Patience legen und sortieren: Von einem (mathematischen) “Zaubertrick” bis zur Fieldsmedaille

Christian Krattenthaler

Universität Wien

Patience legen

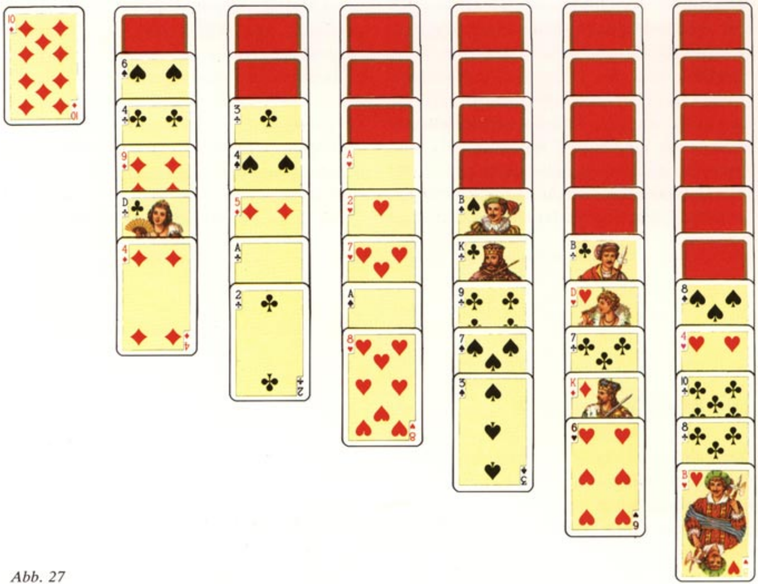
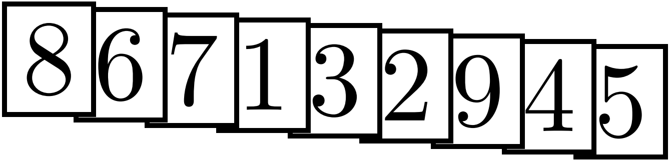


