b+c-2}{c-1+j-i} \alpha_i, \tag{1.19}$$

wobei $\alpha_i = 0$ für $i > a$ und $i < 0$. Dann gilt $\beta_j = (-1)^{a-j}$ für $j = 0, \ldots, a$ und $\beta_j = 0$ für $j \leq -c$.

Wir werden die folgenden erzeugenden Funktionen benötigen:

$$
\begin{aligned}
A(a,b,c;z) &= \sum_{i=0}^{a} \alpha_i z^i \\
A(b,c;x,y) &= \sum_{a=0}^{\infty} y^a A(a,b,c;\frac{x}{y}) \\
F(b,c;x,y) &= \sum_j (-1)^{b+c} \left(\frac{x}{y}\right)^j \binom{b+c-2}{c+j-1} = (-1)^{b+c} \frac{(x+y)^{b+c-2}}{x^{c-1}y^{b-1}} \\
B(a,b,c;z) &= \sum_{i=-c+1}^{\infty} \beta_i z^i \\
B(b,c;x,y) &= \sum_{a=0}^{\infty} y^a B(a,b,c;\frac{x}{y}) = \frac{1}{(1-x)(1+y)} + \text{Terme mit negativen Potenzen}
\end{aligned}
$$

Gleichung 1.19 ist dann äquivalent zu

$$F(b,c;x,y)A(b,c;x,y) = B(b,c;x,y).$$

Wir wollen jetzt A mit $\widetilde{A}$ vergleichen, wobei

$$\widetilde{A}(b,c;x,y) = \frac{(-1)^{b+c}}{(1-x)^b(1+y)^c\binom{b+c-2}{c-1}}.$$

Es ergibt sich

$$
\begin{aligned}
F(b,c;x,y)\widetilde{A}(b,c;x,y) &= \frac{((1+y)-(1-x))^{b+c-2}}{x^{c-1}y^{b-1}(1-x)^b(1+y)^c\binom{b+c-2}{c-1}} && (1.20) \\
&= \sum_{k=0}^{b+c-2} \frac{\binom{b+c-2}{k}(-1)^k(1-x)^k(1+y)^{b+c-2-k}}{x^{c-1}y^{b-1}(1-x)^b(1+y)^c\binom{b+c-2}{c-1}} && (1.21)
\end{aligned}
$$

Ist $k > b-1$, so hat der Term in der Summe nur negative Potenzen von x, ist $k < b-1$, hat der Term nur negative Potenzen von y. Der Term $k = b-1$ hat die Gestalt

$$\frac{(-1)^{b-1}}{x^{c-1}y^{b-1}(1-x)(1+y)} = B(b,c;x,y) + R(x,y),$$

wobei $R(x,y)$ nur Terme mit negativen Potenzen von x oder y enthält. Koeffizientenvergleich bei positiven Potenzen von x und y ergibt gerade die Gleichungen 1.18, die die α_i eindeutig festlegen. Also gilt $A = \widetilde{A}$

Jetzt können wir $\widetilde{m}_{ll}$ berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\widetilde{m}_{ll} &= \sum_{i=0}^{a} (-1)^i \alpha_i && (1.22)\\
&= A(a, b, c; -1) && (1.23)\\
&= [x^a] \sum_{a'=0}^{\infty} A(a', b, c; -1) x^{a'} && (1.24)\\
&= [x^a] A(b, c; -x, x) && (1.25)\\
&= [x^a] \frac{(-1)^{b+c}}{\binom{b+c-2}{c-1}(1+x)^{b+c}} && (1.26)\\
&= \frac{(-1)^{a+b+c}\binom{a+b+c-1}{a}}{\binom{b+c-2}{c-1}}. && (1.27)
\end{aligned}$$

Dabei steht $[x^n]f(x)$ für den Koeffizienten von x^n in der Potenzreihe $f(x)$. Daraus ergibt sich

$$\frac{|\det M(a,b,c)|}{|\det M(a+1, b-1, c-1)|} = \frac{\binom{a+b+c-1}{a}}{\binom{b+c-2}{c-1}}.$$

Das ist aber genau das gewünschte Verhältnis aus Gleichung 1.16. Damit ist Satz 1.11 bewiesen. □

Bemerkung 1.12. *Kuperberg rechnet in* [**15**] *auch die Anzahlen von Matchings mit bestimmten Symmetrien mit Hilfe von Pfaffschen Formen aus.*

KAPITEL 2

Zelluläre Graphen und alternierende Vorzeichenmuster

1. Einige Definitionen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit zellulären Graphen. Das sind Graphen, die aus schräggestellten Quadraten bestehen, die in Zeilen und Spalten angeordnet sind. Der Begriff wurde in [**1**] eingeführt und wird in der folgenden Definition genau angegeben.

Definition 2.1. *Sei S der Graph mit Knotenmenge $\{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : i+j \text{ gerade}\}$, wobei die Kanten zwischen den Knoten gezogen werden, die einander am nächsten liegen.*
Eine **Zelle** *ist ein Quadrat in dieser Menge, dessen Mittelpunkt eine gerade x-Koordinate besitzt.*
Ein endlicher Teilgraph G von S heißt **zellulär**, *wenn er eine Vereinigung von solchen Zellen ist.*

Ein Beispiel für einen zellulären Graphen ist der Aztekendiamant der Ordnung n, bei dem die Mittelpunkte der Zellen ein Quadrat von $n \times n$ Knoten bilden. In Abb. 1 sind ein Aztekendiamant und noch ein anderer zellulärer Graph dargestellt.

Der Aztekendiamant wurde als erstes in [**7**] definiert. Auch die Anzahl der Matchings wurde in dieser Arbeit berechnet. In Abschnitt 3 werden wir die Anzahl der Matchings mit einer Methode von M. Ciucu ausrechnen (siehe [**1**]).

Definition 2.2. *Eine* **horizontale Kette** *eines zellulären Graphen G ist eine maximale Menge von Zellen in G, deren Mittelpunkte dieselbe y-Koordinate haben und deren x-Koordinaten eine arithmetische Folge mit Differenz 2 bilden (siehe Abb. 2). Analog ist eine* **vertikale Kette** *eine maximale Menge von Zellen, deren Mittelpunkte dieselbe x-Koordinate haben und deren y-Koordinaten eine arithmetische Folge mit Differenz 2 bilden.*

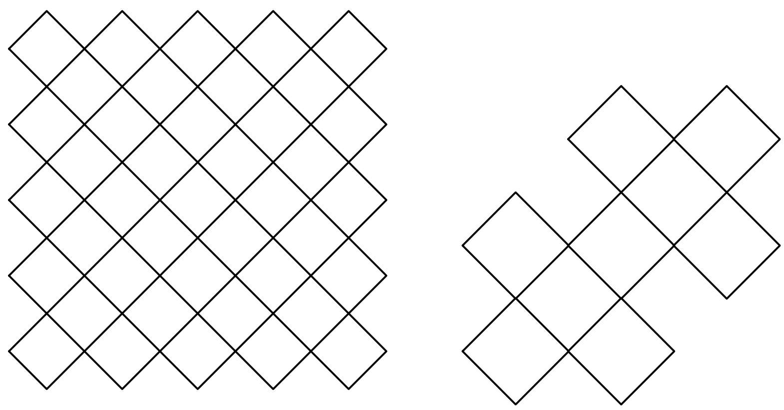


Abbildung 1. Ein Aztekendiamant und ein anderer zellulärer Graph.

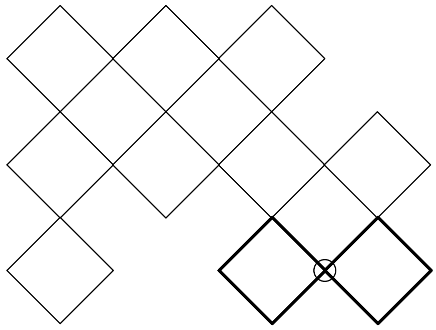


ABBILDUNG 2. Eine horizontale Kette und ein Zeilenknoten.

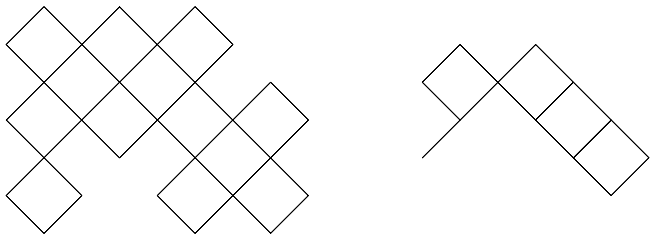


ABBILDUNG 3. Ein Graph und sein Core.

Die Anzahl der horizontalen Ketten eines Graphen G heiße $h(G)$, die der vertikalen $v(G)$.

Ein **Spaltenknoten** *ist ein Knoten, der zwei Zellen einer vertikalen Kette verbindet oder an einem Ende einer vertikalen Kette liegt, ein* **Zeilenknoten** *einer, der zwei Zellen einer horizontalen Kette verbindet oder an einem Ende einer horizontalen Kette liegt (siehe Abb. 2).*

Es ist leicht zu sehen, daß es keine Kanten zwischen zwei Zeilenknoten oder zwischen zwei Spaltenknoten geben kann. Ein zellulärer Graph ist also immer bipartit, und es kann nur dann ein perfektes Matching geben, wenn es gleichviele Spalten– wie Zeilenknoten gibt. Man kann die Anzahl der Zeilen– und Spaltenknoten aber auch so ausdrücken:

$$\#\ \text{Zeilenknoten} = \sum_{\substack{K \text{ horiz.} \\ \text{Kette}}} (\#\ (\text{Zellen in } K) + 1) = \#\ (\text{Zellen in } G) + h(G) \tag{2.1}$$

$$\#\ \text{Spaltenknoten} = \sum_{\substack{K \text{ vert.} \\ \text{Kette}}} (\#\ (\text{Zellen in } K) + 1) = \#\ (\text{Zellen in } G) + v(G) \tag{2.2}$$

Aus der Gleichheit der linken Seiten ergibt sich sofort das folgende Lemma.

LEMMA 2.3. *Damit es ein perfektes Matching gibt, muß $v(G) = h(G)$ gelten.*

DEFINITION 2.4. *Das* **Core (Herzstück, Kernstück)** *eines Graphen G ist das, was übrigbleibt, wenn man alle Endpunkte von Ketten und Kanten, die diese Endpunkte enthalten, entfernt (siehe Abb. 3). Es soll mit $\widetilde{G}$ bezeichnet werden.*

DEFINITION 2.5. *Für einen zellulären Graphen G ist ein* **alternierendes Vorzeichenmuster** *der Form G eine Funktion, die jeder Zelle von G eine Zahl aus der Menge $\{-1, 0, 1\}$ zuordnet, sodaß folgende Bedingungen erfüllt sind:*

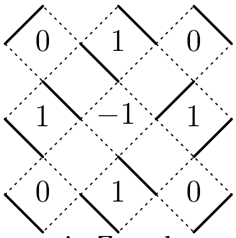


ABBILDUNG 4. Ein Matching mit Zuordnung A. Die zugehörige LR–Folge für die zweite Zeile lautet RLRL.

Wenn man die Nullen wegläßt, erhält man entlang jeder horizontalen oder vertikalen Kette das Muster $1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1, 1$*, das heißt, es wechseln sich 1 und* -1 *ab, und das Muster beginnt und endet mit 1. Außerdem enthält das Muster mindestens eine 1.*

2. Matchings–Abzählung durch Core–Matchings

Hat man ein perfektes Matching auf einem zellulären Graphen G, so kann man daraus ein alternierendes Vorzeichenmuster konstruieren. Einer Zelle z, die k Kanten des Matchings enthält, wird der Eintrag $A(z)$ wie in Abb. 4 zugeordnet, wobei

$$A(z) = \begin{cases} 1 \text{ für } k = 2 \\ 0 \text{ für } k = 1 \\ -1 \text{ für } k = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

LEMMA 2.6. *Diese Zuordnung liefert ein alternierendes Vorzeichenmuster der Form* G*.*

BEWEIS. Sieht man sich eine horizontale Kette an, so müssen die Kanten eines Matchings, die die entsprechenden Zeilenknoten enthalten, innerhalb dieser Kette liegen. Der erste Knoten in der Kette muß von einer Kante des Matchings nach rechts verbunden werden. Schreibt man auf, welche der Knoten nach links bzw. nach rechts verbunden wurden, erhält man eine Folge von L's und R's, die mit R beginnt und mit L endet. Zu jeder Zelle gehören zwei aufeinanderfolgende Buchstaben dieser Folge, die auf folgende Weise den Einträgen entsprechen (siehe Abb. 4).

$$\text{LL, RR} \leftrightarrow 1 \text{ Kante in der Zelle} \leftrightarrow \text{Eintrag} \quad 0 \tag{2.4}$$

$$\text{LR} \leftrightarrow 0 \text{ Kanten in der Zelle} \leftrightarrow \text{Eintrag} \quad -1 \tag{2.5}$$

$$\text{RL} \leftrightarrow 2 \text{ Kanten in der Zelle} \leftrightarrow \text{Eintrag} \quad 1 \tag{2.6}$$

Es ist klar, daß sich RL– und LR–Zellen abwechseln und dazwischen lauter Zellen mit Eintrag 0 liegen. Für die vertikalen Ketten läßt sich eine analoge Überlegung durchführen. □

LEMMA 2.7. *Sei* A *ein alternierendes Vorzeichenmuster der Form* G*. Dann ist die Anzahl der perfekten Matchings, aus denen durch die obige Zuordnung das Muster* A *entsteht,* $2^{N_+(A)}$*, wo* $N_+(A)$ *die Anzahl der* 1*er in* A *ist.*

BEWEIS. Wenn es ein solches Matching gibt, müssen in jeder Zelle mit Eintrag 1 zwei Kanten des Matchings liegen, in den Zellen mit Eintrag 0 jeweils eine Kante. Um die Anzahl solcher Matchings zu bestimmen, überlegen wir uns zuerst einige notwendige Bedingungen für das Matching.

