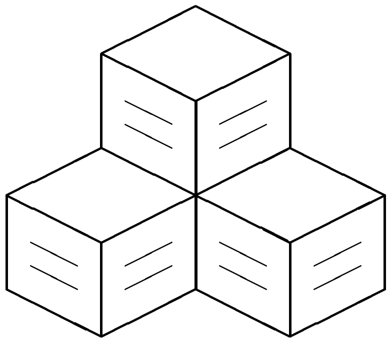
Symmetrieklassen von Plane Partitions

Michael Schlosser



Diplomarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades

Mag. rer. nat.

an der naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Wien

Wien, Juni 1993

Lebenslauf des Autors: Michael Schlosser, geboren am 20.10.1968 in Valencia, Venezuela. 1971 Umzug mit den Eltern Josef & Edith Schlosser und den um zwei Jahre jüngeren Bruder Alexander nach Detroit, Michigan (USA). Zweisprachig aufgewachsen (Deutsch, Englisch). Erste Klasse Volksschule in den USA. 1975 Umzug nach Wien. 1978–1982 Internat, Heimschulen der Schulbrüder, Strebersdorf (Wien, 21.); Neusprachliches Gymnasium. 1982–1987 Halbinternat, ebendort. Im Juni 1987 mit Erfolg maturiert. September 1987 Immatrikulation an der Universität Wien, Mathematik. Inskribtion (Informatik) an der Technischen Universität Wien. Ab 1992 studium irregulare "Computationale Logik", TU, Wien.

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL I

Einleitung

1. Problemdarstellung

Das Thema soll nun kurz vorgestellt werden. (Alle hier vorkommenden Begriffe sollen davon unabhängig in späteren Kapiteln (nochmals) definiert und erklärt werden.)

Eine *Plane Partition* vom Rahmen $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r)$ (mit $\lambda_i \in \mathbb{N}$) ist eine Matrix $\pi = (\pi_{ij})$ positiver ganzer Zahlen, welche nur für $1 \leq i \leq r$ und $1 \leq j \leq \lambda_i$ definiert ist, sodaß die Eintragungen π_{ij} entlang der Reihen und Spalten monoton fallend sind. (D. h. es gilt $\pi_{ij} \geq \pi_{i,j+1}$ und $\pi_{ij} \geq \pi_{i+1,j}$, sofern beide Seiten definiert sind.) Weiters definiert man die *Norm* von π durch $|\pi| := \sum \pi_{ij}$. Solch eine Matrix läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$\begin{array}{llllll}
\pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & \ldots & & \pi_{1\lambda_1} \\
\pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} & \ldots & \pi_{2\lambda_2} & \\
 & \ldots & & & & \\
\pi_{r1} & \pi_{r2} & \ldots & \pi_{r\lambda_r} & &
\end{array}$$

(Die leere Matrix $\emptyset$, die keine Reihen besitzt, ist auch erlaubt.)

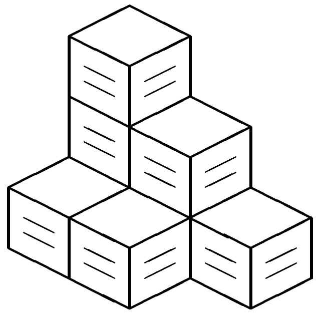
Eine Plane Partition π kann mit einem dreidimensionalen *Ferrer–Diagramm* (siehe Kapitel IV, Abschnitt 3) assoziiert werden, wenn man die Eintragungen π_{ij} der zweidimensional angeordneten Matrix $\pi = (\pi_{ij})$ als Höhen interpretiert. Diese umkehrbar eindeutige Zuordnung läßt sich mit

$$\pi \to \{(i,j,k) \in \mathbb{N}^3 : \pi_{ij} \text{ ist definiert und } 1 \leq k \leq \pi_{ij}\}$$

formal beschreiben.

Beispiel I.1. *Die unten abgebildete Figur soll zur anschaulichen Vorstellung des dreidimensionalen Ferrer–Diagramms der Plane Partition π_0 dienen.*

$$\pi_0 \quad = \quad \begin{array}{ccc} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \end{array}$$



In der Folge werden wir eine Plane Partition π mit ihrem Ferrer–Diagramm identifizieren.

Die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_3$ wirkt auf $\mathbb{N}^3$ durch Permutation der Koordinaten und damit auf die Menge aller (dreidimensionalen Ferrer–Diagramme von) Plane Partitions. Für eine Permutation $g \in \mathcal{S}_3$ und eine Plane Partition π gilt, daß $g(\pi)$ wieder eine Plane Partition ist, daher ist es naheliegend, sich zu fragen, welche Plane Partitions invariant bezüglich g sind, d. h. $g(\pi) = \pi$ erfüllen.

Für $r, c, m \in \mathbb{N}$ bezeichne $B(r, c, m)$ den *Quader* $\{(i, j, k) : i = 1, \ldots, r;\ j = 1, \ldots, c;\ k = 1, \ldots, m\}$. Zu jedem Quader $B(r, c, m)$ und jeder Untergruppe G von $\mathcal{S}_3$ betrachte man die Menge der Plane Partitions, deren Ferrer–Diagramme in $B(r, c, m)$ enthalten sind und die invariant bezüglich G sind. Das führt zur Untersuchung von vier Symmetrieklassen von Plane Partitions, für die wir die erzeugenden Funktionen bestimmen wollen. Bereits P. MacMahon [**15**] betrachtete die Symmetrien der Plane Partitions, von dem einige Resultate stammen.

Die vier Symmetrieklassen, die wir untersuchen wollen, sind die Klasse *aller* Plane Partitions (siehe Kap. V), die der *symmetrischen* Plane Partitions (siehe Kap. V), die der *zyklisch–symmetrischen* Plane Partitions (siehe Kap. V) und die der *total–symmetrischen* Plane Partitions (siehe Kap. V). Für die ersten drei Klassen werden wir erzeugende Funktionen herleiten, während wir für die vierte nur ein Abzählresultat liefern können. (Eine detailliertere Darstellung der Symmetrien mit einer summarischen Übersicht der Hauptresultate findet sich in Kapitel IV, Abschnitt 5.) Interessanterweise gibt es immer “schöne” Formeln. Dennoch sind für diese Formeln keine wirklich einfachen Beweise bekannt. Direkte kombinatorische Beweise fehlen, und die Beweismethoden, die wir verwenden werden, sind von Problem zu Problem alle verschieden.

2. Übersicht der folgenden Kapitel

In Kapitel II werden einige für spätere Anwendungen benötigte Sätze über Determinanten und Pfaffsche Formen dargestellt, wobei letztere des geringeren Bekanntheitsgrades wegen langsam eingeführt werden sollen. Dies geschieht über die 1–Faktoren, die in der definierenden Gleichung der Pfaffschen Form die Rolle der Permutationen übernehmen (vgl. Definition II.5).

Für unsere Zwecke ist vor allem wesentlich, daß sowohl die Determinante als auch die Pfaffsche Form eine analoge kombinatorische Deutung besitzen, nämlich als erzeugende Funktion einander nicht berührender Gitterpunktwege (siehe Kap. III). Das erweist sich insofern als nützlich für uns, weil die Abzählung von Plane Partitions, Tableaux etc. sich auf das Problem der Abzählung gewisser Familien einander nicht berührender Gitterpunktwege zurückführen läßt.

Kapitel IV soll langsam auf die zentralen Problemstellungen dieser Arbeit hinführen. Zunächst wird erklärt, was überhaupt unter einer (Zahlen–)Partition zu verstehen ist, womit gleich die Einführung des q–Binomialkoeffizienten motiviert wird. (Ein Leser, der mit diesen Dingen bereits vertraut ist, kann den ersten Abschnitt von Kap. IV übergehen.) Zur Referenz folgt eine Auflistung von q–Identitäten, die bei den Berechnungen in den späteren Kapiteln benötigt werden. Danach werden nützliche Begriffe, wie Ferrer–Diagramm, Plane Partition bzw. Tableau eingeführt. Abschnitt 5 von Kap. IV nimmt eine zentrale Stelle ein. Mit der Darstellung der Symmetrieklassen von Plane Partitions wird die Analyse jener eingeleitet.

Die letzten vier Kapitel spezialisieren sich auf jeweils eine Symmetrieklasse und können als Anwendung der in den vorhergehenden Kapiteln aufgebauten Theorie verstanden werden.

Historische Bemerkungen treten jeweils direkt an den entsprechenden Stellen im Text auf.

An dieser Stelle möchte ich besonderen Dank an meinen Betreuer für diese Diplomarbeit, Univ.-Doz. Christian Krattenthaler, aussprechen, der das interessante Thema vorschlug und mit wertvollen Hinweisen zur Durchführung dieser Arbeit beitrug.

KAPITEL II

Determinanten und Pfaffsche Formen

1. Ein Determinantenlemma

Das folgende von C. Krattenthaler entwickelte Determinantenlemma [**10**, Lemma 34] wird uns als ein wesentliches Hilfsmittel bei der Auswertung der erzeugenden Funktionen in Kapitel V bzw. VI dienen. Außerdem werden wir zwecks späterer Verwendung eine spezielle Version dieses Lemmas (vgl. auch [**9**, Lemma 2.2]) notieren.

Der *Grad* eines *Laurentpolynoms* $p(X) = \sum_{k=M}^{N} a_k X^k$, wobei $M, N \in \mathbb{Z}$, $a_k \in \mathbb{C}$ und $a_N \neq 0$, sei definiert als $\deg p := N$.

LEMMA II.1. *$X_1, X_2, \dots, X_r, A_2, A_3, \dots, A_r, C$ seien Unbestimmte. Falls die p_j ($j = 0, 1, \dots, r-1$) Laurentpolynome sind mit $\deg p_j \leq j$ und $p_j(C/X) = p_j(X)$, dann gilt*

$$\det_{1\leq s,t\leq r}[(X_s + A_r)\cdots(X_s + A_{t+1})(C/X_s + A_r)\cdots(C/X_s + A_{t+1})\cdot p_{t-1}(X_s)]$$

$$= \prod_{1\leq i<j\leq r}(X_i - X_j)(1 - C/X_iX_j)\prod_{i=1}^{r} A_i^{i-1}\prod_{i=1}^{r} p_{i-1}(-A_i). \quad (1)$$

BEMERKUNGEN. 1. *Leere Produkte (wie $(X_s + A_r)\cdots(X_s + A_{t+1})$ für $t = r$) sind nach Konvention gleich 1.*

2. *Die Unbestimmte A_1, die auf der rechten Seite von (1) auftritt, ist in der Tat überflüssig, da sie dort Argument eines konstanten Polynoms ist.*

BEWEIS. Zunächst vereinfachen wir die Determinante. Da $\deg p_{t-1} \leq t-1$ und $p_{t-1}(C/X) = p_{t-1}(X)$, müssen $\alpha_i^{(t)} \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, t-1$, existieren, sodaß

$$p_{t-1}(X) + \sum_{i=1}^{t-1} \alpha_i^{(t)}(X + A_t)\cdots(X + A_{i+1})$$

$$\times\ (C/X + A_t)\cdots(C/X + A_{i+1})\cdot p_{i-1}(-A_i) = \text{konstant}.$$

Der Wert dieser Konstante muß $p_{t-1}(-A_t)$ sein. Das sieht man, indem man $X = -A_t$ setzt.

Daher erhalten wir, daß es $\alpha_i^{(t)} \in \mathbb{C}$ gibt, sodaß

$$\begin{aligned}p_{t-1}(X) + \sum_{i=1}^{t-1} \alpha_i^{(t)} (X + A_t) \cdots (X + A_{i+1}) \\ \times \ (C/X + A_t) \cdots (C/X + A_{i+1}) \cdot p_{i-1}(-A_i) = p_{t-1}(-A_t).\end{aligned} \tag{2}$$

Nun führen wir für $j = 2, 3, \ldots, r$ (in dieser Reihenfolge) folgende Spaltenoperationen durch: Addiere $\alpha_i^{(j)}$ mal die i–te Spalte, $i = 1, 2, \ldots, j-1$, zur j–ten Spalte. Unter Verwendung von (2) sieht man dann, daß der s–te Eintrag in der j–ten Spalte

$$(X_s + A_r) \cdots (X_s + A_{j+1})(C/X_s + A_r) \cdots (C/X_s + A_{j+1}) \cdot p_{j-1}(-A_j)$$

ergibt. Dies ermöglicht es uns, $p_{j-1}(-A_j)$ aus der j–ten Spalte herauszuheben.

Nach Durchführung dieser Operationen erhalten wir, daß die Determinante in (1) gleich

$$\prod_{i=1}^{r} p_{i-1}(-A_i) \det_{1 \le s,t \le r} [(X_s + A_r) \cdots (X_s + A_{t+1})(C/X_s + A_r) \cdots (C/X_s + A_{t+1})]$$

ist. Daher bleibt nur noch zu zeigen, daß

$$\begin{aligned}\det_{1 \le s,t \le r} [(X_s + A_r) \cdots (X_s + A_{t+1})(C/X_s + A_r) \cdots (C/X_s + A_{t+1})] \\ = \prod_{1 \le i < j \le r} (X_i - X_j)(1 - C/X_i X_j) \prod_{i=1}^{r} A_i^{i-1}.\end{aligned} \tag{3}$$

Die Determinante auf der linken Seite von (3) ist ein Polynom in $X_1, \ldots, X_r$ vom Grad $3\binom{r}{2}$ dividiert durch $\prod_i X_i^{r-1}$. Weil die Determinante für $1 \le s_1 < s_2 \le r$ null ergibt, falls $X_{s_1} = X_{s_2}$ oder $X_{s_1} = C/X_{s_2}$, ist die linke Seite gleich

$$p(X_1, \ldots, X_r) \prod_{i<j} (X_i - X_j)(X_i X_j - C) \Big/ \prod_i X_i^{r-1},$$

wobei $p(X_1, \ldots, X_r)$ ein Polynom in den X_i ist. Vergleicht man die Grade, sieht man, daß p eine Konstante ist, welche sich durch Vergleich der Koeffizienten von $\prod_i X_i^{r-i}$ auf beiden Seiten von (3) berechnen läßt. $\square$

Lemma II.2. *$X_1, X_2, \dots, X_r, A_2, A_3, \dots, A_r, B_2, B_3, \dots, B_r$ seien Unbestimmte. Dann gilt*

$$\det_{1\le s,t\le r}[(X_s+A_r)\cdots(X_s+A_{t+1})(X_s+B_t)\cdots(X_s+B_2)]$$
$$= \prod_{1\le i<j\le r}(X_i-X_j)\prod_{2\le i\le j\le r}(B_i-A_j). \quad (4)$$

Beweis. Man lasse im vorhergehenden Lemma zunächst C gegen null gehen. Dadurch werden die p_j, die sich in der Form $p_j=\sum_{k=0}^{j}a_k^{(j)}(X+C/X)^k$ mit $a_k^{(j)}\in\mathbb{C}$ schreiben lassen, zu *Polynomen* und man erhält die Identität

$$\det_{1\le s,t\le r}[(X_s+A_r)\cdots(X_s+A_{t+1})\cdot p_{t-1}(X_s)] = \prod_{1\le i<j\le r}(X_i-X_j)\prod_{i=1}^{r}p_{i-1}(-A_i).$$

Schließlich setze man $p_j(X)=\prod_{i=1}^{j-1}(B_{i+1}+X)$. □

Korollar II.3.

$$\det_{1\le s,t\le r}[(X_s+A_r)\cdots(X_s+A_{t+1})] = \prod_{1\le i<j\le r}(X_i-X_j).$$

Beweis. Man dividiere in (4) auf beiden Seiten durch $\prod_{2\le i\le j\le r}(B_i-A_j)$ und lasse $B_i\to\infty$ gehen ($i=2,3,\dots,r$). □

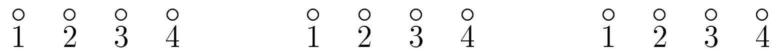
Bemerkung. *Als Spezialfall ergibt sich hierbei für $A_i=0$ $(i=2,3,\dots,r)$ die wohlbekannte* Vandermondesche–Determinante.

2. 1–Faktoren

Sei $\mathbf{v}=(v_1,\dots,v_r)$ eine geordnete Liste von n Elementen, n soll gerade sein. Unter einem *1–Faktor* (oder *Linearfaktor* bzw. *Perfektes Matching*) von $\mathbf{v}$ versteht man eine Menge von (ungerichteten) Kanten auf der Knotenmenge $\mathbf{v}$, sodaß jedes v_i mit genau einem v_j, $(j\ne i)$ verbunden ist. $\mathcal{F}(\mathbf{v})$ bezeichne die Menge der 1–Faktoren von $\mathbf{v}$, $\mathcal{F}_n$ die Menge der 1–Faktoren von $(1,2,\dots,n)$.

Wir werden stets die Kanten eines 1–Faktors $\pi\in\mathcal{F}(\mathbf{v})$ in der Form (v_i,v_j) mit $i<j$ schreiben. Zwei solche Kanten (v_i,v_j) und (v_k,v_l) *kreuzen* sich, falls $i<k<j<l$ oder $k<i<l<j$. Man kann diese Bedingung geometrisch interpretieren, indem man die Kanten durch Bögen in der oberen Halbebene repräsentiert. Zwei sich kreuzende Kanten schneiden sich dann in dieser Darstellung. Man definiert

Abbildung II.1



das Vorzeichen von π als $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^k$, wobei k die Anzahl der sich kreuzenden Kantenpaare in π ist. Diese Größe hängt offensichtlich von der gewählten Ordnung der Elemente in $\mathbf{v}$ ab.

Lemma II.4. *Sei $\pi \in \mathcal{F}(\mathbf{v})$ und angenommen, (v_k, v_l) (für $k < l$) ist keine Kante aus π. Mit π' bezeichne man den 1–Faktor, der aus der Vertauschung von v_k mit v_l hervorgeht. Falls weder v_k noch v_l mit einer Kante (in π) zu einem v_i, $k < i < l$ verbunden sind, dann gilt $\operatorname{sgn}(\pi) = -\operatorname{sgn}(\pi')$.*

Beweis. Sei S die Knotenmenge, die aus v_k, v_l und die zwei mit diesen (in π) verbundenen Knoten besteht. Die beiden Kanten, deren Endknoten in S liegen, sollen *speziell* heißen. Paare nicht–spezieller Kanten kreuzen sich in π genau dann, wenn sie sich in π' kreuzen, solche Paare beeinflussen daher nicht $\operatorname{sgn}(\pi)\operatorname{sgn}(\pi')$. Eine nicht–spezielle Kante (v_i, v_j) kreuzt eine ungerade Anzahl von speziellen π–Kanten (bzw. π'–Kanten) genau dann, wenn eine ungerade Anzahl von Knoten aus S zwischen die Endpunkte v_i und v_j liegt. Da diese Größe gleich ist für π und π', schließen wir, daß $\operatorname{sgn}(\pi)\operatorname{sgn}(\pi') = +1$ oder -1, je nachdem, ob der Status des Sich–Kreuzens der beiden speziellen Kanten gleich bleibt oder sich ändert. D. h., wir können uns auf die Betrachtung der vier Knoten von S beschränken und π sowie π' als 1–Faktoren von S ansehen. In diesem Fall bedeutet die Annahme, daß kein Knoten v_i zwischen v_k und v_l zu S gehört, daß v_k und v_l aufeinanderfolgend sind als Elemente von S (in der von $\mathbf{v}$ geerbten Ordnung). Es ist nun leicht zu sehen, daß die Vertauschung von v_k und v_l den Status des Sich–Kreuzens der beiden speziellen Kanten ändert (vgl. Abbildung II.1). □

Bemerkung. *Die Vertauschung zweier beliebiger (nicht verbundener) Knoten braucht das Vorzeichen eines 1–Faktors nicht zu ändern.*
Gegenbeispiel: Vertauschung von 1 und 3 im 1–Faktor $\{(1,2),(3,4)\}$.

3. Pfaffsche Formen

DEFINITION II.5 (Pfaffsche Form). *Die* Pfaffsche Form *einer oberen Dreiecksmatrix* $A = (a_{ij})_{1 \le i < j \le n}$ *sei folgendermaßen definiert:*

$$\operatorname{pf}(A) = \sum_{\pi \in \mathcal{F}_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{(i,j) \in \pi} a_{ij}. \tag{5}$$

Üblicherweise betrachtet man die Pfaffsche Form als eine Funktion, die auf dem Raum der schiefsymmetrischen Matrizen definiert ist.

BEISPIEL II.6. *Sei*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix}$$

Einsetzen in (5) ergibt $\operatorname{pf}(A) = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}$. *Mit etwas Rechnerei erhält man außerdem* $\det(A) = \operatorname{pf}(A)^2$. *Das gilt allgemein für schiefsymmetrische Matrizen.*

PROPOSITION II.7. *Sei A schiefsymmetrisch, dann ist* $\operatorname{pf}(A)^2 = \det(A)$.

BEWEIS. Sei $G_n \subset \mathcal{S}_n$ die Menge der Permutationen mit nur Zyklen gerader Länge. Für $\sigma \in \mathcal{S}_n - G_n$ bezeichne $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_l$ die disjunkte Zyklenzerlegung, sodaß σ_1 der Zyklus ungerader Länge ist, dessen kleinstes Element kleiner ist als die Elemente aller anderen Zyklen ungerader Länge von σ. Mit dieser Darstellung definiert die Abbildung $\sigma \mapsto \sigma' = \sigma_1^{-1}\sigma_2 \cdots \sigma_l$ eine Involution auf $\mathcal{S}_n - G_n$. Falls $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ der Orbit von σ_1 ist, dann impliziert die Antisymmetrie

$$\prod_{i \in I} a_{i,\sigma(i)} = (-1)^{|I|} \prod_{i \in I} a_{\sigma(i),i} = -\prod_{i \in I} a_{i,\sigma^{-1}(i)}.$$

Daher gilt $a_\sigma = -a_{\sigma'}$, wenn man a_σ als Abkürzung für $a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$ schreibt. Da σ und σ' dasselbe Vorzeichen besizten, heben sich die Beiträge von σ und σ' zur Determinante von A gegenseitig auf, und damit gilt $\det(A) = \sum_{\sigma \in G_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_\sigma$.

Es gibt eine natürliche Bijektion $(\pi, \pi') \mapsto \sigma$ von $\mathcal{F}_n \times \mathcal{F}_n$ auf G_n, und zwar folgendermaßen: Bei einem gegeben Paar $\pi, \pi' \in \mathcal{F}_n$ ist der Graph, der von $\pi \cup \pi'$ gebildet wird, 2–regulär und bipartit (d. h. von jedem Knoten gehen zwei Kanten aus, die eine ist zu π, die andere zu π' gehörig) und daher eine disjunkte Vereinigung von Zyklen gerader Länge. Man erhält die zugehörige Permutation σ, indem man jeden Zyklus auf kanonische Weise orientiert; man startet mit dem kleinsten Element des Zyklus und setzt danach über die Kante aus π mit dem nächsten Element fort, usw. Nun behaupten wir, daß

$$\operatorname{sgn}(\pi)\ \operatorname{sgn}(\pi') \prod_{(i,j)\in\pi\cup\pi'} a_{ij} = \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_\sigma. \tag{6}$$

Wenn das bewiesen ist, folgt sofort die Proposition, da die Terme auf der linken Seite von (6) klarerweise die von $\operatorname{pf}(A)^2$ sind, während wir bereits gezeigt haben, daß die Terme auf der rechten Seite die von $\det(A)$ sind.

Um diese Behauptung zu beweisen, definieren wir $e(\sigma) = |\{i : \sigma(i) < i\}|$ und bemerken, daß (6) äquivalent ist zu $\operatorname{sgn}(\pi)\ \operatorname{sgn}(\pi') = \operatorname{sgn}(\sigma)(-1)^{e(\sigma)}$. Jetzt nehmen wir an, dies gilt für irgendein bestimmtes $\sigma \in G_n$ und betrachten das Ergebnis der Konjugation von σ mit der Transposition $(i, i+1)$. Gleichermaßen könnte man natürlich die Positionen von i und $i+1$ in den Orbits von σ vertauschen. Falls i und $i+1$ (in welcher Reihenfolge auch immer) aufeinanderfolgend innerhalb eines Orbits auftreten, dann wird diese Konjugation die Parität von $e(\sigma)$ ändern. Außerdem wird es eines der 1–Faktoren von π oder π' invariant lassen, (den, der die Kante $(i, i+1)$ enthält,) während es das Vorzeichen des anderen ändert (siehe Lemma II.4). Andererseits, falls i und $i+1$ nicht aufeinanderfolgend oder in verschiedenen Orbits sind, dann wird die Konjugation $e(\sigma)$ erhalten, während es das Vorzeichen von π und π' ändert. In jedem Fall können wir schließen, daß die Gültigkeit von (6) nach Konjugation erhalten bleibt, also brauchen wir für jeden möglichen Zyklustyp nur eine Wahl von σ zu betrachten. Falls z. B. σ der n–Zyklus $(1, 2, \ldots, n)$ ist, dann ist $e(\sigma) = 1$, $\pi = \{(1, 2), \ldots, (n-1, n)\}$ und $\pi' = \{(2, 3), \ldots, (n-2, n-1), (1, n)\}$, daher ist die Behauptung in diesem Fall klarerweise wahr. Da (6) multiplikativ ist bezüglich (disjunkten) Zyklen von diesem Typ, folgt das Ergebnis. $\square$

Bemerkung. *Praktisch bedeutet Proposition II.7, daß die zur Berechnung der Pfaffschen Form benötigte Anzahl arithmetischer Operationen schlimmstenfalls eine Polynomfunktion n–ten Grades ist.*

Nun folgen weitere nützliche Eigenschaften von Pfaffschen Formen.

Korollar II.8. $\operatorname{pf}(X^T A X) = \det(X)\ \operatorname{pf}(A)$.

Beweis. Proposition II.7 impliziert $\mathrm{pf}(X^T A X) = \pm \det(X)\,\mathrm{pf}(A)$. Die Wahl der Einheitsmatrix für X zeigt, daß der positive Zweig korrekt sein muß. $\square$

Korollar II.9. $\mathrm{pf}(x_i x_j a_{ij}) = x_1 \cdots x_n\,\mathrm{pf}(a_{ij})$. $\square$

Beispiel II.10. *Folgender Reduktion einer Pfaffschen Form kommt praktische Bedeutung zu: Sei $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le 2n}$ eine schiefsymmetrische Matrix der Blockgestalt*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,2n-2} & 0 & 0 \\ -a_{1,2} & 0 & a_{2,3} & & & & \\ -a_{1,3} & -a_{2,3} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & a_{2n-3,2n-2} & & \\ -a_{1,2n-2} & & \dots & -a_{2n-3,2n-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & \dots & & 0 & 0 & x \\ 0 & & \dots & & 0 & -x & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann folgt sofort aus Definition II.5, daß die Pfaffsche Form von A in ein einfaches Produkt zerfällt:

$$\mathrm{pf}(a_{ij})_{1 \le i,j \le 2n} = x \cdot \mathrm{pf}(a_{ij})_{1 \le i,j \le 2n-2}.$$

Bemerkung. *Oft steht man vor dem Problem der Auswertung der Pfaffschen Form einer Matrix der Ordnung $2n$. Dabei kann folgendes Verfahren helfen: Unter Verwendung von Korallar II.8 (insbesondere durch elementare Reihen– und Spaltenoperationen) versucht man die Matrix auf eine Form, wie im obigen Beispiel, zu bringen. Dadurch reduziert sich das Problem auf die Auswertung der Pfaffschen Form einer Matrix der Ordnung $2n-2$.*

Proposition II.11. *Es ist* $\mathrm{pf}(1)_{1 \le i < j \le n} = 1$, *oder äquivalent,* $\sum_{\pi \in \mathcal{F}_n} \mathrm{sgn}(\pi) = 1$.

Beweis. Man gehe mittels Induktion nach n vor. Die Aussage stimmt für $n = 2$. Wenn $n > 2$, dann bezeichne man mit $F_i \subset \mathcal{F}_n$ die Menge der 1–Faktoren, die $(1, i)$ enthalten $(1 < i \le n)$. Bei gegebenem $\pi \in F_n$ stimmt die Anzahl der Kanten in π, die $(1, i)$ kreuzen (mod 2) mit i überein, und wir erhalten mit Induktion $\sum_{\pi \in F_i} \mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^i$. Die Beiträge aller F_i ergeben daher insgesamt $\sum_{1<i \le n} (-1)^i = 1$. $\square$

Lemma II.12. *Sei* $X = (x_{ij})_{1\le i,j\le 2n}$ *eine schiefsymmetrische Matrix mit* $x_{2i,2j} = 0$*, so gilt*

$$\operatorname{pf}(X) = \det_{1\le i,j\le n}(x_{2i-1,2j}). \tag{7}$$

Beweis. Das folgt direkt aus der Definition der Pfaffschen Form (siehe II.5). □

Lemma II.13. *Es gilt* $\operatorname{pf}(x_{j-i})_{1\le i<j\le 2n} = \det(y_{ij})_{1\le i,j\le n}$*, wobei* $y_{ij} = x_{|i-j|+1} + x_{|i-j|+3} + \cdots + x_{i+j-1}$.