Abb. 27

Sortieren durch Patience legen

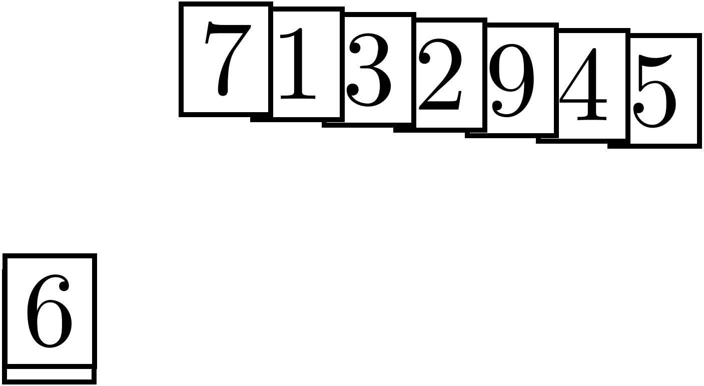


Sortieren durch Patience legen

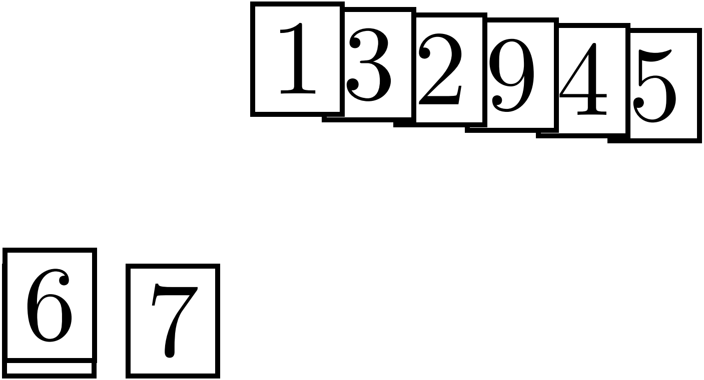
6 7 1 3 2 9 4 5

8

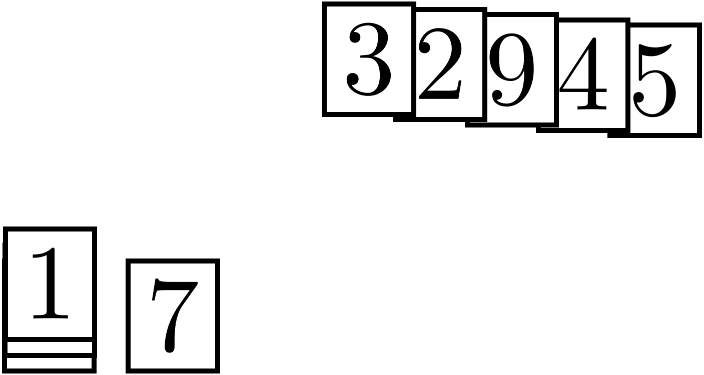
Sortieren durch Patience legen



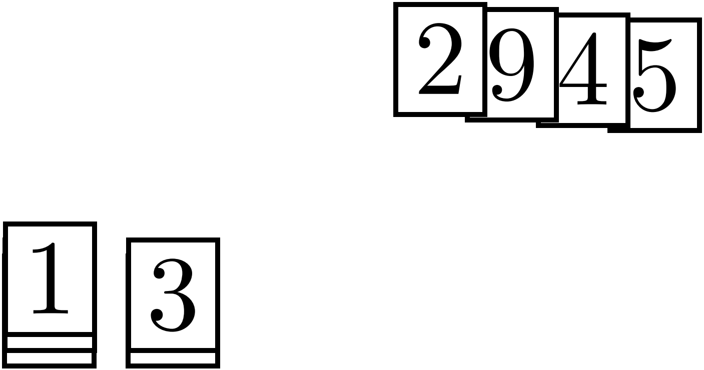
Sortieren durch Patience legen



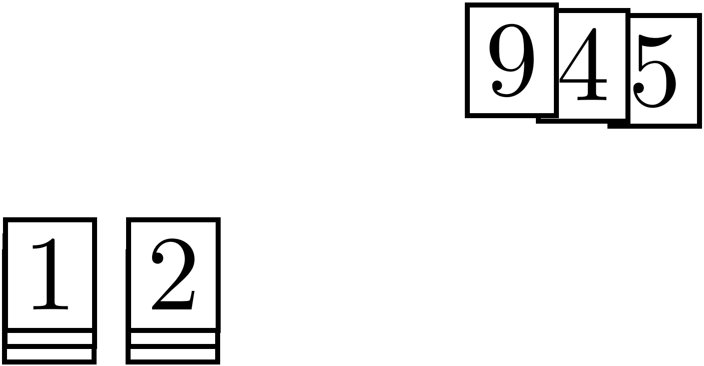
Sortieren durch Patience legen



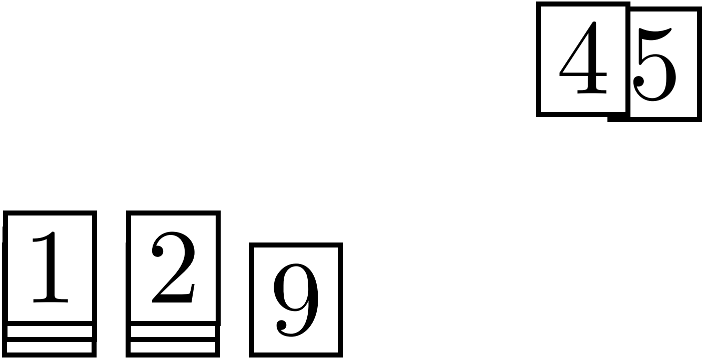
Sortieren durch Patience legen



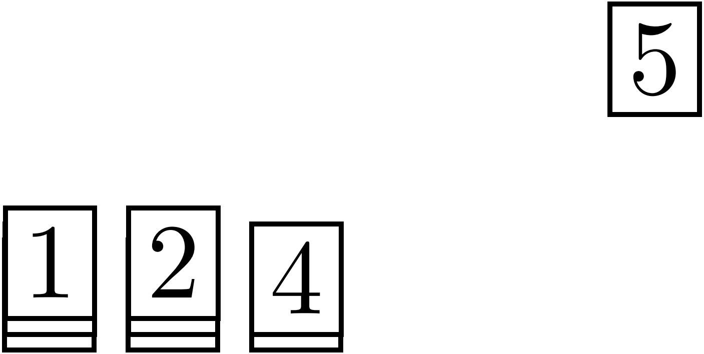
Sortieren durch Patience legen



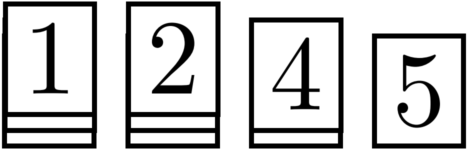
Sortieren durch Patience legen



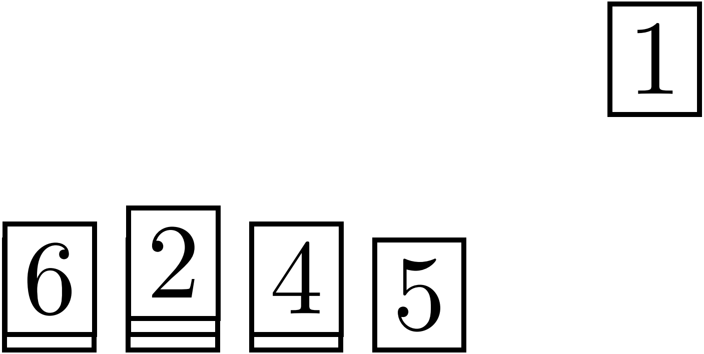
Sortieren durch Patience legen



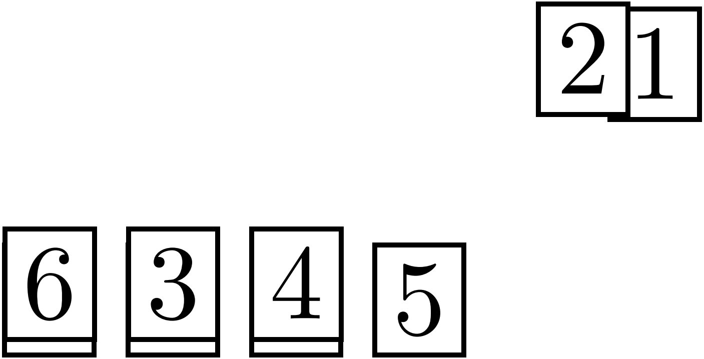
Sortieren durch Patience legen



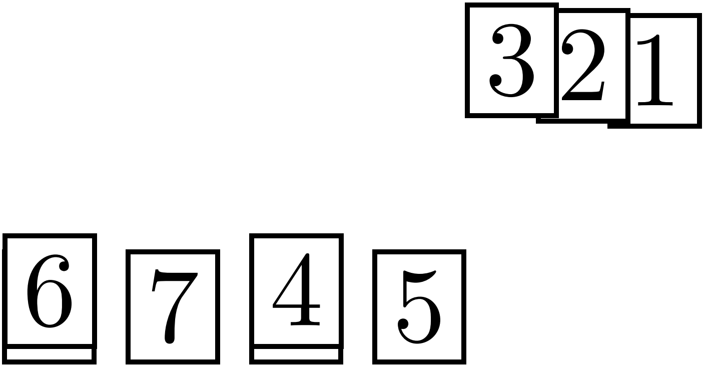
Sortieren durch Patience legen



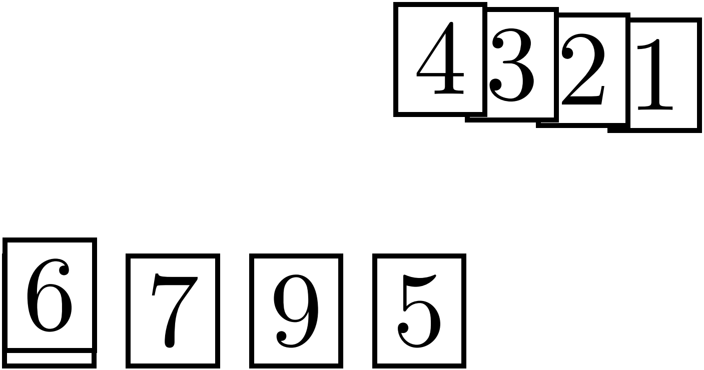
Sortieren durch Patience legen



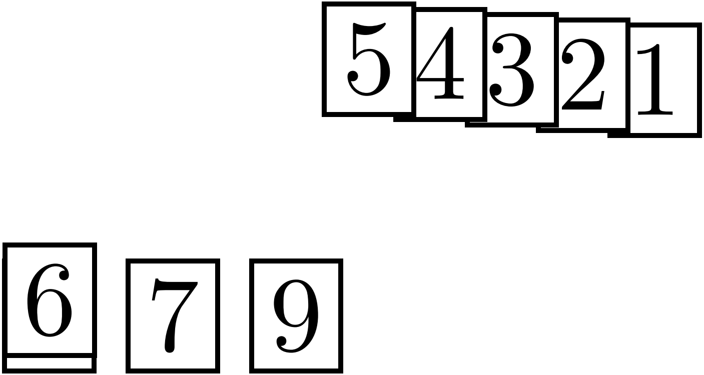
Sortieren durch Patience legen



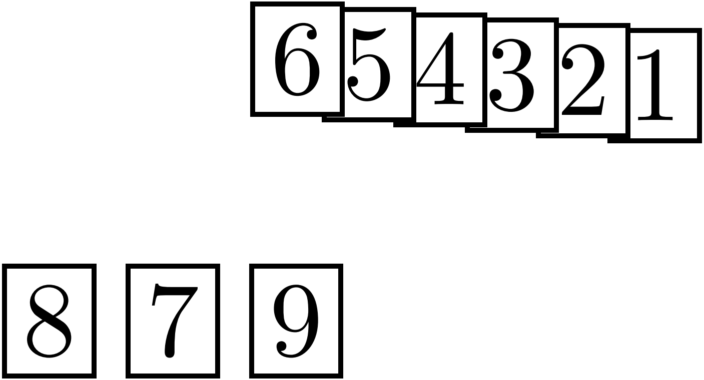
Sortieren durch Patience legen



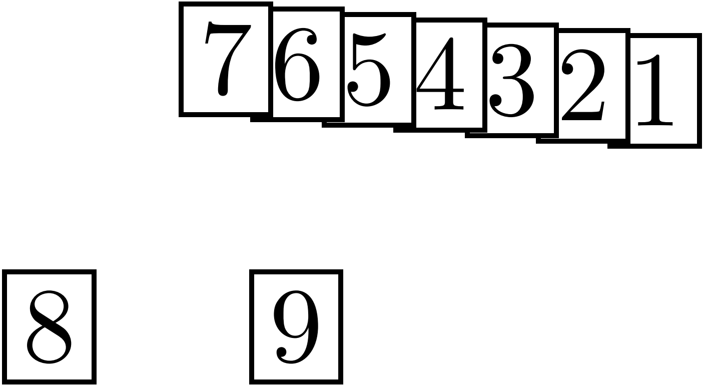