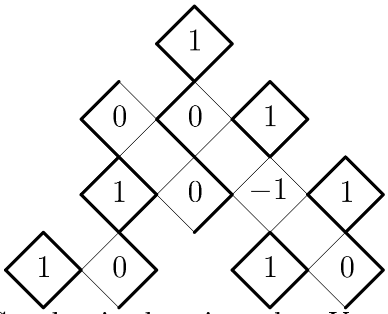


ABBILDUNG 5. Ein Graph mit alternierendem Vorzeichenmuster und dazugehörigen Haken für die Zeilenknoten.

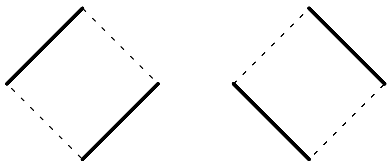


ABBILDUNG 6. Zwei Möglichkeiten für das Matching.

Ähnlich wie im Beweis von Lemma 2.6 weiß man immer, in welche Richtung ein Zeilenknoten verbunden werden muß, nämlich in die Richtung, die weg von der nächsten Zelle mit -1 in der zugehörigen horizontalen Kette zur nächsten Zelle mit 1 zeigt. Die zwei so in Frage kommenden Kanten, die einen rechtwinkeligen Haken bilden, sollen für jeden Zeilenknoten markiert werden (Abb. 5). Dasselbe läßt sich natürlich auch für die vertikalen Ketten und Spaltenknoten machen.

Die Markierung der Kanten, die sich so ergibt, hat folgende Eigenschaften: Jede Zelle mit Eintrag 0 enthält einen horizontalen und einen vertikalen Haken, die Zellen mit Eintrag -1 enthalten keine Haken und die Zellen mit Eintrag 1 sind vollständig markiert.

Um ein Matching mit den gewünschten Eigenschaften zu erhalten, muß man aus jedem Haken genau eine Kante wählen, weil zu jedem Knoten des Graphen ein solcher Haken gehört. So eine Wahl führt aber auch immer zu einem Matching, weil von jedem Knoten genau ein Haken wegführt.

Es läßt sich jetzt leicht bestimmen, auf wieviele Arten so eine Wahl von Kanten aus den Haken möglich ist. In den Zellen mit Eintrag -1 gibt es nichts zu tun, in den Zellen mit Eintrag 0 befinden sich ein waagrechter und ein senkrechter Haken, die sich in genau einer Kante schneiden, die also auch gewählt werden muß. In den Zellen mit Eintrag 1 kann man sich zwischen zwei Möglichkeiten entscheiden (Abb. 6).

Da $N_+(A)$ die Anzahl der Zellen mit Eintrag 1 ist, gibt es insgesamt $2^{N_+(A)}$ Matchings, die auf das alternierende Vorzeichenmuster A führen. $\square$

Eine ähnliche Konstruktion kann man auch ausgehend von perfekten Matchings vom Core $\widetilde{G}$ machen. Hier lautet die Zuordnung $\widetilde{A}(z)$ für eine Zelle z von G mit k Kanten im Matching von $\widetilde{G}$

$$\widetilde{A}(z) = \begin{cases} 1 \text{ für } k = 0 \\ 0 \text{ für } k = 1 \\ -1 \text{ für } k = 2. \end{cases} \tag{2.7}$$

Es ist wichtig, daß die Zuordnung $\widetilde{A}$ auf allen Zellen von G definiert ist, obwohl wir jetzt nur ein Matching von $\widetilde{G}$ betrachten. Dennoch gelten die analogen Resultate:

LEMMA 2.8. *Die Zuordnung $\widetilde{A}$ ist ein alternierendes Vorzeichenmuster der Form G.*

BEWEIS. Wir schreiben genauso wie im Beweis von Lemma 2.6 die Richtungen, in die die Knoten einer horizontalen Kette vom Matching verbunden wurden, als Folge von L's und R's auf. Dabei wird für einen linken Endknoten ein L und für einen rechten Endknoten ein R aufgeschrieben. Deshalb beginnt die Folge mit L und endet mit R. Die erste Zelle, die nicht genau 1 Kante des Matchings enthält, ist eine LR–Zelle, die keine Kante des Matchings enthält. Das bedeutet aber wegen der Zuordnung $\widetilde{A}$ den Eintrag 1. Daß sich die Einträge 1 und -1 wie gewünscht abwechseln, sieht man genauso wie im Beweis von Lemma 2.6. Für die vertikalen Ketten geht der Beweis analog. □

LEMMA 2.9. *Sei $\widetilde{A}$ ein alternierendes Vorzeichenmuster der Form G. Dann ist die Anzahl der perfekten Matchings, aus denen durch die obige Zuordnung das Muster $\widetilde{A}$ entsteht, $2^{N_-(\widetilde{A})}$, wobei $N_-(\widetilde{A})$ die Anzahl der -1er in $\widetilde{A}$ ist.*

BEWEIS. Genauso wie im Beweis von Lemma 2.7 setzt man auf die Kanten Haken, die in die Richtungen zeigen, in die ein Knoten verbunden werden kann. Da die Bedeutungen der 1er und -1er jetzt aber vertauscht sind, zeigen die Enden der Haken nicht mehr zur nächsten Zelle mit 1, sondern zur nächsten Zelle mit -1. Damit eine Kante in das Matching kommt, muß sie in den zwei Haken liegen, die zu ihren beiden Endknoten gehören. Daher kann es nicht passieren, daß die Kanten, die Endpunkte von Ketten enthalten, ins Matching kommen. Es geht also alles wie vorher, nur die Zellen, in denen man die Wahl zwischen zwei Möglichkeiten hat, sind jetzt die, die die Einträge -1 enthalten. Daher ist die Anzahl der möglichen Matchings, die auf das Muster $\widetilde{A}$ führen, $2^{N_-(\widetilde{A})}$. □

SATZ 2.10. *Sei G ein zellulärer Graph und $\widetilde{G}$ sein Core. Dann gilt*

$$\#\textit{Matchings von } G = 2^{h(G)} \cdot \#\textit{Matchings von } \widetilde{G}.$$

BEWEIS. Mit Hilfe der Überlegungen in Lemma 2.7 und Lemma 2.9 läßt sich jetzt folgende Rechnung ausführen:

$$M(G) = \sum_A 2^{N_+(A)} \stackrel{*}{=} 2^{h(G)} \sum_A 2^{N_-(A)} = 2^{h(G)} M(\widetilde{G}),$$

wobei sich die Summen immer über alle alternierenden Vorzeichenmuster A der Form G erstrecken. An der Stelle $*$ wurde die Gleichung $N_+(A) - N_-(A) = h(G)$ verwendet, die deswegen gilt, weil in jeder horizontalen Kette die Anzahl der 1er um genau 1 größer ist als die Anzahl der -1er. □

3. Anwendungen

Als erstes wollen wir den Satz 2.10 dazu verwenden, die perfekten Matchings eines Aztekendiamanten (siehe Abb. 1) abzuzählen.

Ein Aztekendiamant der Ordnung n besitzt jeweils n horizontale und vertikale Ketten. Das Core eines solchen Aztekendiamanten ist der Aztekendiamant der Ordnung

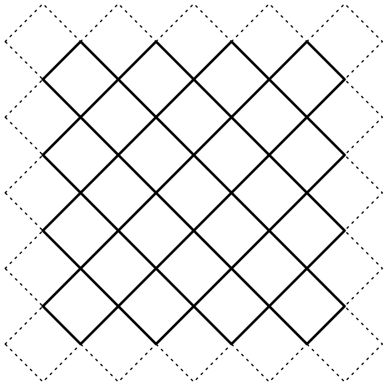


ABBILDUNG 7. Aztekendiamant mit Core.

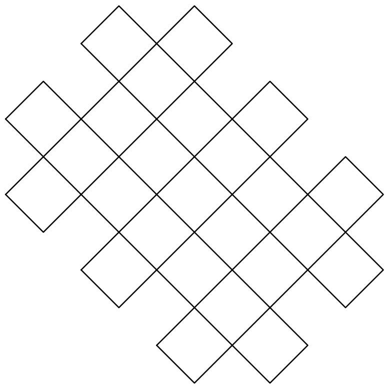


ABBILDUNG 8. Ein Rechteck mit zusätzlichen Quadraten.

$n-1$ (siehe Abb. 7). Da der Aztekendiamant der Ordnung 1 offensichtlich zwei perfekte Matchings besitzt und $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdots 2^{n-1} \cdot 2^n = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$, ergibt sich aus Satz 2.10:

SATZ 2.11. *Die Anzahl der perfekten Matchings des Aztekendiamanten der Ordnung n ist $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.*

Außerdem wollen wir die Anzahl der Matchings eines $2k \times 2l$–Quadratgitters berechnen, bei dem jede zweite Kante am Rand zu einem zusätzlichen Quadrat ergänzt wurde (siehe Abb. 8). Wir bezeichnen so ein Rechteck mit $Q(k,l)$. $Q(k,l)$ ist ein zellulärer Graph mit $h(Q(k,l)) = k+l$, und sein Core ist ein gewöhnliches $2k \times 2l$–Quadratgitter. Also folgt der folgende Satz aus Gleichung 1.13.

SATZ 2.12. *Die Anzahl der Matchings eines Rechtecks $Q(k,l)$ wie oben beschrieben ist $2^{k+l} 2^{2kl} \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{l} \left(\cos^2\left(\frac{i\pi}{2k+1}\right) + \cos^2\left(\frac{j\pi}{2l+1}\right)\right)$.*

KAPITEL 3

Abzählung mit Hilfe von Gitterpunktwegen

1. Gitterpunktwege

In diesem Kapitel wollen wir uns speziell mit Matchings von Teilgraphen eines hexagonalen Gitters beschäftigen. Für ein hexagonales Gitter mit Seiten a, b, c, a, b, c haben wir die Anzahl der Matchings schon in Kapitel 1 ausgerechnet. Dort wurde auch der Zusammenhang mit Rhombustilings und Plane Partitions beschrieben.

Rhombustilings von einem Sechseck mit Seiten a, b, c, a, b, c und Gebieten, die sich von einem Sechseck nur geringfügig unterscheiden, können aber auch bijektiv auf Familien von nichtüberschneidenden Gitterpunktwegen abgebildet werden. Deshalb zuerst die Definition von nichtüberschneidenden Gitterpunktwegen, so, wie wir sie brauchen werden.

DEFINITION 3.1. *Ein* **Gitterpunktweg** *von* (a, b) *nach* (c, d) *ist ein Pfad im Gitter der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten. Er beginnt in* (a, b)*, endet in* (c, d) *und enthält nur positive horizontale Einheitsschritte und negative vertikale Einheitsschritte (siehe Abb. 1).*

Wir sagen, daß sich zwei Gitterpunktwege **schneiden**, *wenn sie einen Knoten gemeinsam haben. Eine Familie von Gitterpunktwegen heißt* **nichtüberschneidend**, *wenn keine zwei Wege einen gemeinsamen Knoten besitzen.*

Wir verwenden die Notation $\#Pfade\,((a,b) \to (c,d))$ *für die* **Anzahl der Gitterpunktwege** *von* (a, b) *nach* (c, d) *und* $\#\,(Pfade(C_i \to D_i), i = 1, \ldots, n; n\ddot{u})$ *für die Anzahl von Familien von nichtüberschneidenden Gitterpunktwegen, wobei der i–te Weg von* C_i *nach* D_i *führt.*

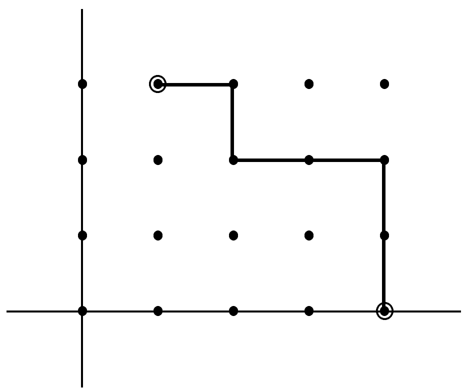


ABBILDUNG 1. Ein Gitterpunktweg von (1,3) nach (4,0).

Es ist leicht zu sehen, daß die Gleichung

$$\#\text{Pfade}\left((a,b) \to (c,d)\right) = \binom{c-a+b-d}{b-d} \tag{3.1}$$

gilt, da man die $b-d$ vertikalen Schritte beliebig aus den insgesamt $c-a+b-d$ Schritten wählen kann.

Wir werden eine Bijektion zwischen Rhombustilings und Familien von nichtüberschneidenden Gitterpunktwegen angeben. Das ist „Folklore“ und wird in vielen Arbeiten angewandt, es ist aber nicht wirklich feststellbar, wann diese Bijektion das erste Mal verwendet wurde.