Bemerkung. *Dieses auf B. Gordon* [**4**, Lemma 1] *zurückgehende Lemma werden wir für die Berechnung der erzeugenden Funktion der symmetrischen Plane Partitions benötigen. Damit man sich unter diesem Lemma auch etwas vorstellen kann, folgt ein Beispiel.*

Beispiel II.14. *Für* $n = 3$ *erhält man*

$$\operatorname{pf}\begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ -x_1 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2 & -x_1 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_3 & -x_2 & -x_1 & 0 & x_1 & x_2 \\ -x_4 & -x_3 & -x_2 & -x_1 & 0 & x_1 \\ -x_5 & -x_4 & -x_3 & -x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1+x_3 & x_2+x_4 \\ x_3 & x_2+x_4 & x_1+x_3+x_5 \end{vmatrix}$$

Beweis. Man addiere zur letzten Spalte von $X = (x_{j-i})_{1\le i,j\le 2n}$ die zweite, vierte, sechste, ... und $(2n-2)$–te Spalte. Dann addiere man zur $(2n-1)$–ten Spalte die dritte, fünfte, ... und $(2n-3)$–te Spalte. Allgemein, falls $0 \le j \le n-2$, addieren wir zur $(2n-j)$–ten Spalte von X die Spalten $j+2, j+4, \ldots$ und $2n-j-2$. Die erhaltene Matrix heiße $X^\star$. Nun führt man die selbe Prozedur mit den Reihen von $X^\star$ durch, d. h. zur $(2n-j)$–ten Reihe von $X^\star$ (wobei $0 \le j \le n-2$) wird die $(j+2)$–te, $(j+4)$–te, ... und $(2n-j-2)$–te Reihe addiert. Es ist leicht zu überprüfen, daß sich für die resultierende Matrix

$$X^{\star\star} = \begin{pmatrix} \hat{X} & Y \\ -Y & 0 \end{pmatrix}$$

ergibt, wobei $\hat{X}$ die $(n\times n)$–Matrix $(x_{j-i})_{1\le i,j\le n}$ ist. Daraus folgt, daß $\det X = \det X^{\star\star} = (\det Y)^2$. Deshalb ist die Pfaffsche Form von X gleich $\pm\det Y$. Da sowohl $\operatorname{pf}(X)$ als auch $\det(Y)$ einen Term x_1^n enthalten, gilt das Pluszeichen. □

Im folgenden Lemma geht es um die Pfaffsche Form einer Summe. Sei $J \subset \{1,\ldots,n\}$ und A eine $(n\times n)$–Matrix. A_J bezeichne die Untermatrix, die man erhält, wenn man die durch J indizierten Reihen und Spalten auswählt. Wir wollen $\sigma(J)$ für $\sum_{j\in J} j$ schreiben.

LEMMA II.15. *Angenommen, n ist gerade.*

1. *Falls A und B $(n \times n)$–Matrizen sind, dann gilt*

$$\operatorname{pf}(A+B) = \sum_J (-1)^{\sigma(J)-|J|/2} \operatorname{pf}(A_J) \operatorname{pf}(B_{J^c}),$$

summiert über alle $J \subset \{1,\dots,n\}$ mit $|J|$ gerade.

2. *Falls $A = [(-1)^{i+j-1}]_{1\le i<j\le n}$ und $|J|$ gerade, dann ist*

$$\operatorname{pf}(A_J) = (-1)^{\sigma(J)-|J|/2}.$$

BEWEIS. Für (a) haben wir

$$\operatorname{pf}(A+B) = \sum_{\pi\cup\rho\in\mathcal{F}_n} \operatorname{sgn}(\pi\cup\rho) \prod_{(i,j)\in\pi} a_{ij} \prod_{(i,j)\in\rho} b_{ij},$$

summiert über alle Möglichkeiten, jeden 1–Faktor aus $\mathcal{F}_n$ in zwei 1–Faktoren π, ρ zweier komplementärer Teilmengen von $\{1,\dots,n\}$ zu teilen. Angenommen, daß (π,ρ) einer dieser Paare und $J = \{j_1 < \cdots < j_k\}$ die Knotenmenge von π ist. Falls $(j_r, j_s) \in \pi$, dann wird die Anzahl der Kanten von ρ, die (j_r, j_s) kreuzen, (mod 2) mit der Anzahl der Punkte von ρ zwischen j_r und j_s, nämlich $j_s - j_r - s + r$, übereinstimmen. Die Anzahl der zwischen π und ρ gekreuzten Kanten ist daher

$$\sum_{(j_r,j_s)\in\pi} j_s - j_r - s + r = \sigma(J) + \binom{k+1}{2} = \sigma(J) - |J|/2 \pmod 2,$$

und wir haben damit $\operatorname{sgn}(\pi\cup\rho) = (-1)^{\sigma(J)-|J|/2} \operatorname{sgn}(\pi) \operatorname{sgn}(\rho)$. Es folgt, daß

$$\operatorname{pf}(A+B) = \sum_J (-1)^{\sigma(J)-|J|/2} \sum_{\pi\in\mathcal{F}(J)} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{(i,j)\in\pi} a_{ij} \sum_{\rho\in\mathcal{F}(J^c)} \operatorname{sgn}(\rho) \prod_{(i,j)\in\rho} b_{ij},$$

summiert über alle J von gerader Kardinalität. Das ist zur behaupteten Formel klarerweise äquivalent.

Für (b) beachte man, daß $\operatorname{pf}(C) = (-1)^{k/2} \operatorname{pf}(-C)$ für eine beliebige $(k \times k)$–Matrix C. Deshalb genügt es zu zeigen, daß $\operatorname{pf}(-A_J) = (-1)^{\sigma(J)}$, was wiederum direkt aus Korallar II.9 (wähle dort $x_i = (-1)^i$) und Proposition II.11 folgt. $\square$

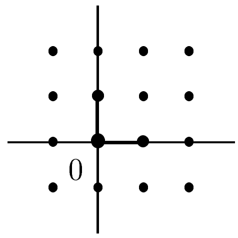
KAPITEL III

Gitterpunktwege

1. Grundkonzepte

Unter Γ soll folgender azyklische gerichtete Graph verstanden werden: Die Knotenmenge sei $\mathbb{Z}^2$, den Kanten entsprechen die Schritte (0,1) bzw. (1,0).

Γ :



M. a. W.: Γ ist das nach Norden und Osten gerichtete zweidimensionale Zahlengitter. Die Notation

$$u \to v \qquad \text{für} \quad u, v \in \mathbb{Z}^2$$

soll bedeuten, daß eine Kante von u auf v gerichtet ist. Das heißt offensichtlich, daß $v = u + (0,1)$ oder $v = u + (1,0)$.

Für beliebige $u, v \in \mathbb{Z}^2$ sei $\mathcal{P}(u, v)$ die Menge der (gerichteten) Gitterpunktwege von u nach v. Falls $u = v$, dann besteht $\mathcal{P}(u, v)$ aus einem einzigen Pfad der Länge null. Bei gegebenen r–Tupeln von Knoten $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_r)$, $u_i \in \mathbb{Z}^2$, $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_r)$, $u_i \in \mathbb{Z}^2$ bezeichne $\mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ die Menge der r–Tupel $(P_1, \ldots, P_r)$ von Pfaden mit $P_i \in \mathcal{P}(u_i, v_i)$. $\mathcal{P}_0(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ sei die Teilmenge von $\mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, die nur aus einander nicht berührenden r–Tupeln von Pfaden besteht. (D. h., es existiert kein gemeinsamer Knoten zwischen je zwei Pfaden dieser r–Tupel.)

Für die folgenden Überlegungen soll $\mathbb{Z}^2$ mit einer *Ordnung* $\leq$ versehen sein (mit den üblichen Axiomen, wie Reflexivität, Antisymmetrie und Transitivität).

Definition III.1 (kompatibel). *Seien I und J geordnete Teilmengen von $\mathbb{Z}^2$. Dann heißt I* kompatibel *zu J, falls aus $u < u'$ in I und $v > v'$ in J folgt, daß jeder Pfad $P \in \mathcal{P}(u, v)$ jeden Pfad $Q \in \mathcal{P}(u', v')$ schneidet.*

Das Wesentliche dieser Bedingung ist folgende Tatsache: Angenommen $\mathbf{u}$ ist kompatibel zu $\mathbf{v}$. Falls für eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_r$, wobei $\mathcal{S}_r$ die symmetrische Gruppe der Ordnung r ist, die Menge $\mathcal{P}_0((u_1, \dots, u_r), (v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}))$ nicht leer ist, dann muß σ die Identität sein.

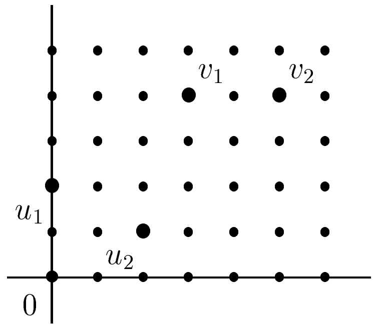
Beispiel III.2. *Angenommen,*

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2), \quad u_1 = (0, 2), \; u_2 = (2, 1),$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2), \quad v_1 = (3, 4), \; v_2 = (5, 4),$$

wobei $u_1 < u_2$ und $v_1 < v_2$ sein sollen.

Offensichtlich ist $\mathbf{u}$ kompatibel zu $\mathbf{v}$.



Betrachtet man auf $\mathbb{Z}^2$ die Halbordnung

$$u = (x_1, x_2) \preceq v = (y_1, y_2) \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad x_1 \leq y_1 \;\; \& \;\; x_2 \geq y_2 \tag{8}$$

(d. h. v liegt *rechts unterhalb* von u), dann läßt sich ein nützliches Kompatibilitätskriterium angeben:

Proposition III.3. *Zwei beliebige Ketten von $(\mathbb{Z}^2, \preceq)$ sind kompatibel.*

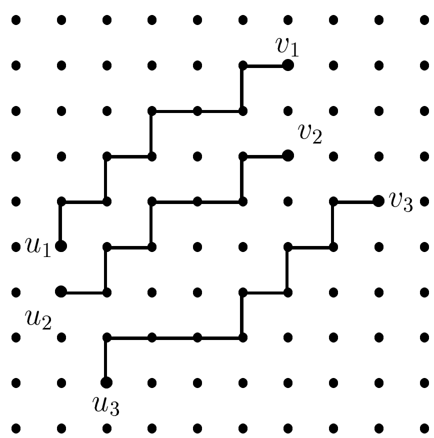
Beweis. Angenommen, es gibt ein Paar einander nicht berührender Pfade (P, Q) mit $P \in \mathcal{P}(u, v)$, $Q \in \mathcal{P}(u', v')$, $u \prec u'$ und $v \succ v'$. Unter allen solchen Gegenbeispielen wählen wir ein Paar, für das die Summe der Pfadlängen $\ell(P) + \ell(Q)$ minimal ist. Falls $\ell(P) > 0$, dann gibt es $u_0 \in P$ und $u_0' \in Q$ mit $u \to u_0$ und $u' \to u_0'$.

Aus $u = (x_1, x_2) \prec u' = (x_1', x_2')$ folgt $x_1 < x_1'$ oder $x_2 > x_2'$. Im ersten Fall kann u von P, im zweiten Fall kann u' von Q entfernt werden, um ein kleineres Gegenbeispiel zu erhalten.

OBdA sei $\ell(P) = 0$. ($\ell(Q) = 0$ analog.) Dann gilt $u = v$ und daher $v' \prec u \prec u'$, d. h. v' liegt links oberhalb von u'. Da Q ein Pfad von u' nach v' ist, liegt v' auch rechts oberhalb von u'. Also liegt v' oberhalb von u' (mit gleicher 1. Koordinate) und u muß dazwischen liegen, d. h. Q berührt u — Widerspruch. $\square$

Die Halbordnung $\preceq$ auf $\mathbb{Z}^2$ erweist sich als recht nützlich, und von nun an wollen wir von dieser Ordnung ausgehen, d. h., $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_r)$ kompatibel zu $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_r)$ soll einfach bedeuten, daß $u_1 \preceq u_2 \preceq \cdots \preceq u_r$ und $v_1 \preceq v_2 \preceq \cdots \preceq v_r$

Abbildung III.1



gilt. Anschaulich ergibt sich in Γ, daß für $(P_1, \dots, P_r) \in \mathcal{P}_0(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ der erste Pfad *links oben* und der r–te Pfad *rechts unten* verläuft (siehe Abbildung III.1).

2. Die Gessel–Viennot–Methode

Nun führt man für Gitterpunktwegen in Γ eine Gewichtsfunktion w ein, die jeder Kante in Γ einen Wert in einem kommutativen Ring R zuordnet.

Im allgemeinen empfiehlt es sich, für jede Kante e eine Unbestimmte x_e zu wählen und im formalen Potenzreihenring $R = \mathbb{Z}[[x_e : \text{Kante in } \Gamma]]$ zu arbeiten. Für die Anwendungen soll diese Gewichtsfunktion $w(e) = x_e$ entsprechend spezialisiert werden (— meist durch q–Potenzen). Hat man sich für eine bestimmte Gewichtsfunktion w entschieden, erweitert man w multiplikativ auf Multimengen von Kanten, sodaß $w(M) = \prod_{e \in M} w(e)$ für irgendeine Multimenge M ist. (Nach Konvention sei $w(\emptyset) = 1$.) In der Regel wird das Gewicht eines Gitterpunktweges in Γ oder r–Tupels von Gitterpunktwegen als das Gewicht der Multimenge der durchlaufenen Kanten definiert.

Sei eine beliebige Familie $\mathcal{F}$ von Multimengen von Kanten gegeben, so schreiben wir $\mathrm{EF}[\mathcal{F}]$ für die erzeugende Funktion bezüglich dem Gewicht w, also $\mathrm{EF}[\mathcal{F}] =$

$\sum_{M\in\mathcal{F}} w(M)$. Insbesondere definieren wir

$$w(u,v) = \mathrm{EF}[\mathcal{P}(u,v)] = \sum_{P\in\mathcal{P}(u,v)} w(P). \tag{9}$$

Da es nur endlich viele Pfade in $\mathcal{P}(u,v)$ gibt, ist $w(u,v)$ zu einem gegebenen Gewicht w stets wohldefiniert.

Das folgende Resultat geht auf Karlin [**7, 8**] und Lindström [**13**] bzw. in der vorliegenden Form auf Gessel und Viennot [**6**, Theorem 1] zurück und ist der Schlüssel für die Berechnung der erzeugenden Funktionen in dieser Arbeit.

Satz III.4 (Gessel–Viennot). *Gegeben seien* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in (\mathbb{Z}^2)^r$. *Wenn* $\mathbf{u}$ *kompatibel zu* $\mathbf{v}$ *ist, dann gilt*

$$\mathrm{EF}[\mathcal{P}_0(\mathbf{u},\mathbf{v})] = \det_{1\le i,j\le r}[w(u_i,v_j)]. \tag{10}$$

Beweis. Wir können

$$\det_{1\le i,j\le r}[w(u_i,v_j)] = \sum_{\pi\in\mathcal{S}_r} \mathrm{sgn}(\pi)\, w(u_1,v_{\pi(1)})\cdots w(u_r,v_{\pi(r)}) \tag{11}$$

(wobei $\mathcal{S}_r$ die symmetrische Gruppe der Ordnung r bezeichne,) interpretieren als erzeugende Funktion $\sum \bar{w}(\pi,P_1,\dots,P_r)$ für $\pi\in\mathcal{S}_r$ und $P_i\in\mathcal{P}(u_i,v_{\pi(i)})$, wobei das Gewicht durch $\bar{w}(\pi,P_1,\dots,P_r) = \mathrm{sgn}(\pi)\,w(P_1)\cdots w(P_r)$ erklärt ist.

Nun wird eine Involution beschrieben, die auf die Konfigurationen $(\pi,P_1,\dots,P_r)$ wirkt, die mindestens ein Paar sich berührender Pfade besitzen. Auf solche Konfigurationen angewandt soll die Involution das Vorzeichen des Gewichtes ändern.

Man betrachte also eine beliebige Konfiguration $(\pi,P_1,\dots,P_r)$ mit mindestens einem Paar einander berührender Pfade. Unter allen Berührungspunkten zwischen irgendwelchen zwei Pfaden betrachte man die am weitesten *links* liegenden und unter diesen den am *niedrigsten* liegenden Berührungspunkt. D. h., falls $s=(\bar{x},\bar{y})$ der nun erhaltene Berührungspunkt ist, dann gilt für jeden anderen Berührungspunkt (x,y)

$$x>\bar{x}, \quad \text{oder falls} \quad x=\bar{x}, \quad \text{dann} \quad \bar{y}\le y. \tag{12}$$

Unter allen Paaren von Pfaden, die s gemeinsam haben, sei (P_k,P_l) das Paar, für das (k,l) minimal ist in der lexikographischen Ordnung von Zahlenpaaren. Aus (12) folgt u. a., daß s der *erste* Berührungspunkt zwischen P_k und P_l ist.

Verwendet man die Schreibweise $P_k(\to s)$ bzw. $P_k(s\to)$, um die Unterpfade von P_k zu bezeichnen, die von u_k nach s bzw. s nach $v_{\pi(k)}$ führen (und analog für P_l), dann definieren wir $(\pi', P_1', \dots, P_r')$ als die Konfiguration mit $P_i' = P_i$ für $i \neq k, l$, $P_k' = P_k(\to s)\, P_l(s \to)$, $P_l' = P_l(\to s)\, P_k(s \to)$ (d. h. die terminalen Abschnitte von P_k und P_l werden vertauscht,) und $\pi' = \pi \circ (k,l)$ (siehe Abbildung III.2).

Da die Multimenge der Kanten, die in $(P_1, \dots, P_r)$ und $(P_1', \dots, P_r')$ vorkommen, gleich ist, folgt, daß die Operation $(\pi, P_1, \dots, P_r) \mapsto (\pi', P_1', \dots, P_r')$ eine Involution ist. Außerdem ist sie Vorzeichen–umkehrend, daher können wir alle Terme, die auf der rechten Seite von (11) auftreten, weglassen, bis auf jene, die Konfigurationen einander nicht berührender Gitterpunktwege entsprechen. Da laut Voraussetzung $\mathbf{u}$ kompatibel zu $\mathbf{v}$ ist, treten diese in (11) nur auf, wenn $\pi = \mathrm{id}$ und werden sodann mit einem positiven Gewicht gezählt. ☐

3. Nicht–berührende Gitterpunktwege und Pfaffsche Formen

Für $u \in \mathbb{Z}^2$ und eine Teilmenge $I \subset \mathbb{Z}^2$ sei $\mathcal{P}(u; I)$ die Menge der Gitterpunktwege von u zu irgendeinem $v \in I$. $\mathcal{Q}_I(u)$ sei die zugehörige erzeugende Funktion; also

$$\mathcal{Q}_I(u) = \mathrm{EF}[\mathcal{P}(u; I)] = \sum_{P \in \mathcal{P}(u;I)} w(P) = \sum_{v \in I} w(u, v).$$

Sei $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_r) \in (\mathbb{Z}^2)^r$, dann bezeichne $\mathcal{P}(\mathbf{u}; I)$ die Menge der r–Tupel von Pfaden $(P_1, \dots, P_r)$ mit $P_i \in \mathcal{P}(\mathbf{u}; I)$; $\mathcal{P}_0(\mathbf{u}; I)$ sei die Teilmenge davon, die aus einander nicht berührenden r–Tupeln besteht. Analog erweitert man die $\mathcal{Q}_I$–Notation, indem man

$$\mathcal{Q}_I(\mathbf{u}) = \mathcal{Q}_I(u_1, \dots, u_r) = \mathrm{EF}[\mathcal{P}_0(\mathbf{u}; I)]$$

definiert.

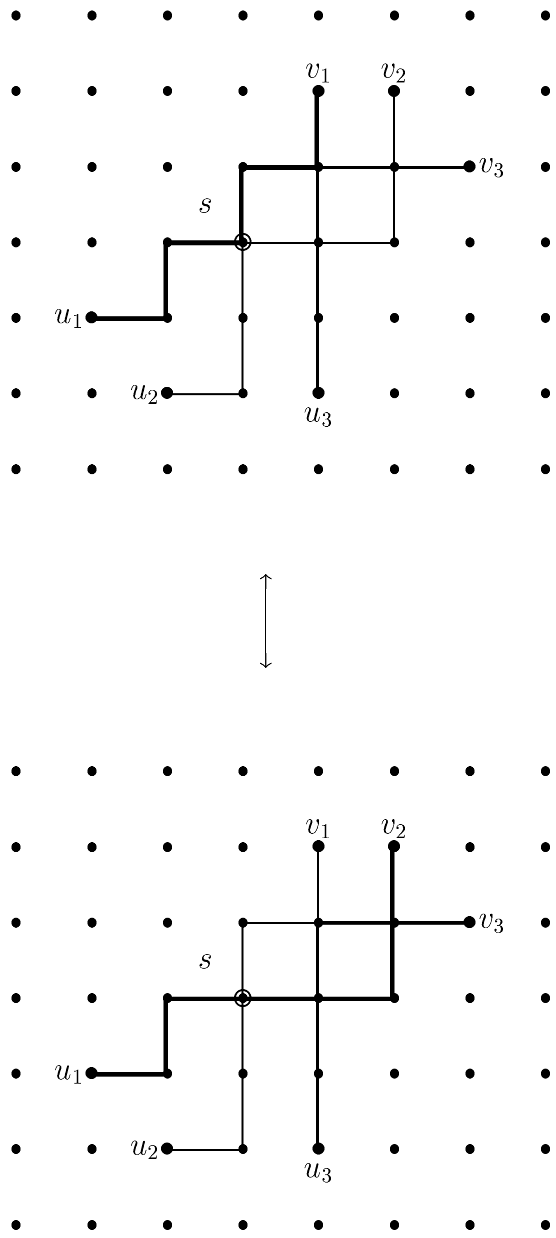
Beispiel III.5. *Sei $r = 2$ und I eine Kette von $(\mathbb{Z}^2, \preceq)$. Unter der Annahme, daß $u_1 \prec u_2$, impliziert Satz III.4*

$$\mathcal{Q}_I(u_1, u_2) = \sum_{v_1 \prec v_2 \in I} \Big(w(u_1, v_1)\, w(u_2, v_2) - w(u_1, v_2)\, w(u_2, v_1) \Big). \tag{13}$$

Satz III.6. *Sei $\mathbf{u} \in (\mathbb{Z}^2)^r$ mit $u_1 \preceq \cdots \preceq u_r$ und r gerade. Falls I eine Kette von $(\mathbb{Z}^2, \preceq)$ ist, dann gilt*

$$\mathcal{Q}_I(u_1, \dots, u_r) = \mathrm{pf}[\mathcal{Q}_I(u_i, u_j)]_{1 \le i < j \le r}.$$

ABBILDUNG III.2



$P_1: \quad u_1 \to v_1$

$P_2: \quad u_2 \to v_2$

$P_3: \quad u_3 \to v_3$

$P_1': \quad u_1 \to v_2$

$P_2': \quad u_2 \to v_1$

$P_3': \quad u_3 \to v_3$

BEMERKUNG. *Diese hier dargestellte Involution ist der Kern der Gessel–Viennot–Methode. Es sei erwähnt, daß die Sätze III.4,III.6 und III.7 mit den entsprechend allgemeineren Formulierungen in jedem azyklischen gerichteten Graphen gelten. Wir haben ihn nur für Pfade in* Γ *mit der speziellen Ordnung* $\preceq$ *auf* $\mathbb{Z}^2$ *formuliert, weil dies für die späteren Anwendungen in dieser Arbeit ausreichend ist.*

Bemerkung. *Falls r ungerade ist, kann man zu $\mathbf{u}$ und I den Phantomknoten $u_{r+1} = (\infty, -\infty)$ hinzufügen, sodaß $u_i < u_{r+1}$ $(i = 1, \ldots, r)$ und $\mathcal{P}(u_{r+1}; I) = \emptyset$. In diesem Fall gilt $\mathcal{Q}_I(u_i, u_{r+1}) = \mathcal{Q}_I(u_i)$ und Satz III.6 kann verwendet werden, um eine Pfaffsche Form der Ordnung $r+1$ für $\mathcal{Q}(\mathbf{u})$ zu erhalten.*

Beweis. Wir können

$$\operatorname{pf}[\mathcal{Q}_I(u_i, u_j)] = \sum_{\pi \in \mathcal{F}(\mathbf{u})} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{(u_i,u_j) \in \pi} \mathcal{Q}_I(u_i, u_j) \qquad (14)$$

interpretieren als erzeugende Funktion $\sum \hat{w}(\pi, P_1, \ldots, P_r)$ für $P_i \in \mathcal{P}(u_i; I)$ und π ein 1–Faktor von $\mathbf{u}$, wobei für jede Kante (u_i, u_j) von π gilt, daß P_i und P_j einander nicht berühren dürfen. Hier ist das Gewicht durch $\hat{w}(\pi, P_1, \ldots, P_r) = \operatorname{sgn}(\pi)\, w(P_1) \cdots w(P_r)$ erklärt. Wir werden zeigen, daß es eine Vorzeichen–umkehrende Involution auf den Konfigurationen $(\pi, P_1, \ldots, P_r)$ gibt, die zumindest ein Paar einander berührender Pfade besitzen.

Wir gehen nun genauso wie in Satz III.4 vor. Gegeben sei eine Konfiguration $(\pi, P_1, \ldots, P_r)$ mit mindestens einem Paar einander berührender Pfade und s der in Satz III.4 beschriebene Berührungspunkt. Gemäß der Notation von Satz III.4 definieren wir eine neue Konfiguration $(\pi', P_1', \ldots, P_r')$. Wie oben sei $P_k' = P_k(\to s)\, P_l(s \to)$, $P_l' = P_l(\to s)\, P_k(s \to)$ und $P_i' = P_i$ für $i \neq k, l$. Weiters bezeichne π' den 1–Faktor, der durch Vertauschung von u_k und u_l in π hervorgeht.

Wir behaupten, daß $(\pi, P_1', \ldots, P_r')$ eine der Konfigurationen ist, die in (14) auftreten, d. h., daß für jede Kante $(u_i, u_j) \in \pi'$ die Pfade P_i' und P_j' einander nicht berühren. Die einzigen nicht unmittelbaren Fälle sind jene, wo die modifizierten Pfade P_k' und P_l' involviert sind. Jedenfalls impliziert (12), daß es keine weiteren Berührungspunkte auf den Unterpfaden $P_k(\to s)$ und $P_l(\to s)$ gibt. Daher wird der Pfad P_i genau dann P_k (bzw. P_l) schneiden, wenn P_i' P_k' (bzw. P_l') schneidet, woraus die Behauptung folgt. Damit schließen wir, daß die Operation $(\pi, P_1, \ldots, P_r) \mapsto (\pi', P_1', \ldots, P_r')$ eine Involution auf den einander berührenden Konfigurationen ist, die in (14) auftreten.

Um zu beweisen, daß diese Involution Vorzeichen–umkehrend ist, genügt es zu zeigen (nach Lemma II.4), daß weder u_k noch u_l in π durch eine Kante mit einem u_i verbunden sind für $k < i < l$. Dafür reicht es zu zeigen, daß aus $k < i < l$ folgt, daß P_i sowohl P_k als auch P_l berühren muß. Um das für diese Werte von i zu beweisen, bezeichne man mit $v_k, v_i \in I$ die Endpunkte von P_k und P_i. Falls $v_k = v_i$, wäre alles bereits gezeigt. Sonst betrachte man die zwei Fälle mit $v_k \succ v_i$ und $v_k \prec v_i$. Im ersten Fall zwingt die Kompatibilität von $\mathbf{u}$ mit I, daß sich P_k und P_i schneiden. Im zweiten Fall müssen dann (wieder aufgrund der Kompatibilität) $P_l' = P_l(\to s)\, P_k(s \to)$ und P_i sich schneiden. Wie auch immer, da s, wie oben erwähnt, der einzige Berührungspunkt in $P_l(\to s)$ ist, müssen sich P_i und P_l' im Unterpfad $P_k(s \to)$ schneiden, d. h., P_i schneidet P_k. Ganz analog kann man schließen, daß sich P_i und P_l berühren müssen.

Nachdem wir die Existenz dieser Vorzeichen–umkehrenden Involution gezeigt haben, können wir alle Terme von (14) mit einander berührenden Konfigurationen von Pfaden streichen, d. h.

$$\mathrm{pf}[\mathcal{Q}_I(u_i, u_j)] = \mathrm{EF}[\mathcal{P}_0(\mathbf{u}; I)] \sum_{\pi \in \mathcal{F}_r} \mathrm{sgn}(\pi).$$

Schließlich vervollständigt die Anwendung von Proposition II.11 den Beweis. □

4. Nicht–berührende Gitterpunktwege zwischen zwei Ketten

Satz III.6 des vorhergehenden Abschnittes bestimmt die erzeugende Funktion für eine Menge von r–Tupeln einander nicht berührender Gitterpunktwege, deren Anfangspunkte fest sind, deren Endpunkte jedoch variieren können. Genauer: Die Pfade gehen von einer r–elementigen nach einer beliebigen Kette von $(\mathbb{Z}^2, \preceq)$. In diesem Abschnitt wollen wir uns dem allgemeineren Problem zuwenden, wo sowohl die Anfangs– als auch die Endpunkte über festgelegte Ketten von $(\mathbb{Z}^2, \preceq)$ variieren dürfen.