Sortieren durch Patience legen



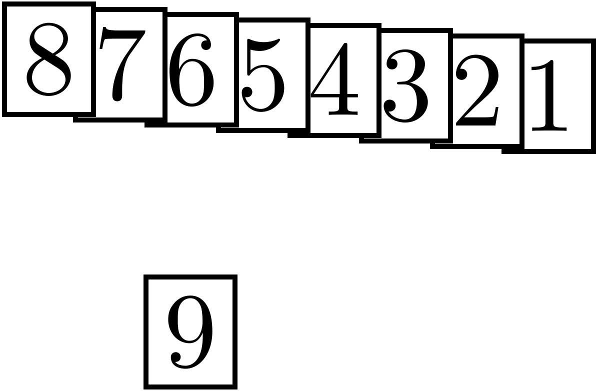
Sortieren durch Patience legen



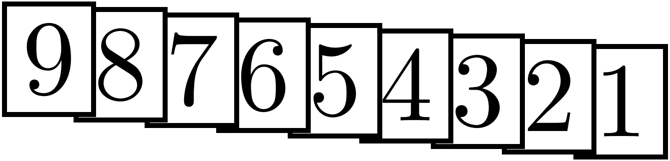
Sortieren durch Patience legen



Sortieren durch Patience legen



Sortieren durch Patience legen



Sortieren durch Patience legen

Der ursprüngliche Stapel:

8 6 7 1 3 2 9 4 5

Sortieren durch Patience legen

Der ursprüngliche Stapel:

8 6 7 1 3 2 9 4 5

Das Ergebnis des Patience-Legens:

1 2 4 5

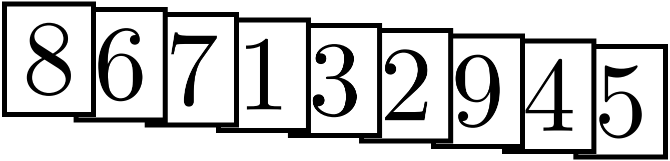
Wieviele Stöße sind beim Patience-Legen entstanden?

Wieviele Stöße sind beim Patience-Legen entstanden?

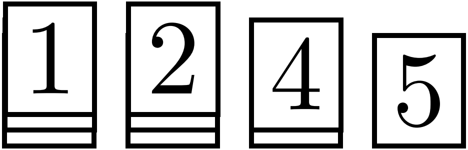
Es ist leicht zu sehen, daß die Anzahl der Stöße mindestens so groß sein muß, wie die maximale Länge einer aufsteigenden Teilfolge in der ursprünglichen Zahlenanordnung.

Analyse des Sortiervorgangs

Der ursprüngliche Stapel:

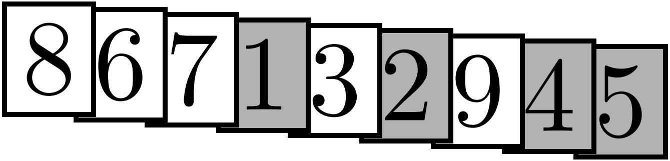


Das Ergebnis des Patience-Legens:

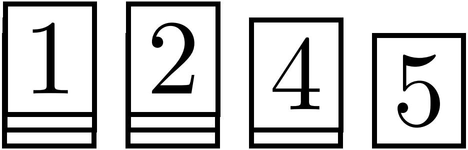


Analyse des Sortiervorgangs

Der ursprüngliche Stapel:



Das Ergebnis des Patience-Legens:



Wieviele Stöße sind beim Patience-Legen entstanden?

Es ist leicht zu sehen, daß die Anzahl der Stöße mindestens so groß sein muß, wie die maximale Länge einer aufsteigenden Teilfolge in der ursprünglichen Zahlenanordnung.

Wieviele Stöße sind beim Patience-Legen entstanden?

Es ist leicht zu sehen, daß die Anzahl der Stöße mindestens so groß sein muß, wie die maximale Länge einer aufsteigenden Teilfolge in der ursprünglichen Zahlenanordnung.

Lemma

Die Anzahl der Stöße ist genau gleich der maximalen Länge einer aufsteigenden Teilfolge in der ursprünglichen Zahlenanordnung.

Analyse des Sortiervorgangs

(Stanisław Ulam) 

Ulams Problem (1961)

Gegeben eine zufällige Anordnung von $1, 2, \ldots, n$*, wie groß ist die maximalen Länge einer aufsteigenden Teilfolge darin im Durchschnitt?*

Das verfeinerte Sortieren: der Robinson–Schensted Algorithmus

Das verfeinerte Sortieren: der Robinson–Schensted Algorithmus

Idee: Setze das „Patience-Sortieren“ rekursiv fort.

$8, 6, 7, 1, 3, 2, 9, 4, 5$

Das verfeinerte Sortieren: der Robinson–Schensted Algorithmus

Idee: Setze das „Patience-Sortieren“ rekursiv fort.