Die Anzahl von Familien von nichtüberschneidenden Gitterpunktwegen kann dann mit folgendem Satz (siehe [**10**, Cor. 2] oder [**21**, Theorem 1.2]) auf eine Determinante zurückgeführt werden.

Satz 3.2 (Hauptsatz über nichtüberschneidende Gitterpunktwege). *Die zwei Mengen $\{C_i\}_{i=1}^n$ und $\{D_i\}_{i=1}^n$ von Gitterpunkten sollen folgende Kompatibilitätsbedingung erfüllen: Ist $i < k$ und $j < l$, so muß jeder Pfad $C_i \to D_l$ jeden Pfad $C_k \to D_j$ schneiden.*

Dann gilt

$$\#\left(\mathit{Pfade}(C_i \to D_i), i = 1, \dots, n; \mathit{n\ddot{u}}\right) = \det_{1 \le i,j \le n}\left(\#(\mathit{Pfade}(C_i \to D_j))\right).$$

Die Bedingung ist insbesondere dann erfüllt, wenn für alle i C_i nordöstlich von C_{i-1} liegt und D_i nordöstlich von D_{i-1}.

Beweis. Auf der rechten Seite der Gleichung trägt jede Familie von Gitterpunktwegen $(C_i \to D_{\sigma(i)}, i = 1, \dots, n)$ den Term $\operatorname{sgn} \sigma$ bei. Wir zeigen als erstes, daß sich die Terme wegheben, die Familien mit mindestens einem Schnittpunkt unter den Gitterpunktwegen entsprechen.

Für jede solche Familie von Gitterpunktwegen suchen wir unter den Schnittpunkten die Schnittpunkte mit kleinster y–Koordinate aus und unter diesen den Schnittpunkt mit kleinster x–Koordinate. Von den Gitterpunktwegen, die sich in diesem Schnittpunkt schneiden, wählen wir die zwei Wege $C_i \to D_l$ und $C_k \to D_j$ aus, deren Anfangsknoten die niedrigsten Indizes haben.

Wenn wir die Endabschnitte vom gemeinsamen Schnittpunkt zu den Endknoten D_l bzw. D_j vertauschen, erhalten wir zwei Wege $C_i \to D_j$, $C_k \to D_l$. Die neue Familie von Gitterpunktwegen enthält dieselben Kanten und daher auch dieselben Schnittpunkte wie die ursprüngliche. Deshalb führt das Vertauschen bei nochmaliger Anwendung wieder zurück. Da das Vertauschen der Endknoten D_l und D_j einer Transposition und somit einer Vorzeichenänderung der Permutation entspricht, heben sich die entsprechenden Terme weg.

Aus der Bedingung an die Gitterpunkte folgt sofort, daß alle Gitterpunktfamilien, die nicht der identischen Permutation entsprechen, Schnittpunkte von Wegen enthalten müssen. Das heißt, daß genau die Familien von nichtüberschneidenden Gitterpunktwegen, die zur identischen Permutation gehören, übrigbleiben. Diese Terme ergeben aber wegen $\operatorname{sgn} id = 1$ gerade die linke Seite. □

Um die entstehenden Determinanten auszurechnen, werden wir die folgenden beiden Determinantenformeln benützen. Zuerst eine Determinantenberechnung von Krattenthaler aus [**14**, Lemma 2.2].

Lemma 3.3. *Es gilt*

$$\det_{1\leq i,j\leq n}((X_j+A_n)(X_j+A_{n-1})\cdots(X_j+A_{i+1})(X_j+B_i)\dots(X_j+B_2)) =$$
$$= \prod_{1\leq i<j\leq n}(X_i-X_j)\prod_{2\leq i\leq j\leq n}(B_i-A_j).$$

Beweis. Wir ersetzen in der Matrix beginnend mit der letzten Zeile die i–te Zeile durch die Differenz von i–ter Zeile und $(i-1)$–ter Zeile. i läuft dabei von n bis 2 und die 1. Zeile bleibt unverändert. Für $i=2,\dots,n$ läßt sich jetzt aus der i–ten Zeile B_i-A_i herausheben. Danach hat sie die Gestalt

$$(X_j+A_n)\dots(X_j+A_{i+1})(X_j+B_{i-1})\dots(X_j+B_2).$$

Wiederholt man den Vorgang für $i=n,\dots,3$, erhält man die Faktoren $B_{i-1}-A_i, \quad i=3,\dots,n$. Das kann mit immer weniger Zeilen wiederholt werden. Die herausgehobenen Faktoren ergeben zusammen gerade $\prod_{2\leq i\leq j\leq n}(B_i-A_j)$. Die neue Matrix hat an der Stelle (i,j) ein Polynom $p_i(X_j)$ vom Grad $n-i$ mit führendem Term X_j^{n-i} stehen. Es ist also möglich, mit Zeilenumformungen alle niedrigeren Terme in den Polynomen zu entfernen. Die entstehende Matrix $(X_j^{n-i})_{i,j=1}^n$ führt gerade auf die Vandermondedeterminante $\prod_{1\leq i<j\leq n}(X_i-X_j)$. □

Weiters wollen wir noch folgende Formel von Jacobi [**11**] verwenden.

Lemma 3.4. *Sei $A=(A[i,j])_{i,j=0}^n$ eine $(n+1)\times(n+1)$–Matrix. Dann gilt:*

$$\det A\det A_{0,n}^{0,n} = \det A_0^0\det A_n^n - \det A_0^n\det A_n^0, \tag{3.2}$$

wobei A_j^i die Matrix A mit gestrichener Zeile i und gestrichener Spalte j ist und A_V^U mit einer Menge U von Zeilenindizes und einer Menge V von Spaltenindizes die Matrix, in der die entsprechenden Zeilen und Spalten gestrichen sind.

Beweis. Sei

$$A^* = \begin{pmatrix} A_0^0 & 0 & \dots & 0 & A_0^n \\ A_1^0 & 1 & \dots & 0 & A_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{n-1}^0 & 0 & \dots & 1 & A_{n-1}^n \\ A_n^0 & 0 & \dots & 0 & A_n^n \end{pmatrix}$$

die $(n+1)\times(n+1)$–Matrix, die man erhält, wenn man in der $(n+1)\times(n+1)$–Einheitsmatrix I_{n+1} die erste und letzte Spalte durch die entsprechenden Spalten der zu A adjungierten Matrix ersetzt.

Um auf die gewünschte Gleichung zu kommen, berechnen wir die Determinante des Produktes AA^* auf zwei Arten. Da das Produkt von A mit der adjungierten Matrix

$(\det A)I_{n+1}$ ergibt, hat die Matrix AA^* die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \det A & A[0,1] & \dots & A[0,n-1] & 0 \\ 0 & A[1,1] & \dots & A[1,n-1] & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & A[n-1,1] & \dots & A[n-1,n-1] & 0 \\ 0 & A[n,1] & \dots & A[n,n-1] & \det A \end{pmatrix}.$$

Da es in der ersten und letzten Spalte jeweils nur einen Eintrag gibt, erhält man

$$\det(AA^*) = (\det A)^2 \det A^{0,n}_{0,n}. \tag{3.3}$$

Andererseits gilt aber auch $\det(AA^*) = \det A \det A^*$. Das läßt sich durch Entwickeln von $\det A^*$ nach der ersten Zeile und anschließendes Entwickeln nach der letzten Zeile auf folgende Form bringen:

$$\det AA^* = \det A \det A^* = \det A(\det A^0_0 \det A^n_n - \det A^n_0 \det A^0_n) \tag{3.4}$$

Aus Gleichungen (3.3) und (3.4) ergibt sich

$$(\det A)^2 \det A^{0,n}_{0,n} = \det A(\det A^0_0 \det A^n_n - \det A^n_0 \det A^0_n).$$

Diese Gleichung gilt auch als Polynom in den $A[i,j]$. Deshalb kann man durch $\det A$ durchdividieren und erhält die behauptete Gleichung. □

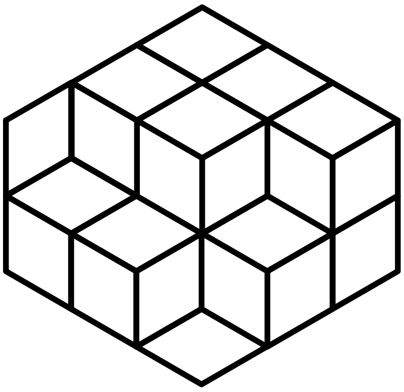
2. Matchings eines Sechsecks

Als nächstes wollen wir die Bijektion zwischen Rhombustilings eines Sechsecks mit Seitenlängen a, b, c, a, b, c und nichtüberschneidenden Gitterpunktwegen beschreiben. Ein Beispiel dafür ist in Abbildung 2 dargestellt. Dazu definieren wir zuerst eine Familie von Pfaden für jedes Rhombustiling, die wir dann durch Verzerren zu Gitterpunktwegen machen. Die Anfangspunkte dieser Pfade sind die Mittelpunkte der Kanten auf der linken oberen Seite der Länge b. Eine solche Kante k liegt in einem Rhombus, der eine weitere zu k parallele Kante k' enthält. Der Mittelpunkt von k' ist der nächste Punkt im Pfad und wird mit dem Mittelpunkt von k verbunden.

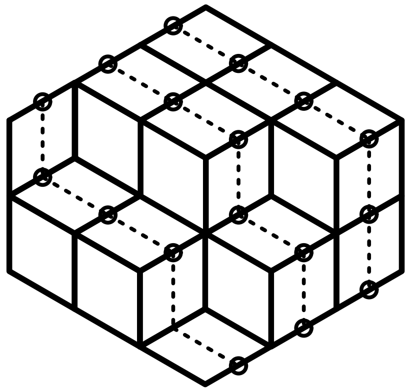
Wenn k' auch an einen zweiten Rhombus angrenzt, kann man diesen Schritt wiederholen. Dieser Prozeß ist dann zu Ende, wenn man am Mittelpunkt einer der Kanten der rechten unteren Seite der Länge b angelangt ist. Da man von zwei verschiedenen Kanten niemals im nächsten Schritt zur selben Kante gelangen kann, können sich die Pfade weder berühren noch überkreuzen. Deshalb muß der Pfad, der links oben auf der i–ten Kante beginnt, auch rechts unten auf der i–ten Kante enden.

Also erhalten wir eine Familie von nichtüberschneidenden Pfaden, deren Schritte nach unten oder nach rechts unten gehen. Von jeder solchen Familie kommt man aber wieder zurück zum ursprünglichen Rhombustiling, indem man jeden Schritt durch den entsprechenden Rhombus ersetzt und die übrige Fläche durch Rhomben der 3. Sorte überdeckt. Das funktioniert, weil solche Pfade nie das Sechseck verlassen, und liefert eine Bijektion.

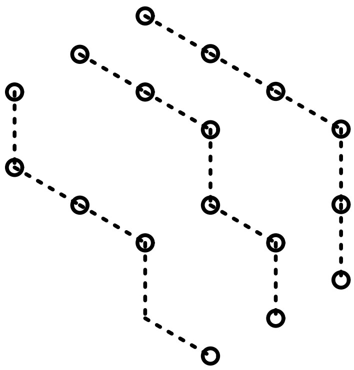
Wenn wir die Pfade so verzerren, daß sie orthogonal und damit zu Gitterpunktwegen werden, können wir die Koordinaten der Anfangspunkte $P_1, \dots, P_b$ und Endpunkte $Q_1, \dots, Q_b$ direkt ablesen, wenn der Koordinatenursprung in der linken unteren Ecke ist. Es gilt dann: $P_i = (i-1, a+i-1), Q_j = (c+j-1, j-1)$.



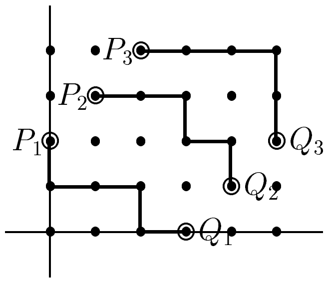
a. Ein Rhombus Tiling des Sechsecks mit Seiten 2,3,3.



b. Die zugehörige Pfadfamilie.



c. Die Pfadfamilie ohne die Rhomben.



d. Die entsprechenden Gitterpunktwege.

Abbildung 2.

Die Bedingung von Satz 3.2 ist für unsere Anfangs– und Endknoten offensichtlich erfüllt. Also müssen wir $D = \det_{1\le i,j\le b}(\#\mathrm{Pfade}(P_i \to Q_j))$ ausrechnen, um die Anzahl der Matchings zu erhalten.

Aus Gleichung (3.1) und durch Herausheben von $\frac{(a+c)!}{(c+j-1)!(a+b-j)!}$ aus Spalte j und $(-1)^{i-1}$ aus Zeile i ergibt sich

$$\begin{aligned} D &= \det_{1\le i,j\le b}\left(\binom{a+c}{c+j-i}\right) \\ &= (-1)^{\sum_{i=1}^{b}(i-1)} \prod_{j=1}^{b} \frac{(a+c)!}{(c+j-1)!(a+b-j)!} \\ &\quad \times \det_{1\le i,j\le b}\big((a+b-j)\dots(a+(i+1)-j)(-c-j+(i-1))\dots(-c-j+1)\big)\,. \end{aligned}$$

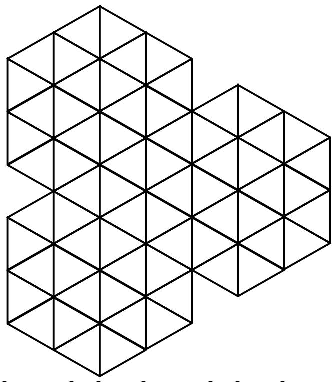


ABBILDUNG 3. Ein $2n, 2n+3, 2n, 2n+3, 2n, 2n+3$–Sechseck mit fehlenden mittleren Dreiecken für $n = 1$.