Wie im vorigen Abschnitt nehmen wir an, daß $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_r) \in (\mathbb{Z}^2)^r$ und $I \subset \mathbb{Z}^2$. Für $s \leq r$ definieren wir $\mathcal{P}_0^{(s)}(\mathbf{u}; I)$ als die Menge der s–Tupeln $(P_1, \ldots, P_s)$ einander nicht berührender Gitterpunktwege in $\mathcal{P}_0(\mathbf{u}', I)$, wobei sich $\mathbf{u}'$ über alle s–elementigen Teilmengen von $\mathbf{u}$ erstreckt. Die dazugehörige erzeugende Funktion sei

$$\mathcal{Q}_I^{(s)}(\mathbf{u}) = \mathrm{EF}[\mathcal{P}_0^{(s)}(\mathbf{u}; I)] = \sum_{i_1 < \cdots < i_s} \mathcal{Q}_I(u_{i_1}, \ldots, u_{i_s}).$$

Satz III.7. *Sei $\mathbf{u} \in (\mathbb{Z}^2)^r$ mit $u_1 \preceq \cdots \preceq u_r$ und I eine Kette von $(\mathbb{Z}^2, \preceq)$.*

1. *Falls r gerade ist, dann gilt*

$$\sum_{s=0}^{r/2} \mathcal{Q}_I^{(2s)}(\mathbf{u}) = \operatorname{pf}[(-1)^{i+j-1} + \mathcal{Q}_I(u_i, u_j)]_{1\le i<j\le r} \quad .$$

2. *Falls r ungerade ist, dann gilt*

$$\sum_{s=0}^{r} \mathcal{Q}_I^{(s)}(\mathbf{u}) = \operatorname{pf}[(-1)^{i+j-1} + \mathcal{Q}_I^\star(u_i, u_j)]_{1\le i<j\le r+1},$$

wobei $\mathcal{Q}_I^\star(u_i,u_j) = \mathcal{Q}_I(u_i,u_j)$ für $j \le r$ und $\mathcal{Q}_I^\star(u_i,u_{r+1}) = \mathcal{Q}_I(u_i)$.

3. *Falls r gerade ist, dann gilt*

$$\sum_{s=0}^{r} \mathcal{Q}_I^{(s)}(\mathbf{u}) = \operatorname{pf}[(-1)^{i+j-1} + \mathcal{Q}_I^\star(u_i, u_j)]_{1\le i<j\le r+2},$$

wobei $\mathcal{Q}_I^\star(u_i,u_j)$ gleich ist wie in (b) *für $j \le r+1$, und $\mathcal{Q}_I^\star(u_i,u_{r+2}) = 0$.*

Beispiel III.8. *Wir wollen die erzeugende Funktion aller Familien einander nicht berührender Gitterpunktwege mit Anfangspunkten aus* $\mathbf{u}$ *und Endpunkten aus I bestimmen. Zunächst sei $r = 3$. Satz III.7(b) besagt, daß die gesuchte erzeugende Funktion $\sum_{s=0}^{r} \mathcal{Q}_I^{(s)}(\mathbf{u})$ gleich der Pfaffschen Form der oberen Dreiecksmatrix*

$$\begin{pmatrix} 1+q_{12} & -1+q_{13} & 1+q_1 \\ & 1+q_{23} & -1+q_2 \\ & & 1+q_3 \end{pmatrix}$$

ist, wobei $q_{ij} = \mathcal{Q}_I(u_i,u_j)$ und $q_i = \mathcal{Q}_I(u_i)$. Im Falle $r = 4$ ist nach Satz III.7(c) jene erzeugende Funktion die Pfaffsche Form von

$$\begin{pmatrix} 1+q_{12} & -1+q_{13} & 1+q_{14} & -1+q_1 & 1 \\ & 1+q_{23} & -1+q_{24} & 1+q_2 & -1 \\ & & 1+q_{34} & -1+q_3 & 1 \\ & & & 1+q_4 & -1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Um (a) zu beweisen, wenden wir Lemma II.15 auf das Matrizenpaar $A = [(-1)^{i+j-1}]$ und $B = [\mathcal{Q}_I(u_i,u_j)]$ an und erhalten

$$\operatorname{pf}[(-1)^{i+j-1} + \mathcal{Q}_I(u_i,u_j)] = \sum_J \operatorname{pf}[\mathcal{Q}_I(u_i,u_j)]_{i<j\in J},$$

summiert über alle $J \subset \{1,\dots,r\}$ mit gerader Kardinalität. Nach Satz III.6 kann der J–te Term $\operatorname{pf}[\mathcal{Q}_I(u_i,u_j)]_{i<j\in J}$ mit der erzeugenden Funktion einander nicht berührender Gitterpunktwege von $\{u_j \mid j \in J\}$ nach I identifiziert werden.

Die Teile (b) und (c) folgen aus (a).

Für (b) adjungieren wir zu $\mathbb{Z}^2$ den Phantomknoten $u_r = (\infty, -\infty)$, wobei offensichtlich $\mathbf{u}^\star = (u_1, \dots, u_{r+1})$ kompatibel zu $I^\star = I \cup u_{r+1}$ ist. Außerdem können die $2s$–Tupel von Pfaden in $\mathcal{P}_0^{(2s)}(\mathbf{u}^\star; I^\star)$, die den 0–Pfad $u_{r+1} \to u_{r+1}$ (mit Gewicht 1) involvieren, mit den $(2s-1)$–Tupeln in $\mathcal{P}_0^{(2s-1)}(\mathbf{u}; I)$ identifiziert werden, und daher erhalten wir die erzeugende Funktion $\sum_{s=0}^{r} \mathcal{Q}_I^{(s)}(\mathbf{u})$, indem wir Teil (a) auf das Paar $\mathbf{u}^\star$, $I^\star$ anwenden. Aufgrund von $\mathcal{Q}_{I^\star}(u_i, u_{r+1}) = \mathcal{Q}_I(u_i)$ ergibt sich das gewünschte Ergebnis.

Für (c) adjungieren wir zur Konstruktion von Teil (b) einen weiteren Phantomknoten u_{r+2}, der keine Kanten besitzt. Weil es ja keinen Gitterpunktweg von u_{r+2} nach $I^\star$ gibt, wird bei dieser Erweiterung die Struktur von $\mathcal{P}_0^{(s)}(\mathbf{u}^\star; I^\star)$ nicht verändert, und daher können wir Teil (a) auf das Paar $\mathbf{u}^{\star\star} = (u_1, \dots, u_{r+2})$, $I^\star$ anwenden. Aufgrund von $Q_{I^\star}(u_i, u_{r+2}) = 0$ ergibt sich die Behauptung. $\square$

KAPITEL IV

Partitionen und q–Identitäten

1. Partitionen

Unter einer *Partition* einer natürlichen Zahl n versteht man eine Darstellung von n als Summe natürlicher Zahlen, $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r$ mit $\lambda_i \in \mathbb{N}$, wobei es auf die Ordnung der Summanden nicht ankommen soll. D. h., man kann oBdA annehmen, daß $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r$ gilt. Per Definition gibt es genau eine Partition von 0, nämlich die leere Partition $\emptyset$. Folgende Schreibweise ist gebräuchlich: $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$, wobei $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r$, und $|\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_r$. Falls λ eine Partition von n ist, d. h. $|\lambda| = n$, schreibt man $\lambda \vdash n$. Die Komponenten λ_i heißen auch *Teile* der Partition λ, und die Anzahl der Teile wird mit $l(\lambda) = r$, der *Länge* von λ, bezeichnet.

Bemerkung. *Eine andere eindeutige Darstellung wäre $\lambda = \langle 1^{\nu_1} 2^{\nu_2} 3^{\nu_3} \cdots \rangle$, wobei in dieser Darstellung nur endlich viele $\nu_i \neq 0$ sind. Das bedeutet also: Die Zahl 1 kommt ν_1–mal vor, die Zahl 2 ν_2–mal, usw. Außerdem gilt $\sum i\nu_i = |\lambda|$.*

Beispiel IV.1. *Es gibt 7 Partitionen der Zahl 5:*

$$5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1.$$

Häufig wird das Pluszeichen weggelassen, wonach sich eine lineare Anordnung der Teile ergibt. Hier ergäbe das dann

$$5, \quad 4\ 1, \quad 3\ 2, \quad 3\ 1\ 1, \quad 2\ 2\ 1, \quad 2\ 1\ 1\ 1, \quad 1\ 1\ 1\ 1\ 1.$$

Oft werden Partitionen auch *lineare* Partitionen genannt. Diesen Ausdruck werden wir allerdings nur dann verwenden, wenn betont werden soll, daß es sich um eine Partition und nicht etwa um eine Plane Partition, die eine zweidimensionale Anordnung ihrer Teile besitzt (siehe Abschnitt 3), handelt.

Die Anzahl der Partitionen einer Zahl n wird mit $p(n)$ bezeichnet. Also $p(0) = 1$, $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3$, $p(4) = 5$, $p(5) = 7$, $p(6) = 11$, etc. P. MacMahon [**15**] hat Tabellen von $p(n)$ angefertigt bis $n = 200$ (z. B. $p(200) = 3972999029388$).

Es ist einiges über Partitionen und die Partitionsfunktion $p(n)$ bekannt. Eine gute Darstellung der Partitionen und der damit verbundenen Theorie findet man in [**1**]. Uns soll es hier nur um die einfachsten Sachverhalte gehen, bevor wir uns unserem eigentlichen Anliegen, den Plane Partitions, zuwenden.

Die erzeugende Funktion der $p(n)$ ist, wie man sich leicht anhand der obigen Bemerkung vergegenwärtigt,

$$\sum_{n\geq 0} p(n)q^n = \prod_{i\geq 1}\sum_{\nu_i\geq 0} q^{i\nu_i} = \prod_{i\geq 1}(1-q^i)^{-1}.$$

Wir wollen uns etwas Schwierigerem zuwenden. Sei $p(n,k,m)$ die Anzahl aller Partitionen von n in höchstens k Teile, die alle $\leq m$ sind. Was ist dann die erzeugende Funktion $\sum_{n\geq 0} p(n,k,m)q^n$?

Lemma IV.2.

$$\sum_{n,k\geq 0} p(n,k,m)q^n z^k = \frac{1}{(1-z)(1-qz)\cdots(1-q^m z)} \tag{15}$$

Beweis. Die rechte Seite von (15) ist $\prod_{i=0}^m \sum_{\nu\geq 0} q^{i\nu}z^\nu$. Der Koeffizient von $q^n z^k$ ist die Anzahl aller möglichen $(m+1)$–Tupel $(\nu_0,\nu_1,\dots,\nu_m)$ mit $\nu_1 + 2\nu_2 + \cdots + m\nu_m = n$ und $\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_m = k$ bzw. die Anzahl der Partitionen von n in $\nu_1 + \cdots + \nu_m = k - \nu_0$ Teile (also insbesondere $\leq k$ Teile), die alle $\leq m$ sind, also gerade $p(n,k,m)$. $\square$

Nun wird es Zeit, die q–Schreibweise einzuführen. Für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert man $[n]_q := 1 - q^n$ und die q–Fakultät $[n]_q! := [n]_q\,[n-1]_q!$, wobei $[0]_q! := 1$. Danach wird für $k \geq 0$ auf natürliche Weise der q–Binomialkoeffizient (auch Gaußscher Binomialkoeffizient genannt) durch

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \begin{cases} \dfrac{[n]_q\,[n-1]_q\cdots[n-k+1]_q}{[k]_q!} & \text{für } k \geq 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

definiert. Man beachte dabei, daß im Zähler und Nenner $(1-q)^k$ herausgehoben werden kann, sodaß sich für $q = 1$ der gewöhnliche Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ergibt.

Gelegentlich werden wir die Basis q in $[n]_q$, $[n]_q!$ und $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ durch andere q–Potenzen ersetzen. Z. B. ist $[n]_{q^3}! = (1-q^{3n})(1-q^{3(n-1)})\cdots(1-q^3)$.

Es gelten die Rekursionsformeln

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = q^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q$$

und

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q ,$$

wie man leicht nachprüft.

Weil q–Binomialkoeffizienten in der Kombinatorik eine große Rolle spielen, gelangt man auf natürliche Weise zu der Untersuchung von q–Identitäten. Dazu kommt, daß man beim Operieren mit erzeugenden Funktionen sich keine Sorgen bezüglich Konvergenz zu machen braucht, da man stets in einem formalen Potenzreihenring arbeitet. Im Allgemeinen ist man nur an den Koeffizienten der entsprechenden q–Potenzen interessiert. Was reine Polynomidentitäten betrifft, so kann man dabei unbesorgt spezialisieren (z. B. $q = 1$ setzen), wenn man will.

A priori ist noch nicht klar, daß der q–Binomialkoeffizient für $n \geq k$ tatsächlich ein Polynom in q ist. Wie beim gewöhnlichen Binomialkoeffizienten, (wenn man nachweisen will, daß es sich dabei um eine natürliche Zahl handelt,) zeigt man das am bequemsten anhand einer kombinatorischen Interpretation. Genau diesem Zweck diente unsere obige Fragestellung.

Lemma IV.3.

$$\frac{1}{(1-z)(1-qz)\cdots(1-q^m z)} = \sum_{k\geq 0} \begin{bmatrix} m+k \\ m \end{bmatrix}_q z^k$$

Beweis. Man gehe mit Induktion vor unter Verwendung der ersten Rekursionsformel für den q–Binomialkoeffizienten. □

Korollar IV.4.

$$\sum_{n,k\geq 0} p(n,k,m) q^n = \begin{bmatrix} m+k \\ m \end{bmatrix}_q \quad \square$$

Bemerkungen. 1. *Die Rekursionsformeln für den q–Binomialkoeffizienten entsprechen den Rekursionen*

$$p(n,k,m) = p(n,k,m-1) + p(n-m,k-1,m)$$

$$p(n,k,m) = p(n,k-1,m) + p(n-k,k,m-1),$$

die man kombinatorisch sofort verifiziert.

2. *Läßt man in Korollar IV.4 $k,m \to \infty$ gehen, erhält man erwartungsgemäß*

$$\sum_{n\ge 0} p(n)q^n = \lim_{k,m\to\infty} \sum_{n,k\ge 0} p(n,k,m)q^n = \lim_{k,m\to\infty} \begin{bmatrix} m+k \\ m \end{bmatrix}_q$$

$$= \lim_{k,m\to\infty} \frac{(1-q^{m+k})(1-q^{m+k-1})\cdots(1-q^{k+1})}{(1-q^m)(1-q^{m-1})\cdots(1-q)} = \frac{1}{\prod_{i\ge 1}(1-q^i)}.$$

2. q–Identitäten

Hier sollen nur die elementarsten q–Identitäten, wie der *q–Binomische Lehrsatz* oder die *q–Vandermonde–Identität*, gebracht werden, die wir in unseren Anwendungen benötigen werden. Was die Auswertung von q–Binomialsummen betrifft, so sei erwähnt, daß es eine umfassende Theorie gibt, nämlich die der sogenannten *q–hypergeometrischen Reihen*, welche eine systematische Berechnung solcher Reihen zuläßt. (Eine ausgezeichnete Referenz für elementare hypergeometrische Funktionen stellt [**5**] dar.) Außerdem kann durch eine algorithmische Behandlung von (q–)hypergeometrischen Reihen [**26**] der Computer die Berechnungen übernehmen.

Zunächst sieht man leicht, daß

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q \tag{16}$$

für $k \ge 0$ gilt. Außerdem gilt für beliebige ganze Zahlen $n,k,l \in \mathbb{Z}$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k-l \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n-k+l \\ l \end{bmatrix}_q. \tag{17}$$

Die Formel

$$\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q = (-1)^k q^{kn} q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} -n-1 \\ k \end{bmatrix}_q, \tag{18}$$

wobei $k,n \in \mathbb{Z}$ sind, wird uns ebenfalls nützlich sein. Nun werden wir Summen von q–Binomialkoeffizienten betrachten.

LEMMA IV.5 (q–Binomischer Lehrsatz).

$$(1+z)(1+qz)\cdots(1+q^{n-1}z)=\sum_{k\geq 0} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q z^k$$

BEWEIS. Man gehe mit Induktion nach n vor unter Verwendung der zweiten Rekursionsformel für den q–Binomialkoeffizienten. □

LEMMA IV.6 (q–Vandermonde). *Es gilt*

$$\begin{bmatrix} n+m \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_{j=0}^{k} q^{(n-j)(k-j)} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m \\ k-j \end{bmatrix}_q \tag{19}$$

für beliebige $n, m \in \mathbb{Z}$ *und* $k \in \mathbb{N}_0$.

BEWEIS. Für $n, m \geq 0$ gilt nach dem q–Binomischen Lehrsatz

$$\begin{aligned} \sum_{i\geq 0} q^{\binom{i}{2}} \begin{bmatrix} n+m \\ i \end{bmatrix}_q z^i &= (1+z)\cdots(1+q^{n-1}z)\cdot(1+q^n z)\cdots(1+q^{n+m-1}z) \\ &= \sum_{j\geq 0} q^{\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q z^j \cdot \sum_{l\geq 0} q^{\binom{l}{2}} \begin{bmatrix} m \\ l \end{bmatrix}_q (q^n z)^l. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich bei z^k liefert

$$q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n+m \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_{j\geq 0} q^{\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q q^{\binom{k-j}{2}} \begin{bmatrix} m \\ k-j \end{bmatrix}_q q^{m(k-j)},$$

wobei sich nach Zusammenfassen der q–Potenzen das behauptete Resultat ergibt.

Für ein festes $k \geq 0$ sind beide Seiten von (19) Polyome in q^n und q^m, daher folgt, daß (19) für alle n und m gilt. □

BEMERKUNG. *Manchmal sieht man die q–Vandermonde–Identität in einer geringfügig anderen Variante, nämlich*

$$\begin{bmatrix} m+n \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_{j=0}^{k} q^{j(n-k+j)} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix}_q .$$

Aber wie man nach Indextransformation $j \to k-j$ feststellt, ist das eigentlich nichts Neues.

Dual zur q–Vandermonde–Identität gilt folgendes Lemma:

LEMMA IV.7. *Es gilt*

$$\begin{bmatrix} n+m+k+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_{j=0}^{k} q^{j(m+1)} \begin{bmatrix} n+j \\ j \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m+k-j \\ k-j \end{bmatrix}_q \tag{20}$$

für beliebige $n, m \in \mathbb{Z}$ *und* $k \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Es gibt zwei einfache Möglichkeiten. Einerseits kann man (18) auf die q–Binomialkoeffizienten beider Seiten von (19) anwenden. Andererseits kann man wie im Beweis von Lemma IV.6 vorgehen, d. h. man vergleicht Koeffizienten, verwendet aber statt Lemma IV.5 nun Lemma IV.3. $\square$

Wir notieren jetzt einige Folgerungen dieses Lemmas.

Setzt man in (20) $m = 0$, erhalten wir

Korollar IV.8.

$$\begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_{j=0}^{k} q^j \begin{bmatrix} n+j \\ j \end{bmatrix}_q \quad \square$$

Setzt man hingegen in (20) $n = 0$, dann erhalten wir

Korollar IV.9.

$$\begin{bmatrix} m+k+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_{j=0}^{k} q^{j(m+1)} \begin{bmatrix} m+k-j \\ k-j \end{bmatrix}_q \quad \square$$

Wendet man (18) auf den ersten q–Binomialkoeffizienten der rechten Seite von (20) an, so ergibt sich

Korollar IV.10. *Es gilt*

$$\begin{bmatrix} n+m+k+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j q^{j(n+m+1)} q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} -n-1 \\ j \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m+k-j \\ k-j \end{bmatrix}_q$$

für beliebige $n, m \in \mathbb{Z}$ *und* $k \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Schließlich soll zwecks späterer Bezugnahme noch eine Folgerung aus Lemma IV.7 dargelegt werden.

Korollar IV.11. *Es gilt*

$$(-1)^m q^{-mk} q^{-\binom{m+1}{2}} \begin{bmatrix} n+m+k+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_{j=0}^{k} q^j \begin{bmatrix} n+j \\ j \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} j-m-1 \\ m \end{bmatrix}_q \tag{21}$$

für beliebige $n \in \mathbb{Z}$ *und* $m, k \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Aus (16) und (18) folgt für $m, k, j \in \mathbb{Z}$ mit $m + k \geq j$, daß

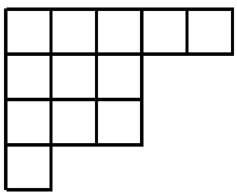
$$q^{j(m+1)} \begin{bmatrix} m+k-j \\ k-j \end{bmatrix}_q = q^{j(m+1)} \begin{bmatrix} m+k-j \\ m \end{bmatrix}_q = (-1)^m \, q^{mk+j} q^{\binom{m+1}{2}} \begin{bmatrix} j-k-1 \\ m \end{bmatrix}_q$$

gilt. Das substituiert man jetzt in (20). □

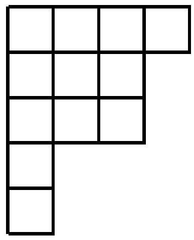
Zum Abschluß dieses Abschnittes sei noch auf eine nützliche Notation hingewiesen, die das Umformen gewisser Produkte übersichtlicher macht. Man definiert die *Hyperfakultät* durch $H(n) = (n-1)!\,(n-2)!\cdots$ und die *verschobene Hyperfakultät* durch $H_k(n) = (n-k)!\,(n-2k)!\cdots$. Die Fakultät sei $F(n) = n!$ und die verschobene Fakultät $F_k(n) = n\,(n-k)\,(n-2k)\cdots$. Die entsprechenden q–Analoga werden mit $H(n)_q$, $H_k(n)_q$, $F(n)_q$ und $F_k(n)_q$ bezeichnet. So ist z. B. $\prod_{1\leq i<j\leq r}[j-i]_q = \prod_{1\leq i<r}[r-i]_q! = H(r)_q$.

3. Plane Partitions und Tableaux

Es gibt eine gebräuchliche graphische Darstellung für eine Partition. Das *Ferrer–Diagramm* einer Partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ (für $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r$) erhält man, indem man eine Reihe von λ_1 Kästchen zeichnet, darunter, von links beginnend, eine Reihe von λ_2 Kästchen, usw. Zum Beispiel ist die unten abgebildete Figur das Ferrer–Diagramm für $\lambda_0 = (5, 3, 3, 1)$.



Man bezeichnet die Kästchen (auch Zellen genannt) mit (i, j), wobei i der Zeilen– und j der Spaltenindex ist. Dabei gilt $(i, j) \in \lambda$ genau dann, wenn $i \in \{1, \ldots, r\}$ und $j \in \{1, \ldots, \lambda_i\}$. Die Abbildung, die (i, j) in (j, i) überführt, nennt man *Konjugation*, was der Spiegelung des Ferrer–Diagramms entlang der Hauptdiagonale entspricht. Die zu λ konjugierte Partition wird mit λ' bezeichnet. $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_c)$ ist eine Partition mit $\lambda'_c = \lambda_1$ Reihen und $\lambda'_1 = r$ Spalten. Z. B. ist $\lambda'_0 = (4, 3, 3, 1, 1)$.

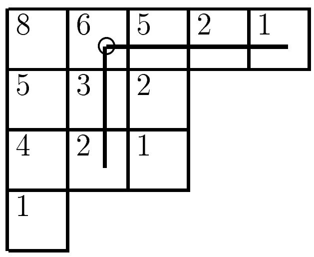


Offensichtlich ist die Zuordnung $\lambda \to \lambda'$ eine Involution, d. h. es gilt $\lambda'' = \lambda$. Eine Partition λ mit der Eigenschaft $\lambda = \lambda'$ heißt *symmetrische* Partition.

BEMERKUNG. *Eine symmetrische Partition λ ist durch ihre Zellen (i, j) für $i \leq j$ eindeutig bestimmt. Läßt man die anderen Zellen weg, so ergibt sich eine Partition μ, deren Teile alle verschieden sind (also $\mu_1 > \mu_2 > \cdots$). Solche Überlegungen werden bei der Behandlung der verschiedenen Symmetrieklassen von Plane Partitions eine wichtige Rolle spielen.*

Der *Haken* eines Kästchens (i, j) ist definiert als die Menge der Kästchen, die rechts oder unterhalb von (i, j), (i, j) eingeschlossen, liegen. Die Anzahl dieser Kästchen wird *Hakenlänge* genannt und mit $h_{(i,j)}$ bezeichnet.

BEISPIEL IV.12. *In den Kästchen von λ_0 sind die Hakenlängen notiert. Speziell wurde der Haken von $(1, 2)$ markiert.*



BEMERKUNGEN. 1. *Die Hakenlänge einer Zelle $(i, j) \in \lambda$ läßt sich auch formal durch $h_{(i,j)} = \lambda_i - j + \lambda'_j - i + 1$ definieren.*

2. *Wir werden den Begriff des Hakens im weiteren Verlauf dieser Arbeit nicht mehr benötigen, bis auf Kapitel VI, wo wir bemerken, daß die Hakenlängen der diagonalen Zellen (i, i) einer symmetrischen Partition stets ungerade sind.*

Sei eine Partition λ gegeben. Eine *Plane Partition* π *vom Rahmen* λ ist eine Anfüllung des Ferrer–Diagramms von λ mit natürlichen Zahlen, sodaß die Eintragungen sowohl entlang der Reihen als auch der Spalten monoton fallend sind. Falls die Summe der Eintragungen gleich n ergibt, sagt man, daß π eine Plane Partition von n ist, bzw. die *Norm* von π ist gleich n, symbolisch $|\pi| = n$. Ein einfaches Beispiel einer Plane Partition ist π_0 (mit Rahmen λ_0):

$$\pi_0 \ = \ \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 6 & 6 & 4 & 3 & 1 \\ \hline 5 & 4 & 4 \\ \cline{1-3} 4 & 4 & 3 \\ \cline{1-3} 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Wenn, wie hier, der Rahmen eindeutig aus der Matrixanordnung von π hervorgeht, wird er einfachheitshalber meistens weggelassen. So kann eine Plane Partition einfach als Matrix (π_{ij}) aufgefaßt werden, die nur für $1 \leq i \leq r$ und $1 \leq j \leq \lambda_i$ definiert ist, wobei die Monotoniebedingungen gelten müssen. Eine Plane Partition heißt *spaltenstrikt* (bzw. *reihenstrikt*), falls strikte Monotonie entlang der Spalten (bzw. Reihen) gelte. Falls man in der Definition “fallend” durch “wachsend” ersetzt, spricht man von *Reversed* Plane Partitions. Spaltenstrikte Reversed Plane Partitions werden auch *Tableaux* genannt. Z. B. ist das unten angegebene τ_0 ein Tableau vom Rahmen (7,6,4,2).

$$\tau_0 \quad = \quad \begin{array}{ccccccc} 2 & 2 & 3 & 7 & 8 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 4 & 8 & 9 & 12 \\ 5 & 5 & 9 & 10 \\ 6 & 7 \end{array}$$

BEMERKUNG. *Tableaux spielen u. a. eine wesentliche Rolle in der Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe. Eine gut lesbare Einführung in dieses Gebiet bietet* [**19**].

Das Gewicht einer Plane Partition π, (analog für ein Tableau,) wird mit $w(\pi) = \prod_{i\geq 1} x_i^{m_i(\pi)}$ definiert. Dabei ist $m_i(\pi)$ die Vielfachheit, mit der die Zahl i in π vorkommt. So gilt z. B. für obige Plane Partition $w(\pi_0) = x_1x_2x_3^2x_4^5x_5x_6^2$.

Gegeben sei eine Familie $\mathcal{F}$ von Plane Partitions oder Tableaux, etc. Die erzeugende Funktion ist dann $\sum_{\pi\in\mathcal{F}} w(\pi)$. Oft werden alle $x_i = q^i$ gesetzt. In diesem Fall gilt nämlich $w(\pi) = q^{|\pi|}$. Mit dieser einfachen Statistik werden wir uns in den späteren Anwendungen beschäftigen, wenn wir (Norm–)erzeugende Funktionen verschiedener Klassen von Plane Partitions bestimmen wollen.

4. Symmetrische Funktionen

Eine *symmetrische Funktion* ist bekanntlich eine Funktion, die invariant ist bezüglich einer beliebigen Permutation ihrer Variablen. Wir führen nun drei wichtige Klassen solcher symmetrischer Funktionen ein. Wir schreiben im folgenden $\mathbf{x}$ für $(x_1, x_2, x_3, \dots)$. Dabei kann eine unendliche Variablenmenge angenommen werden, da wir ja formale Potenzreihen betrachten und uns nicht um Konvergenz zu kümmern brauchen. Ist man nur an endlich vielen Variablen $x_1, \dots, x_m$ interessiert, so setze man einfach $x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = 0$.

Definition IV.13. *Die* elementarsymmetrische Funktion $e_n(\mathbf{x})$ *der Ordnung* n *ist durch*

$$e_n(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}$$

definiert.

Z. B. ist $e_3(\mathbf{x}) = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_1x_3x_4 + \cdots$.

Die erzeugende Funktion der e_n ist

$$E(t) = \sum_{n \geq 0} e_n t^n = \prod_{i \geq 1} (1 + x_i t). \tag{22}$$

(t ist eine neue Variable.) Das sieht man, indem man das Produkt auf der rechten Seite ausmultipliziert. Falls die Anzahl der Variablen endlich ist, z. B. gleich m, dann ist $e_n = 0$ für alle $n > m$, und (22) hat die Gestalt

$$\sum_{n=0}^{m} e_n t^n = \prod_{i=1}^{m} (1 + x_i t).$$

Korollar IV.14. *Sei* $x_i = q^{i-1}$ *für* $1 \leq i \leq m$ *und* $x_i = 0$ *für* $i > n$. *Dann ist*

$$e_n = q^{\binom{n}{2}} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_q .$$

Beweis. Es gilt

$$\sum_{n \geq 0} e_n t^n = \prod_{i=0}^{m-1} (1 + q^i t) = \sum_{n=0}^{m} q^{\binom{n}{2}} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_q t^n,$$

nach dem q–Binomischen Lehrsatz (Lemma IV.5). □

DEFINITION IV.15. *Die* vollständig homogensymmetrische Funktion $h_n(\mathbf{x})$ *der Ordnung n ist durch*

$$h_n(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}$$

definiert.