$6, 7, 1, 3, 2, 9, 4, 5$

8

Das verfeinerte Sortieren: der Robinson–Schensted Algorithmus

Idee: Setze das „Patience-Sortieren“ rekursiv fort.

$$7, 1, 3, 2, 9, 4, 5$$

6
8

Das verfeinerte Sortieren: der Robinson–Schensted Algorithmus

Idee: Setze das „Patience-Sortieren“ rekursiv fort.

$$1, 3, 2, 9, 4, 5$$

6	7
8	

Das verfeinerte Sortieren: der Robinson–Schensted Algorithmus

Idee: Setze das „Patience-Sortieren" rekursiv fort.

$$3, 2, 9, 4, 5$$

1	7
6	
8	

Das verfeinerte Sortieren: der Robinson–Schensted Algorithmus

Idee: Setze das „Patience-Sortieren“ rekursiv fort.

$$2, 9, 4, 5$$

1 3
6 7
8

Das verfeinerte Sortieren: der Robinson–Schensted Algorithmus

Idee: Setze das „Patience-Sortieren“ rekursiv fort.

$$9, 4, 5$$

1	2
3	7
6	
8	

Das verfeinerte Sortieren: der Robinson–Schensted Algorithmus

Idee: Setze das „Patience-Sortieren" rekursiv fort.

$4, 5$

1	2	9
3	7	
6		
8		

Das verfeinerte Sortieren: der Robinson–Schensted Algorithmus

Idee: Setze das „Patience-Sortieren“ rekursiv fort.

5

1	2	4
3	7	9
6		
8		

Das verfeinerte Sortieren: der Robinson–Schensted Algorithmus

Idee: Setze das „Patience-Sortieren“ rekursiv fort.

1	2	4	5
3	7	9	
6			
8			

Das verfeinerte Sortieren: der Robinson–Schensted Algorithmus

Wir erhalten eine Abbildung:

Anordnung von $\{1, 2, \dots, n\}$ $\longrightarrow$ Standardtableaux mit n Zahlen

Das verfeinerte Sortieren: der Robinson–Schensted Algorithmus

Wir erhalten eine Abbildung:

$$\text{Anordnung von } \{1, 2, \ldots, n\} \quad \longrightarrow \quad \text{Standardtableaux mit } n \text{ Zahlen}$$

Diese Abbildung heißt der Robinson–Schensted Algorithmus.

Gilbert de Beauregard Robinson (1938)

Craige Eugene Schensted (1961)

Der mathematische „Zaubertrick“

Der mathematische „Zaubertrick“

Wir erinnern uns:

$$8, 6, 7, 1, 3, 2, 9, 4, 5 \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 9 & \\ 6 & & & \\ 8 & & & \end{array}$$

Der mathematische „Zaubertrick“

Wir erinnern uns:

$$8, 6, 7, 1, 3, 2, 9, 4, 5 \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 9 & \\ 6 & & & \\ 8 & & & \end{matrix}$$

Wenden wir dieselbe Abbildung auf die umgekehrte Anordnung an:

$5, 4, 9, 2, 3, 1, 7, 6, 8$

Der mathematische „Zaubertrick“

Wir erinnern uns:

$$8,6,7,1,3,2,9,4,5 \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{llll} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 9 & \\ 6 & & & \\ 8 & & & \end{array}$$

Wenden wir dieselbe Abbildung auf die umgekehrte Anordnung an:

$4,9,2,3,1,7,6,8$

5

Der mathematische „Zaubertrick“

Wir erinnern uns:

$$8, 6, 7, 1, 3, 2, 9, 4, 5 \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 9 & \\ 6 & & & \\ 8 & & & \end{array}$$

Wenden wir dieselbe Abbildung auf die umgekehrte Anordnung an:

$$9, 2, 3, 1, 7, 6, 8$$

$$\begin{array}{c} 4 \\ 5 \end{array}$$

Wir erinnern uns:

$$8,6,7,1,3,2,9,4,5 \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{llll} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 9 & \\ 6 & & & \\ 8 & & & \end{array}$$

Wenden wir dieselbe Abbildung auf die umgekehrte Anordnung an:

$$2,3,1,7,6,8$$

$$\begin{array}{ll} 4 & 9 \\ 5 & \end{array}$$

Der mathematische „Zaubertrick“

Wir erinnern uns:

$$8, 6, 7, 1, 3, 2, 9, 4, 5 \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 9 & \\ 6 & & & \\ 8 & & & \end{matrix}$$

Wenden wir dieselbe Abbildung auf die umgekehrte Anordnung an:

$$3, 1, 7, 6, 8$$

$$\begin{matrix} 2 & 9 \\ 4 & \\ 5 & \end{matrix}$$

Wir erinnern uns:

$$8, 6, 7, 1, 3, 2, 9, 4, 5 \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 9 & \\ 6 & & & \\ 8 & & & \end{array}$$

Wenden wir dieselbe Abbildung auf die umgekehrte Anordnung an:

$$1, 7, 6, 8$$

$$\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 4 & 9 \\ 5 & \end{array}$$

Wir erinnern uns:

$$8, 6, 7, 1, 3, 2, 9, 4, 5 \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 9 & \\ 6 & & & \\ 8 & & & \end{array}$$