Anwenden von Lemma 3.3 mit $n = b, X_k = -k, A_k = a + k, B_k = -c + k - 1$ ergibt

$$D =$$
$$= (-1)^{\sum_{i=1}^{b}(i-1)} \prod_{j=1}^{b} \frac{(a+c)!}{(c+j-1)!(a+b-j)!} \prod_{1 \le i < j \le b} (j-i) \prod_{2 \le i \le j \le b} (-c+i-1-a-j)$$
$$= \frac{\prod_{j=1}^{a-1} j! \prod_{j=1}^{b-1} j! \prod_{j=1}^{c-1} j! \prod_{j=1}^{a+b+c-1} j!}{\prod_{j=1}^{a+b-1} j! \prod_{j=1}^{b+c-1} j! \prod_{j=1}^{a+c-1} j!}$$

BEMERKUNG 3.5. *Die Bijektion zwischen Matchings und Gitterpunktwegen läßt sich auch durchführen, wenn das Sechseckgitter gewichtet ist. Allerdings müssen Kanten, die von links oben nach rechts unten verlaufen, das Gewicht 1 tragen, weil sie ja in keinem Gitterpunktweg vorkommen, aber sehr wohl in den Matchings.*

3. Matchings eines Sechsecks mit drei fehlenden Dreiecken

In [**19**] werden auch andere Familien von Gebieten angegeben, die sich mit Rhomben überdecken lassen und bei denen die Anzahl der Rhombustilings für kleine Werte der Parameter in kleine Primfaktoren faktorisiert. So eine Faktorisierung ist ein Hinweis darauf, daß es eine Produktdarstellung gibt, da zum Beispiel $n!$ viel kleinere Primfaktoren besitzt als andere Zahlen derselben Größe. In Problem 3 von [**19**] geht es um die Anzahl der Rhombustilings eines Sechsecks mit den Seitenlängen $2n, 2n{+}3, 2n, 2n{+}3, 2n, 2n{+}3$, bei dem auf den längeren Seiten jeweils das mittlere Dreieck entfernt wurde (siehe Abb. 3).

Wir werden in diesem Abschnitt – wieder mit Hilfe von Gitterpunktwegen – ein allgemeineres Resultat zeigen, nämlich den folgenden Satz.

SATZ 3.6. *Die Anzahl der Rhombustilings eines Sechsecks mit Seitenlängen* $a, c+3, b, a+3, c, b+3$, *bei dem auf den Seiten mit Längen* $a+3, b+3, c+3$ *an den Stellen*

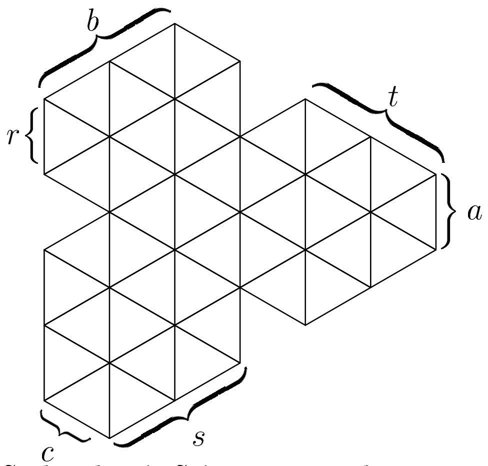


ABBILDUNG 4. Ein Sechseck mit Seiten $a, c+3, b, a+3, c, b+3$, bei dem die Dreiecke an den Stellen r, s, t fehlen, wobei $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$, $r = 1$, $s = 2$, $t = 2$.

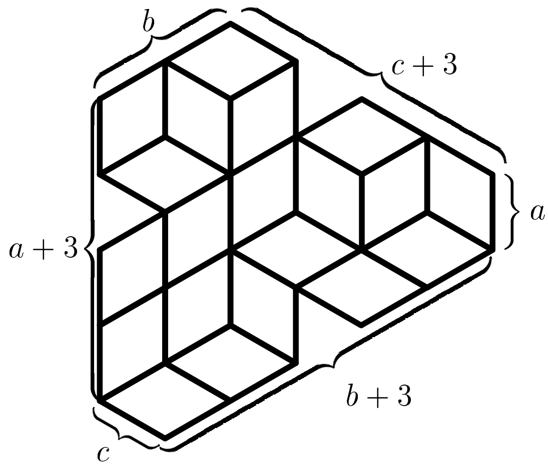
r, s bzw. t Dreiecke fehlen, beträgt

$$
\begin{aligned}
&(r+1)_b(s+1)_c(t+1)_a(c+3-t)_b(a+3-r)_c(b+3-s)_a \frac{\prod_{k=1}^{a} k! \prod_{k=1}^{b} k! \prod_{k=1}^{c} k! \prod_{k=1}^{a+b+c+2} k!}{\prod_{k=1}^{b+c+2} k! \prod_{k=1}^{a+c+2} k! \prod_{k=1}^{a+b+2} k!} \\
&\times \Big((a+1)(b+1)(c+1)(a+2-r)(b+2-s)(c+2-t) + (a+1)(b+1)(c+1)rst \\
&\quad - (a+2-r)(b+2-s)(c+2-t)rst + (a+1)(c+1)(b+2-s)(c+2-t)rs \\
&\quad + (b+1)(a+1)(c+2-t)(a+2-r)st + (c+1)(b+1)(a+2-r)(b+2-s)tr\Big).
\end{aligned}
$$

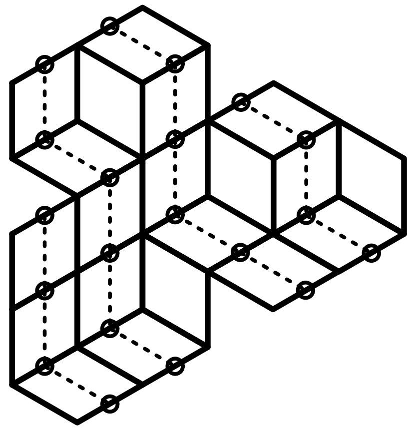
Die Stellen r, s, t werden entgegen dem Uhrzeigersinn gezählt (siehe Abbildung 4). Die Lösung des ursprünglichen Problems von Propp erhält man durch $a = b = c = 2n, r = s = t = n+1$. Die Formel vereinfacht sich dann zu

$$
((n+2)_{2n})^6 \frac{\left(\prod_{k=1}^{2n} k!\right)^3 \prod_{k=1}^{6n+2} k!}{\left(\prod_{k=1}^{4n+2} k!\right)^3} (n+1)^3(3n+1)(3n+2)^2 \tag{3.5}
$$

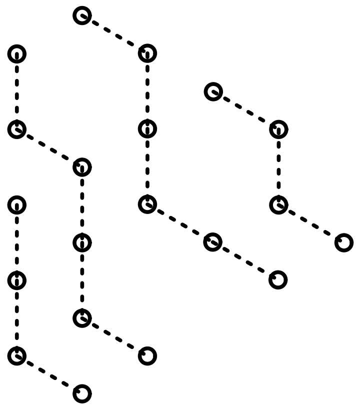
Um Satz 3.6 zu beweisen, verwenden wir wie im vorigen Abschnitt nichtüberschneidende Gitterpunktwege. Wir erzeugen die Pfade wieder auf dieselbe Weise aus einem Tiling (siehe Abb. 5). Diesmal kommen zu den Anfangsknoten $P_1, \ldots, P_b$ auf der Seite mit Länge b noch zwei zusätzliche Anfangsknoten P_0 und P_{b+1} wegen der fehlenden Dreiecke auf den Seiten mit Länge $a+3$ und $c+3$ dazu. Außerdem fehlt von den $b+3$ Endknoten auf der Seite mit Länge $b+3$ derjenige, der dem fehlenden Dreieck in Position s entspricht. Genauso wie vorher verlassen solche Pfadfamilien nie das Sechseck und sind nichtüberschneidend, also haben wir wieder eine Bijektion zwischen Matchings und nichtüberschneidenden Pfadfamilien.



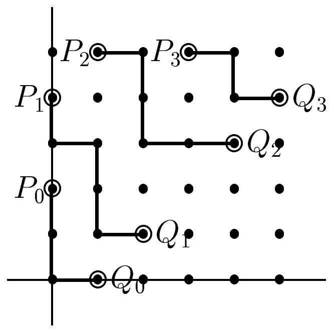
a. Ein Rhombus Tiling des Sechsecks aus Abb. 4.



b. Die zugehörige Pfadfamilie.



c. Die Pfadfamilie ohne die Rhomben.



d. Die entsprechenden Gitterpunktwege.

Abbildung 5.

Die Koordinaten der Anfangspunkte $\{P_i\}_{i=0}^{b+1}$ und Endpunkte $\{Q_j\}_{j=0}^{b+1}$ kann man aus Abbildung 5 leicht ablesen. Es gilt

$$\begin{aligned}
P_0 &= (0, a+2-r), \\
P_i &= (i-1, a+2+i), && \text{für } i = 1, \dots, b, \\
P_{b+1} &= (b+c+2-t, b+a+2), \\
Q_j &= (c+j+\chi(j \geq s), j+\chi(j \geq s)), && \text{für } j = 0, \dots, b+1.
\end{aligned}$$

Dabei ist $\chi(j \geq s) = 1$ für $j \geq s$ und 0 sonst. Der Ausdruck $j + \chi$ sorgt dafür, daß die fehlende Kante auf der Seite mit Länge $b+3$ ausgelassen wird. Die Punkte $\{P_i\}$ und $\{Q_j\}$ erfüllen wieder die Kompatibilitätsbedingung aus Satz 3.2. Wir müssen also die Determinante der Matrix $M(a,b,c,r,s,t) = (M[i,j])_{i,j=0}^{b+1}$ ausrechnen, wobei

$$M[i,j] = \#\mathrm{Pfade}(P_i \to Q_j) = \begin{cases} \dbinom{c+a-r+2}{a+2-r-j-\chi(j \geq s)} & i=0, \\ \dbinom{a+c+3}{c+j+\chi(j\geq s)-i+1} & i=1,\dots,b, \\ \dbinom{a+t}{j+\chi(j\geq s)-b-2+t} & i=b+1. \end{cases} \tag{3.6}$$

Wegen der ersten und letzten Zeile, die aus dem Rahmen fallen, läßt sich Lemma 3.3 auf M nicht anwenden. Deshalb verwenden wir Lemma 3.2, durch das ja Zeilen und Spalten gestrichen werden können. Für die Matrix M hat Lemma 3.2 die Form

$$\det M \det M_{0,b+1}^{0,b+1} = \det M_0^0 \det M_{b+1}^{b+1} - \det M_0^{b+1} \det M_{b+1}^0. \tag{3.7}$$

In $M_{0,b+1}^{0,b+1}$ fehlen die 2 Ausnahmezeilen, daher läßt sich die Determinante wieder mit Lemma 3.3 ausrechnen. Das Ergebnis steht im folgenden Lemma:

Lemma 3.7.

$$\det M_{0,b+1}^{0,b+1} = \\ = \frac{((a+c+3)!)^b (a+b+2-s)!(c+s)! \prod\limits_{1\leq i<j\leq b+1} (j-i) \prod\limits_{k=0}^{b-2} (a+c+k+4)^{b-1-k}}{(b+1-s)!(s-1)! \prod\limits_{j=1}^{b+1} \big((c+j)!(a+b+2-j)!\big)}.$$

Beweis. Durch Herausheben von Faktoren entlang der Spalten und Vorzeichen entlang der Zeilen läßt sich die Determinante folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} \det M_{0,b+1}^{0,b+1} &= \det_{1\leq i,j\leq b} \left(\binom{a+c+3}{c+j+\chi(j\geq s)-i+1} \right) \\ &= (-1)^{\sum_{i=1}^b (b-i)} \prod_{j=1}^b \frac{(a+c+3)!}{(c+j+\chi(j\geq s))!(a-j-\chi(j\geq s)+2+b)!} \\ &\quad \times \det_{1\leq i,j\leq b} \left((c+j+\chi(j\geq s)-i+2)_{i-1} (j+\chi(j\geq s)-a-b-2)_{b-i} \right). \end{aligned}$$

Jetzt läßt sich Lemma 3.3 mit $X_j = c+j+\chi(j\geq s)$, $A_k = -a-c-k-2$, $B_k = -k+2$ anwenden und führt nach geringfügigen Umformungen auf die behauptete Formel. $\square$

Um die übrigen Terme auf der rechten Seite von (3.7) auszurechnen, führen wir alle auf $\det M_0^0$ zurück. Das gelingt durch Umordnen der Zeilen und Spalten und passendes Ändern der Parameter a,b,c,r,s,t. Das Vorzeichen der Determinante ändert sich dadurch aber nicht.