Z. B. ist $h_3(\mathbf{x}) = x_1^3 + x_2^2 + \cdots + x_1^2 x_2 + \cdots$.

Die erzeugende Funktion der h_n ist

$$H(t) = \sum_{n \geq 0} h_n t^n = \prod_{i \geq 1} (1 - x_i t)^{-1}. \tag{23}$$

Das sieht man, indem man unter Verwendung von $(1 - x_i t)^{-1} = \sum_{k \geq 0} x_i^k t^k$ das Produkt auf der rechten Seite von (23) ausmultipliziert.

KOROLLAR IV.16. *Sei $x_i = q^{i-1}$ für $1 \leq i \leq m$ und $x_i = 0$ für $i > n$. Dann ist*

$$h_n = \begin{bmatrix} m+n-1 \\ n \end{bmatrix}_q .$$

BEWEIS. Es gilt

$$\sum_{n \geq 0} h_n t^n = \prod_{i=0}^{m-1} (1 - q^i t)^{-1} = \sum_{n \geq 0} \begin{bmatrix} m+n-1 \\ n \end{bmatrix}_q t^n,$$

nach Lemma IV.3. □

PROPOSITION IV.17. *Die elementarsymmetrischen Funktionen e_n und die vollständig homogensymmetrischen Funktionen h_n bilden jeweils eine Algebrabasis für den Ring der symmetrischen Funktionen.*

BEMERKUNG. *Das heißt, daß man jede symmetrische Funktion eindeutig als Polynom in die e_n (bzw. h_n) schreiben kann. Dieser sogenannte* Hauptsatz der symmetrischen Funktionen *ist ein bekanntes algebraisches Resultat und wird unter anderem in* [**14**, I.(2.4) bzw. I.(2.8)] *bewiesen.*

DEFINITION IV.18. *Die erzeugende Funktion über alle Tableaux vom Rahmen λ heißt* Schurfunktion $s_\lambda(\mathbf{x})$ *$(= s_\lambda(x_1, x_2, x_3, \ldots))$. Es gilt also*

$$s_\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{\tau \in \mathcal{F}} w(\tau),$$

wobei über alle Tableaux τ vom Rahmen λ summiert wird.

BEISPIEL IV.19. *Sei* $\lambda = (2,1,1)$. *U. a. gibt es folgende Tableaux vom Rahmen* λ*:*

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & \\ 3 & \end{array} \quad \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & \\ 4 & \end{array} \quad \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & \\ 5 & \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 3 & \\ 4 & \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & \\ 3 & \end{array} \quad \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & \\ 4 & \end{array}$$

$$\dots \quad \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & \\ 4 & \end{array} \quad \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & \\ 4 & \end{array} \quad \begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 2 & \\ 3 & \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & \\ 5 & \end{array} \quad \dots$$

Es ist also

$$s_{(2,1,1)}(\mathbf{x}) = x_1^2x_2x_3 + x_1^2x_2x_4 + x_1^2x_2x_5 + \dots + x_1^2x_3x_4 + \dots$$
$$\dots + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2^2x_4 + \dots + 3x_1x_2x_3x_4 + 3x_1x_2x_3x_5 + \dots .$$

PROPOSITION IV.20. *Die Schurfunktionen* s_λ *bilden eine Vektorraumbasis für den Ring der symmetrischen Funktionen.*

Einen vollständigen Beweis dieser Tatsache findet man in [**14**, I.(3.2),(3.3)]. Wir wollen im folgenden nur zeigen, daß die Schurfunktionen symmetrische Funktionen sind. Geht man von der kombinatorischen Definition der Schurfunktion aus, würde man das wohl kaum vermuten. Als erste Anwendung der Methode der einander nicht berührenden Gitterpunktwege werden wir zeigen, daß sich jede Schurfunktion s_λ als Polynom in die vollständig homogensymmetrischen Funktionen h_n ausdrücken läßt.

SATZ IV.21 (Jacobi–Trudi–Identität). *Sei* $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ *eine Partition. Dann ist*

$$s_\lambda(\mathbf{x}) = \det_{1\le i,j\le r}[h_{\lambda_i - i + j}(\mathbf{x})].$$

BEWEIS. Wir führen den Beweis für $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$. (Ist man an einer abzählbar unendlichen Variablenmenge interessiert, so setze man $m \to \infty$.)

Jedes Tableau $\tau = (\tau_{ij})$ steht in umkehrbar eindeutiger Zuordnung zu einer Familie einander nicht berührender Gitterpunktwege in Γ. Die i–te Zeile des Tableaux ($i = 1, \dots, r$) wird in einen Pfad $P_i \in \mathcal{P}(u_i, v_i)$ mit $u_i = (1, r+1-i)$ und $v_i = (m, r+1+\lambda_i - i)$ übersetzt. Dabei entspricht die Eintragung τ_{ij} (für $1 \le i \le r$ und $1 \le j \le \lambda_i$) gerade dem vertikalen Schritt $(\tau_{ij}, r+j-i) \to (\tau_{ij}, r+j-i+1)$. Die horizontalen Schritte dienen nur zum Verbinden der vertikalen zu einem Pfad.

Das Gewicht $w(P_1, \ldots, P_r)$ so einer Familie von Gitterpunktwegen soll multiplikativ sein ($w(P_1, \ldots, P_r) = w(P_1) \cdots w(P_r)$). Das Gewicht eines Pfades P_i sei als das Produkt der Gewichte der vertikalen Kanten des Pfades definiert, wobei man den Kanten $(k, r + j - i) \to (k, r + j - i + 1)$ das Gewicht x_k zuordnet.

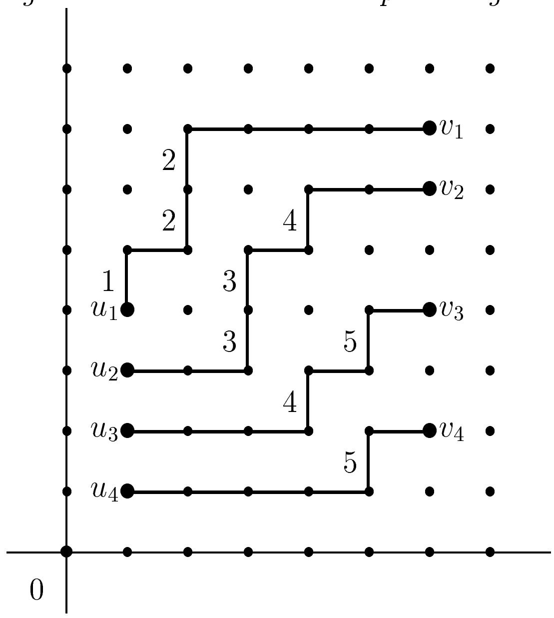
Offensichtlich ist das Gewicht $w(\tau)$ eines Tableaux τ identisch mit dem Gewicht $w(P_1, \ldots, P_r)$ der dem Tableau τ entsprechenden Familie von einander nicht berührenden Gitterpunktwegen.

Auf diese Weise wird das Problem der Abzählung von Tableaux auf das Problem der Abzählung solcher Familien einander nicht berührender Gitterpunktwege zurückgeführt.

Die erzeugende Funktion $w(u_i, v_j)$ der Pfade von $u_i = (1, r + 1 - i)$ nach $v_j = (m, r + 1 + \lambda_j - j)$ ist, wie man sich leicht überlegt, die vollständig homogensymmetrische Funktion $h_{\lambda_j - j + i}(x_1, \ldots, x_m)$. Nun wendet man einfach Satz III.4 an (und transponiert $w(u_i, v_j)_{1 \le i,j \le r}$). $\square$

Beispiel IV.22. *Angenommen, man betrachtet Tableaux, deren Teile ≤ 6 sind. Dann korrespondiert τ_1 zu der folgenden Familie von Gitterpunktwegen:*

$$\tau_1 \quad = \quad \begin{array}{lll} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & \\ 5 & & \end{array}$$



Bemerkung. *Auf dem Raum der symmetrischen Funktionen kann man durch $\theta : e_n \to h_n$ eine lineare Abbildung definieren — die Basistransformation, die die elementarsymmetrischen in die vollständig homogensymmetrischen Funktionen überführt. Von dieser Abbildung läßt sich zeigen, daß sie eine Involution ist (siehe*

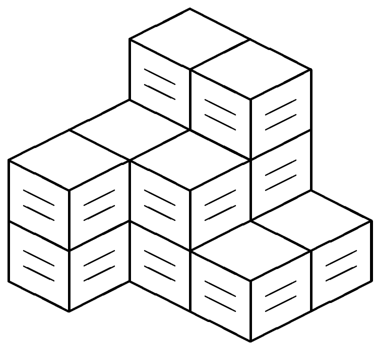
[**20**, Proposition 3.2.] *oder* [**14**, I.(2.7)]*). Dadurch erhält man für manche Identitäten eine korrespondierende duale Identität. (Man vergleiche Lemma IV.5 mit Lemma IV.3, oder Lemma IV.6 mit Lemma IV.7.) Wendet man θ auf die Schurfunktion s_λ an, so erhält man $s_{\lambda'}$. (Das kann man leicht über die Jacobi–Trudi–Identitäten zeigen. (Siehe dazu auch Beispiel VI.3). Dabei überlegt man sich, daß nach Konjugation des Rahmens ($\lambda \to \lambda'$) das Tableau τ in eine reihenstrikte Reversed Plane Partition τ' übergeht. Der Beweis von Satz IV.21 wird hierfür etwas modifiziert: Einer Reihe von τ' wird ein Pfad in Γ zugeordnet, wobei das Gewicht dieses Pfades dann eine elementarsymmetrische Funktion ist.)*

5. Räumliche Interpretation und Symmetrieklassen

So wie man sich eine lineare Partition als zweidimensionale Anordnung von Quadraten vorstellen kann, bekommen wir durch die Interpretation der Teile einer Plane Partition als Höhen ein dreidimensionales Ferrer–Diagramm. Es ergibt sich hierbei eine räumliche Anordnung von Einheitswürfeln. Für eine Plane Partition $\pi = (\pi_{ij})$ vom Rahmen λ gilt dann $(i,j,k) \in \pi$, genau dann, wenn $(i,j) \in \lambda$ und $k \in \{1, \ldots, \pi_{ij}\}$ gilt.

Beispiel IV.23. *Die unten abgebildete Figur soll zur anschaulichen Vorstellung des dreidimensionalen Ferrer–Diagramms der Plane Partition π_1 dienen.*

$$\pi_1 \quad = \quad \begin{array}{ccc} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & & \end{array}$$



Diese Darstellung motiviert uns zu der Betrachtung der Symmetrien von Plane Partitions. Für $r, c, m \in \mathbb{N}$ soll $B(r,c,m)$ den *Quader* $\{(i,j,k) : i = 1, \ldots, r;\ j = 1, \ldots, c;\ k = 1, \ldots, m\}$ bezeichnen. Für den Würfel $B(m,m,m)$ schreiben wir kurz B_m. Wir werden eine Plane Partition π mit ihrem dreidimensionalen Ferrer–Diagramm identifizieren, wenn wir z. B. sagen, daß π in den Quader *paßt*.

Die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_3$ wirkt auf $\mathbb{N}^3$ durch Permutation der Koordinaten und damit auf die Menge aller (dreidimensionalen Ferrer–Diagramme von) Plane Partitions. Für jeden Quader $B(r,c,m)$ und jeder Untergruppe G von $\mathcal{S}_3$ betrachte man die Anzahl der Plane Partitions, die in den Quader $B(r,c,m)$ passen und invariant bezüglich G bleiben. Wir können natürlich davon ausgehen, daß $B(r,c,m)$ selbst G–invariant ist, wodurch sich bei bestimmter Wahl von G die Gleichheit mancher der Zahlen r, c und m ergeben wird.

Es gibt grundsätzlich vier verschiedene Symmetrieklassen, aus denen vier Abzählprobleme hervorgehen. In der Tat wollen wir, sofern es möglich ist, (q–)erzeugende Funktionen für diese Klassen finden.

Die vier Symmetrieklassen sollen kurz aufgezählt werden. Diese werden dabei von den Untergruppen von $\mathcal{S}_3$ "erzeugt". Wir definieren τ, die *Transposition*, durch $\tau(i,j,k) = (j,i,k)$, und ρ, die *Rotation*, durch $\rho(i,j,k) = (j,k,i)$ (wobei $i,j,k \in \mathbb{N}$). Außerdem bezeichne e die Identität.

1. Sei $G_1 = \langle e \rangle$. Wir erhalten die Menge *aller* Plane Partitions, die in den Quader $B(r,c,m)$ passen. (Diese sind invariant bezüglich G_1.)
2. Sei $G_2 = \langle \tau \rangle$. (OBdA betrachten wir nur die Vertauschung der ersten zwei Komponenten von π.) Wir erhalten die Menge der *symmetrischen* Plane Partitions, die in den Quader $B(n,n,m)$ passen. Das sind jene Plane Partitions $\pi = (\pi_{ij})$, für die $\pi_{ij} = \pi_{ji}$ gilt.
3. Sei $G_3 = \langle \rho \rangle$. Wir erhalten die Menge der *zyklisch–symmetrischen* Plane Partitions, die in den Würfel B_m passen. Das sind jene Plane Partitions $\pi = (\pi_{ij})$, für die gilt, daß die i–te Reihe von π als Partition die Konjugierte der i–ten Spalte ist. (Beispiel IV.23 stellt eine zyklisch–symmetrische Plane Partition dar, welche in den Würfel B_3 paßt.)
4. Sei $G_4 = \langle \tau, \rho \rangle$. Wir erhalten die Menge der *total–symmetrischen* Plane Partitions, die in den Würfel B_n passen. Das sind jene Plane Partitions, die sowohl zyklisch–symmetrisch als auch symmetrisch sind.

Jetzt, wo wir die vier Symmetrieklassen einmal vorgestellt haben, können wir mehr ins Detail gehen. Zur Übersicht sollen die wichtigsten Ergebnisse, die in den späteren Kapiteln hergeleitet werden, zusammen aufgelistet werden.

BEMERKUNG. *In der Literatur (vgl.* [**12, 18, 21, 25**]*) wird oft eine zusätzliche Symmetrie von Plane Partitions betrachtet. Für* $\pi \subseteq B(r,c,m)$ *definiert man das* Komplement π^c *von* π *durch*

$$\pi^c = \{(r+1-i, c+1-j, m+1-k) : (i,j,k) \notin \pi\}.$$

Klarerweise ist π^c *eine Plane Partition und* $|\pi| + |\pi^c| = rcm$. *Die Transformation* ^{c} *und die Gruppe* $\mathcal{S}_3$ *erzeugen eine Gruppe* T *der Ordnung 12. Wieder kann man für jede Untergruppe* G *von* T *die Klassen der Plane Partitions* $\pi \subseteq B(r,c,m)$ *betrachten, die invariant bezüglich* G *sind. Man erhält dadurch sechs weitere Symmetrieklassen von Plane Partitions, aus denen sechs weitere Abzählprobleme hervorgehen. Die insgesamt zehn Abzählprobleme sind heute bereits gelöst, wobei das letzte offene Problem die Abzählung der total–symmetrischen Plane Partitions war, das erst 1992 J. Stembridge* [**24**] *erfolgreich bewältigte (siehe Kapitel VIII).*

Hier wollen wir uns allerdings auf die Betrachtung der ursprünglichen vier Symmetrieklassen beschränken.

Die Notation sollte eigentlich selbsterklärend sein. Die (q–)erzeugende Funktion der hier betrachteten vier Symmetrieklassen von Plane Partitions sei mit $\mathrm{EF}[X;B]$ notiert, wobei X für PP (Plane Partitions), sPP (symmetrische Plane Partitions), zPP (zyklisch–symmetrische Plane Partitions) oder tPP (total–symmetrische Plane Partitions) steht und B ein noch näher anzugebender Quader bzw. Würfel bedeute.

In den ersten drei Fällen erhält man als erzeugende Funktion

$$\mathrm{EF}[\mathrm{PP}; B(r,c,m)] = \prod_{\substack{1\le i\le r\\ 1\le j\le c}} \frac{1-q^{m+i+j-1}}{1-q^{i+j-1}}, \tag{24}$$

$$\mathrm{EF}[\mathrm{sPP}; B(n,n,m)] = \prod_{i=1}^{n} \frac{1-q^{m+2i-1}}{1-q^{2i-1}} \prod_{1\le i<j\le n} \frac{1-q^{2(m+i+j-1)}}{1-q^{2(i+j-1)}}, \tag{25}$$

$$\mathrm{EF}[\mathrm{zPP}; B_m] = \prod_{i=1}^{m} \frac{1-q^{3i-1}}{1-q^{3i-2}} \prod_{1\le i\le j\le m} \frac{1-q^{3(m+i+j-1)}}{1-q^{3(2i+j-1)}}. \tag{26}$$

Das vierte Problem dagegen ist noch nicht völlig gelöst. Das reine Abzählresultat ist

$$TS(n) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(2i)!\,(n+2i+1)!}{(3i+1)!\,(n+i)!}, \tag{27}$$

wobei $TS(n)$ die Anzahl der total–symmetrischen Plane Partitions ist, die in den Würfel B_n passen.

Die Schwierigkeiten, die sich bei einem q–Analogon ergeben, werden wir in Kapitel VIII darzustellen versuchen. Für eine (q–)erzeugende Funktion der total–symmetrischen Plane Partitions ist bisher nur eine Vermutung bekannt, nämlich

$$\mathrm{EF}_{\mathcal{O}}[tPP; B_n] = \prod_{1 \le i \le j \le k \le n} \frac{1 - q^{i+j+k-1}}{1 - q^{i+j+k-2}}. \tag{28}$$

Dabei betrachtet man hier nicht die gewöhnliche (Norm–)erzeugende Funktion, sondern die Orbit–erzeugende Funktion, was in Kürze näher erläutert werden soll.

I. Macdonald hat eine einheitliche Darstellung für obige Formeln vorgeschlagen, die schließlich von R. Stanley [**21**, S. 106] erweitert wurde. Sei B ein G–invarianter Quader, wobei $G = G_i$ für ein $i = 1, \ldots, 4$ (siehe oben). Für $x = (i, j, k) \in B$ definiert man die *Höhe* $ht(x) = i + j + k - 2$. Wenn G auf B wirkt und η ein Orbit dieser Wirkung ist, dann definiert man $ht(\eta) = ht(x)$ für jedes $x \in \eta$. (Ein Orbit kann in diesem Fall aus 1,2,3 oder 6 Elementen bestehen, wobei der Orbit von einem Element erzeugt ist und bezüglich G invariant ist. Z. B. besitzt die Plane Partition π_1 von Beispiel IV.23, als zyklisch–symmetrische Plane Partition aufgefaßt, zwei einelementige Orbits, (1,1,1) bzw. (2,2,2), und vier dreielementige Orbits, die sich durch (1,1,2), (1,1,3), (1,2,2) bzw. (1,2,3) repräsentieren lassen.) Klarerweise ist $ht(\eta)$ wohldefiniert.

Man hat dann zwei natürliche erzeugende Funktionen zur Betrachtung. Man definiert die *Norm*–erzeugende Funktion (wir nennen sie einfach erzeugende Funktion) als

$$\mathrm{EF}[X, B] = \sum_{\substack{\pi \subseteq B \\ \pi \in X}} q^{|\pi|}, \tag{29}$$

wobei X eine Symmetrieklasse von Plane Partitions ist. Nun hat I. Macdonald [**14**, S. 52–53] beobachtet, daß für die Fälle 1 und 2 die erzeugende Funktion sich in der vereinheitlichten Form

$$\mathrm{EF}[X;B] = \prod_{\eta\in B/G} \frac{1-q^{|\eta|\,(1+ht(\eta))}}{1-q^{|\eta|\cdot ht(\eta)}} \tag{30}$$

schreiben läßt, wobei B/G die Menge der Orbits ist, welche auf B wirkt. Tatsächlich gilt diese Form auch für den dritten Fall, was wir aus (26) rasch folgern können.

Wie auch immer, für den vierten Fall ist (30) sicher falsch, da die rechte Seite nicht einmal ein Polynom in q ist. Für $q = 1$ allerdings stimmt die Formel, was aber, wie erwähnt, erst 1992 von J. Stembridge [**24**] gezeigt wurde.

Die *Orbit*–erzeugende Funktion definieren wir durch

$$\mathrm{EF}_{\mathcal{O}}[X,B] = \sum_{\substack{\pi\subseteq B\\ \pi\in X}} q^{|\pi/G|}, \tag{31}$$

wobei π/G die Menge der Orbits ist, welche auf π wirken (vgl. [**21**, S. 106]). Damit formuliert sich die Vermutung für Fall 4 in der Form

$$\mathrm{EF}_{\mathcal{O}}[X;B] = \prod_{\eta\in B/G} \frac{1-q^{1+ht(\eta)}}{1-q^{ht(\eta)}}. \tag{32}$$

Für $q = 1$ stimmen (30) und (32) überein. Gleichung (32) gilt auch für die Fälle 1 und 2, wie man leicht nachprüft. Andererseits ist (32) falsch für Fall 3; die rechte Seite ist zwar ein Polynom [**25**], dieses besitzt aber keine “schöne” Faktorisierung.

Bemerkung. *In Anbetracht der gleichartigen Gestalt dieser Formeln sollte es eine einheitliche Methode zur Lösung der dargestellten Probleme geben. Eine solche ist insofern vorhanden, da man für alle vier Probleme über die Methode der einander nicht–berührenden Gitterpunktwege eine Determinante oder Pfaffsche Form erhält. Für die weitere Berechnung gibt es allerdings noch kein einheitliches Konzept. Es gibt dabei noch genug offene Fragen, wobei andere Zweige der Mathematik, wie die Darstellungstheorie, zu einem besseren Verständnis mancher Zusammenhänge zu helfen scheinen. Ein ernstzunehmendes Hilfsmittel bei der Lösung von kombinatorischen Problemen ist der Computer, mit dem man Vermutungen rasch verifizieren kann. So hat D. Robbins* [**18**] *eine Vielzahl von Formeln entdeckt und Vermutungen aufgestellt, deren Gültigkeit empirisch offensichtlich erscheint (siehe auch* [**22**]*). Einer dieser Vermutungen war das q–Analogon zum vierten Problem, das für ca. $n \leq 20$ bestätigt wurde.*

KAPITEL V

Plane Partitions

Wir wollen uns jetzt dem Problem der Abzählung aller Plane Partitions zuwenden, wobei die Anzahl der Zeilen $\le r$, die Anzahl der Spalten $\le c$ und alle Teile $\le m$ sein sollen. Das Ziel dieses Kapitels ist der Beweis folgenden Satzes:

SATZ V.1. *Die erzeugende Funktion aller Plane Partitions, die in den Quader $B(r,c,m)$ passen, ist*

$$\mathrm{EF}[\mathrm{PP}; B(r,c,m)] = \prod_{\substack{1\le i\le r\\ 1\le j\le c}} \frac{1-q^{m+i+j-1}}{1-q^{i+j-1}}. \tag{33}$$

BEMERKUNG. *Die Formel stammt von P. MacMahon* [**15**, Sect. 495], *der sie allerdings mit Induktion bewies.*

BEISPIEL V.2. *Für $r=1$ erhält man als Spezialfall die erzeugende Funktion aller (linearen) Partitionen mit höchstens c Teilen, die alle $\le m$ sind:*

$$\mathrm{EF}[PP; B(1,c,m)] = \prod_{1\le j\le c} \frac{1-q^{m+j}}{1-q^{j}} = \begin{bmatrix} m+c \\ c \end{bmatrix}_q \tag{34}$$

Wir bekommen also das in IV.1 hergeleitete Resultat (siehe Korollar IV.4), welches damals zur Motivation für die Einführung des q–Binomialkoeffizienten gebracht wurde. Damit stimmt Satz V.1, eingeschränkt auf diesen Spezialfall, mit etwas uns schon Bekanntem überein.

BEISPIEL V.3. *Läßt man in (33) die Parameter $r,c,m\to\infty$ gehen, so erhält man die erzeugende Funktion aller Plane Partitions*

$$\mathrm{EF}(PP) = \prod_{k\ge 0} (1-q^k)^{-k}, \tag{35}$$

die schon P. MacMahon [**15**, Sect. 422] *gefunden hat. Die ersten Terme dieser erzeugenden Funktion sind $1+q+3q^2+6q^3+\cdots$. Man überprüft dies sofort anhand* *der expliziten Auflistung der Gewichts–kleinsten Plane Partitions:*

$$\emptyset \qquad 1 \qquad 2 \qquad \begin{matrix}1 & 1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}1\\1\end{matrix}$$

$$3 \qquad \begin{matrix}2 & 1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}2\\1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}1 & 1\\1 & \end{matrix} \qquad \begin{matrix}1 & 1 & 1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}$$

$$\dots$$

1. Vorbereitungen

Beispiel V.4. *Für den Quader $B(4,5,3)$ wäre π_0 eine typische Plane Partition.*

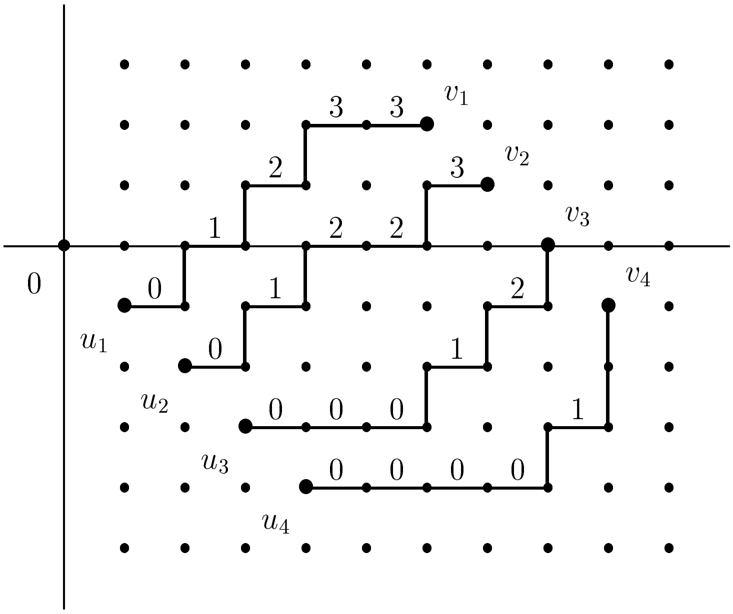
$$\pi_0 \quad = \quad \begin{matrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & & \\ 1 & & & \end{matrix} \qquad \longleftrightarrow \qquad \begin{matrix} 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} r = 4 \\ c = 5 \\ m = 3 \end{pmatrix}$$

Das Gewicht dieser Plane Partition ist $w(\pi_0) = q^{21}$.

Man kann also vom Rahmen $\lambda = (c^r) = (\overbrace{c, \dots, c}^{r\text{–mal}})$ ausgehen, wobei die erste Eintragung (d. i. das Feld (1,1)) $\leq m$ und alle Zahlen ≥ 0 sein sollen.

Jede Plane Partition $\pi = (\pi_{ij})$ steht in umkehrbar eindeutiger Zuordnung zu einer Familie einander nicht berührender Gitterpunktwege in Γ. Die i–te Zeile der Plane Partition wird von rechts nach links gelesen und in einen Pfad $P_i \in \mathcal{P}(u_i, v_i)$ mit $u_i = (i, -i)$ und $v_i = (c+i, m-i)$ übersetzt. Dabei entsprechen die Eintragungen π_{ij} der i–ten Zeile $(1 \leq j \leq c)$ gerade den Schritten des i–ten Pfades in horizontaler Richtung der Höhe $\pi_{ij} - i$. Die vertikalen Schritte dienen nur zum Verbinden der horizontalen zu einem Pfad.

Beispiel V.5. *π_0 aus Beispiel V.4 korrespondiert zu der folgenden Familie von Gitterpunktwegen:*



$$\pi_0 = \begin{array}{cccc} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & & \\ 1 & & & \end{array}$$

$(r = 4,\ c = 5,\ m = 3)$

Das Gewicht $w(P_1, \ldots, P_r)$ so einer Familie von Gitterpunktwegen soll multiplikativ sein $(w(P_1, \ldots, P_r) = w(P_1) \cdots w(P_r))$. Das Gewicht des einzelnen Pfades P_i (d. h. der Pfad mit dem Anfangspunkt $(i, -i)$) sei mit

$$w(P_i) = q^{ic + \sum_j h_j}, \tag{36}$$

wobei die h_j die Höhen der horizontalen Schritte sind, definiert. (Im obigen Beispiel: $w(P_1) = q^{5+(-1)+0+1+2+2} = q^{3+3+2+1}$ oder $w(P_3) = q^{3\cdot 5+3(-3)+(-2)+(-1)} = q^{2+1}$) Offensichtlich ist das Gewicht $w(\pi)$ einer Plane Partition π identisch mit dem Gewicht $w(P_1, \ldots, P_r)$ der der Plane Partition π entsprechenden Familie von einander nicht berührenden Gitterpunktwegen.

Auf diese Weise wird das Problem der Abzählung von Plane Partitions auf das Problem der Abzählung solcher Familien einander nicht berührender Gitterpunktwege zurückgeführt.