Wenden wir dieselbe Abbildung auf die umgekehrte Anordnung an:

$$7, 6, 8$$

$$\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & 9 \\ 4 & \\ 5 & \end{array}$$

Der mathematische „Zaubertrick“

Wir erinnern uns:

$$8, 6, 7, 1, 3, 2, 9, 4, 5 \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 9 & \\ 6 & & & \\ 8 & & & \end{array}$$

Wenden wir dieselbe Abbildung auf die umgekehrte Anordnung an:

$$6, 8$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 9 & \\ 4 & & \\ 5 & & \end{array}$$

Der mathematische „Zaubertrick“

Wir erinnern uns:

$$8, 6, 7, 1, 3, 2, 9, 4, 5 \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{llll} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 9 & \\ 6 & & & \\ 8 & & & \end{array}$$

Wenden wir dieselbe Abbildung auf die umgekehrte Anordnung an:

$$8$$

$$\begin{array}{lll} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & \\ 4 & 9 & \\ 5 & & \end{array}$$

Der mathematische „Zaubertrick“

Wir erinnern uns:

$$8, 6, 7, 1, 3, 2, 9, 4, 5 \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 9 & \\ 6 & & & \\ 8 & & & \end{matrix}$$

Wenden wir dieselbe Abbildung auf die umgekehrte Anordnung an:

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 6 & 8 \\ 2 & 7 & & \\ 4 & 9 & & \\ 5 & & & \end{matrix}$$

Der mathematische „Zaubertrick“

Wir erinnern uns:

$$8, 6, 7, 1, 3, 2, 9, 4, 5 \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 9 & \\ 6 & & & \\ 8 & & & \end{matrix}$$

Wenden wir dieselbe Abbildung auf die umgekehrte Anordnung an:

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 6 & 8 \\ 2 & 7 & & \\ 4 & 9 & & \\ 5 & & & \end{matrix}$$

Das ist genau die Spiegelung des obigen Tableaus!

Zurück zu Ulams Problem

Zurück zu Ulams Problem

Wir wenden den Robinson–Schensted Algorithmus auf Anordnungen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ für großes n an:

Zurück zu Ulams Problem

Wir wenden den Robinson–Schensted Algorithmus auf Anordnungen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ für großes n an:

In[1]:= `TableForm[9 + PermutationToTableaux[RandomPermutation[90]][[1]]]`

Out[1]//TableForm=

10	11	12	14	24	27	31	33	35	36	57	59	62	68	7.
13	17	18	19	26	29	38	49	52	61	71	90	96		
15	20	23	32	40	44	54	56	73	77	87				
16	22	25	42	50	58	74	81	83	99					
21	30	43	45	64	86	91	94	95						
28	39	47	63	76	93									
34	41	51	66	79										
37	55	65	80											
46	60	67	82											
48	69	85												
53	70	92												
75	84													
78	98													
89														
97														

Zurück zu Ulams Problem

Wir wenden den Robinson–Schensted Algorithmus auf Anordnungen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ für großes n an:

In[2]:= **TableForm[9 + PermutationToTableaux[RandomPermutation[90]][[1]]]**

Out[2]//TableForm=

10	12	16	17	24	26	34	39	45	47	49	54	55	62	6
11	14	20	21	25	33	44	53	57	61	67	75	81	85	9
13	18	22	27	42	43	52	58	71	73	87				
15	28	30	46	51	60	63	78	83						
19	29	36	64	65	89	94								
23	38	56	68	86	93									
31	41	59	79											
32	50	72	82											
35	66	74	92											
37	77	80	99											
40	84													
48	95													
76	96													
88	98													
91														

Wir wenden den Robinson–Schensted Algorithmus auf Anordnungen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ für großes n an:

```
In[3]:= TableForm[9 + PermutationToTableaux[RandomPermutation[90]][[1]]]
```

Out[3]//TableForm=

10	14	17	18	20	23	26	33	39	46	54	67	76	77
11	15	21	22	28	31	32	35	44	52	71	82	94	
12	19	24	29	30	40	48	50	81					
13	25	36	37	47	60	63	75						
16	34	43	55	84	88	96	99						
27	41	49	70	85	95								
38	42	62	78	86									
45	51	66	79	98									
53	58	74	89										
56	61	83	93										
57	64	87											
59	69	91											
65	80	97											
68	92												
72													
73													
90													

Zurück zu Ulams Problem

Wir wenden den Robinson–Schensted Algorithmus auf Anordnungen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ für großes n an:

In[4]:= `TableForm[9 + PermutationToTableaux[RandomPermutation[90]][[1]]]`

Out[4]//TableForm=

10	11	14	19	22	25	32	42	43	53	57	73	94
12	13	18	20	23	26	44	52	58	60	72	80	
15	17	27	31	41	54	62	63	74	99			
16	28	30	36	56	70	82	87					
21	29	33	38	61	83	93						
24	35	37	46	81	88	95						
34	45	47	48	84	89							
39	50	59	76	90	91							
40	51	69	79	92								
49	64	85	98									
55	67	86										
65	68											
66	78											
71												
75												
77												
96												
97												