Wenn eine Matrix wegen einer gestrichenen Zeile von einem bestimmten Parameter nicht abhängt, wird an diese Stelle ein Strich gesetzt. Es gilt

$$\det M_{b+1}^{0}(a,b,c,-,s,t) = \det M_0^0(a+1,b,c-1,-,s+1,t-1), \tag{3.8}$$
$$\det M_{b+1}^{b+1}(a,b,c,r,s,-) = \det M_0^0(c,b,a,-,b+2-s,a+2-r), \tag{3.9}$$
$$\det M_0^{b+1}(a,b,c,r,s,-) = \det M_0^0(c+1,b,a-1,-,b+3-s,a+1-r). \tag{3.10}$$

Es ist daher nur mehr notwendig, $\det M_0^0$ auszurechnen. Wir schreiben das Ergebnis für $\det M_0^0$ im nächsten Lemma auf und verwenden es, um Satz 3.6 zu zeigen.

Lemma 3.8.

$$\begin{aligned}\det M_0^0 = \prod_{i=1}^{b}\left(\frac{(a+c+3)!}{(b+c-i+3)!(a+i+2)!}\right)&\frac{(a+t)!}{t!(a+b+2)!}\frac{\prod_{i=1}^{b} i!}{(s-1)!(b+2-s)!}\\ \times (a+2)_{b+1-s}(c+3)_{s-2}&(a+1)_{b+2}(a+3)_b(c+3-t)_b\\ &\times\prod_{k=4}^{b+2}\left((a+c+k)^{b+3-k}\right)\left((c+2)(b+1)-(s-1)(c+2-t)\right).\end{aligned}$$

Beweis von Satz 3.6. Wenn wir Lemma 3.8 voraussetzen, kennen wir alle Terme in Gleichung (3.7) und können $\det M(a,b,c,r,s,t)$ ausrechnen. Es ergibt sich tatsächlich der behauptete Ausdruck aus Satz 3.6. Setzt man nämlich diesen Ausdruck für $\det M$ ein und verwendet die Gleichungen (3.8)–(3.10) und Lemma 3.8 für die anderen Terme, bleiben nach Kürzen der gemeinsamen Faktoren nur mehr Polynome auf beiden Seiten übrig. Diese verbleibende Gleichung

$$\begin{aligned}&(a+1)(c+1)\big((c+2)(b+1)-(s-1)(c+2-t)\big)\big((a+2)(b+1)-(b+1-s)r\big)\\ &\qquad -t(a+2-r)\big((a+1)(b+1)-(b+2-s)r\big)\big((c+1)(b+1)-s(c+2-t)\big)\\ =&(a+1)(b+1)(c+1)(a+2-r)(b+2-s)(c+2-t)+(a+1)(b+1)(c+1)rst\\ &\qquad -(a+2-r)(b+2-s)(c+2-t)rst+(a+1)(c+1)(b+2-s)(c+2-t)rs\\ &\qquad +(b+1)(a+1)(c+2-t)(a+2-r)st+(c+1)(b+1)(a+2-r)(b+2-s)tr\end{aligned}$$

läßt sich aber direkt überprüfen. Damit ist der Satz bis auf Lemma 3.8 bewiesen. □

Also muß nur noch Lemma 3.8 bewiesen werden.

Beweis von Lemma 3.8. Um die Behauptung für $\det M_0^0$ zu beweisen, wenden wir Lemma 3.2 jetzt für $A = M_0^0$ an. Das ergibt

$$\det M_0^0 \det M_{0,1,b+1}^{0,1,b+1} = \det M_{0,1}^{0,1}\det M_{0,b+1}^{0,b+1} - \det M_{0,1}^{0,b+1}\det M_{0,b+1}^{0,1}. \tag{3.11}$$

Ähnlich wie in Gleichungen (3.8)–(3.10) wollen wir die vorkommenden Determinanten durch Ändern der Parameter auf $\det M_0^0$ und $\det M_{0,b}^{0,b}$ zurückführen. Dann können wir den Ausdruck für M_0^0 mit Induktion nach b beweisen.

Für die Terme aus der Gleichung (3.11) ergibt sich leicht

$$\det M_{0,1,b+1}^{0,1,b+1}(a,b,c,-,s,-) = \det M_{0,b}^{0,b}(a,b-1,c,-,s-1,-), \tag{3.12}$$

$$\det M_{0,1}^{0,1}(a,b,c,-,s,t) = \det M_0^0(a,b-1,c,-,s-1,t), \tag{3.13}$$

$$\det M_{0,b+1}^{0,1}(a,b,c,-,s,t) = \det M_0^0(a+1,b-1,c-1,-,s,t-1), \tag{3.14}$$

$$\det M_{0,1}^{0,b+1}(a,b,c,-,s,-) = \det M_{0,b+1}^{0,b+1}(a-1,b,c+1,-,s-1,-), \tag{3.15}$$

wobei ein Strich wieder bedeutet, daß der entsprechende Parameter nicht vorkommt.

Die Matrizen der Form M_0^0 in diesen Gleichungen haben alle Parameter $(b-1)$ statt b. Deshalb kann man Gleichung (3.11) für die Induktion nach b verwenden. Dazu setzen wir den behaupteten Ausdruck für $\det M_0^0$ ein und verwenden Lemma 3.7 für $\det M_{0,b+1}^{0,b+1}$ und $\det M_{0,b}^{0,b}$. Nach Kürzen aller gemeinsamen Faktoren muß man nur mehr

$$\begin{aligned}&\big((c+2)(b+1)-(s-1)(c+2-t)\big)(b+c+2-t)\\&\qquad=\big((c+2)b-(s-2)(c+2-t)\big)(b+c+2)-\big((c+1)b-(s-1)(c+2-t)\big)t\end{aligned}$$

zeigen. Das kann man aber direkt überprüfen. □

Bemerkung 3.9. *Wie schon früher erwähnt, finden sich Anwendungen von nichtüberschneidenden Gitterpunktwegen auf Tilingprobleme in zahlreichen anderen Arbeiten. Beispiele hiefür sind* [**5, 8, 9, 17**]. *In diesen Arbeiten werden beispielsweise Rhombustilings, die einen fixierten Rhombus enthalten, abgezählt* [**5, 9**], *Rhombustilings von sechseckigen Regionen mit einem „Loch“ in der Mitte* [**17**], *oder Rhombustilings von achteckigen Regionen* [**8**].

KAPITEL 4

Lokale Ersetzungen im Graphen

1. Zwei Ersetzungen

Es ist möglich, einen Graphen lokal so zu verändern, daß sich die gewichtete Summe der Matchings des alten Graphen aus der des neuen Graphen ausrechnen läßt. Zuerst betrachten wir eine solche Ersetzung aus [**2**], die wir in Kapitel 5 verwenden werden (siehe Abb. 1). Dazu wählt man einen beliebigen Knoten v eines gewichteten Graphen G und eine beliebige Aufteilung der Knoten, die mit v eine gemeinsame Kante haben, in drei Mengen X, Y, Z. Der Knoten v wird im neuen Graphen $\widehat{G}$ in drei Knoten v_1, v_2, v_3 aufgespalten, zwischen denen die Kanten $\{v_1, v_2\}$ und $\{v_2, v_3\}$ mit Gewicht 1 gezogen werden. Wenn es in G eine Kante $\{y, v\}$ für ein $y \in Y$ gegeben hat, so soll es in $\widehat{G}$ die Kante $\{y, v_1\}$ mit demselben Gewicht geben. Genauso werden Kanten $\{z, v\}$ für $z \in Z$ durch $\{z, v_3\}$ ersetzt. Kanten der Form $\{x, v\}$ für ein $x \in X$ werden durch zwei Kanten $\{x, v_1\}$ und $\{x, v_3\}$ ersetzt, die jeweils die Hälfte des Gewichtes von $\{x, v\}$ erhalten. Die übrigen Knoten und die Kanten, die v nicht enthalten, bleiben unverändert. Es gilt dann folgendes Lemma:

Lemma 4.1. *Die gewichtete Anzahl der Matchings ist bei G und $\widehat{G}$ gleich.*

Beweis. Sei m ein Matching von G. Ist v in diesem Matching mit einem Knoten in Y verbunden, so soll im Graphen $\widehat{G}$ v_1 mit diesem Knoten verbunden werden. v_2 muß dann mit v_3 verbunden werden und alle anderen Kanten können bleiben, wie sie sind. Das ergibt ein Matching von $\widehat{G}$ mit demselben Gewicht wie m. Wenn v mit einem Knoten in Z verbunden ist, geht man ganz analog vor.

Wenn v mit einem Knoten $x \in X$ verbunden ist, so gibt es zwei Matchings von $\widehat{G}$, die m entsprechen. Eines davon erhält man, wenn man v_1 mit x und v_3 mit v_2 verbindet und alle anderen Kanten von m unverändert läßt. Das andere erhält man, wenn man die Rollen von v_1 und v_3 vertauscht. Da aber die Gewichte der Kanten von v_1 und v_3 zu Knoten von X gerade die Hälfte der Gewichte der entsprechenden Kanten von v zu solchen Knoten betragen, stimmt die Summe der Gewichte der beiden Matchings von $\widehat{G}$ mit dem Gewicht von m überein. Damit sieht man, daß die gewichtete Summe aller Matchings tatsächlich unverändert bleibt. □

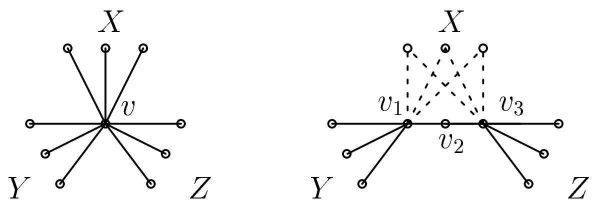


Abbildung 1. Eine lokale Ersetzung, die strichlierten Kanten haben halbes Gewicht.

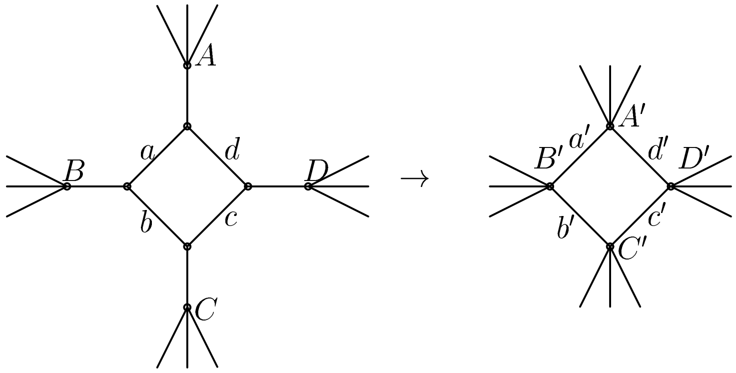


ABBILDUNG 2. Urban Renewal.

Als nächstes betrachten wir eine Ersetzung aus [**20**], die den Namen **Urban Renewal** trägt (siehe Abb. 2). Aus dem Graphen G wird der neue Graph G', der sich nur durch die vier fehlenden Kanten und die neuen Gewichte a', b', c', d' von G unterscheidet. Dabei gilt $a' = \frac{c}{ac+bd}, b' = \frac{d}{ac+bd}, c' = \frac{a}{ac+bd}, d' = \frac{b}{ac+bd}$. Alle anderen Kanten und Gewichte bleiben unverändert.

LEMMA 4.2. *Der neue Graph G' hat dieselbe gewichtete Summe der Matchings wie G bis auf den Faktor $ac + bd$, es gilt also*

$$M(G; w) = M(G'; w')(ac + bd).$$

BEWEIS. Das Lemma läßt sich leicht durch Fallunterscheidung beweisen. Wenn ein Matching m von G nur eine der Kanten mit Gewichten a, b, c, d enthält, sagen wir die Kante mit Gewicht a, so bedeutet das, daß die Knoten A und B durch m mit Knoten außerhalb des dargestellten Teils des Graphen verbunden werden, die Knoten C und D aber nicht. Will man m auf G' übertragen, so sieht man, daß man anstelle der Kante mit Gewicht a jetzt die Kante mit Gewicht c' ins Matching nehmen muß, um C' und D' zu verbinden. Für das neue Matching m' gilt offensichtlich $(ac + bd)w'(m') = w(m)$.

Wenn ein Matching m von G die Kanten mit Gewicht a und c enthält, so entspricht das einem Matching m' in G', das keine Kanten im Quadrat enthält. Die Gewichte der beiden Matchings unterscheiden sich jetzt um den Faktor ac. Zusammen mit dem Matching $\widetilde{m}$ von G, das die Kanten mit Gewichten b und d enthält, aber sonst mit m übereinstimmt, erhält man $w(m) + w(\widetilde{m}) = (ac + bd)w'(m')$ und damit wieder den gewünschten Faktor.

Enthält das Matching m von G keine Kanten im Quadrat, so gibt es zwei zugehörige Matchings m'_1, m'_2 von G', die entweder die Kanten mit Gewichten a' und c' oder die mit Gewichten b' und d' enthalten. Also ergibt sich $(a'c' + b'd')w(m) = w'(m'_1) + w'(m'_2)$. Das ist aber wegen $a'c' + b'd' = \frac{1}{ac+bd}$ wieder der gewünschte Faktor.

Man sieht leicht, daß bei dieser Fallunterscheidung jeder Term genau einmal verwendet wurde, also erhält man auch für die Summen den Faktor $ac + bd$ wie behauptet. □

2. Anwendung auf einen Aztekendiamanten

Wir berechnen mit Hilfe von Urban Renewal noch einmal die Anzahl der Matchings eines Aztekendiamanten der Größe n. Dazu bezeichnen wir diese Anzahl mit $A(n)$.