Die erzeugende Funktion $w(u_s, v_t)$ der Pfade von $u_s = (s, -s)$ nach $v_t = (c + t, m - t)$ ist, wie man sich leicht überlegt, $q^{sc} \cdot h_{c+t-s}(q^{-s}, q^{-s+1}, \ldots, q^{m-t})$. Nach Korollar IV.16 erhalten wir

$$w(u_s, v_t) = q^{sc} q^{-s(c+t-s)} \begin{bmatrix} m - t + s + c + t - s \\ c + t - s \end{bmatrix}_q = q^{s(s-t)} \begin{bmatrix} m + c \\ c - s + t \end{bmatrix}_q . \tag{37}$$

2. Berechnungen

Nach den Vorbereitungen des vorigen Abschnitts können wir uns auf die letzten Berechnungen konzentrieren. Nach Satz III.4 gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{EF}[\mathrm{PP}; B(r,c,m)] &= q^{\sum_{i=1}^r i^2} \cdot \det_{1\le s,t\le r}\left(q^{-st}\begin{bmatrix} m+c \\ c-s+t\end{bmatrix}_q\right) \\
&= \prod_{i=1}^r \frac{[m+c]_q!}{[c-i+r]_q!\,[m+i-1]_q!} \cdot q^{\sum_{i=1}^r i^2} \\
\times &\det_{1\le s,t\le r}(q^{-st}[c-s+r]_q\cdots[c-s+t+1]_q[m+s-t+1]_q\cdots[m+s-1]_q) \\
&= \prod_{i=1}^r \frac{[m+c]_q!}{[c-i+r]_q!\,[m+i-1]_q!} \cdot q^{\sum_{i=1}^r[i^2-i+(c+i)(i-1)]}(-1)^{\binom{r}{2}} \\
\times &\det_{1\le s,t\le r}[(q^{-s}-q^{-c-r})\cdots(q^{-s}-q^{-c-t-1})(q^{-s}-q^{m-t+1})\cdots(q^{-s}-q^{m-1})].
\end{aligned}$$

Nun wenden wir Lemma II.2 mit $X_s = q^{-s}$, $A_t = -q^{-c-t}$ und $B_t = -q^{m-t+1}$ an und erhalten

$$\begin{aligned}
\mathrm{EF}[\mathrm{PP}; B(r,c,m)] &= \prod_{i=1}^r \frac{[m+c]_q!}{[c-i+r]_q!\,[m+i-1]_q!} \\
\times &\ q^{\sum_{i=1}^r[i(i-1)+(c+i)(i-1)]}(-1)^{\binom{r}{2}} \prod_{1\le i<j\le r}(q^{-i}-q^{-j}) \prod_{2\le i\le j\le r}(q^{-c-j}-q^{m-i+1}) \\
&= \frac{([m+c]_q!)^r \prod_{1\le i<j\le r}[j-i]_q \prod_{2\le i\le j\le r}[m+c+1+j-i]_q}{\prod_{1\le i\le r}[c-i+r]_q!\prod_{1\le i\le r}[m+i-1]_q!} \\
&= \frac{([m+c]_q!)^r\, H(r)_q\, H(m+c+r)_q\, H(c)_q\, H(m)_q}{([m+c]_q!)^{r-1}\, H(m+c+1)_q\, H(r+c)_q\, H(m+r)_q} \\
&= \frac{H(m+c+r)_q\, H(m)_q\, H(c)_q\, H(r)_q}{H(m+c)_q\, H(m+r)_q\, H(r+c)_q} = \prod_{\substack{1\le i\le r\\ 1\le j\le c}} \frac{[m+i+j-1]_q}{[i+j-1]_q}.
\end{aligned}$$

(Für die Umformung der Produkte wurde die Hyperfaktoriellen–Notation verwendet, die am Ende von Kapitel IV, Abschnitt 2 eingeführt wurde.) Somit ist Satz V.1 bewiesen. $\square$

KAPITEL VI

Symmetrische Plane Partitions

Das vorliegende Kapitel ist dem Beweis folgenden Satzes gewidmet:

SATZ VI.1. *Die erzeugende Funktion aller symmetrischen Plane Partitions, die in den Quader* $B(n,n,m)$ *passen, ist*

$$\mathrm{EF}[\mathrm{sPP}; B(n,n,m)] = \prod_{i=1}^{n} \frac{1-q^{m+2i-1}}{1-q^{2i-1}} \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{1-q^{2(m+i+j-1)}}{1-q^{2(i+j-1)}}. \tag{38}$$

BEMERKUNG. *Diese Formel hat bereits P. MacMahon* [**15**, Sect. 520] *vermutet, ohne sie allerdings beweisen zu können. Sie wurde erst 1977 von G. Andrews* [**2**] *mit Hilfe äußerst komplizierter hypergeometrischer Berechnungen bewiesen. Kurz danach hat I. Macdonald* [**14**, S. 52] *mit Methoden aus der Darstellungstheorie einen völlig anderen Beweis geliefert. Eine weitere Möglichkeit, mit Hilfe der Darstellungstheorie Satz VI.1 zu zeigen, schlug J. Stembridge* [**23**, S. 124] *vor.*

Hier werden wir einen neuen, mehr kombinatorischen, Beweis bringen. Der hier beschrittene Weg wurde von C. Krattenthaler aufgezeigt [**11**] *(der in* [**10**, Theorem 13] *wieder einen anderen Beweis bietet, wo sich über ein allgemeineres Resultat Satz VI.1 als ein Nebenergebnis bzw. Spezialfall ergibt).*

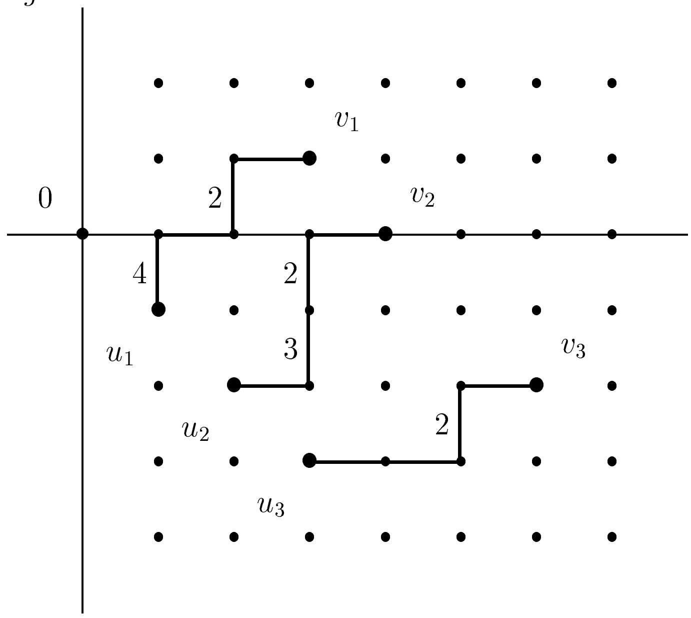
Zunächst sollen einige Aussagen über *reihenstrikte Plane Partitions* gemacht werden, die uns dann für die Bewältigung unserer eigentlichen Aufgabenstellung, nämlich der Abzählung der symmetrischen Plane Partitions, von großem Nutzen sein werden.

1. Reihenstrikte Plane Partitons

Man kann reihenstrikte Plane Partitons vom Rahmen λ, wobei $l(\lambda) = r$ und alle Teile $\le n$, als Familie einander nicht berührender Gitterpunktwege aus $\mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ mit $u_i = (i, -i)$ und $v_i = (n+i-\lambda_i, \lambda_i - i)$ $(i = 1, \ldots, r)$ kodieren. Dabei bekommen die *vertikalen* Kanten Gewichte ($\neq 1$) und zwar $w((a,b) \to (a,b+1)) := x_{n-a-b}$, die den Eintragungen der reihenstrikten Plane Partition entsprechen. (D. h. der i–te Pfad entspricht der i–ten Reihe.)

Beispiel VI.2. *Angenommen, $\lambda = (2,2,1)$. Die reihenstrikte Plane Partition π vom Rahmen λ wird auf folgende Weise kodiert:*

$$\pi \quad = \quad \begin{matrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \\ 2 & \end{matrix}$$



Die erzeugende Funktion $w(u,v)$ eines Pfades von $u = (i,-i)$ nach $v = (n+j,-j)$ ist die elementarsymmetrische Funktion $e_{i-j}(x_1,\ldots,x_n)$, wie man sich sehr leicht überlegt. Mit der Konjugation $\lambda \to \lambda'$ und der Zuordnung $x_k \to x_{n+1-k}$ erhält man aus reihenstrikten Plane Partitions vom Rahmen λ sofort spaltenstrikte Reversed Plane Partitions, also Tableaux, vom Rahmen λ'.

Beispiel VI.3. *Aufgrund obiger Überlegungen impliziert Satz III.4 die (duale Form der)* Jacobi–Trudi–Identität:

$$s_\lambda(\mathbf{x}) = \det_{1 \le i,j \le \lambda_1} [e_{\lambda'_i - i + j}(\mathbf{x})] \tag{39}$$

Bemerkung. *Diese Formel mit $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ gilt auch für $n \to \infty$. Daher kann man hier wie in anderen Fällen, wenn man möglichst allgemeine Aussagen haben will, das Argument weglassen. Z. B. schreibt sich dann (39) kürzer (und prägnanter)*

$$s_\lambda = \det_{1 \le i,j \le \lambda_1} [e_{\lambda'_i - i + j}].$$

Der nächste Satz, der, leicht modifiziert, [**23**, Theorem 7.1.] entnommen wurde, wird uns für die Berechnung der erzeugenden Funktion der symmetrischen Plane Partititions als willkommenes Werkzeug dienen.

SATZ VI.4. *Sei* $g_l = g_{-l} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} e_i e_{i+l}$. *Es gilt*

(*a*) $$\sum_{\lambda_1\le 2k} s_\lambda = \det_{1\le s,t\le k}(g_{s-t} + g_{s+t-1}).$$

(*b*) $$\sum_{\lambda_1\le 2k+1} s_\lambda = \sum_i e_i \cdot \det_{1\le s,t\le k}(g_{s-t} - g_{s+t}).$$

BEWEIS. Im gerichteteten Zahlengitter Γ bezeichne man mit $\mathbf{u}$ die Punktfolge $u_s = (s, -s)$ für $s = 1, \ldots, r$. Wir können reihenstrikte Plane Partitions mit Teilen $\le n$ und höchstens r Spalten als Konfigurationen in $\mathcal{P}_0(\mathbf{u}; I)$ identifizieren, wobei $I = \{(n+s, -s) : s \ge 1\}$. Nun wird Satz III.6 angewandt. Im Falle $r = 2k$ erhalten wir

$$\sum_{\lambda_1\le 2k} s_\lambda = \lim_{n\to\infty} \mathrm{pf}[\mathcal{Q}_I(u_s, u_t)]_{1\le s,t\le 2k}.$$

Um diesen Grenzwert zu bestimmen, setzen wir in (13) $w(u_i, v_j) = e_{i-j}$ (für $u_i = (i, -i)$ und $v_j = (n+j, -j)$) und stellen fest, daß $\mathcal{Q}_I(u_s, u_t) = c_{t-s}$ (auch für $n \to \infty$), wobei

$$c_l = \sum_{j>i\ge 0} e_i e_{j-l} - e_j e_{i-l} = \sum_{i>-l} g_i - \sum_{i>l} g_i = g_l + g_{l-1} + \cdots + g_{-(l-1)}.$$

Lemma II.13 zeigt, daß die Pfaffsche Form von c_{t-s} gleich der Determinante der $(k \times k)$–Matrix mit (s,t)–Eintragung $c_{|s-t|+1} + c_{|s-t|+3} + \cdots + c_{s+t-1}$ ist. Indem wir die s–te Reihe von der $(s+1)$–ten $(s = k-1, \ldots, 1)$ subtrahieren und dann die gleichen Operationen auf den Spalten durchführen, erhalten wir die Determinante in (a), wie behauptet.

Für den Fall $r = 2k+1$ fügen wir einen Phantomknoten u_{2k+2} zu $\mathbf{u}$ hinzu. Satz III.6 impliziert

$$\sum_{\lambda_1\le 2k+1} s_\lambda = \mathrm{pf}(q_{st})_{1\le s<t\le 2k+2},$$

wobei $q_{st} = c_{t-s}$ (für $s < t < 2k+2$) und $q_{st} = \sum_i e_i$ (für $s < t = 2k+2$). Während (q_{st}) als eine schiefsymmetrische Matrix behandelt wird, subtrahieren wir jetzt die s–te Reihe von der $(s-1)$–ten $(s = 2, \ldots, 2k+2)$ und führen dann dasselbe mit den Spalten durch. Das ergibt eine Matrix, deren (s,t)–Eintragung $g_{t-s-1} - g_{t-s+1}$ ist, außer in der letzten Reihe und Spalte; die letzte Spalte wird null sein, bis auf die

$(2k+1)$–te Reihe, wo $\sum_i e_i$ steht. Diese Reihen– und Spaltenoperationen erhalten die Pfaffsche Form, denn nach Korallar II.8 gilt

$$\mathrm{pf}(A) = \mathrm{pf}\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\right].$$

Wie in Beispiel II.10 können wir schließen, daß die erhaltene Pfaffsche Form in ein Produkt zerfällt, damit bekommen wir

$$\sum_{\lambda_1 \leq 2k+1} s_\lambda = \sum_i e_i \cdot \mathrm{pf}(g_{t-s-1} - g_{t-s+1})_{1 \leq s < t \leq 2k}.$$

Nach Anwendung von Lemma II.13 ergibt sich, wie behauptet, die Determinante in (b). □

2. Vorbereitungen

Jede *symmetrische Plane Partition* λ, wobei $\lambda_1 \leq n$ und alle Teile $\leq m$, kann bijektiv auf eine *reihenstrikte Plane Partition* μ mit ungeraden Eintragungen, $\mu_1 \leq m$ und Teilen $\leq 2n-1$ abgebildet werden. Dabei geht man folgendermaßen vor: Die symmetrische Plane Partition λ besteht aus m Schichten symmetrischer *linearer* Partitionen $\lambda^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$ ($\lambda^{(i)}$ = Schnitt von λ mit der Ebene $z = i$), wobei $\lambda^{(1)} \supseteq \lambda^{(2)} \supseteq \cdots \supseteq \lambda^{(m)}$ gilt.

Nun notiert man in der i–ten Reihe von μ die (ungeraden) Hakenlängen (siehe Kapitel IV, Abschnitt 3) der Hauptdiagonale von $\lambda^{(i)}$. Diese Bijektion ist offensichtlich gewichtserhaltend, da $|\lambda| = \sum |\lambda^{(i)}| = \sum |\mu_i| = |\mu|$ gilt.

Beispiel VI.5. *Die symmetrische Plane Partition λ_0 wird folgendermaßen in die reihenstrikte Plane Partition μ_0 (oder auch umgekehrt) umgewandelt:*

$$\lambda_0 = \begin{matrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & \\ 2 & 2 & & \\ 1 & & & \end{matrix} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \lambda_0^{(1)} &= (4,3,2,1) \\ \lambda_0^{(2)} &= (3,3,2) \\ \lambda_0^{(3)} &= (2,1) \end{aligned} \quad \longleftrightarrow \quad \mu_0 = \begin{matrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \\ 3 & \end{matrix}$$

Wir erhalten also für die erzeugende Funktion der symmetrischen Plane Partitions

$$\mathrm{EF}[\mathrm{sPP}; B(n,n,m)] = \sum_{\lambda_1 \le m} s_\lambda(q, q^3, \dots, q^{2n-1}). \tag{40}$$

Die Idee ist nun, Satz VI.4 anzuwenden mit $\mathbf{x} = (q, q^3, \dots, q^{2n-1})$, d. h. $x_i = q^{2i-1}$ für $i = 1, \dots, n$. Da die erzeugende Funktion der e_i gleich $E(t) = \sum_{r\ge 0} e_r t^r = \prod_{i=1}^n (1 + x_i t)$ ist, erhält man hier

$$\sum_{r\ge 0} e_r t^r = \prod_{i=1}^{n} (1 + q^{2i-1} t) = \sum_{r=0}^{n} q^{r^2} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_{q^2} t^r.$$

Das folgt sofort aus dem q–Binomischen Lehrsatz (Lemma IV.5), wenn man dort $q \to q^2$ und $t \to qt$ substituiert. Daher ist

$$e_i = q^{i^2} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_{q^2} \qquad \text{und} \qquad \sum_i e_i = \prod_{i=1}^{n} (1 + q^{2i-1}).$$

Für g_l ergibt sich aus der q–Vandermonde–Identität (siehe Lemma IV.6)

$$\begin{aligned} g_l = \sum_i e_i e_{i+l} &= \sum_i q^{i^2} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_{q^2} q^{(i+l)^2} \begin{bmatrix} n \\ i+l \end{bmatrix}_{q^2} \\ &= q^{l^2} \sum_i q^{2i(i+l)} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} n \\ n-i-l \end{bmatrix}_{q^2} = q^{l^2} \begin{bmatrix} 2n \\ n-l \end{bmatrix}_{q^2}. \end{aligned}$$

Für die Berechnung der erzeugenden Funktion der symmetrischen Plane Partitions (siehe (38)) fangen wir bei Identität (40) an. Dann werden die Fälle m gerade bzw. ungerade unterschieden, um dann mittels Satz VI.4.(a) bzw. VI.4.(b) eine Determinante zu erhalten, die sich glücklicherweise mit Zuhilfenahme von Lemma II.1 zu einem Produkt auswerten läßt. Nach einigen weiteren (Produkt–)Manipulationen erhält man schließich für m gerade und ungerade die angestrebte Schlußformel (38).

3. Berechnungen

1.) Sei $m = 2k$. Wir verwenden Satz VI.4.(a):

$$\sum_{\lambda_1 \le 2k} s_\lambda(q, q^3, \dots, q^{2n-1}) =$$

$$= \det_{1 \le s,t \le k} \left(q^{(s-t)^2} \begin{bmatrix} 2n \\ n-s+t \end{bmatrix}_{q^2} + q^{(s+t-1)^2} \begin{bmatrix} 2n \\ n-s-t+1 \end{bmatrix}_{q^2} \right)$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \frac{[2n]_{q^2}!}{[n-i+k]_{q^2}!\,[n+i+k-1]_{q^2}!} \cdot q^{2\sum_{i=1}^{k} i^2} \cdot det_1$$

mit $det_1 =$

$$\det_{1 \le s,t \le k} \Big(q^{-2st}[n-s+k]_{q^2} \cdots [n-s+t+1]_{q^2}[n+s+k-1]_{q^2} \cdots [n+s-t+1]_{q^2}$$
$$+\ q^{2st-2s-2t+1}[n-s+k]_{q^2} \cdots [n-s-t+2]_{q^2}[n+s+k-1]_{q^2} \cdots [n+s+t]_{q^2} \Big)$$

Sei nun $X_s = q^{2s}$, $A_t = -q^{2(n+t)}$ und $C = q^2$. Dann ergibt sich für die (letztere) Determinante

$$det_1 = q^{3k/2 - 2\sum_{i=1}^{k} i - 2k^2} \det_{1 \le s,t \le k} \left(\prod_{i=t+1}^{k} (X_s + A_i)(C/X_s + A_i)\ \times \right.$$
$$\left. \times\ \left[(X_s/\sqrt{C})^{t-1/2} \prod_{i=2-t}^{t} (C/X_s + A_i)\ +\ (X_s/\sqrt{C})^{1/2-t} \prod_{i=2-t}^{t} (X_s + A_i) \right] \right).$$

Um jetzt noch Lemma II.1 anwenden zu können, definieren wir

$$p_{j-1}(X) = \frac{(X/\sqrt{C})^{j-1/2} \prod_{i=2-j}^{j} (C/X + A_i)\ +\ (X/\sqrt{C})^{1/2-j} \prod_{i=2-j}^{j} (X + A_i)}{\sqrt{X} + \sqrt{C/X}}.$$

Der Nenner $\sqrt{X} + \sqrt{C/X}$ ist in der Tat ein Faktor des Zählers von p_j, da (nach Einsetzen von $X = -\sqrt{C}$ im Zähler) $(-1)^{j-1/2} + (-1)^{1/2-j} = (-1)^{1/2}[(-1)^{j-1} + (-1)^{-j}] = 0$. Daher kann $\sqrt{X} + \sqrt{C/X}$ herausgehoben werden, um Laurentpolynome p_j vom Grad j zu erhalten. Außerdem gilt offensichtlich $p_j(C/X) = p_j(X)$. Hebt man nun $\sqrt{X_s} + \sqrt{C/X_s}$ aus der s–ten Reihe obiger Determinante heraus, läßt sich das Determinantenlemma entsprechend anwenden, und man erhält $det_1 =$

$$q^{3k/2-2\sum i-2k^2}\prod_{i=1}^{k}(q^i+q^{1-i})\prod_{1\le i<j\le k}(q^{2i}-q^{2j})(1-q^{2(1-i-j)})\prod_{i=1}^{k}q^{2(n+i)(i-1)}\cdot(-1)^{\binom{k}{2}}\times$$

$$\prod_{i=1}^{k}(q^{2(1-n-i)}-q^{2(n+i)})\cdots(q^{2(1-n-i)}-q^{2(n+2-i)})\,q^{(2n+2i-1)(i-1/2)}(q^{i+n}+q^{1-n-i})^{-1}.$$

(Der zweite Summand in $p_{j-1}(X)$ ergibt für $X=-A_j$ stets null!)

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{EF}[\mathrm{sPP};B(n,n,m=2k)] &= \prod_{i=1}^{k}\frac{[2n]_{q^2}!}{[n-i+k]_{q^2}!\,[n+i+k-1]_{q^2}!}\\
&\times\ q^{2\sum i^2+3k/2-2\sum i-2k^2+2n\sum i-2nk+2\sum i^2-2\sum i}(-1)^{\binom{k}{2}}q^{k-\sum i}\\
&\times\prod_{i=1}^{k}(1+q^{2i-1})\cdot q^{4\sum i-2\sum i^2-2k}(-1)^{\binom{k}{2}}\prod_{1\le i<j\le k}(1-q^{2(j-i)})(1-q^{2(i+j-1)})\ \times\\
&q^{-5k/2+2nk-2n\sum i+5\sum i-2\sum i^2}\prod_{i=1}^{k}(1-q^{2(2n+2i-1)})\cdots(1-q^{2(2n+1)})\,(1+q^{2n+2i-1})^{-1}\\
&=\prod_{i=1}^{k}\frac{[2i-1]_{q^2}[2n+2i-1]_q[2n+2i-1]_{q^2}!}{[2i-1]_q[2n+2i-1]_{q^2}[n-i+k]_{q^2}![n+i+k-1]_{q^2}!}\prod_{1\le i<j\le k}[j-i]_{q^2}[i+j-1]_{q^2}\\
&=\frac{F_2(2k-1)_{q^2}\,F_2(2n+2k-1)_q\,H_2(2n+2k)_{q^2}\,H(n)_{q^2}\,H_2(2k)_{q^2}}{F_2(2k-1)_q\,F_2(2n-1)_q\,H_2(2n)_{q^2}\,H_2(n+2k)_{q^2}}\\
&=\frac{F_2(m+2n-1)_q\,H_2(m+2n)_{q^2}\,H_2(m+1)_{q^2}\,H_2(n)_{q^2}}{F_2(m-1)_q\,F_2(2n-1)_q\,H(m+n)_{q^2}\,H_2(2n)_{q^2}}\\
&=\prod_{i=1}^{n}\frac{[m+2i-1]_q}{[2i-1]_q}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{[m+i+j-1]_{q^2}}{[i+j-1]_{q^2}},
\end{aligned}$$

wobei wir zur Produktumformung die Hyperfaktoriellen–Notation (siehe Kapitel IV, Abschnitt 2) verwendet haben.

2.) Sei $m = 2k+1$. Wir verwenden Satz VI.4.(b):

$$\sum_{\lambda_1 \le 2k} s_\lambda(q, q^3, \dots, q^{2n-1}) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(1+q^{2i-1}) \det_{1\le s,t\le k}\left(q^{(s-t)^2} \begin{bmatrix} 2n \\ n-s+t \end{bmatrix}_{q^2} - q^{(s+t)^2} \begin{bmatrix} 2n \\ n-s-t \end{bmatrix}_{q^2} \right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(1+q^{2i-1}) \prod_{i=1}^{k} \frac{[2n]_{q^2}!}{[n-i+k]_{q^2}!\,[n+i+k]_{q^2}!} \cdot q^{2\sum_{i=1}^{k} i^2} \cdot det_2$$

mit $det_2 =$

$$\det_{1\le s,t\le k} \Big(q^{-2st}[n-s+k]_{q^2} \cdots [n-s+t+1]_{q^2}[n+s+k]_{q^2} \cdots [n+s-t+1]_{q^2}$$
$$- q^{2st}[n-s+k]_{q^2} \cdots [n-s-t+1]_{q^2}[n+s+k]_{q^2} \cdots [n+s+t+1]_{q^2} \Big)$$

Analog wie im ersten Fall werden für das Determinantenlemma geeignete Werte substituiert, hier $X_s = q^{2s}$, $A_t = -q^{2(n+t)}$ und $C = 1$. Damit schreibt sich letztere Determinante in der Form

$$det_2 = \det_{1\le s,t\le k} \left(\prod_{i=t+1}^{k} (X_s + A_i)(1/X_s + A_i) \times \right.$$
$$\left. \times \left[{X_s}^t \prod_{i=1-t}^{t} (1/X_s + A_i) - (1/X_s)^t \prod_{i=1-t}^{t} (X_s + A_i) \right] \right).$$

Sei nun

$$p_{j-1}(X) = \frac{X^j \prod_{i=1-j}^{j}(1/X + A_i) - (1/X)^j \prod_{i=1-j}^{j}(X + A_i)}{X - 1/X}.$$

Durch Einsetzen von $X = \pm 1$ im Zähler sieht man, daß $X - 1/X$ in der Tat ein Faktor des Zählers von p_j ist, daher ergibt sich nach Division mit $X - 1/X$ die für die Anwendung des Determinantenlemmas notwendige Bedingung, daß p_j ein Laurentpolynom j–ten Grades ist. Außerdem gilt auch $p_j(1/X) = p_j(X)$. Nun muß nur noch, analog zu Fall 1.), $X_s - 1/X_s$ aus der s–ten Reihe herausgehoben werden. Man erhält

$$det_2 = \prod_{i=1}^{k}(q^{2i} - q^{-2i}) \prod_{1\le i<j\le k} (q^{2i} - q^{2j})(1 - q^{-2i-2j}) \prod_{i=1}^{k} q^{2(n+i)(i-1)} \cdot (-1)^{\binom{k}{2}}$$
$$\times \prod_{i=1}^{k} q^{2(n+i)i} (q^{-2(n+i)} - q^{2(n+i)}) \cdots (q^{-2(n+i)} - q^{2(n+1-i)})\, (q^{2(n+i)} - q^{-2(n+i)})^{-1}.$$

Wiederum fällt der zweite Term in $p_{j-1}(X)$ für $X=-A_j$ weg.