Zurück zu Ulams Problem

Wir wenden den Robinson–Schensted Algorithmus auf Anordnungen von $\{1, 2, \dots, n\}$ für großes n an:

```
In[5]:= TableForm[9 + PermutationToTableaux[RandomPermutation[90]][[1]]]
```

Out[5]//TableForm=

10	11	14	16	17	19	21	25	35	36	38	47	63	73	7
12	18	22	24	41	43	51	55	56	58	59	70			
13	20	29	32	45	53	64	76	93	95					
15	26	31	40	49	61	69	86	97						
23	34	37	50	54	66	75	98							
27	39	42	57	68	88									
28	46	48	71	89	96									
30	60	65	81	90										
33	67	74	83	94										
44	72	85	87											
52	77	91												
62	92													
78														
84														
99														

Zurück zu Ulams Problem

Wir wenden den Robinson–Schensted Algorithmus auf Anordnungen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ für großes n an:

```
In[6]:= TableForm[9 + PermutationToTableaux[RandomPermutation[90]][[1]]]
```

Out[6]//TableForm=

10	12	16	18	24	27	31	39	42	51	61	70	71	77	8
11	14	17	22	32	38	40	55	57	64	82				
13	19	20	23	41	49	54	65	67	69	95				
15	21	30	36	44	52	72	80	93	97					
25	26	43	45	48	66	76								
28	33	47	50	60	78	83								
29	37	53	56	74	92									
34	59	62	63	94										
35	68	73	99											
46	85	86												
58	87	89												
75	91													
79														
84														
96														
98														

Wir wenden den Robinson–Schensted Algorithmus auf Anordnungen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ für großes n an:

In[7]:=
```
TableForm[9 + PermutationToTableaux[RandomPermutation[90]][[1]]]
```

Out[7]//TableForm=

10	12	13	15	21	26	29	31	33	37	40	48	56	58	7.
11	17	18	19	27	30	38	50	59	65	80	85	88		
14	20	24	25	36	43	57	66	71	76	97				
16	23	32	39	42	45	61	69	77						
22	28	41	44	46	47	63	75							
34	49	51	53	60	82	83	87							
35	52	55	74	91	99									
54	62	70	84	96										
64	73	81	95											
67	79	93												
68	86													
78	94													
89	98													
90														

Zurück zu Ulams Problem

Wir wenden den Robinson–Schensted Algorithmus auf Anordnungen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ für großes n an:

In[8]:=
```
TableForm[9 + PermutationToTableaux[RandomPermutation[90]][[1]]]
```

Out[8]//TableForm=

10	12	13	14	18	21	22	34	49	57	59	72	78	79
11	15	24	29	30	35	38	42	63	73	82			
16	19	31	36	37	48	58	71	86	95				
17	23	32	41	43	55	75	91	92	96				
20	25	40	44	62	67	85	94						
26	27	53	60	70	89	90							
28	45	56	66	81	97								
33	47	74	83	87									
39	51	76	99										
46	52	77											
50	54	88											
61	80												
64													
65													
68													
69													
84													
93													
98													

Zurück zu Ulams Problem

Wir wenden den Robinson–Schensted Algorithmus auf Anordnungen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ für großes n an:

In[9]:=
```
TableForm[9 + PermutationToTableaux[RandomPermutation[90]][[1]]]
```

Out[9]//TableForm=

10	11	14	15	16	23	34	38	49	58	60	61	71	74	8
12	17	20	21	27	29	37	52	55	65	70	77	91		
13	19	22	28	36	42	63	69	78	92	95				
18	25	31	33	66	79	83	85	97						
24	32	46	51	81	88	93	99							
26	41	47	53	82										
30	43	48	56	98										
35	45	75	86											
39	50	84												
40	57	90												
44	62													
54	64													
59	68													
67	72													
73														
76														
87														
94														

Zurück zu Ulams Problem

Wir wenden den Robinson–Schensted Algorithmus auf Anordnungen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ für großes n an:

```
In[10]:= TableForm[9 + PermutationToTableaux[RandomPermutation[90]][[1]]]
```

Out[10]//TableForm=

10	12	13	14	23	24	41	47	52	53	69	71	75	82	8
11	17	18	19	25	27	48	50	58	60	72	74	87	99	
15	20	22	26	32	37	66	67	73	92	93	95			
16	21	29	35	38	45	81	84	91	97					
28	30	42	54	59	80	86	90							
31	36	44	61	64	94									
33	43	51	65	68										
34	46	57	70											
39	49	62	98											
40	76	79												
55	85	89												
56	88	96												
63														
77														
78														

Zurück zu Ulams Problem

Es scheint so zu sein, daß die „typische“ Form des Standardtableaus (abgesehen von Fluktuationen) durch eine exakte Kurve beschrieben werden kann.

Zurück zu Ulams Problem

Es scheint so zu sein, daß die „typische“ Form des Standardtableaus (abgesehen von Fluktuationen) durch eine exakte Kurve beschrieben werden kann.