SATZ 4.3.

$$A(n) = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

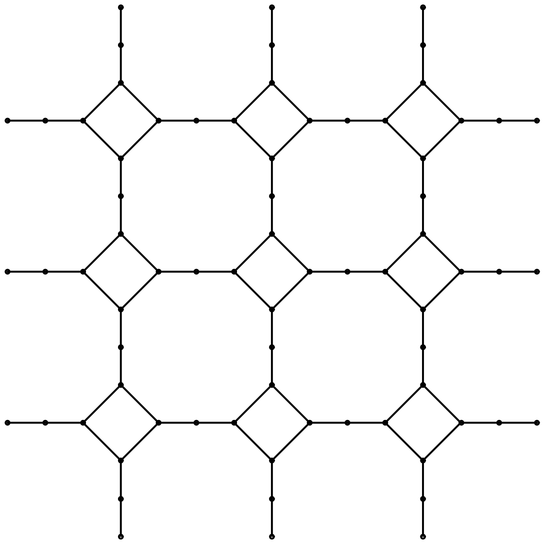


Abbildung 3. 3×3–Aztekendiamant mit verdreifachten Knoten.

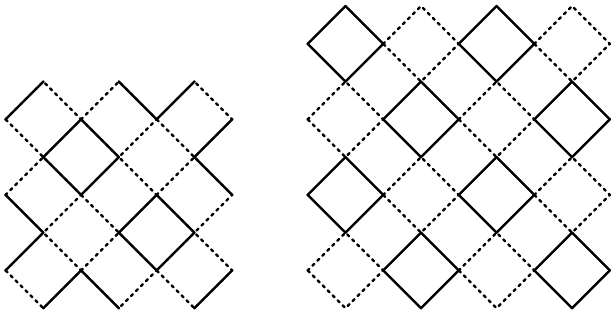


Abbildung 4. Die strichlierten Kanten haben Gewicht $\frac{1}{2}$.

Beweis. Um Urban Renewal auf den Aztekendiamanten anwenden zu können, verdreifachen wir zuerst alle Knoten wie in Abb. 3, sodaß jede Zelle mit den vier daranhängenden Kanten dem Ausgangsbild der Ersetzung entspricht. Wenn die neuen Kanten alle Gewicht 1 haben, ändert das nichts an der gewichteten Summe der Matchings. Wir wenden also auf jede Zelle Urban Renewal an und erhalten fast denselben Aztekendiamanten. Allerdings hängt jetzt an jedem Randknoten eine Kante mit Gewicht 1, und alle übrigen Kanten haben jetzt ein anderes Gewicht als zuvor. In jeder Zelle ergibt sich ein Faktor $ac + bd = 2$. Die Anzahl der Zellen ist n^2, also erhalten wir nach Lemma 4.2 einen Faktor 2^{n^2}. Die wegstehenden Kanten müssen in jedem Matching enthalten sein und ändern das Gewicht eines Matchings nicht, also können sie einfach zusammen mit den dazugehörigen Knoten entfernt werden. Der übrigbleibende Graph ist der Aztekendiamant der Ordnung $n-1$. Die Kanten tragen jetzt wegen $\frac{1}{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1} = \frac{1}{2}$ alle das Gewicht $\frac{1}{2}$. Da aber die Anzahl der Kanten in jedem Matching die Hälfte der Knotenanzahl ist und die Anzahl der Knoten in einem Aztekendiamanten mit Seitenlänge $n - 1$ $2n(n-1)$ beträgt, erhält man gegenüber einem ungewichteten Aztekendiamanten der Ordnung $n - 1$ einfach den Faktor $2^{-n(n-1)}$. Insgesamt erhält man also $A(n) = 2^{n^2 - n(n-1)} A(n-1) = 2^n A(n-1)$. Also erhalten wir wegen $A(1) = 2$: $A(n) = 2^{n(n+1)}$. $\square$

Dieselbe Methode funktioniert auch für gewichtete Aztekendiamanten. Wir berechnen die gewichtete Summe der Matchings $\widetilde{A}_1(2n-1)$ des Aztekendiamanten der Größe $2n-1$, der in jeder Zelle zwei gegenüberliegende Kanten mit Gewicht $\frac{1}{2}$ besitzt (siehe Abb. 4.a) und die gewichtete Summe $\widetilde{A}_2(2n)$ des Aztekendiamanten der Größe $2n$, der in jeder zweiten Zelle vier Kanten mit Gewicht $\frac{1}{2}$ besitzt (siehe Abb. 4.b). Es gilt der folgende Satz.

Satz 4.4.
$$\widetilde{A}_1(2n-1) = \widetilde{A}_2(2n) = \left(\frac{5}{4}\right)^{n^2}$$

Beweis. Zuerst beschäftigen wir uns mit $\widetilde{A}_1(2n+1)$. Wie im Falle des ungewichteten Aztekendiamanten verdreifachen wir alle Knoten und wenden dann auf jedes Quadrat Urban Renewal an. Diesmal ergibt jede der $(2n+1)^2$ Zellen den Faktor $ac+bd = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+1\cdot 1 = \frac{5}{4}$. Die Gewichte $\frac{1}{2}$ ändern sich zu $\frac{2}{5}$, die Gewichte 1 zu $\frac{4}{5}$. Wenn wir wieder die Randknoten mit den wegstehenden Kanten vom Gewicht 1 entfernen und für jede der $(2n+1)2n$ Kanten in einem Matching den Faktor $\frac{4}{5}$ rechnen, erhalten wir einen Aztekendiamanten der Größe $2n$, der in jeder zweiten Zelle vier Kanten mit Gewicht $\frac{1}{2}$ besitzt. Daraus ergibt sich
$$\widetilde{A}_1(2n+1) = \left(\frac{5}{4}\right)^{(2n+1)^2}\left(\frac{4}{5}\right)^{(2n+1)2n}\widetilde{A}_2(2n) = \left(\frac{5}{4}\right)^{2n+1}\widetilde{A}_2(2n). \tag{4.1}$$
Wenn wir dieselbe Überlegung für $\widetilde{A}_2(2n)$ durchführen, ist der Faktor $ac+bd$ für die Zellen mit halben Gewichten $\frac{1}{2}$, für die anderen Zellen 2. Da es gleichviele Zellen von jeder Sorte gibt, heben sich die Faktoren gegenseitig weg. Die neuen Gewichte betragen gerade dort $\frac{1}{2}$, wo sie vorher 1 waren, und umgekehrt. Deshalb ergibt sich ein Aztekendiamant der Größe $2n-1$, der in jeder Zelle zwei gegenüberliegende Kanten mit Gewicht 1 besitzt und zwei Kanten mit Gewicht $\frac{1}{2}$. Es gilt also
$$\widetilde{A}_2(2n) = \widetilde{A}_1(2n-1) \tag{4.2}$$

Zusammen mit dem Anfangswert $\widetilde{A}_1(1) = \frac{5}{4}$ erhalten wir aus den Gleichungen (4.1) und (4.2) das Ergebnis
$$\widetilde{A}_1(2n-1) = \widetilde{A}_2(2n) = \left(\frac{5}{4}\right)^{(2n-1)+(2n-3)+\cdots+1} = \left(\frac{5}{4}\right)^{n^2}.$$
$\square$

3. Anwendung auf „Festungen“

In diesem Abschnitt wollen wir die Anzahl der Matchings einer Festung berechnen. Diese Anzahl wurde als erstes in [**22**] angegeben. Eine Festung ist ein Graph, der aus schräggestellten Quadraten besteht, deren Mittelpunktkoordinaten durch drei teilbar sind. Die nächstliegenden Knoten werden miteinander verbunden, und an jedes zweite Quadrat am Rand wird eine Extrakante angehängt (siehe Abb. 5).

Es gilt der folgende Satz.

Satz 4.5. *Eine Festung der Größe $2n$ besitzt 5^{n^2} Matchings.*

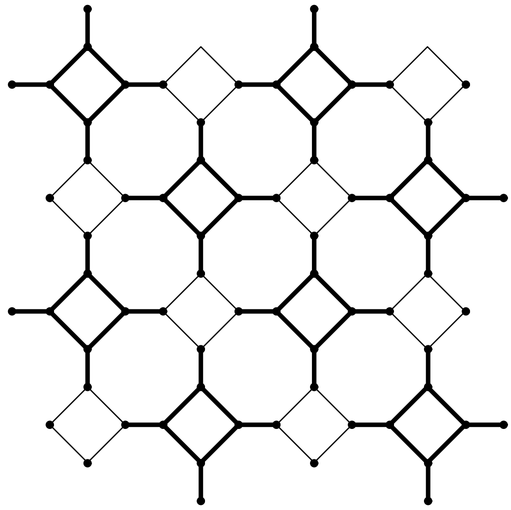


ABBILDUNG 5. Eine Festung der Größe 4.

BEWEIS. Wir wenden Urban Renewal auf jedes zweite Quadrat in der Festung an (siehe die fettgezeichneten Quadrate in Abb. 5). Aus jedem dieser $2n^2$ Quadrate erhalten wir den Faktor $ac + bd = 2$. Das ergibt insgesamt den Faktor

$$2^{2n^2}. \tag{4.3}$$

Der Graph, der entsteht, ist ein Aztekendiamant der Größe $2n$, bei dem jede zweite Zelle vier Kanten vom Gewicht $\frac{1}{2}$ besitzt (siehe Abb. 4.b). Die gewichtete Summe der Matchings dieses Graphen wurde in Satz 4.4 mit $\widetilde{A}_2(2n) = \left(\frac{5}{4}\right)^{n^2}$ angegeben.

Zusammen mit dem Faktor aus Gleichung 4.3 ergibt das für die Anzahl der Matchings einer Festung der Größe $2n$

$$2^{2n^2}\left(\frac{5}{4}\right)^{n^2} = 5^{n^2}.$$

$\square$

KAPITEL 5

Der Matchings–Faktorisierungssatz

1. Formulierung und Beweis des Faktorisierungssatzes

Wir beschreiben jetzt den Faktorisierungssatz von M. Ciucu ([**2**]). Er besagt im wesentlichen, daß es bei einem spiegelsymmetrischen Graphen ausreicht, die Anzahl der Matchings in zwei Teilgraphen zu berechnen, die jeweils fast die Hälfte des ursprünglichen Graphen sind. Der Satz läßt sich auf bipartite spiegelsymmetrische ebene Graphen anwenden, die nach Wegnahme aller Knoten auf der Symmetrieachse in zwei Teile zerfallen. Wenn ein spiegelsymmetrischer Graph gewichtet ist, so sollen auch die Gewichte der Symmetrie gehorchen.

Wir werden den Graphen so darstellen, daß die Symmetrieachse waagrecht liegt. Außerdem können wir annehmen, daß auf der Symmetrieachse eine gerade Anzahl von Knoten liegt, weil sonst die Gesamtanzahl der Knoten ungerade ist und somit kein perfektes Matching existiert. Diese Anzahl heiße $2 \cdot l(G)$. Die Knoten auf der Symmetrieachse sollen der Reihe nach mit $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_{l(G)}, b_{l(G)}$ bezeichnet werden.

Da der Graph bipartit ist, können die Knoten des Graphen so schwarz und weiß gefärbt werden, daß nur Knoten verschiedener Farbe von Kanten verbunden werden und daß der linkeste Knoten a_1 auf der Symmetrieachse weiß gefärbt wird.

Um den Graphen entlang der Achse in zwei kleinere Teile zu zerlegen, werden wir bei manchen der Knoten auf der Symmetrieachse alle Kanten, die in die obere Hälfte des Graphen führen, entfernen, und bei den anderen Knoten alle Kanten, die in die untere Hälfte des Graphen führen. Diese beiden Möglichkeiten wollen wir kurz mit **oberhalb schneiden** bzw. **unterhalb schneiden** bezeichnen. Zuerst werden wir nur bei den Knoten a_i Kanten entfernen und zeigen, daß die gewichtete Summe der Matchings des neuen Graphen immer gleich bleibt, egal, bei welchen der a_i man oben und bei welchen man unten schneidet.

LEMMA 5.1. *Sei G ein ebener gewichteter spiegelsymmetrischer Graph, der beim Entfernen aller Knoten von der Symmetrieachse zerfällt. Mit den Bezeichnungen von oben gilt:*

Wenn man bei jedem Knoten a_i auf der Symmetrieachse entweder oberhalb oder unterhalb schneidet, ergibt sich für den Restgraph immer die gleiche gewichtete Summe von Matchings.