Insgesamt ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\mathrm{EF}[\mathrm{sPP}; B(n,n,m=2k+1)] \;=\; & \prod_{i=1}^{n}(1+q^{2i-1}) \\
\times & \prod_{i=1}^{k} \frac{[2n]_{q^2}!}{[n-i+k]_{q^2}!\,[n+i+k]_{q^2}!} \cdot q^{2\sum i^2 - 2\sum i}(-1)^k \prod_{i=1}^{k}(1-q^{4i}) \\
\times\; & q^{-2\sum i(i-1)} \prod_{1\le i<j\le k}(1-q^{2(j-i)})(1-q^{2(i+j)}) \cdot q^{\sum[2(n+i)(i-1)-2(n+i)i+2(n+i)]} \\
\times\; & (-1)^k \prod_{1\le i<j\le k}(1-q^{2(2n+i+j)})(1-q^{2(2n+j-i)}) \prod_{i=1}^{k}(1-q^{2(2n+i)}) \\
= & \prod_{i=1}^{n} \frac{[2i-1]_{q^2}}{[2i-1]_q} \prod_{i=1}^{k} \frac{[2n]_{q^2}!\,[2i]_{q^2}\,[2n+i]_{q^2}}{[n-i+k]_{q^2}!\,[n+i+k]_{q^2}!} \\
\times & \prod_{1\le i<j\le k} [j-i]_{q^2}\,[i+j]_{q^2}[2n+i+j]_{q^2}[2n+j-i]_{q^2} =
\end{aligned}
$$

(*Anmerkung:* Mit Hilfe der leicht zu verifizierenden Identität

$$
\prod_{1\le i<j\le k}[r+j-i]_{q^2}\,[r+i+j]_{q^2} = \frac{H_2(r+2k+1)_{q^2}\,F(r)_{q^2}}{H_2(r+1)_{q^2}\,F(r+k)_{q^2}} \cdot ([r]_{q^2}!)^{-k}
$$

läßt sich das enstandene Produkt leicht umformen.)

$$
\begin{aligned}
&= \frac{F_2(2n-1)_{q^2}\,([2n]_{q^2}!)^k\,F_2(2k)_{q^2}\,F(2n+k)_{q^2}\,H(n)_{q^2}}{F_2(2n-1)_q\,F(2n)_{q^2}\,H(n+k)_{q^2}\,H(n+2k+1)_{q^2}} \\
&\times \frac{H(n+k+1)_{q^2}\,H_2(2k+1)_{q^2}\,H_2(2n+2k+1)_{q^2}\,F_2(2k)_{q^2}}{F(k)_{q^2}\,H_2(2n+1)_{q^2}\,F(2n+k)_{q^2}\,([2n]_{q^2}!)^k} \\
&= \frac{F_2(2n-1)_{q^2}\,F_2(m-1)_{q^2}\,F(m+2n-1)_q\,H(n)_{q^2}\,H_2(m)_{q^2}\,H_2(m+2n)_{q^2}}{F_2(2n-1)_q\,F_2(m-1)_q\,H(n+m)_{q^2}\,H_2(2n+1)_{q^2}} \\
&= \frac{F_2(m+2n-1)_q\,H_2(m+2n)_{q^2}\,H_2(m+1)_{q^2}\,H(n)_{q^2}}{F_2(m-1)_q\,F_2(2n-1)_q\,H(m+n)_{q^2}\,H_2(2n)_{q^2}} \\
&= \prod_{i=1}^{n}\frac{[m+2i-1]_q}{[2i-1]_q} \prod_{1\le i<j\le n}\frac{[m+i+j-1]_{q^2}}{[i+j-1]_{q^2}},
\end{aligned}
$$

womit Satz VI.1 bewiesen ist. □

KAPITEL VII

Zyklisch–symmetrische Plane Partitions

In diesem Kapitel geht es um die Abzählung der zyklisch–symmetrischen Plane Partitions. Für die erzeugende Funktion erhält man wieder über die Methode der einander nicht berührenden Gitterpunktwege eine Determinante. Allerdings kommt man diesmal mit den selben Methoden wie in Kapitel V bzw. VI nicht weiter. Das Ziel wird schließlich mit Induktion und etwas linearer Algebra erreicht. Der zu zeigende Satz lautet:

SATZ VII.1. *Die erzeugende Funktion aller zyklisch–symmetrischen Plane Partitions, die in den Würfel B_m passen, ist*

$$\mathrm{EF}[\mathrm{zPP}; B_m] = \prod_{i=1}^{m} \frac{1 - q^{3i-1}}{1 - q^{3i-2}} \prod_{1 \le i \le j \le m} \frac{1 - q^{3(m+i+j-1)}}{1 - q^{3(2i+j-1)}}. \tag{41}$$

BEMERKUNGEN. *Diese Formel wurde als erster von I. Macdonald* [**14**, S. 52–53] *vermutet ("the Macdonald conjecture"), der dabei die Absicht von P. MacMahon weiterführte, die Symmetrieklassen der Plane Partitions systematisch zu untersuchen. Den Spezialfall $q = 1$ meisterte G. Andrews* [**3**] *mit Hilfe "wüster" hypergeometrischer Berechnungen. Kaum weniger kompliziert wurde schließlich der allgemeine Fall von dem Trio Mills, Robbins und Rumsey* [**16**] *gelöst, deren Beweis wir folgen werden. Für den allgemeinen Fall ist auch noch kein anderer Beweis bekannt, während das reine Abzählproblem erst vor kurzem G. Kuperberg* [**12**] *mit einer anderen Methode bewältigte. Schließlich werden wir bei der Abzählung der total–symmetrischen Plane Partitions im nächsten Kapitel das Abzählresultat für die zyklisch–symmetrischen Plane Partitions benötigen.*

1. Spaltenstrikte Shifted Plane Partitions

Eine *spaltenstrikte Shifted Plane Partition* von n ist eine Matrix $\pi = (a_{ij})$ positiver ganzer Zahlen, deren Eintragungen nur für $j \ge i$ definiert sind, mit monoton fallenden Reihen und strikt fallenden Spalten, sodaß die Summe ihrer Teile n ergibt. Solch eine Matrix läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & & a_{1\mu_1} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2\mu_2} & \\ & & & & \dots & & \\ & & & & \dots & & \\ & & & a_{rr} & \dots & a_{r\mu_r} & \end{array}$$

Dabei ist $a_{ij} \geq a_{i,j+1}$ und $a_{ij} > a_{i+1,j}$ (sofern beide Seiten definiert sind), $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_r$ und $\sum a_{ij} = n$.

Wir setzen $|\pi| = n = \sum a_{ij}$. Die a_{ij} heißen die Teile von π. Außerdem setzen wir $\lambda_i = \mu_i - i + 1$, die Anzahl der Teile der i–ten Reihe; und $a_i = a_{ii}$, den Reihenführer der i–ten Reihe.

Für $a_1 > \cdots > a_r$ und $\lambda_1 > \cdots > \lambda_r$ definieren wir $S(a_1, \dots, a_r; \lambda_1 \dots \lambda_r; n)$ als die Anzahl der spaltenstrikten Shifted Plane Partitions von n mit den Reihenführern $a_1, \dots, a_r$ und Reihenlängen $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Dann gilt:

Proposition VII.2.

$$\sum_{n \geq 0} S(a_1, \dots, a_r; \lambda_1 \dots \lambda_r; n)\, q^n = \det_{1 \leq i,j \leq r} \left(q^{a_i + \lambda_j - 1} \begin{bmatrix} a_i + \lambda_j - 2 \\ \lambda_j - 1 \end{bmatrix}_q \right) \tag{42}$$

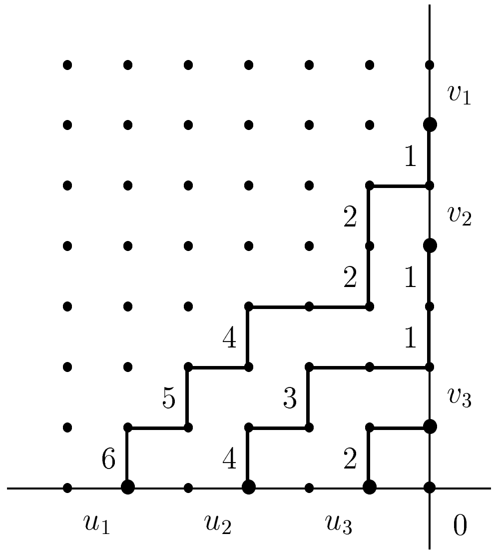
Beweis. Man kann eine spaltenstrikte Shifted Plane Partition π als Familie von einander nicht berührenden Gitterpunktwegen $(P_1, \dots, P_r)$ in Γ kodieren. Und zwar ordnet man der i–ten Reihe von π einen gewissen Pfad $P_i \in \mathcal{P}(u_i, v_i)$ zu, mit $u_i = (-a_i + 1, 0)$ bzw. $v_i = (0, \lambda_i - 1)$ (für $i = 1, \dots, r$). Dabei entspricht die Eintragung a_{ij} (für $i < j \leq \lambda_i + i - 1$) dem vertikalen Schritt $(-a_{ij} + 1, j - i - 1) \to (-a_{ij} + 1, j - i)$. Die horizontalen Schritte dienen dann nur zum Verbinden der vertikalen zu einem Pfad. Diese Bijektion wird gewichtserhaltend, wenn man den Kanten $(-k + 1, l - 1) \to (-k + 1, l)$ das Gewicht q^k zuordnet, wobei man den i–ten Pfad (mit Anfangspunkt $(-a_i + 1, 0)$) zusätzlich mit q^{a_i} multipliziert. (Die a_i sind ja nach Annahme vorgegeben.) Es ist nun leicht zu sehen, daß die erzeugende Funktion $w(u, v)$ der Pfade von $u = (-i + 1, 0)$ nach $v = (0, j - 1)$ gleich $q^i \cdot h_{j-1}(q, q^2, \dots, q^i)$ ist. Nach Korollar IV.16 erhalten wir

$$w(u, v) = q^{i+j-1} \cdot h_{j-1}(1, q, \dots, q^{i-1}) = q^{i+j-1} \begin{bmatrix} i + j - 2 \\ j - 1 \end{bmatrix}_q . \tag{43}$$

Aus Satz III.4 folgt sofort die Behauptung. $\square$

Beispiel VII.3. *Die spaltenstrikte Shifted Plane Partition* π *wird auf folgende Weise kodiert:*

$$\pi = \begin{array}{ccccccc} 6 & 6 & 5 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ & 4 & 4 & 3 & 1 & 1 & \\ & & 2 & 2 & & & \end{array}$$



Bemerkung. *Ganz analog kann man* reihenstrikte *Shifted Plane Partitions betrachten, was wir, anstatt einer formalen Definition, nun als selbsterklärend hinnehmen können. Für die folgenden Überlegungen werden diese nicht benötigt, wir werden aber im nächsten Kapitel darauf zurückkommen.*

2. Vorbereitungen

Man kann auf natürliche Weise jede zyklisch–symmetrische Plane Partition mit einer spaltenstrikten Shifted Plane Partition assoziieren. Das soll anhand eines Beispiels veranschaulicht werden. Man betrachte folgende zyklisch–symmetrische Plane Partition π:

$$\begin{array}{ccccccc} 7 & 5 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 4 & 3 & 3 & & \\ 6 & 5 & 3 & 2 & & & \\ 4 & 3 & 2 & 1 & & & \\ 2 & 2 & 2 & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & & & \end{array}$$

Die "äußere Schale" eines dreidimensionalen Ferrer–Diagramms besteht aus Punkten, die am nächsten zu den Koordinatenebenen liegen, das sind jene Punkte, wo eine Koordinate gleich 1 ist. Diese Punkte werden unter der zyklischen Abbildung

$\sigma : (i,j,k) \to (j,k,i)$ auf sich selber abgebildet. Die Konsequenzen für π daraus sind, daß die Teile der ersten Reihe von π gleich der Längen der Reihen von π und die Teile der ersten Spalte von π gleich der Längen der Spalten von π sind. Daher können wir diese Schale von Punkten rekonstruieren, falls wir nur die erste Reihe von π kennen. Wenn wir diese Schale entfernen, dann erhalten wir eine neue zyklisch–symmetrische Plane Partition:

$$\begin{matrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & \\ 2 & 1 & & \\ 1 & 1 & & \end{matrix}$$

Ihre äußere Schale wird durch ihre oberste Reihe 4 3 2 2 bestimmt, und nach Entfernen dieser Schale bleibt nur eine einzelne 1 übrig. Somit kann die ganze Partition π aus der Matrix π' rekonstruiert werden:

$$\begin{matrix} 7 & 5 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ & 4 & 3 & 2 & 2 & & \\ & & 1 & & & & \end{matrix}$$

Die Matrix π' ist eine spaltenstrikte Shifted Plane Partition, wobei die Reihenführer gleich der Reihenlängen sind.

Man kann diese Konstruktion auch formaler beschreiben: Für eine gegebene zyklisch–symmetrische Plane Partition mit Teilen a_{ij} setzen wir $b_{ij} = a_{ij} - i + 1$, sofern $i \le j$ und dieser Ausdruck positiv ist. Für andere Werte von i und j ist b_{ij} nicht definiert. Dann ist (b_{ij}) eine spaltenstrikte Shifted Plane Partition mit Reihenführern gleich der Reihenlängen. Man prüft leicht nach, daß dieser Prozeß eine umkehrbar eindeutige Korrespondenz liefert zwischen zyklisch–symmetrischen Plane Partitions π, die in den Würfel B_m passen, und spaltenstrikten Shifted Plane Partitions π' mit Teilen $\le m$ und Reihenführern gleich der Reihenlängen, wobei jeder Orbit der zyklisch–symmetrischen Plane Partition π genau einer (dreidimensionalen) Zelle der zugeordneten spaltenstrikten Shifted Plane Partition π' entspricht.

Für $a_1 > \cdots > a_r$ bezeichne $Z(a_1, \ldots, a_r; n)$ die Anzahl der zyklisch–symmetrischen Plane Partitions von n, deren korrespondierende spaltenstrikte Shifted Plane Partitions die Reihenführer $a_1, \ldots, a_r$ besitzen. Da die Schale, die zu einer Reihe

$x_1, \dots, x_\lambda$ der spaltenstrikten Shifted Plane Partition korrespondiert, genau

$$\begin{aligned} 1 + 3(x_1 - 1) + \cdots + 3(x_\lambda - 1) &= 3(x_1 + \cdots + x_\lambda) - 3\lambda + 1 \\ &= 3(x_2 + \cdots + x_\lambda) + 1 \end{aligned} \tag{44}$$

Punkte besitzt[1], können wir Proposition VII.2 etwas modifizieren und erhalten:

Proposition VII.4.

$$\sum_{n \geq 0} Z(a_1, \dots, a_r; n)\, q^n = \det_{1 \leq i,j \leq r} \left(q^{3a_i - 2} \begin{bmatrix} a_i + a_j - 2 \\ a_j - 1 \end{bmatrix}_{q^3} \right) \tag{45}$$

Beweis. Zu der zyklisch–symmetrischen Plane Partition π betrachte man die korrespondierende spaltenstrikte Shifted Plane Partition π', mit Reihenführern gleich der Reihenlängen. Diese kodiert man dann als Familie nicht berührender Gitterpunktwege $(P_1, \dots, P_r)$ in Γ. Dabei ordnet man der i–ten Reihe von π' einen Pfad $P_i \in \mathcal{P}(u_i, v_i)$ zu, mit $u_i = (-a_i + 1, 0)$ bzw. $v_i = (0, a_i - 1)$ (für $i = 1, \dots, r$). Wie im Beweis von Proposition VII.2 entspricht die Eintragung a_{ij} (für $i < j \leq a_i + i - 1$) dem vertikalen Schritt $(-a_{ij} + 1, j - i - 1) \to (-a_{ij} + 1, j - i)$. Die horizontalen Schritte dienen wieder nur zum Verbinden der vertikalen zu einem Pfad. Diese Bijektion wird gewichtserhaltend, wenn man den Kanten $(-k + 1, l - 1) \to (-k + 1, l)$ das Gewicht q^{3k} zuordnet, wobei man jeden Pfad zusätzlich mit q multipliziert. (Das entspricht dem Gewicht für den Eckpunkt einer Schale, man vergleiche mit (44).) Analog zum Beweis von Proposition VII.2 ergibt sich für die erzeugende Funktion $w(u, v)$ der Pfade von $u = (-i + 1, 0)$ nach $v = (0, j - 1)$

$$w(u, v) = q \cdot h_{j-1}(q^3, q^6, \dots, q^{3i}) = q^{3j-2} \begin{bmatrix} i + j - 2 \\ j - 1 \end{bmatrix}_{q^3}. \tag{46}$$

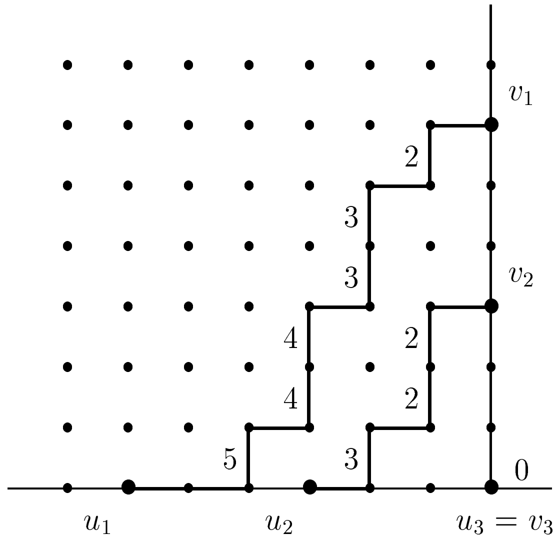
Und wieder folgt aus Satz III.4 sofort die Behauptung. □

[1] Eine zyklisch–symmetrische Plane Partition besitzt ein– und dreielementige Orbits, wobei die einelementigen genau die Eckpunkte der Schalen sind.

Beispiel VII.5. *Die zyklisch–symmetrische Plane Partition π wird auf folgende Weise kodiert:*

$$\pi = \begin{array}{ccccccc} 7 & 5 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 4 & 3 & 3 & & \\ 6 & 5 & 3 & 2 & & & \\ 4 & 3 & 2 & 1 & & & \\ 2 & 2 & 2 & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & & & \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \pi' = \begin{array}{ccccccc} 7 & 5 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ & 4 & 3 & 2 & 2 & & \\ & & 1 & & & & \end{array}$$

$\longleftrightarrow$



Da bei unserer Betrachtung aller zyklisch–symmetrischen Plane Partitions $\pi \in B_m$ die Reihenführer a_i der zugeorneten spaltenstrikten Shifted Plane Partitions variieren, folgt sofort:

Satz VII.6. *Die erzeugende Funktion aller zyklisch–symmetrischen Plane Partitions, die in den Würfel B_m passen, ist die Summe aller Hauptminoren der Matrix $A^{(m)}$, die durch*

$$A_{ij}^{(m)} = q^{3i-2} \begin{bmatrix} i+j-2 \\ j-1 \end{bmatrix}_{q^3}, \qquad 1 \le i,j \le m,$$

definiert ist. Es gilt also (wobei I_m die $(m \times m)$–Einheitsmatrix bezeichne)

$$\mathrm{EF}[\mathrm{zPP}; B_m] = \det(I_m + A^{(m)}).$$

Bemerkung. *Daß die Summe aller Hauptminoren einer $(m \times m)$–Matrix A (inklusive dem leeren Minor, der 1 gesetzt wird,) gleich der Determinante von $I_m +$*

A ist, ist leicht einzusehen anhand der Determinantenentwicklung $\det(I_m + A) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_m} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{1\le i\le m}(\delta_{i,\sigma(i)} + a_{i,\sigma(i)})$.

Es ist uns also gelungen, unser Problem auf die Auswertung der Determinante von $I_m + A^{(m)}$ zu reduzieren. Für $m = 1$ erhält man das gewünschte Resultat. Satz VII.1 ist mit Induktion bewiesen, wenn wir

$$\frac{\det(I_m + A^{(m)})}{\det(I_{m-1} + A^{(m-1)})} = \frac{(1-q^{3m-1})\begin{bmatrix}3m-2\\ m-1\end{bmatrix}_{q^3}}{(1-q^{3m-2})\begin{bmatrix}2m-2\\ m-1\end{bmatrix}_{q^3}} \tag{47}$$

zeigen können.

Der Einfachheit halber setzen wir nun $A = A^{(m)}$ und $B = A^{(m-1)}$. Sei $A^\star$ die $(m\times m)$–Matrix, die ensteht, wenn man jedes Element der letzten Reihe von A durch 0 ersetzt. $I_{m-1} + B$ ist nach Induktionshypothese nicht singulär. Sei R irgendeine invertierbare $(m \times m)$–Matrix, deren Summe der Reihen die letzte Reihe von A ist, und sei $C = (C_1, \dots, C_m)^T$ der aus den Kofaktoren der letzten Reihe von $I_m + A$ bestehende Spaltenvektor. Schließlich definieren wir $L^\star = RC = (L_1, \dots, L_m)^T$ und $L_0 = C_m = \det(I_{m-1} + B)$. Dann sehen wir, indem wir die letzte Reihe von $I_m + A$ hintereinander jeweils durch die Reihen von R und die Reihe $(0, \dots, 0, 1)$ ersetzen und dabei die Determinante nach der letzten Reihe entwickeln, daß

$$\det(I_m + A) = L_0 + L_1 + \cdots + L_m,$$

und damit gilt

$$\frac{\det(I_m + A)}{\det(I_{m-1} + B)} = \sum_{i=0}^{m} \frac{L_i}{L_0}. \tag{48}$$

Daher müssen wir $L_0, \dots, L_m$ nur bis auf eine multiplikative Konstante $(\neq 0)$ bestimmen, um den Quotienten der Determinanten von $I_m + A$ und $I_{m-1} + B$ zu finden.

Es gilt, daß $C = R^{-1}L^\star$ orthogonal zu den ersten $m-1$ Reihen von $I_m + A$ ist (vgl. Cramersche Regel). Daher haben wir

$$(I_m + A^\star)\, R^{-1}L^\star = (I_m + A^\star)\, C = L_0\,(0, \dots, 0, 1)^T$$

und nach Linksmultiplikation mit R

$$(I_m + RA^\star R^{-1})\, L^\star = L_0 R\,(0, \dots, 0, 1)^T. \tag{49}$$

Aufgrund von

$$\det(I_m + RA^\star R^{-1}) = \det(I_m + A^\star) = \det(I_{m-1} + B) \neq 0$$

sind die L_i durch diese Gleichungen bis auf ein konstantes Vielfaches festgelegt.

Um die Quotienten von (47) und (48) zu berechnen, wollen wir eine geeignete Matrix R wählen, dann auf geeignete Größen $L_0, L_1, \dots, L_m$ kommen und schließlich (48) verwenden, um die gewünschten Brüche zu erhalten.

3. Berechnungen

Für die folgenden Berechnungen nehmen wir $m \geq 2$ an.

Wir wählen jetzt die $(m \times m)$–Matrix R, indem wir

$$R_{ij} = q^{3i(m-1)+1} \begin{bmatrix} m-2+j-i \\ j-i \end{bmatrix}_{q^3}, \qquad \text{für} \quad i,j = 1, \dots, m,$$

setzen. Dieses R ist eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonalelementen ungleich null, daher ist sie invertierbar.

Zunächst wollen wir zeigen, daß die Summe der Reihen von R die letzte Reihe von A ergibt. Weil $R_{ij} = 0$ für $i > j$, ist die j–te Komponente der Summe der Reihen von R gleich

$$\begin{aligned} q \sum_{i=1}^{j} q^{3i(m-1)} \begin{bmatrix} m-2+j-i \\ j-i \end{bmatrix}_{q^3} &= q^{3m-2} \sum_{i=0}^{j-1} q^{3i(m-1)} \begin{bmatrix} m-2+j-1-i \\ j-1-i \end{bmatrix}_{q^3} \\ &= q^{3m-2} \begin{bmatrix} m-2+j \\ j-1 \end{bmatrix}_{q^3} \end{aligned}$$

nach Korollar IV.9. Das ist in der Tat die j–te Komponente der letzten Reihe von A.

Als nächstes brauchen wir die Inverse der oberen Dreiecksmatrix R. Wir behaupten, daß $R^{-1} = S$, wobei

$$S_{ij} = q^{3i(1-m)-1} \begin{bmatrix} j-i-m \\ j-i \end{bmatrix}_{q^3}, \qquad \text{für} \quad i,j = 1, \dots, m.$$

Um das nachzuweisen, müssen wir $\sum_{k=1}^{m} R_{ik}S_{kj}$ berechnen. Nun ist $R_{ik}S_{kj} = 0$, außer wenn $i \leq k \leq j$. Daher haben wir für $i \leq j$

$$\sum_{k=1}^{m} R_{ik}S_{kj} = q^{3i(m-1)} \sum_{k=i}^{j} q^{3k(1-m)} \begin{bmatrix} m-2+k-i \\ k-i \end{bmatrix}_{q^3} \begin{bmatrix} j-k-m \\ j-k \end{bmatrix}_{q^3}$$
$$= \sum_{k=0}^{j-i} q^{3k(1-m)} \begin{bmatrix} m-2+k \\ k \end{bmatrix}_{q^3} \begin{bmatrix} j-i-k-m \\ j-i-k \end{bmatrix}_{q^3} = \begin{bmatrix} j-i-1 \\ j-i \end{bmatrix}_{q^3} = \delta_{ij}$$

nach Lemma IV.7, daher ist R^{-1} tatsächlich S.

Weiters müssen wir $RA^\star R^{-1}$ berechnen. Wir fangen mit der Berechnung von $A^\star R^{-1}$ an. Klarerweise ist $(A^\star R^{-1})_{mj} = 0$ für alle j, da die letzte Reihe von $A^\star$ null ist. Für $i < m$ haben wir

$$(A^\star R^{-1})_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}S_{kj} = q^{3(i-1)} \sum_{k=1}^{j} q^{3k(1-m)} \begin{bmatrix} i+k-2 \\ k-1 \end{bmatrix}_{q^3} \begin{bmatrix} j-k-m \\ j-k \end{bmatrix}_{q^3}$$
$$= q^{3(i-m)} \sum_{k=0}^{j-1} q^{3k(1-m)} \begin{bmatrix} i+k-1 \\ k \end{bmatrix}_{q^3} \begin{bmatrix} j-1-k-m \\ j-1-k \end{bmatrix}_{q^3}$$
$$= q^{3(i-m)} \begin{bmatrix} i-m+j-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{q^3}$$

nach Lemma IV.7. Jetzt berechnen wir $RA^\star R^{-1}$. Wir wissen, daß $R_{ik} = 0$, falls $k < i$, und die vorige Gleichung gibt uns $(A^\star R^{-1})_{kj} = 0$, falls $k > m-j$. Daher haben wir für $i+j \leq m$

$$(RA^\star R^{-1})_{ij} = \sum_{k=i}^{m-j} R_{ik}(A^\star R^{-1})_{kj}$$
$$= q^{3i(m-1)+1} \sum_{k=i}^{m-j} q^{3(k-m)} \begin{bmatrix} m-2+k-i \\ k-i \end{bmatrix}_{q^3} \begin{bmatrix} k-m+j-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{q^3}$$
$$= q^{3i(m-1)+3(i-m)+1} \sum_{k=0}^{m-j-i} q^{3k} \begin{bmatrix} m-2+k \\ k \end{bmatrix}_{q^3} \begin{bmatrix} k+i-m+j-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{q^3}$$
$$= (-1)^{j-1} q^{3i(m-1)+3j(i-m)+1} q^{\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} 2m-2-i \\ m-i-j \end{bmatrix}_{q^3}$$

nach Korollar IV.11. Für $i+j > m$ sind beide Seiten der oberen Gleichung 0, daher gilt sie für alle i und j.

Sei nun N die $((m+1)\times(m+1))$–Matrix mit den Elementen

$$N_{ij} = (-1)^j q^{3i(m-1)+3j(i-m)+1} q^{3\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} 2m-2-i \\ m-i-j \end{bmatrix}_{q^3}, \qquad \text{für} \quad i,j=0,\dots,m,$$

und sei $N^\star$ die $(m\times(m+1))$–Matrix, die durch Entfernen der obersten Reihe von N entsteht. Man sieht, daß die $(m\times m)$–Matrix in der rechten unteren Ecke von N gleich $-RA^\star R^{-1}$ und die erste Spalte von $N^\star$ die m–te Spalte von R ist.

Da $R\,(0,\dots,0,1)^T$ die m–te Spalte von R ist, bedeutet Bedingung (49) einfach, daß $N^\star L = L^\star$, wobei $L=(L_0,L_1,\dots,L_m)^T$. Wir geben ein L mit der stärkeren Bedingung $NL=L$ an, sodaß es ein Eigenvektor von N mit Eigenwert 1 ist.

Angenommen, α und β seien nicht negative ganze Zahlen, sodaß $\alpha+\beta\le m$. Sei $V(\alpha,\beta)$ der Spaltenvektor der Länge $m+1$ mit j–ter Komponente gleich

$$V(\alpha,\beta) = q^{3j(m-1+\beta)} \begin{bmatrix} m-2+j \\ j-\alpha \end{bmatrix}_{q^3} \begin{bmatrix} 2m-2-j \\ m-\beta-j \end{bmatrix}_{q^3}, \qquad \text{für} \quad j=0,\dots,m.$$

Es gilt $V(\alpha,\beta)_j=0$, außer wenn $\alpha\le j\le m-\beta$, sodaß

$$\begin{aligned}(NV(\alpha,\beta))_i &= q^{3i(m-1)+1} \\ &\quad\times \sum_{j=\alpha}^{m-\beta} (-1)^j q^{3j(i-1+\beta)} q^{3\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} 2m-2-i \\ m-i-j \end{bmatrix}_{q^3} \begin{bmatrix} m-2+j \\ j-\alpha \end{bmatrix}_{q^3} \begin{bmatrix} 2m-2-j \\ m-\beta-j \end{bmatrix}_{q^3} \\ &= q^{3i(m-1)+1} \begin{bmatrix} 2m-2-i \\ m-i-\alpha \end{bmatrix}_{q^3} \\ &\quad\times \sum_{j=\alpha}^{m-\beta} (-1)^j q^{3j(i-1+\beta)} q^{3\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} m-i-\alpha \\ j-\alpha \end{bmatrix}_{q^3} \begin{bmatrix} 2m-2-j \\ m-\beta-j \end{bmatrix}_{q^3}\end{aligned}$$

nach (17). Ersetzt man j durch $j+\alpha$, ergibt sich

$$(NV(\alpha,\beta))_i = (-1)^\alpha q^{3i(m-1)+3\alpha(i-1+\beta)+1} q^{3\binom{\alpha}{2}} \begin{bmatrix} 2m-2-i \\ m-i-\alpha \end{bmatrix}_{q^3} \cdot \text{sum},$$

wobei

$$\begin{aligned}\text{sum} &= \sum_{j=0}^{m-\alpha-\beta} (-1)^j q^{3j(i-2+\alpha+\beta)} q^{3\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} m-i-\alpha \\ j \end{bmatrix}_{q^3} \begin{bmatrix} 2m-2-j-\alpha \\ m-\beta-j-\alpha \end{bmatrix}_{q^3} \\ &= \begin{bmatrix} m-2+i \\ m-\alpha-\beta \end{bmatrix}_{q^3} = \begin{bmatrix} m-2+i \\ i-2+\alpha+\beta \end{bmatrix}_{q^3}\end{aligned}$$

nach Korollar IV.10 und (16). Das ist äquivalent zu

$$NV(\alpha,\beta) = (-1)^{\alpha} q^{3\alpha(\beta-1)+1} q^{3\binom{\alpha}{2}} V(2-\alpha-\beta,\alpha). \tag{50}$$

Jetzt setzen wir

$$L = V(0,2) + qV(0,0) + q^2 V(2,0).$$

Aus (50) folgt, daß $NL = L$ und wir haben einen passenden Eigenvektor.