BEWEIS. Es reicht, zwei Schnittmöglichkeiten zu betrachten, die sich nur in einem Knoten a_i unterscheiden. Der Graph, der durch Schneiden oberhalb von a_i entsteht, heiße H_1, der andere H_2. Wir wollen jetzt zu einem Matching m_1 des Graphen H_1 ein Matching von H_2 finden, das dasselbe Gewicht hat. Da H_1 dieselben Knoten wie G hat, ist m_1 auch ein Matching von G. Man sieht sofort, daß auch das Bild m' von m_1 nach Spiegelung an der Achse wieder ein Matching von G ist, welches auch dasselbe Gewicht wie m_1 hat. Wenn man diese beiden Matchings übereinanderlegt, erhält man

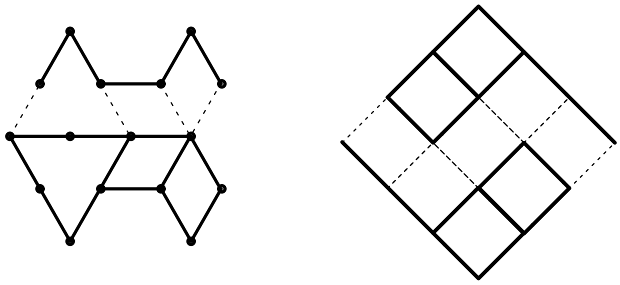


ABBILDUNG 1. Die strichlierten Kanten werden beim Schneiden entfernt.

eine Menge disjunkter Kreise, sodaß jeder Knoten von G in genau einem Kreis enthalten ist. Der Kreis C, der den Knoten a_i enthält, muß symmetrisch zur Achse liegen, denn sonst wäre sein Spiegelbild ein anderer Kreis, der mit ihm zumindest den Knoten a_i gemeinsam hat.

Die Knoten im Inneren des Kreises liegen auch auf disjunkten Kreisen. Auf jedem dieser Kreise liegen die Kanten abwechselnd in m_1 und m'. Deshalb haben alle diese Kreise gerade Länge, und im Inneren von C liegt eine gerade Zahl von Knoten. Dann muß aber auch eine gerade Zahl von Knoten auf der Achse im Inneren von C liegen. Das bedeutet, daß der zweite Schnittpunkt von C mit der Symmetrieachse einer der Knoten b_j ist, man sieht auch sofort, daß es nur zwei Schnittpunkte mit der Achse geben kann. Nimmt man also im Kreis C die Kanten des Matchings m' und in allen anderen Kreisen die Kanten des Matchings m_1, erhält man ein Matching m_2, das in a_i nach oben führt und in allen anderen a–Knoten in dieselbe Richtung wie m_1 führt. Also ist m_2 ein Matching von H_2, das wegen der Symmetrie der Gewichte in G dasselbe Gewicht wie m_1 hat. Diese Konstruktion führt auch wieder zu m_1 zurück und liefert so eine gewichtserhaltende Bijektion zwischen den Matchings von H_1 und H_2. Damit ist das Lemma bewiesen. □

DEFINITION 5.2. *G^+ und G^- sind die Graphen, die beim Schneiden oberhalb von weißen a_i und schwarzen b_j und unterhalb von schwarzen a_i und weißen b_j aus G entstehen, wobei das Gewicht der Kanten, die auf der Symmetrieachse von G liegen, halbiert wird. Dabei ist G^+ der Teil in der oberen Hälfte und G^- der Teil in der unteren Hälfte (siehe Abb. 1). Die Gewichtsfunktionen auf diesen Teilgraphen sollen w^+ und w^- heißen.*

SATZ 5.3. *Sei G ein ebener bipartiter, gewichteter, symmetrischer (zusammenhängender) Graph, der bei Wegnahme der Knoten auf der Symmetrieachse in zwei Teile zerfällt. Dann gilt: $M(G;w) = 2^{l(G)}M(G^+;w^+)M(G^-;w^-)$.*

BEWEIS. Zuerst wollen wir die Kanten auf der Symmetrieachse loswerden. Dazu verwenden wir die Ersetzung aus Lemma 4.1 für die Knoten der Symmetrieachse, wobei wir die drei neuen Knoten immer auf einer senkrechten Geraden symmetrisch zur Achse anordnen. Als erstes wählen wir $v = a_1$. Die Menge X soll die Menge der Kanten von a_1 auf der Symmetrieachse sein, die Menge Y die Kanten, die a_1 mit einem Knoten oberhalb der Symmetrieachse verbinden, und Z die restlichen Kanten von a_1. Lemma 4.1 bewirkt, daß die Kanten auf der Symmetrieachse, die a_1 enthalten, von der Symmetrieachse weggeschoben werden und ihr Gewicht halbiert wird (siehe Abb. 2.1).

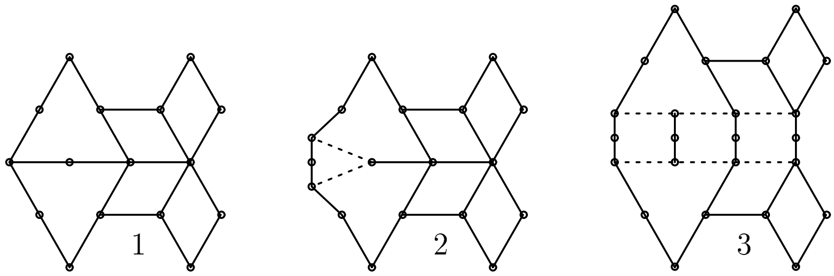


ABBILDUNG 2. Die strichlierten Kanten haben halbes Gewicht.

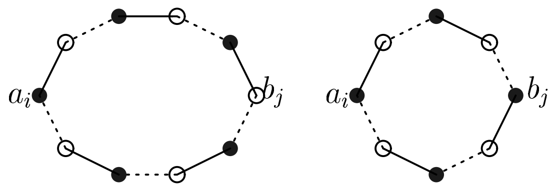


ABBILDUNG 3.

Wenn man Lemma 4.1 mit derselben Aufteilung der Kanten auch auf die anderen Knoten der Symmetrieachse anwendet, erhält man einen Graphen ohne Kanten auf der Symmetrieachse (siehe Abbildung 2.3).

Die neuen Knoten auf der Symmetrieachse haben jeweils die andere Farbe als der entsprechende ursprüngliche Knoten. Im neuen Graphen $\widetilde{G}$ wird also genau dort oberhalb geschnitten, wo in G unterhalb geschnitten worden wäre. Beim Schneiden in $\widetilde{G}$ entsteht aber bei jedem Knoten auf der Symmetrieachse eine einzige Kante, die Gewicht 1 hat und in jedem Matching enthalten sein muß. Diese Kanten können daher entfernt werden, ohne die gewichtete Summe der Matchings zu ändern. Es ist leicht zu sehen, daß man nach Entfernen dieser Kanten die Graphen G^+ und G^- erhält. Da außerdem $l(\widetilde{G}) = l(G)$ und $M(\widetilde{G}; \widetilde{w}) = M(G; w)$ gilt, reicht es, den Satz für Graphen G zu zeigen, die keine Kanten auf der Symmetrieachse besitzen.

Für so einen Graphen läßt sich Lemma 5.1 anwenden. Es gilt also, daß alle $2^{l(G)}$ Graphen, die durch Schneiden bei den a_i entstehen, dieselbe gewichtete Summe von Matchings besitzen. Da jedes Matching von G ein Matching von genau einem dieser Graphen ist, reicht es zu zeigen, daß $M(G^+; w^+)M(G^-; w^-)$ die gewichtete Summe der Matchings für eine dieser Schnittmöglichkeiten ist.

Wir werden das für den Graphen zeigen, der beim Schneiden oberhalb von weißen a_i und unterhalb von schwarzen a_i entsteht. Dazu reicht es zu zeigen, daß jedes Matching m von diesem Graphen bei schwarzen b_j hinunterführt und bei weißen b_j hinaufführt, weil es dann auch als Matching von $G^+ \cup G^-$ betrachtet werden kann.

Um das zu zeigen, betrachten wir das Matching m als Matching des ganzen Graphen G. Wie im Beweis von Lemma 5.1 können wir G mit m und seinem Spiegelbild in Kreise zerlegen, die mit der Achse entweder keinen Knoten gemeinsam haben oder genau einen der Knoten a_i und einen der Knoten b_j. Wenn wir den Kreis, der b_j enthält, in die Richtung durchlaufen, die im entsprechenden a_i aufwärts führt, führen die Kanten von m offensichtlich immer von schwarzen zu weißen Knoten (siehe Abb. 3). Das bedeutet aber, daß b_j genau dann von m mit einem Knoten oberhalb der Achse verbunden wird, wenn b_j weiß ist. Damit ist alles bewiesen. □

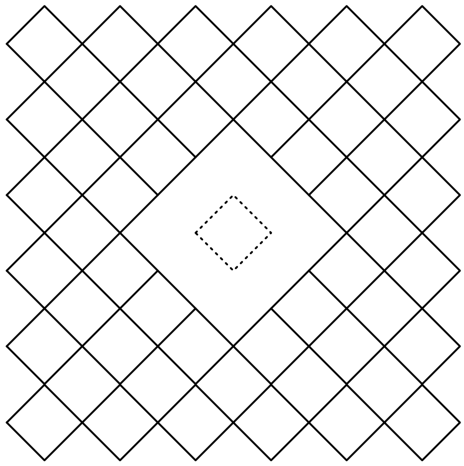


Abbildung 4. Ein Aztekendiamant mit Loch.

Korollar 5.4. *Sei G ein bipartiter symmetrischer Graph, der nach Entfernen der Knoten auf der Symmetrieachse zerfällt und bei einer Rotation um* $180°$ *unverändert bleibt. Wenn zusätzlich noch jeder Pfad, der einen Knoten mit dessen Bild unter der Drehung verbindet, eine gerade Anzahl von Knoten enthält, dann gilt*

$$M(G;w) = 2^{l(G)} \left(M(G^+;w^+)\right)^2.$$

Beweis. Dazu ist nur zu zeigen, daß G^- nach Drehung um $180°$ derselbe Graph wie G^+ ist und deshalb $M(G^-;w^-) = M(G^+;w^+)$ gilt. Weil jeder Knoten mit seinem Bild unter der Drehung durch einen Pfad mit gerader Knotenanzahl verbunden werden kann, gehen auf der Symmetrieachse bei der Drehung weiße Knoten a_i in schwarze Knoten b_j über. Da aber auch oberhalb und unterhalb durch die Drehung vertauscht werden, wurde bei den entsprechenden Knoten wirklich in der gleichen Weise geschnitten und aus Satz 5.3 folgt das Ergebnis. □

2. Anwendung auf einen Aztekendiamanten mit Loch

Wir wollen den Faktorisierungssatz als erstes dazu verwenden, die Anzahl der Matchings eines Aztekendiamanten zu bestimmen, bei dem das Quadrat in der Mitte samt den daranhängenden Kanten entfernt wurde und dessen Seitenlänge den Rest 2 modulo 4 hat (siehe Abb. 4). Wir können den Aztekendiamant nämlich mit und ohne Loch mit dem Faktorisierungssatz in zwei Teile zerlegen und die entstandenen Hälften vergleichen. Da der Aztekendiamant bei Drehung um $180°$ in sich selbst übergeht und die Knoten dabei auf Knoten derselben Bipartitionsklasse abgebildet werden, sind die Voraussetzungen von Korollar 5.4 erfüllt, und wir brauchen uns nur mit den oberen Hälften beider Graphen zu beschäftigen.

Sei G also der Aztekendiamant mit Seitenlänge $4n+2$. Die Symmetrieachse ist dann eine der kürzeren Geraden, auf ihr liegen also $4n+2$ Knoten, die alle dieselbe Farbe haben. Also gilt $l(G) = 2n+1$. Außerdem wird entlang der Symmetrieachse abwechselnd oben und unten geschnitten (siehe Abb. 5). An der linken Seite von G^+ gibt es Kanten, die im Matching enthalten sein müssen. Die zugehörigen Knoten können daher entfernt werden, ohne daß die Anzahl der Matchings verändert wird. Der entstandene Graph H ist symmetrisch bezüglich einer vertikalen Achse. Außerdem gilt wegen Korollar 5.4:

$$M(G) = 2^{2n+1} \left(M(H)\right)^2.$$

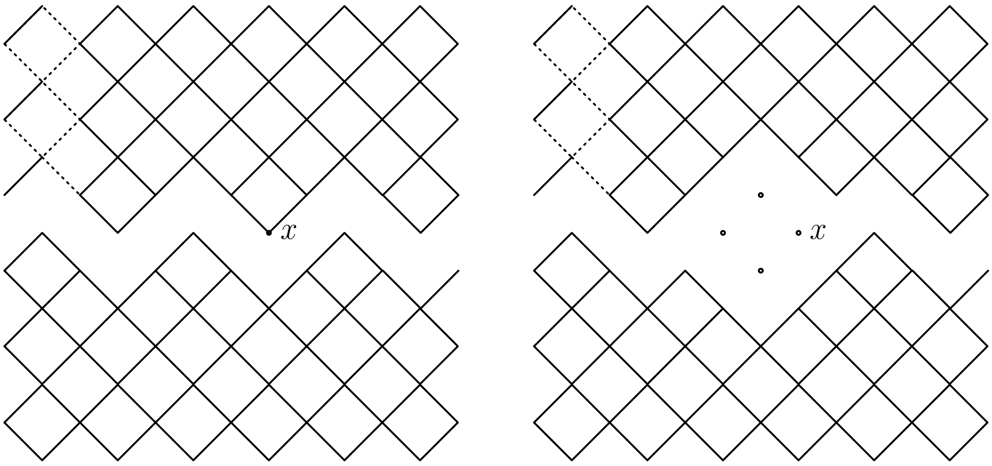


ABBILDUNG 5. Die Hälften eines Aztekendiamanten ohne und mit Loch.