Als nächstes benötigen wir die Summe der Komponenten von L. Unter Verwendung von Lemma IV.7 erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m}(V(\alpha,\beta))_j &= \sum_{j=\alpha}^{m-\beta} q^{3j(m-1+\beta)} \begin{bmatrix} m-2+j \\ j-\alpha \end{bmatrix}_{q^3} \begin{bmatrix} 2m-2-j \\ m-\beta-j \end{bmatrix}_{q^3} \\ &= q^{3\alpha(m-1+\beta)} \sum_{j=0}^{m-\alpha-\beta} q^{3j(m-1+\beta)} \begin{bmatrix} m-2+\alpha+j \\ j \end{bmatrix}_{q^3} \begin{bmatrix} 2m-2-\alpha-j \\ m-\beta-\alpha-j \end{bmatrix}_{q^3} \\ &= q^{3\alpha(m-1+\beta)} \begin{bmatrix} 3m-3 \\ m-\alpha-\beta \end{bmatrix}_{q^3},\end{aligned}$$

und damit ist die Summe der Komponenten von L

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m} L_j &= \begin{bmatrix} 3m-3 \\ m-2 \end{bmatrix}_{q^3} + q \begin{bmatrix} 3m-3 \\ m \end{bmatrix}_{q^3} + q^{2+6(m-1)} \begin{bmatrix} 3m-3 \\ m-2 \end{bmatrix}_{q^3} \\ &= \frac{Y}{1-q^{3m}} \begin{bmatrix} 3m-3 \\ m-2 \end{bmatrix}_{q^3},\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}Y &= (1-q^{3m})(1+q^{6m-4}) + q\frac{(1-q^{6m-3})(1-q^{6m-6})}{(1-q^{3m-3})} \\ &= (1-q^{3m})(1+q^{3m-2}+q^{6m-4}) - q^{3m-2}(1-q^{3m}) + q(1-q^{6m-3})(1+q^{3m-3}) \\ &= (1-q^{3m})(1+q^{3m-2}+q^{6m-4}) + q(1-q^{9m-6}) \\ &= \frac{(1-q^{3m}+q-q^{3m-1})(1-q^{9m-6})}{(1-q^{3m-2})} = \frac{(1+q)(1-q^{3m-1})(1-q^{9m-6})}{(1-q^{3m-2})},\end{aligned}$$

woraus sich

$$\sum_{j=0}^{m} L_j = \frac{(1+q)(1-q^{3m-1})(1-q^{3m-3})}{(1-q^{3m-2})(1-q^{3m})} \begin{bmatrix} 3m-2 \\ m-1 \end{bmatrix}_{q^3}$$

ergibt. Außerdem ist

$$L_0 = \begin{bmatrix} 2m-2 \\ m-2 \end{bmatrix}_{q^3} + q \begin{bmatrix} 2m-2 \\ m \end{bmatrix}_{q^3} = (1+q) \begin{bmatrix} 2m-2 \\ m \end{bmatrix}_{q^3}$$

$$= \frac{(1+q)\,(1-q^{3m-3})}{1-q^{3m}} \begin{bmatrix} 2m-2 \\ m-1 \end{bmatrix}_{q^3}$$

und

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{L_j}{L_0} = \frac{(1-q^{3m-1}) \begin{bmatrix} 3m-2 \\ m-1 \end{bmatrix}_{q^3}}{(1-q^{3m-2}) \begin{bmatrix} 2m-2 \\ m-1 \end{bmatrix}_{q^3}}.$$

Somit ist Identität (47) gezeigt und Satz VII.1 bewiesen. □

KAPITEL VIII

Total–symmetrische Plane Partitions

Wir wollen uns nun dem schwierigsten hier dargestellten Problem zuwenden. Für eine erzeugende Funktion der total–symmetrischen Plane Partitions, die in einen Würfel passen, gibt es nur eine Vermutung (s. Diskussion in Kapitel IV, Abschnitt 5), nämlich:

VERMUTUNG VIII.1. *Die Orbit–erzeugende Funktion aller total–symmetrischen Plane Partitions, die in den Würfel B_n passen, ist*

$$\mathrm{EF}_{\mathcal{O}}[\mathrm{tPP}; Bn] = \prod_{1\le i\le j\le k\le n} \frac{1-q^{i+j+k-1}}{1-q^{i+j+k-2}}. \tag{51}$$

Obwohl diese Vermutung wahr zu sein scheint, (sie wurde für ca. $n \le 20$ verifiziert,) hat noch niemand einen Beweis gefunden. Allein für $q = 1$ ist das Problem gelöst. Der folgende Satz VIII.2 formuliert diesen Spezialfall der Vermutung VIII.1.

Die Anzahl der total–symmetrischen Plane Partitions π mit $\pi \subset B_n$ werde mit $TS(n)$ bezeichnet.

SATZ VIII.2. *Die Anzahl der total–symmetrischen Plane Partitions, die in den Würfel B_n passen, ist*

$$TS(n) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(2i)!\,(n+2i+1)!}{(3i+1)!\,(n+i)!}. \tag{52}$$

BEISPIEL VIII.3. *Sei $n = 2$. Es gibt 5 total–symmetrische Plane Partitions, deren Teile alle ≤ 2 sind:*

$$\emptyset \qquad 1 \qquad \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{matrix}$$

Die zugehörige Orbit–erzeugende Funktion ist $1 + q + q^2 + q^3 + q^4$.

Satz VIII.2 soll schließlich gezeigt werden. Dennoch wollen wir versuchen, den allgemeinen Fall möglichst lange zu betrachten, um die Schwierigkeiten eines q–Analogons aufzuzeigen. Erst danach werden wir uns auf das reine Abzählproblem beschränken.

Wir werden das Problem wieder auf die Abzählung gewisser einander nicht–berührender Pfade in Γ zurückführen. Davor sollen zu diesem Zweck reihenstrikte Shifted Plane Partitions (vgl. spaltenstrikte Shifted Plane Partitions in Kapitel VII) untersucht werden.

1. Reihenstrikte Shifted Plane Partitions

Eine *reihenstrikte Shifted Plane Partition* von n ist eine Matrix $\pi = (a_{ij})$ positiver ganzer Zahlen, deren Eintragungen nur für $j \geq i$ definiert sind, mit monoton fallenden Spalten und strikt fallenden Reihen, sodaß die Summe ihrer Teile n ergibt. Solch eine Matrix schreibt sich wie in Kapitel VII, Abschnitt 1, hier gelte aber $a_{ij} \geq a_{i+1,j}$ und $a_{ij} > a_{i,j+1}$ (sofern beide Seiten definiert sind).

λ_i sei die Anzahl der Teile der i–ten Reihe und $a_i := a_{ii}$ der Reihenführer der i–ten Reihe.

Für $a_1 > \cdots > a_r$ und $\lambda_1 > \cdots > \lambda_r$ definieren wir $R(a_1, \ldots, a_r; \lambda_1 \ldots \lambda_r; n)$ als die Anzahl der reihenstrikten Shifted Plane Partitions von n mit den Reihenführern $a_1, \ldots, a_r$ und Reihenlängen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Dann gilt:

Proposition VIII.4.

$$\sum_{n \geq 0} R(a_1, \ldots, a_r; \lambda_1 \ldots \lambda_r; n)\, q^n = \det_{1 \leq i,j \leq r} \left(q^{a_i + \binom{\lambda_j}{2}} \begin{bmatrix} a_i - 1 \\ \lambda_j - 1 \end{bmatrix}_q \right) \tag{53}$$

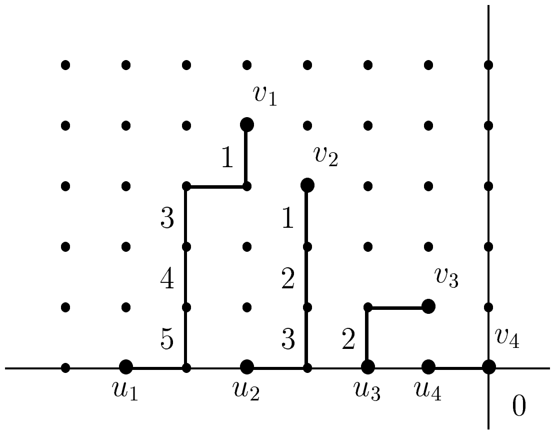
Beweis. Man kann eine reihenstrikte Shifted Plane Partition π als Familie von einander nicht berührenden Gitterpunktwegen $(P_1, \ldots, P_r)$ in Γ kodieren. Und zwar ordnet man der i–ten Reihe von π einen gewissen Pfad $P_i \in \mathcal{P}(u_i, v_i)$ zu, mit $u_i = (-a_i + 1, 0)$ bzw. $v_i = (-\lambda_i + 1, \lambda_i - 1)$ (für $i = 1, \ldots, r$). Dabei entspricht die Eintragung a_{ij} (für $i < j \leq \lambda_i + i - 1$) dem vertikalen Schritt $(-a_{ij} - j + i + 1, j - i - 1) \to (-a_{ij} - j + i + 1, j - i)$. Die horizontalen Schritte dienen wieder nur zum Verbinden der vertikalen zu einem Pfad. Diese Bijektion wird gewichtserhaltend, wenn man den Kanten $(-k+1, l-1) \to (-k+1, l)$ das Gewicht q^{k-l} zuordnet, wobei man den i–ten Pfad (mit Anfangspunkt $(-a_i+1,0)$) zusätzlich mit q^{a_i} multipliziert. (Die a_i sind ja nach Annahme vorgegeben.) Es ist nun leicht zu sehen, daß die erzeugende Funktion $w(u,v)$ der Pfade von $u=(-i+1,0)$ nach $v=(-j+1,j-1)$ gleich $q^i\cdot e_{j-1}(q,q^2,\ldots,q^{i-1})$ ist. Nach Korollar IV.14 erhalten wir

$$w(u,v)=q^{i+j-1}\cdot e_{j-1}(1,q,\ldots,q^{i-2})=q^{i+\binom{j}{2}}\begin{bmatrix}i-1\\j-1\end{bmatrix}_q. \tag{54}$$

Aus Satz III.4 folgt sofort die Behauptung. □

Beispiel VIII.5. *Die reihenstrikte Shifted Plane Partition π wird auf folgende Weise kodiert:*

$$\pi=\begin{array}{ccccc}7&5&4&3&1\\&5&3&2&1\\&&3&2&\\&&&2&\end{array}$$



2. Das q–Analogon

Man kann jede total–symmetrische Plane Partition π mit einer reihenstrikten Shifted Plane Partition π'' assoziieren. Dafür verwende man zunächst einmal die in VII.2 beschriebene Korrespondenz, die zunächst eine spaltenstrikte Shifted Plane Partition π' liefert. Die Reihen davon sind symmetrische Partitionen, die (nach der Bemerkung auf Seite 34) in strikte Partitionen übergeführt werden können; genauer: Sind b_{ij} für $i\le j$ die Teile von π', so setzen wir $c_{ij}=b_{ij}+i-j$, sofern $i\le j$ und dieser Ausdruck positiv ist. Für andere Werte von i und j ist c_{ij} nicht definiert. Dann ist (c_{ij}) eine reihenstrikte Shifted Plane Partition. Man prüft leicht nach, daß dieser Prozeß eine umkehrbar eindeutige Korrespondenz liefert zwischen total–symmetrischen Plane Partitions π, die in den Würfel B_n passen, und reihenstrikten Shifted Plane Partitions π'' mit Teilen $\le n$, wobei jeder Orbit der total–symmetrischen Plane

Partition π genau einer (dreidimensionalen) Zelle der zugeordneten reihenstrikten Shifted Plane Partition π'' entspricht.

Für $a_1 > \cdots > a_r$ bezeichne $T(a_1, \ldots, a_r; \lambda_1, \ldots, \lambda_r; n)$ die Anzahl der total–symmetrischen Plane Partitions von n, deren zugeordnete reihenstrikte Shifted Plane Partitions die Reihenlängen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ und Reihenführer $a_1, \ldots, a_r$ besitzen. Da die Schale, die zu einer Reihe $x_1, \ldots, x_\lambda$ der reihenstrikten Shifted Plane Partition korrespondiert[1], genau

$$1 + 3(x_1 - 1) + 3\sum_{i=2}^{\lambda}(2x_i - 1) = 1 + 3x_1 + 6(x_2 + \cdots + x_\lambda) - 3\lambda \tag{55}$$

Punkte besitzt, können wir Proposition VIII.4 etwas modifizieren und erhalten:

Proposition VIII.6.

$$\sum_{n\geq 0} T(a_1, \ldots, a_r; \lambda_1, \ldots, \lambda_r; n)\, q^n = \det_{1\leq i,j\leq r}\left(q^{3a_i+3\lambda_j^2-6\lambda_j+1} \begin{bmatrix} a_i - 1 \\ \lambda_j - 1 \end{bmatrix}_{q^6} \right) \tag{56}$$

Beweis. Zu der total–symmetrischen Plane Partition π betrachte man die korrespondierende reihenstrikte Shifted Plane Partition π''. Diese kodiert man dann als Familie einander nicht berührender Gitterpunktwege $(P_1, \ldots, P_r)$ in Γ. Dabei ordnet man der i–ten Reihe von π'' einen Pfad $P_i \in \mathcal{P}(u_i, v_i)$ zu, mit $u_i = (-a_i + 1, 0)$ bzw. $v_i = (-\lambda_i + 1, \lambda_i - 1)$ (für $i = 1, \ldots, r$), so wie im Beweis von Proposition VIII.4. Ebenfalls entspricht die Eintragung a_{ij} (für $i < j \leq \lambda_i + i - 1$) dem vertikalen Schritt $(-a_{ij} - j + i + 1, j - i - 1) \to (-a_{ij} - j + i + 1, j - i)$, wobei die horizontalen Schritte wieder nur zum Verbinden der vertikalen zu einem Pfad dienen. Nun wird diese Bijektion gewichtserhaltend, wenn man den Kanten $(-k + 1, l - 1) \to (-k + 1, l)$ das Gewicht q^{6k} zuordnet, wobei man den Pfad mit Anfangspunkt $(-i + 1, 0)$ und Endpunkt $(-j + 1, j - 1)$ zusätzlich mit $q^{3i-3j+1}$ multipliziert (man vergleiche mit (55)). Analog zum Beweis von Proposition VIII.4 ergibt sich (nach Korollar IV.14) für die erzeugende Funktion $w(u, v)$ der Pfade von $u = (-i + 1, 0)$ nach $v = (-j +$

[1] Eine total–symmetrische Plane Partition besitzt ein–, drei– und sechselementige Orbits, wobei die einelementigen genau die Eckpunkte der Schalen sind und die dreielementigen die Hauptachsen und die (drei) Diagonalen (zwischen den Achsen) der Schalen bilden, während die restlichen Orbits aus sechs Elementen bestehen.

$1, j-1)$

$$w(u,v) = q^{3i-3j+1} \cdot e_{j-1}(q^6, q^{12}, \ldots, q^{6(i-1)}) = q^{3i+3j^2-6j+1} \begin{bmatrix} i-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{q^6}. \tag{57}$$

Und wieder folgt aus Satz III.4 sofort die Behauptung. □

Beispiel VIII.7. *Die total–symmetrische Plane Partition π wird auf folgende Weise kodiert:*

$$\pi \quad = \quad \begin{matrix} 7 & 6 & 6 & 6 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 6 & 5 & 5 & 5 & 2 & \\ 6 & 5 & 5 & 5 & 4 & 1 & \\ 6 & 5 & 5 & 5 & 4 & 1 & \\ 5 & 5 & 4 & 4 & 2 & & \\ 4 & 2 & 1 & 1 & & & \\ 1 & & & & & & \end{matrix} \qquad \longleftrightarrow \qquad \pi' \quad = \quad \begin{matrix} 7 & 6 & 6 & 6 & 5 & 4 & 1 \\ & 5 & 4 & 4 & 4 & 1 & \\ & & 3 & 2 & 2 & & \\ & & & 2 & 1 & & \end{matrix}$$

$$\longleftrightarrow \qquad \pi'' \quad = \quad \begin{matrix} 7 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ & 5 & 3 & 2 & 1 \\ & & 3 & 2 & \\ & & & 2 & \end{matrix}$$

(Für die zugehörige Pfadfamilie dieser reihenstrikten Shifted Plane Partition siehe Beispiel VIII.5.)

Da bei den total–symmetrischen Plane Partitions $\pi \in B_m$ die Reihenlängen λ_i sowie die Reihenführer a_i $(i = 1, \ldots, r)$ der zugeordneten reihenstrikten Shifted Plane Partitions variieren, folgt sofort:

Satz VIII.8. *Die erzeugende Funktion aller total–symmetrischen Plane Partitions, die in den Würfel B_n passen, ist die Summe aller Minoren der Matrix $\hat{T}^{(n)}$, die durch*

$$\hat{T}^{(n)}_{ij} = q^{3i+3j^2-6j+1} \begin{bmatrix} i-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{q^6}, \qquad 1 \le i, j \le n,$$

definiert ist.

Ist man stattdessen an der Orbit–erzeugenden Funktion für die total–symmetrischen Plane Partitions interessiert, so braucht man die Gewichts–Transformation (55) nicht durchzuführen und man erhält:

SATZ VIII.9. *Die Orbit–erzeugende Funktion aller total–symmetrischen Plane Partitions, die in den Würfel B_n passen, ist die Summe aller Minoren der Matrix $T^{(n)}$, die durch*

$$T_{ij}^{(n)} = q^{i+\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} i-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_q, \qquad 1 \le i,j \le n,$$

definiert ist.

Wir haben aber bereits eine Formel für die Summe der Minoren einer Matrix, es ist die Pfaffsche Form von Satz III.7. Dafür wären nur noch die dort vorkommenden Größen $\mathcal{Q}_I^\star(u_i,u_j)$ zu bestimmen, die aber in unseren beiden Fällen für allgemeines q leider keine geschlossene Form besitzen. Wohl können diese rekursiv bestimmt werden, jedoch ist die weitere Auswertung der Pfaffschen Form ein hartnäckiges Problem, das noch nicht gelöst ist.

S. Okada [**17**, Theorem 5] hat gezeigt, daß das Quadrat der zu Satz VIII.9 korrespondierenden Pfaffschen Form gleich $\det(T_n^{(1)}+T_n^{(2)})$ ist, wobei $T_n^{(1)}$ und $T_n^{(2)}$ die $(n\times n)$–Matrizen

$$T_n^{(1)} = \begin{pmatrix} 1+q & & & & & \\ -1 & 1+q^2 & & & 0 & \\ & -1 & 1+q^3 & & & \\ & & -1 & 1+q^4 & & \\ 0 & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 & 1+q^n \end{pmatrix}$$

bzw.

$$T_n^{(2)} = \left(q^{i+j-1} \left(\begin{bmatrix} i+j-2 \\ i-1 \end{bmatrix}_q + q \begin{bmatrix} i+j-1 \\ i \end{bmatrix}_q \right) \right)_{1\le i,j\le n}$$

sind, womit er (51) auf die Identität

$$\det(T_n^{(1)}+T_n^{(2)}) = \prod_{1\le i\le j\le k\le n} \left(\frac{1-q^{i+j+k-1}}{1-q^{i+j+k-2}} \right)^2$$

"reduziert" hat. Dieses Ergebnis ist insofern wenig befriedigend, da mit diesem Ausdruck selbst für $q=1$ kein zielführendes Weiterkommen zu erkennen ist.

Den Spzialfall $q=1$ (d. h. das reine Abzählproblem) hat J. Stembridge [**24**] mit einer interessanten Methode gelöst, die sich von den bisher hier dargestellten Methoden wesentlich unterscheidet. Dagegen ist das q–Analogon bis heute noch ungelöst.

3. Das Abzählproblem

Also beschränken wir uns ab hier auf das Abzählproblem. Zunächst soll einmal kurz die weitere Strategie erläutert werden.

Die Anzahl der zyklisch–symmetrischen Plane Partitions, die in den Würfel B_n passen, soll mit $CS(n)$ bezeichnet werden. Man erhält sie durch Einsetzen von $q = 1$ in der Formel (41) des vorigen Kapitels. Bekanntlich (siehe Kapitel VII), kann $CS(n)$ als eine Determinante der Ordnung n interpretiert werden. Gleichermaßen kann man für $TS(n)$ eine Pfaffsche Form der Ordnung (ungefähr) n erhalten, die sich auf eine Determinante der Ordnung (ungefähr) $n/2$ reduzieren läßt. Wenn man die Determinanten für $TS(n)$ und $TS(n-1)$ in eine einzelne Determinante der Ordnung n einbettet, ist die Beziehung

$$2^{n-1} CS(n) = TS(n)\, TS(n-1) \tag{58}$$

erkennbar, wonach mit Induktion die Produktformel (52) folgt.

Die Methode, nach der hierbei vorgegangen wird, unterscheidet sich wesentlich von den in den vorigen Kapiteln. (Leider ist noch keine kombinatorische Erklärung von (58) bekannt.) Wir folgen der Beweislinie von J. Stembridge [**24**] und werden nicht mit Matrizen, sondern stattdessen mit den zugrundeliegenden Bilinearformen arbeiten. Dadurch werden Verwicklungen vermieden, die sich durch eine bestimmte Wahl der Basis ergeben könnten. Ein Nachteil ist aber, daß sich dabei das ganze nicht ohne weiteres in ein q–Analogon übertragen läßt. (Es gibt Probleme mit der linearen Abbildung $f \mapsto f^\star$ von Abschnitt 4, weil das entsprechende q–Analogon dieser linearen Abbildung für allgemeines q leider keine Involution ist.) Dennoch ist die Methode interessant und elegant; mit mehr Theorie werden komplizierte Berechnungen vermieden, welche z. B. bei den zyklisch–symmetrischen Plane Partitions im letzten Kapitel auftraten.

Den Überlegungen des vorigen Abschnittes folgend streben wir die Verwendung von Satz III.7 an, d. h. wir brauchen für die dortige Pfaffsche Form die entsprechenden Eintragungen.

Wir brauchen nur Pfade in Γ zu betrachten, die von $(-i, 0)$ nach $(-j, j)$ führen für beliebige $i \geq j \geq 0$. Die Menge dieser Pfade wollen wir mit $\mathcal{T}$ bezeichnen. Wir halten das wichtige Ergebnis des letzten Abschnittes fest:

Satz VIII.10. *Es gibt eine Bijektion zwischen total–symmetrischen Plane Partitions π und einander nicht berührenden Pfaden in $\mathcal{T}$. Dabei gilt $\pi \in B_n$ genau dann, wenn die Anfangspunkte der zugeordneten Pfade in $\{(-j,0) : 0 \le j < n\}$ liegen.* □

Für $j \ge 0$ definieren wir a_j als die Anzahl der Gitterpunktwege in $\mathcal{T}$ mit Anfangspunkt $(-j,0)$. Und für $j \ge i \ge 0$ definieren wir a_{ij} als die Anzahl der Paare (P,Q) einander nicht–berührender Gitterpunktwege, sodaß P den Anfangspunkt $(-j,0)$ und Q den Anfangspunkt $(-i,0)$ besitzt.

Lemma VIII.11. *Es gilt*

$$(a) \qquad a_j = 2^j.$$

$$(b) \qquad a_{ij} = \sum_{i \le r < j} \binom{i+j}{r}.$$

Beweis. Die erste Behauptung ist offensichtlich. Für die zweite stellen wir fest, daß die Anzahl der Pfade $P \in \mathcal{P}((-j,0),(-l,l))$ und $Q \in \mathcal{P}((-i,0),(-k,k))$ mit oder ohne Berührungspunkte, gleich $\binom{j}{l}\binom{i}{k}$ ist. Beispiel III.5 impliziert daher

$$a_{ij} = \sum_{0 \le k < l \le j} \binom{j}{l}\binom{i}{k} - \sum_{0 \le k < l \le i} \binom{j}{k}\binom{i}{l}.$$

Wenn man die Indextransformation $l \to j-l$ auf die erste und $l \to i-l$ auf die zweite Summe anwendet, erhält man

$$a_{ij} = \sum_{i \le k+l < j} \binom{i}{k}\binom{j}{l},$$

was sich mittels der Vandermonde–Summation zur Behauptung vereinfacht. □

Satz VIII.12. *Es gilt*

$$TS(2n+1) = \operatorname{pf}(a^\star_{ij})_{-1 \le i,j \le 2n},$$

wobei $a^\star_{ij}$ die schiefsymmetrische Matrix ist, die durch

$$a^\star_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j-1} + a_j & \textit{falls } -1 = i < j, \\ (-1)^{i+j-1} + a_{ij} & \textit{falls } \quad 0 \le i < j, \end{cases} \tag{59}$$

bestimmt ist.

Beweis. Nach Satz III.7.(b) und Lemma VIII.12 ist $\mathrm{pf}(a^{\star}_{ij})_{-1\le i,j\le 2n+1}$ die Anzahl der Folgen einander nicht berührender Pfade $(P_1, P_2, \dots)$ in $\mathcal{T}$ mit Anfangspunkten $(-i_1, 0), (-i_2, 0), \dots$, wobei $2n \ge i_1 > i_2 > \cdots \le 0$. (In der Tat sind die Reihen und Spalten der Matrix von Satz III.7 eine Permutation der hier verwendeten, aber man überprüft leicht, daß die spezielle hier gewählte Anordnung das Vorzeichen der Pfaffschen Form unverändert läßt.) Nun wendet man Satz VIII.10 an. $\square$

Satz VIII.13. *Es gilt*

$$TS(2n) = \mathrm{pf}(a^{\star\star}_{ij})_{-2\le i,j<2n},$$

wobei $a^{\star\star}_{ij}$ *die schiefsymmetrische Matrix ist, die durch*

$$a^{\star\star}_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j-1} & \textit{falls } -2 = i < j, \\ (-1)^{i+j-1} + a_j & \textit{falls } -1 = i < j, \\ (-1)^{i+j-1} + a_{ij} & \textit{falls } \quad 0 \le i < j, \end{cases} \tag{60}$$

bestimmt ist.

Beweis. Man gehe wie in Satz VIII.12 vor, aber verwende Satz III.7.(c). $\square$

Das folgende Ergebnis ist der spezielle Fall $q = 1$ von Satz VII.6.

Lemma VIII.14.

$$CS(n) = \det_{0\le i,j<n} \left[\delta_{ij} + \binom{i+j}{i}\right]. \quad \square$$

4. Schiefsymmetrische Bilinearformen

Sei $V_k = t^{-k}\mathbb{Q}[t]$ der Vektorraum, der durch Laurentmonome vom Grad $\ge -k$ aufgespannt wird. Im folgenden wollen wir zeigen, daß die Matrizen der Sätze VIII.12 bzw. VIII.13 als die Matrizen von gewissen einfachen Bilinearformen auf V_1 bzw. V_2 angesehen werden können.

Für ein beliebiges Laurentpolynom $f \in \mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ soll $[t^i]\, f(t)$ den Koeffizienten von t^i in $f(t)$ bezeichnen. Wir können eine schiefsymmetrische $\mathbb{Q}$–Bilinearform auf $\mathbb{Q}[t]$ definieren, indem wir

$$(f, g) := [t^{-1}]\, \frac{f(t)\, g(1/t) - f(1/t)\, g(t)}{1 + t}$$

für alle $f, g \in \mathbb{Q}[t]$ setzen. Man beachte, daß der Zähler des obigen Ausdrucks bei $t = -1$ verschwindet, sodaß der Quotient ein wohldefiniertes Laurentpolynom ist.

LEMMA VIII.15. *Für allle $j > i \geq 0$ und $f \in \mathbb{Q}[t]$ gilt*

(*a*) $(t^i, t^j) = (-1)^{i+j-1}$.

(*b*) $((1-t)^i, (1-t)^j) = -a_{ij} = \sum_{i \leq r < j} \binom{i+j}{r}$.

(*c*) $(f, 1) = f(-1) - f(0)$.

(*d*) $(f, t) = 2f(0) - f'(0) - f(-1)$.