Da wir aus Satz 2.11 die Anzahl der Matchings eines Aztekendiamanten kennen, erhalten wir $M(G) = 2^{\frac{(4n+2)(4n+3)}{2}}$. Daraus ergibt sich

$$M(H) = 2^{4n^2+4n+1}. \tag{5.1}$$

Wenn wir jetzt den Aztekendiamanten derselben Größe mit Loch mit $\bar{G}$ bezeichnen und den zugehörigen Graphen $\bar{G}^+$ bilden, gibt es wieder am linken Rand Kanten, die in jedem Matching enthalten sein müssen und deshalb samt den zugehörigen Knoten entfernt werden können. Der übrigbleibende Graph soll mit $\bar{H}$ bezeichnet werden. Wir wenden wieder Korollar 5.4 an und erhalten wegen $l(\bar{G}) = 2n$

$$M(\bar{G}) = 2^{2n}\left(M(\bar{H})\right)^2. \tag{5.2}$$

$\bar{H}$ unterscheidet sich von H nur durch zwei fehlende Knoten, die zum Quadrat in der Mitte des Aztekendiamanten gehören. Wir wollen den rechtesten Knoten in diesem Quadrat mit x bezeichnen. x ist der $(2n+2)$–te Knoten auf der Symmetrieachse von G. Deshalb wird unterhalb von x geschnitten, und x und sein nordwestlicher Nachbarknoten gehören zu H, obwohl sie nicht in $\bar{H}$ liegen. Außerdem liegt x auf der vertikalen Symmetrieachse von H.

Ein Matching von H muß x entweder mit seinem nordöstlichen oder mit seinem nordwestlichen Nachbarknoten verbinden. Wegen der Symmetrie des Graphen liefert jede Möglichkeit gleichviele Matchings. Da es aber genausoviele Matchings von $\bar{H}$ gibt wie Matchings von H, die x mit seinem nordwestlichen Nachbarknoten verbinden, gilt

$$M(H) = 2M(\bar{H}).$$

Zusammen mit Gleichungen 5.1 und 5.2 führt das auf

$$M(\bar{G}) = 2^{2n}\left(\frac{2^{4n^2+4n+1}}{2}\right)^2 = 2^{8n^2+10n}.$$

Also haben wir den folgenden Satz bewiesen:

SATZ 5.5. *Sei $\bar{G}$ ein Aztekendiamant der Größe $4n+2$, bei dem das Quadrat in der Mitte entfernt wurde. Dann gilt:*

$$M(\bar{G}) = 2^{8n^2+10n}.$$

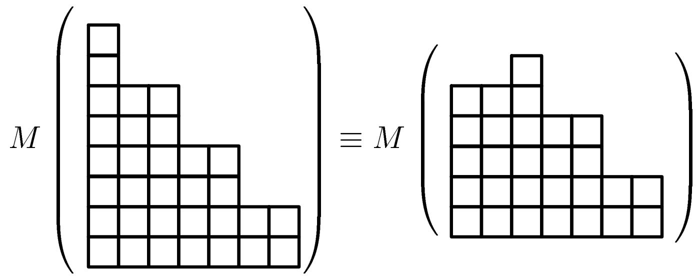


Abbildung 6. Schritt 1.

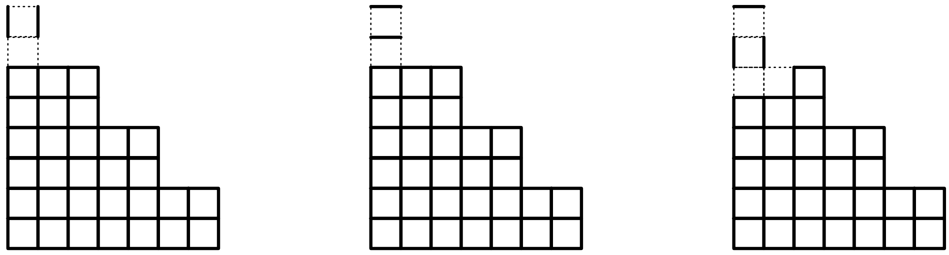


Abbildung 7. Die 3 Gruppen von Matchings für Schritt 1.

Bemerkung 5.6. *Für einen Aztekendiamant mit Loch der Größe $4n+3$ läßt sich in ähnlicher Weise der Ausdruck $2^{8n^2+14n+3}$ für die Anzahl der Matchings beweisen.*

3. Anwendung auf ein $2n \times 2n$–Quadratgitter

Wir wissen aus Gleichung (1.13) in Kapitel 1, daß die Anzahl der Matchings eines $2n \times 2n$– Quadratgitters durch

$$2^{2n^2} \prod_{k=1}^{n} \prod_{l=1}^{n} \left(\cos^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) + \cos^2 \left(\frac{l\pi}{2n+1} \right) \right)$$

gegeben ist. Aus dieser Darstellung sind aber nicht alle Eigenschaften dieser Zahl leicht abzulesen. Es gilt nämlich der folgende Satz:

Satz 5.7. *Sei Q_n das $2n \times 2n$–Quadratgitter. Dann gilt*

$$M(Q_n) = 2^n(2k+1)$$

für eine ganze Zahl k, die von n abhängt.

Beweis. Wir wollen dafür einen Beweis aus [**18**] angeben, der Satz 5.3 verwendet. Mit einer Diagonale als Symmetrieachse erfüllt Q_n die Voraussetzungen von Korollar 5.4. Da auf der Diagonale $2n$ Knoten liegen, erhalten wir

$$M(Q_n) = 2^n \left(M(Q_n^+) \right)^2 .$$

Es reicht also, zu zeigen, daß der Graph Q_n^+ eine ungerade Zahl von Matchings besitzt. Das zeigen wir mit Induktion nach n.

Für $n=1$ ist die Behauptung klar. Um von n auf $n+1$ zu kommen, werden wir von Q_{n+1}^+ schrittweise Kanten entfernen, sodaß in jedem Schritt die Anzahl der Matchings modulo 2 unverändert bleibt und im letzten Schritt Q_n^+ entsteht.

In Abbildung 6 ist der erste Schritt dargestellt. Um zu sehen, daß die Anzahl der Matchings modulo 2 unverändert bleibt, teilen wir die Matchings von Q_{n+1}^+ in die drei Gruppen aus Abbildung 7 auf. Die Aufteilung erfolgt danach, mit welchen Knoten die

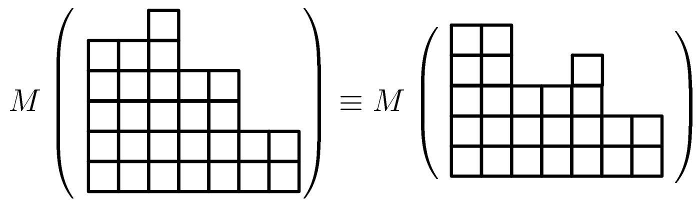


Abbildung 8. Schritt 2.

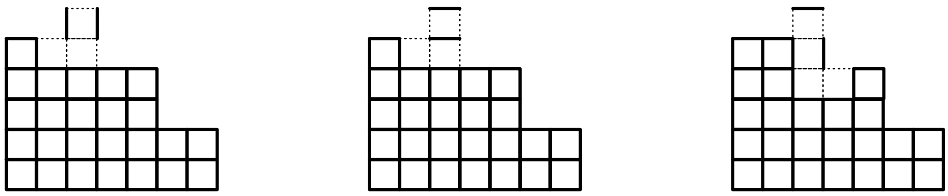


Abbildung 9. Die 3 Gruppen von Matchings für Schritt 2.

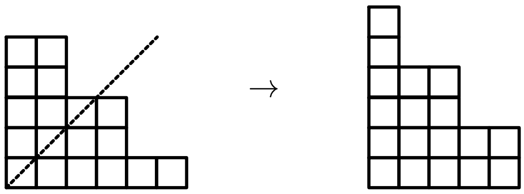


Abbildung 10. Der entstandene Graph und sein Spiegelbild.

Knoten in der linken oberen Ecke durch das jeweilige Matching verbunden werden. Da die ersten beiden dieser Gruppen offensichtlich die gleiche Anzahl von Matchings enthalten, besitzen sie gemeinsam eine gerade Anzahl von Matchings. Deshalb muß $M(Q_{n+1}^{+})$ modulo 2 mit der Anzahl der Matchings der dritten Gruppe übereinstimmen. Das ist aber genau das, was wir im ersten Schritt verwenden wollen.

Der zweite Schritt ist in Abbildung 8 dargestellt. Analog zum ersten Schritt kann man mit Hilfe der drei Gruppen von Matchings aus Abbildung 9 sehen, daß die Anzahl der Matchings modulo 2 auch hier unverändert bleibt.

Der zweite Schritt läßt sich für alle Stufen rechts oben in Q_{n+1}^{+} iterieren. Das Ergebnis dieser wiederholten Anwendung ist der Graph Q_n^{+} gespiegelt an der Diagonale (siehe Abb. 10).

Also stimmt die Anzahl der Matchings von Q_n^{+} und Q_{n+1}^{+} modulo 2 überein und ist deshalb für alle n ungerade. Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Bemerkung 5.8. *Weitere schöne Anwendungen des Faktorisierungssatzes finden sich in der Originalarbeit* [**2**], *sowie in den darauffolgenden Arbeiten* [**3, 4**], *und den schon früher erwähnten Arbeiten* [**5, 9**]. *Hervorzuheben sind insbesondere* [**3**] [**4**], *wo der Faktorisierungssatz in eleganter Weise benutzt wird, um vorher unbekannte, schöne Beziehungen zwischen verschiedenen Symmetrieklassen von Plane Partitions herauszuarbeiten.*

In Bezug auf Satz 5.7 möchten wir den Leser darauf verweisen, daß Peter John und Horst Sachs [**12**] *dieses Resultat wesentlich verfeinert haben. Sie können zeigen, daß die ungerade Zahl $2k+1$ in Satz 5.7 tatsächlich eine Quadratzahl ist. Zusätzlich gelingt es ihnen die Quadratwurzel aus $2k+1$ modulo 64 zu bestimmen. Sie gehen in ihrem Beweis allerdings von Kasteleyns Formel (1.13) aus.*

Literaturverzeichnis

[1] Mihai Ciucu, *Perfect matchings of cellular graphs*, J. Alg. Combin. **5** (1996), 87–103.

[2] Mihai Ciucu, *Enumeration of perfect matchings in graphs with reflective symmetry*, J. Combin. Theory Ser. A **77** (1997), 67–97.

[3] Mihai Ciucu, *Enumeration of lozenge tilings of punctured hexagons*, erscheint in J. Combin. Theory Ser. A.

[4] Mihai Ciucu, *The equivalence between enumerating cyclically symmetric, self-complementary and totally symmetric, self-complementary plane partitions*, Preprint.

[5] Mihai Ciucu und Christian Krattenthaler, *The number of centered lozenge tilings of a symmetric hexagon*, Preprint.

[6] G. David und C. Tomei, *The problem of the calissons*, Amer. Math. Monthly. **96** (1989), 429–431.

[7] Noam Elkies, Greg Kuperberg, Michael Larsen, James Propp, *Alternating Sign Matrices and Domino Tilings* Part I: J. Alg. Combin. **1** (1992) 111–132; Part II: 219–234.

[8] S. Elnitsky, *Rhombic tilings of polygons and classes of reduced words in Coxeter groups*, J. Combin. Theory Ser. A **77** (1997), 193–221.

[9] Markus Fulmek und Christian Krattenthaler, *The number of rhombus tilings of a symmetric hexagon which contain a fixed rhombus on the symmetry axis, I*, Preprint.

[10] I.M. Gessel und X. Viennot, *Determinant, paths and plane partitions*, Preprint, (1989).

[11] C.G.J. Jacobi, *De formatione et proprietatibus Determinantium*, in: Gesammelte Werke, vol. 3, Georg Reimer, Berlin (1884), 355–392; first published in Journal für Reine und Angewandte Mathematik **22** (1841), 285–318.

[12] Peter John und Horst Sachs, *On a strange observation in the theory of the dimer problem*, Preprint.

[13] P. W. Kasteleyn, *Graph theory and crystal physics*, in: Graph Theory and Theoretical Physics, F. Harary, Academic Press, San Diego, (1967).

[14] C. Krattenthaler, *Generating functions for plane partitions of a given shape*, Manuscripta Math. **69** (1990), 173–202.

[15] Greg Kuperberg, *Symmetries of Plane Partitions and the Permanent–Determinant Method*, J. Combin. Theory Ser. A **68** (1994), 115–151.

[16] P.A. MacMahon, *Combinatory Analysis*, vol. 2, Cambridge University Press, (1916); reprinted by Chelsea, New York, (1960).

[17] Soichi Okada und Christian Krattenthaler, *The number of rhombus tilings of a "punctured" hexagon and the minor summation formula*, erscheint in Adv. Appl. Math.

[18] L. Pachter, *Combinatorial Approaches and Conjectures for 2–Divisibility Problems Concerning Domino Tilings of Polyominoes*, Electron. J. Combinat. **4(1)**, R29, (1997).

[19] J. Propp, *Twenty open problems on enumeration of matchings*, Manuskript, (1996).

[20] Ira Gessel, Alexandru Ionescu und Jim Propp, *Counting Constrained Domino Tilings of Aztec Diamonds*, Poster Session, 8-te Konferenz über „Formal Power Series and Algebraic Combinatorics", 1996, Minneapolis.

[21] J. R. Stembridge, *Nonintersecting paths, pfaffians and plane partitions*, Adv. in Math. **83** (1990) 96—131.

[22] B. Yang, *Three enumeration problems concerning Aztec diamonds*, Ph.D. Thesis, M.I.T., Cambridge, Massachusetts, USA, 1991.