BEWEIS.

$$(t^i, t^j) = [t^{-1}]\, \frac{t^{i-j} - t^{j-i}}{1+t} = [t^{j-i-1}] \sum_{k \geq 0} (-1)^k t^k - [t^{i-j-1}] \sum_{k \geq 0} (-1)^k t^k$$
$$= (-1)^{j-1-1} + 0 = (-1)^{i+j-1} \quad \text{(a)}$$

$$\begin{aligned} ((1-t)^i, (1-t)^j) &= [t^{-1}]\, \frac{(1-t)^i(1-1/t)^j - (1-1/t)^i(1-t)^j}{1+t} \\ &= [t^{-1}]\, ((-t)^{-j} - (-t)^{-i})\, (1-t)^{i+j} \sum_{k \geq 0} (-t)^k \\ &= (-[(-t)^{j-1}] + [(-t)^{i-1}]) \sum_{r,k \geq 0} \binom{i+j}{r} (-t)^{r+k} \\ &= (-[(-t)^{j-1}] + [(-t)^{i-1}]) \sum_{n \geq 0} (-t)^n \sum_{r=0}^{n} \binom{i+j}{r} = - \sum_{i \leq r < j} \binom{i+j}{r} \quad \text{(b)} \end{aligned}$$

$$(\sum_{n \geq 0} a_n t^n, 1) = [t^{-1}]\, (\sum_{n \geq 0} a_n t^n - \sum_{n \geq 0} a_n t^{-n}) \sum_{k \geq 0} (-1)^k t^k$$
$$= -[t^{-1}] \sum_{n,k \geq 0} a_n (-1)^k t^{k-n} = \sum_{k \geq 0} a_{k+1} (-1)^{k+1} \quad \text{(c)}$$

$$(\sum_{n \geq 0} a_n t^n, t) = [t^{-1}]\, (\sum_{n \geq 0} a_n t^{n-1} - \sum_{n \geq 0} a_n t^{1-n}) \sum_{k \geq 0} (-1)^k t^k$$
$$= a_0 - \sum_{k \geq 0} a_{k+2} (-1)^k = 2a_0 - a_1 - \sum_{k \geq 0} a_k (-1)^k \quad \text{(d)}$$

Damit ist dieses Lemma vollständig bewiesen. □

Nun sei mit $f^\star(t) := f(1-t)$ eine Involution auf $\mathbb{Q}[t]$ definiert. Es gibt eine eindeutig bestimmte schiefsymmetrische $\mathbb{Q}$–Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf V_1, sodaß

$$\langle f, g\rangle = (f,g) - (f^\star, g^\star) \tag{57}$$

$$\langle t^{-1}, f\rangle = f(-1) + f(2) = (f+f^\star)(-1) \tag{58}$$

für alle $f, g \in \mathbb{Q}[t]$ gilt. Aus Lemma VIII.15 folgt für $j > i \geq 0$ sofort

$$\langle t^i, t^j\rangle = (-1)^{i+j-1} + a_{ij}$$
$$\langle t^{-1}, t^i\rangle = (-1)^i + 2^j = (-1)^i + a_i.$$

Man sieht also, daß $[\langle t^i, t^j\rangle]_{-1\leq i,j\leq 2n}$ die Matrix von Satz VIII.12 ist, und wir erhalten

$$TS(2n+1) = \mathrm{pf}[\langle t^i, t^j\rangle]_{-1\leq i,j\leq 2n}. \tag{59}$$

Wir können aber sogar ein allgemeineres Resultat folgern:

Proposition VIII.16. *Es gilt*

$$TS(2n+1) = \mathrm{pf}[\langle u_i, u_j\rangle]_{-1\leq i,j\leq 2n}$$

für jede Folge $u_1, u_0, u_1, \ldots \in V_1$ *mit* u_i *monisch und* $\deg(u_i) = i$.

Beweis. Die u_i lassen sich folgenderart schreiben:

$$u_i = \sum_{-1\leq k\leq i} u_{i,k} t^k \qquad \text{mit} \quad u_{i,i} = 1 \quad \text{für} \quad i \geq -1.$$

Wenn wir

$$U = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ u_{0,-1} & 1 & & 0 & \\ u_{1,-1} & u_{1,0} & 1 & & \\ \ldots & & \ddots & \ddots & \\ u_{2n,-1} & u_{2n,0} & \ldots & u_{2n,2n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

setzen, ergibt sich aus der Beziehung $\mathrm{pf}(UAU^T) = \det(U)\,\mathrm{pf}(A)$ (siehe Korollar II.8), angewandt auf die Pfaffsche Form in (59), die Behauptung. $\square$

Nun sollen mit $\mathbb{Q}[t]^{\pm} = \{f \in \mathbb{Q}[t] : f(1-t) = \pm f(t)\}$ die Eigenräume zu ± 1 von * auf $\mathbb{Q}[t]$ bezeichnet werden. Man prüft leicht nach, daß $\mathbb{Q}[t]^+ = \mathbb{Q}[t^2 - t]$ und $\mathbb{Q}[t]^- = (t - 1/2)\,\mathbb{Q}[t^2 - t]$ gilt. Nun wird die Definition von * auf V_1 erweitert, indem man $(1/t)^\star = -1/t$ setzt. Die zugehörigen Eigenräume bezeichne man mit $V_1^{\pm}$; für diese gilt dann $V_1^+ = \mathbb{Q}[t]^+$ bzw. $V_1^- = \mathbb{Q}t^{-1} \oplus \mathbb{Q}[t]^-$.

Korollar VIII.17. *Unter der Annahme, daß* $u_0^+, u_1^+, u_2^+, \ldots$ *eine monische Basis für* V_1^+ *mit* $\deg(u_i^+) = 2i$, *bzw.* $u_0^-, u_1^-, u_2^-, \ldots$ *eine monische Basis für* V_1^- *mit* $\deg(u_i^-) = 2i - 1$ *ist, gilt*

$$TS(2n+1) = \det_{0 \le i,j \le n} [\langle u_i^-, u_j^+ \rangle].$$

Beweis. Die Folge $u_0^-, u_0^+, u_1^-, u_1^+, \ldots$ genügt den Beschränkungen von Proposition VIII.16, und mit Lemma II.12 ergibt sich sofort die Behauptung. □

Bemerkung. *Die Bilinearform* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *kann etwas vereinfacht werden kann, wenn sie auf* $V_1^- \oplus V_1^+$ *eingeschränkt wird. In der Tat ergibt sich aus (57) und (58)*

$$\langle f, g \rangle = 2(f, g), \qquad \langle t^{-1}, g \rangle = 2g(-1) \tag{60}$$

für alle $f \in \mathbb{Q}[t]^-$ *und* $g \in \mathbb{Q}[t]^+$.

Analoges soll nun auch bezüglich $TS(2n)$ getan werden. Dazu erweitern wir die Definition der Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ von V_1 auf V_2, indem wir

$$\langle t^{-2}, at^{-1} + f(t) \rangle = a - f(-1)$$

für alle $f \in \mathbb{Q}[t]$ und $a \in \mathbb{Q}$ definieren. Mit Hilfe von Lemma VIII.15 identifiziert man $[\langle t^i, t^j \rangle]_{-2 \le i,j < 2n}$ als die Matrix von Satz VIII.13, und wir erhalten

$$TS(2n) = \operatorname{pf}[\langle t^i, t^j \rangle]_{-2 \le i,j < 2n}. \tag{61}$$

Es wird sich in der Folge als günstig herausstellen, die ersten zwei Reihen und Spalten dieser Pfaffschen Form zu eliminieren. Um dieses Ziel zu erreichen, definieren wir eine lineare Abbildung $\psi : V_2 \to V_2$ mit

$$\psi(at^{-2} + bt^{-1} + f(t)) = at^{-2} + (b + -f(-1))t^{-1} + f(t)$$

für alle $f \in \mathbb{Q}[t]^-$ und $a, b \in \mathbb{Q}$. Durch das Ersetzen von $\langle t^i, t^j \rangle$ durch $\langle \psi(t^i), \psi(t^j) \rangle$ wird die Pfaffsche Form nicht verändert, da die Matrix von ψ bezüglich der geordneten Basis $t^{-2}, t^{-1}, t^0, \ldots$ offensichtlich Dreiecksgestalt mit Einsen in der Diagonale besitzt. Jetzt ist aber $\langle \psi(t^{-2}), \psi(t^{-1}) \rangle = 1$ und $\langle \psi(t^{-2}), \psi(f) \rangle = 0$ für alle $f \in \mathbb{Q}[t]$, und aus Beispiel II.10 folgt

$$\operatorname{pf}[\langle t^i, t^j \rangle]_{-2 \le i,j < 2n} = \operatorname{pf}[\langle \psi(t^i), \psi(t^j) \rangle]_{0 \le i,j < 2n}. \tag{62}$$

Dies können wir auch eine Spur eleganter formulieren, indem wir

$$\langle f, g \rangle' = \langle f + f(-1)\, t^{-1}, g + g(-1)\, t^{-1} \rangle = \langle f, g \rangle + (fg^\star - f^\star g)(-1)$$

für alle $f, g \in \mathbb{Q}[t]$ definieren.

PROPOSITION VIII.18. *Es gilt*

$$TS(2n) = \mathrm{pf}[\langle u_i, u_j \rangle']_{0 \le i,j < 2n}$$

für jede Folge $u_0, u_1, \ldots \in \mathbb{Q}[t]$ *mit* u_i *monisch und* $\deg(u_i) = i$.

BEWEIS. Das folgt direkt aus (61) und (62). □

Wie vorhin soll die erhaltene Pfaffsche Form reduziert werden. In Anbetracht von (57) sieht man leicht, daß $\langle f^\star, g^\star \rangle' = -\langle f, g \rangle'$ für alle $f, g \in \mathbb{Q}[t]$ gilt, und wieder ergibt sich $\langle f, g \rangle' = 0$, falls $f, g \in \mathbb{Q}[t]^+$ oder $f, g \in \mathbb{Q}[t]^-$.

KOROLLAR VIII.19. *Unter der Annahme, daß* $u_0^+, u_1^+, u_2^+, \ldots$ *eine monische Basis für* $\mathbb{Q}[t]^+$ *mit* $\deg(u_i^+) = 2i$, *bzw.* $u_0^-, u_1^-, u_2^-, \ldots$ *eine monische Basis für* $\mathbb{Q}[t]^-$ *mit* $\deg(u_i^-) = 2i + 1$ *ist, gilt*

$$TS(2n) = \det_{0 \le i,j < n} [\langle u_i^+, u_j^- \rangle'].$$

BEWEIS. Die Folge $u_0^+, u_0^-, u_1^+, u_1^-, \ldots$ genügt den Beschränkungen von Proposition VIII.18, und mit Lemma II.12 ergibt sich sofort die Behauptung. □

BEMERKUNG. *Die Bilinearform* $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ *kann etwas vereinfacht werden, wenn sie auf* $V_1^+ \oplus V_1^-$ *eingeschränkt wird. In der Tat ergibt sich aus (57)*

$$\langle f, g \rangle' = 2(f, g) - 2f(-1)\, g(-1) \tag{63}$$

für alle $f \in \mathbb{Q}[t]^+$ *und* $g \in \mathbb{Q}[t]^-$.

5. Symmetrische Bilinearformen

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß die in den Korollaren VIII.17 und VIII.19 auftretenden schiefsymmetrischen Bilinearformen mit geeigneten linearen Transformationen durch gewisse *symmetrische* Bilinearformen auf $\mathbb{Q}[t]^+$ bzw. $\mathbb{Q}[t]^-$ ersetzt werden können.

Wir führen wieder die für die Behandlung von $TS(2n+1)$ bzw. $TS(2n)$ korrespondierenden Fälle getrennt durch.

Für den ersten Fall definieren wir zu einem gegebenen linearen Funktional $\varepsilon : \mathbb{Q}[t] \to \mathbb{Q}$ ein Paar linearer Abbildungen $\phi_1 : V_1^+ \to V_1^-$ (von ε abhängig) und $\phi_2 : V_1^+ \to V_1^+$ durch

$$\phi_1(f)(t) = \frac{f(t) - f(1/2)}{t - 1/2} + \varepsilon(f)\, t^{-1}$$

$$\phi_2(f)(t) = \frac{(t+1)\,(t-2)}{t\,(t-1)}(f(t) - f(0)) + f(0)$$

für alle $f \in \mathbb{Q}[t]^+ = V_1^+$. Man beachte, daß in solchen Fällen für $f \in \mathbb{Q}[t]^+$, $f(0) = 0$ folgt, daß $f(1) = 0$ und daher gilt $t(t-1)|f(t)$. (Also ist ϕ_2 wohldefiniert.) Man sieht leicht, daß $\phi_2(f)$ den Grad und den führenden Koeffizienten von f erhält.

Proposition VIII.20. *Unter der Annahme, daß $u_0^+, u_1^+, u_2^+, \ldots$ eine monische Basis für V_1^+ mit $\deg(u_i^+) = 2i$, bzw. $u_0^-, u_1^-, u_2^-, \ldots$ eine monische Basis für V_1^- mit $\deg(u_i^-) = 2i - 1$ ist, gilt*

$$\varepsilon(1) \cdot TS(2n+1) = \det_{0 \le i,j \le n} [\langle \phi_1(u_i^+), \phi_2(u_j^-)\rangle'].$$

Beweis. Die Matrix ϕ_2 hat bezüglich der Basis u_i^+ Dreiecksgestalt mit Einsen in der Diagonale. Die Matrix ϕ_1 hingegen hat bezüglich dem Basenpaar u_i^+, u_i^- auch Dreiecksgestalt mit Einsen in der Diagonale, jedoch bis auf die $(0,0)$–Eintragung, die $\varepsilon(1)$ ist. Darum impliziert Korollar VIII.17 die Proposition. □

Lemma VIII.21. *ε kann derart gewählt werden, daß $\varepsilon(1) = 2$ und*

$$\langle \phi_1(f), \phi_2(g)\rangle = 4\,[1]\, f(t)\, g(1/t)$$

für alle $f, g \in \mathbb{Q}[t]^+$ gilt.

Beweis. Zunächst nehmen wir an, $g(t) = 1$, sodaß $\phi_2(g) = 1$. Aus (60) ergibt sich

$$\langle \phi_1(f), \phi_2(g)\rangle = \left\langle \frac{f(t) - f(1/2)}{t - 1/2} + \varepsilon(f)\, t^{-1}\,, 1 \right\rangle = 2\left(\frac{f(t) - f(1/2)}{t - 1/2}\,, 1 \right) + 2\varepsilon(f)$$

und $4\,[1]\, f(t)\, g(1/t) = 4f(0)$. Um $\langle \phi_1(f), \phi_2(g)\rangle = 4\,[1]\, f(t)\, g(1/t)$ zu erfüllen, müssen wir

$$\varepsilon(f) := 2f(0) - \left(\frac{f(t) - f(1/2)}{t - 1/2}\,, 1 \right)$$

definieren. Offensichtlich gilt unter diesen Umständen auch $\varepsilon(1) = 2$.

Für den Rest des Beweises, genügt es, unsere Aufmerksamkeit auf jene g zu lenken, für die $g(0) = g(1) = 0$ gilt, sodaß $\phi_2(g)(t) = (t+1)\,(t-2)\,g(t)/t\,(t-1)$, weil ja $g(t) \in V_1^+ = \mathbb{Q}[t^2 - t]$. In diesem Fall folgt aus (60)

$$\langle t^{-1}, \phi_2(g)\rangle = 2\phi_2(g)(-1) = 0$$

und für solche g ist deswegen $\langle \phi_1(f), \phi_2(g)\rangle$ unabhängig von ε.

Im speziellen Fall $f(t) = 1$ erhalten wir $\phi_1(f)(t) = \varepsilon(1)t^{-1}$ und $\langle \phi_1(f), \phi_2(g)\rangle = 0$. Gleichfalls ergibt sich $[1]\,f(t)\,g(1/t) = [1]\,g(1/t) = g(0) = 0$, wie erforderlich.

Aufgrund der Linearität genügt es nun den Fall $f(1/2) = 0$ zu behandeln, weil ja $f(t) \in V_1^- = (t - 1/2)\,\mathbb{Q}[t^2 - t]$. Wegen $\phi_1(f)(t) = f(t)/(t - 1/2)$, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\langle \phi_1(f), \phi_2(g)\rangle &= 2\left(\frac{f(t)}{t-1/2}, \frac{(t+1)\,(t-2)}{t\,(t-1)}\,g(t)\right) \\
&= 2\,[t^{-1}]\,\frac{1}{1+t}\left(\frac{(1/t+1)\,(1/t-2)\,f(t)\,g(1/t)}{(t-1/2)\,(1/t)\,(1/t-1)} - \frac{(t+1)\,(t-2)\,f(1/t)\,g(t)}{(1/t-1/2)\,t\,(t-1)}\right) \\
&= 4\,[t^{-1}]\left(\frac{f(t)\,g(1/t)}{t-1} + \frac{f(1/t)\,g(t)}{t-1}\right) = 4\,[1]\left(\frac{t\,f(t)\,g(1/t)}{t-1} + \frac{t\,f(1/t)\,g(t)}{t-1}\right) \\
&= 4\,[1]\left(\frac{t}{t-1}f(t)\,g(1/t) + \frac{1/t}{1/t-1}f(t)\,g(1/t)\right) = 4\,[1]\,f(t)\,g(1/t). \qquad (64)
\end{aligned}$$

Alle Ausdrücke, die in den obigen Berechnungen auftreten, sind Laurentpolynome (weil $g(1) = 0$), daher können wir frei manipulieren, ohne uns Sorgen bezüglich Konvergenz machen zu müssen. Z. B. können wir die Substitution $t \mapsto t^{-1}$ in $t\,f(1/t)\,g(t)/(t-1)$ (vgl. die fünfte Gleichung) durchführen, ohne daß der konstante Term davon betroffen wird. $\square$

Aus Proposition VIII.20 und Lemma VIII.21 ergibt sich sofort ein Korollar:

KOROLLAR VIII.22. *Falls* $u_0, u_1, u_2 \ldots \in \mathbb{Q}[t]^+$ *monisch sind mit* $\deg(u_i) = 2i$, *dann gilt*

$$TS(2n+1) = 2^{2n+1} \det_{0 \le i,j \le n}(b_{ij}),$$

wobei $b_{ij} = [1]\,u_i(t)\,u_j(t^{-1})$. $\square$

Für die Untersuchung von $TS(2n)$ ist es nötig, ein anderes Paar linearer Abbildungen zu definieren, und zwar $\psi_1 : \mathbb{Q}[t]^- \to \mathbb{Q}[t]^+$ und $\psi_2 : \mathbb{Q}[t]^- \to \mathbb{Q}[t]^-$ mit

$$\psi_1(f)(t) = \frac{f(t)}{t-1/2}$$

$$\psi_2(f)(t) = \frac{(t+1)\,(t-2)}{t\,(t-1)}(f(t) + 2f(0)\,(t-1/2)) - 2f(0)\,(t-1/2)$$

für alle $f \in \mathbb{Q}[t]^-$. Analog zum vorigen Fall gilt:

Proposition VIII.23. *Unter der Annahme, daß* $u_0^+, u_1^+, u_2^+, \ldots$ *eine monische Basis für* $\mathbb{Q}[t]^+$ *mit* $\deg(u_i^+) = 2i$, *bzw.* $u_0^-, u_1^-, u_2^-, \ldots$ *eine monische Basis für* $\mathbb{Q}[t]^-$ *mit* $\deg(u_i^-) = 2i+1$ *ist, gilt*

$$TS(2n) = \det_{0 \le i,j < n}[\langle \psi_1(u_i^-), \psi_2(u_j^-)\rangle'].$$

Beweis. Die Matrizen ψ_1 und ψ_2 haben bezüglich der Basen $u_i^\pm$ Dreiecksgestalt mit Einsen in der Diagonale. Darum impliziert Korollar VIII.19 die Proposition. □

Lemma VIII.24. *Für alle* $f, g \in \mathbb{Q}[t]^-$ *gilt*

$$\langle \psi_1(f), \psi_2(g)\rangle' = 4\,[1]\,f(t)\,g(1/t).$$

Beweis. Aufgrund der Linearität brauchen wir nur zwei Fälle betrachten, nämlich $g(t) = t - 1/2$ und $g(0) = g(1) = 0$. Im ersten Fall gilt $\phi_2(g)(t) = t - 1/2$, daher implizieren (63) und Lemma VIII.15(c),(d)

$$\begin{aligned}\langle \psi_1(f), \psi_2(g)\rangle' &= 2\,(\psi_1(f), t-1/2) + 3\psi_1(f)(-1)\\ &= 5\psi_1(f)(0) - 2\psi_1(f)'(0) = 4f'(0) - 2f(0),\end{aligned}$$

wobei $4\,[1]\,f(t)\,g(1/t) = 4\,[1]\,(1/t - 1/2)\,f(t) = 4f'(0) - 2f(0)$, wie erforderlich.

Im zweiten Fall haben wir $\psi_2(g)(t) = (t+1)\,(t-2)\,g(t)/t\,(t-1)$, daher ist $\psi_2(g)(-1) = 0$, und wir erhalten

$$\langle \psi_1(f), \psi_2(g)\rangle' = 2\left(\frac{f(t)}{t-1/2}, \frac{(t+1)\,(t-2)}{t\,(t-1)}\,g(t)\right).$$

Obwohl die Annahmen über f und g geringfügig anders waren, ist dieser Ausdruck identisch zu (64). Mit den gleichen Überlegungen wie im Beweis von Lemma VIII.21 folgt, daß $\langle \psi_1(f), \psi_2(g)\rangle' = 4\,[1]\,f(t)\,g(1/t)$. □

Nun implizieren Proposition VIII.23 und Lemma VIII.24 das folgende Korollar:

KOROLLAR VIII.25. *Falls* $u_0, u_1, u_2 \ldots \in \mathbb{Q}[t]^-$ *monisch sind mit* $\deg(u_i) = 2i+1$, *dann gilt*

$$TS(2n) = 2^{2n} \det_{0 \le i,j < n}(c_{ij}),$$

wobei $c_{ij} = [1]\, u_i(t)\, u_j(t^{-1})$. □

6. Die letzten Schritte

Jetzt soll auch $CS(n)$ analysiert werden, damit wir, wie in der Einleitung von Abschnitt 3 angekündigt, durch Vergleich von $CS(n)$ mit $TS(n)\, TS(n-1)$ zum Ziel gelangen. Dafür definieren wir eine symmetrische $\mathbb{Q}$–Bilinearform auf $\mathbb{Q}[t]$, indem wir

$$\{f, g\} := [1]\, (f(t)\, g(1/t) + f(1-t)\, g(1-1/t))$$

für alle $f, g \in \mathbb{Q}[t]$ setzen. Die Bedeutung dieser Bilinearform liegt in der Gegebenheit

$$\{t^i, t^j\} = [1]\, (t^{i-j} + (1-t)^i (1-1/t)^j) = \delta_{i,j} + \binom{i+j}{j},$$

denn mit Lemma VIII.14 erhalten wir

$$CS(n) = \det_{0 \le i,j < n}[\{t^i, t^j\}].$$

Allgemeiner gilt:

PROPOSITION VIII.26. *Sei* $u_0, u_1, u_2, \ldots$ *eine monische Basis für* $\mathbb{Q}[t]$, *wobei* $\deg(u_i) = i$, *dann gilt*

$$CS(n) = \det_{0 \le i,j < n}[\{u_i, u_j\}]. \quad \square$$

Jetzt können wir den für unsere Beweisstrategie von VIII.2 entscheidenden Satz angehen.

SATZ VIII.27. *Für* $n \ge 1$ *gilt*

$$2^{n-1}\, CS(n) = TS(n)\, TS(n-1).$$

BEWEIS. Mit $f \in \mathbb{Q}[t]^+$ und $g \in \mathbb{Q}[t]^-$ gilt $f(1-t) = f(t)$ und $g(1-t) = -g(t)$, daher ist in diesen Fällen $\{f, g\} = 0$.

Deshalb wählen wir monische Basen $u_0^\pm, u_1^\pm, \dots$ für $\mathbb{Q}[t]^\pm$ mit $\deg(u_i^+) = 2i$ und $\deg(u_i^-) = 2i+1$, sodaß die Folge $u_0^+, u_0^-, u_1^+, u_1^-, \dots$ den Beschränkungen von Proposition VIII.26 genügt. (Eine Möglichkeit wäre die Wahl $u_i^- = (t-1/2)\,u_i^+ = (t-1/2)^{2i+1}$.) Bezüglich dieser Basis von $\mathbb{Q}[t]$ hat die Matrix der Bilinearform $\{\cdot,\cdot\}$ Nullen in den Positionen (i,j) mit $i+j$ ungerade. Somit erhalten wir nach angemessenen Permutationen der Reihen und Spalten eine Matrix mit diagonaler Blockgestalt, und wir schließen

$$CS(2n) = \det_{0\le i,j<n}[\{u_i^+, u_j^+\}] \cdot \det_{0\le i,j<n}[\{u_i^-, u_j^-\}], \tag{65}$$

$$CS(2n+1) = \det_{0\le i,j\le n}[\{u_i^+, u_j^+\}] \cdot \det_{0\le i,j<n}[\{u_i^-, u_j^-\}]. \tag{66}$$

Wie dem auch sei, es ist leicht zu sehen, daß $\{f,g\} = 2\,[1]\,f(t)\,g(1/t)$ für $f,g \in \mathbb{Q}[t]^+$ oder $f,g \in \mathbb{Q}[t]^-$ gilt, daher implizieren die Korollare VIII.22 und VIII.25

$$TS(2n) = 2^n \det_{0\le i,j<n}[\{u_i^-, u_j^-\}],$$
$$TS(2n+1) = 2^n \det_{0\le i,j\le n}[\{u_i^+, u_j^+\}].$$

Schließlich ergeben (65) und (66)

$$CS(2n) = TS(2n-1)\,TS(2n),$$
$$CS(2n+1) = TS(2n+1)\,TS(2n),$$

womit der Satz bewiesen ist. $\square$

Beweis von Satz VIII.2. Wir gehen mit Induktion vor, wobei die Induktionsbasis trivial ist. Es empfiehlt sich, mit der Hyperfaktoriellen–Notation zu arbeiten. Das Produkt in (52) schreibt sich dann

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{(2i)!\,(n+2i+1)!}{(3i+1)!\,(n+i)!} = \frac{H_2(2n)\,H_2(3n+1)\,H(n)}{H_3(3n+1)\,H_2(n+1)\,H(2n)} = \frac{H_6(3n+5)\,H_2(n)}{F_6(3n-2)\,H_2(2n+1)}.$$

Analog gilt, wenn man z. B. (49) verwendet,

$$CS(n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{(3i-1)!\,(i-1)!}{(3i-2)\,(2i-1)!\,(2i-2)!} = \frac{H_3(3n+2)\,H(n)}{F_3(3n-2)\,H(2n)}.$$

Angenommen, die Aussage stimmt für $n-1$. Dann haben wir nach Satz VIII.27 für $n \geq 2$

$$TS(n) = \frac{2^{n-1}\, CS(n)}{TS(n-1)} = \frac{2^{n-1}\, H_3(3n+2)\, H(n)\, F_6(3n-5)\, H_2(2n-1)}{F_3(3n-2)\, H(2n)\, H_6(3n+2)\, H_2(n-1)}$$
$$= \frac{2^{n-1}\, H_6(3n+5)\, H_2(n)\, F(n-1)}{F_6(3n-2)\, H_2(2n+1)\, F_2(2n-2)} = \frac{H_6(3n+5)\, H_2(n)}{F_6(3n-2)\, H_2(2n+1)},$$

und wir sind am Ziel. □

Literaturverzeichnis

[1] G. E. Andrews, *The Theory of Partitions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 2, Addison–Wesley, Reading, 1976.

[2] G. E. Andrews, *Plane Partitions (I): The MacMahon conjecture*, Studies in Foundations and Combinatorics, Adv. in Math. Suppl. Stud. Vol. 1, (1978), 131–151.

[3] G. E. Andrews, *Plane Partitions (III): The weak Macdonald conjecture*, Invent. Math. **53** (1979), 193–225.

[4] B. Gordon, *Notes on Plane Partitions, V*, J. Combin. Theory Ser. A **11** (1971), 157–168.

[5] G. Gasper, M. Rahman, *Basic hypergeometric series*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 35, Cambridge University Press, Cambridge 1990.

[6] I. M. Gessel, G. Viennot, *Determinants, paths, and plane partitions*, preprint.

[7] S. Karlin, G. McGregor, *Coincidence probabilities*, Pacific J. Math. **9** (1959), 1141–1164.

[8] S. Karlin, *Coincident probabilities and applications in combinatorics*, J. Appl. Probab. Special Vol. **25A**, (1988) 185–200.

[9] C. Krattenthaler, *Generating functions for plane partitions of a given shape*, Manuscripta Math. **69** (1990), 173–202.

[10] C. Krattenthaler, *The major counting of nonintersecting lattice paths and generating functions for tableaux*, preprint.

[11] C. Krattenthaler, 1993, private communication.

[12] G. Kuperberg, *Symmetries of plane partitions and the permanent-determinant method*, preprint.

[13] B. Lindström, *On the vector representations of induced matroids*, Bull. London Math. Soc. **5** (1973), 85–90.

[14] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1979.

[15] P. A. MacMahon, *Combinatory Analysis*, Vol. II, Cambridge, 1918. Reprinted by Chelsea, New York, 1960.

[16] W. H. Mills, D. P. Robbins and H. Rumsey, *Proof of the Macdonald conjecture*, Invent. Math. **66** (1982), 73–87.

[17] S. Okada, *On the generating functions for certain classes of plane partitions*, J. Combin. Theory Ser. A **51** (1989), 1–23.

[18] D. P. Robbins *The Story of 1, 2, 7, 42, 429, 7436, ...* , Math. Intelligencer **13** (1991), no. 2, 12–19.

[19] B. E. Sagan, *The Symmetric Group: Representations, Combinatory Algorithms, and Symmetric Functions*, Wadsworth & Brooks/Cole, Belmont, 1991.

[20] R. P. Stanley, *Theory and application of plane partitions, Parts 1 and 2*, Stud. Appl. Math. **50** (1971), 167–188, 259–279.

[21] R. P. Stanley, *Symmetries of plane partitions*, J. Combin. Theory Ser. A **43** (1986), 103–113.

[22] R. P. Stanley, *A baker's dozen of conjectures concerning plane partitions*, "Combinatorie énumérative," Lecture Notes in Mathematics Vol. 1234, pp. 285–293, Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo, 1986.

[23] J. R. Stembridge, *Nonintersecting paths, pfaffians and plane partitions*, Adv. in Math. **83** (1990), 96–131.

[24] J. R. Stembridge, *The Enumeration of Totally Symmetric Plane Partitions*, preprint.

[25] J. R. Stembridge, *Some Hidden Relations Involving the Ten Symmetry Classes of Plane Partitions*, preprint.

[26] H. S. Wilf, D. Zeilberger, *An algorithmic proof theory for hypergeometric (ordinary and "q") multisum/integral identities*, Invent. Math. **108** (1992), 575–633.