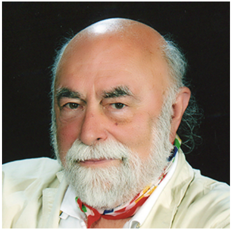
Dies haben Logan und Shepp, und unabhängig Vershik und Kerov 1977 bewiesen.

Zurück zu Ulams Problem

Benjamin F. Logan

Lawrence A. Shepp

Sergeĭ Vasil'evich Kerov



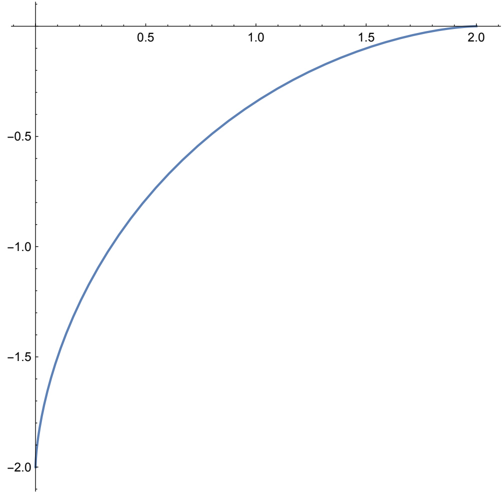
Anatoliĭ Moiseevich Vershik

Zurück zu Ulams Problem

Definiere die Kurve $\omega : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\theta \to \left(\left(\frac{2\theta}{\pi} + 1\right) \sin\theta + \frac{2}{\pi} \cos\theta, -\left(\frac{2\theta}{\pi} - 1\right) \sin\theta - \frac{2}{\pi} \cos\theta\right).$$

Out[13]=

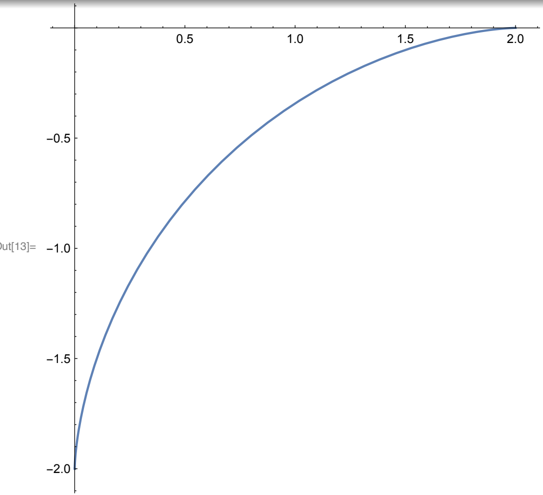


Zurück zu Ulams Problem

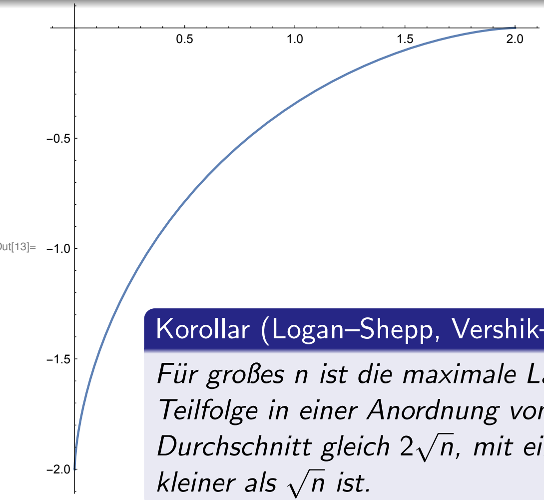
Satz (Logan–Shepp, Vershik–Kerov)

Wenn man für großes n den Robinson–Schensted Algorithmus auf eine Anordnung von $\{1, 2, \ldots, n\}$ anwendet, dann wird die Form des erhaltenen Standardtableau mit Wahrscheinlichkeit fast 1 mit ganz geringer Abweichung durch $\sqrt{n} \cdot \omega$ beschrieben.

Zurück zu Ulams Problem



Zurück zu Ulams Problem



Korollar (Logan–Shepp, Vershik–Kerov)

Für großes n ist die maximale Länge einer aufsteigenden Teilfolge in einer Anordnung von $\{1, 2, \ldots, n\}$ im Durchschnitt gleich $2\sqrt{n}$, mit einem Fehler, der wesentlich kleiner als $\sqrt{n}$ ist.

Wie groß ist nun aber der Fehler, und wie groß sind die Abweichungen, die Fluktuationen von jener „typischen" Kurve? Können diese mathematisch beschrieben werden?

Wie groß ist nun aber der Fehler, und wie groß sind die Abweichungen, die Fluktuationen von jener „typischen" Kurve? Können diese mathematisch beschrieben werden?

(Andrei Okounkov)

Diese Frage wurde von ANDREI OKOUNKOV im Jahr 2000 beantwortet, indem er eine Verbindung zu Eigenwerten von Zufallsmatrizen herstellte.

Wie groß ist nun aber der Fehler, und wie groß sind die Abweichungen, die Fluktuationen von jener „typischen" Kurve? Können diese mathematisch beschrieben werden?

(Andrei Okounkov)

Diese Frage wurde von ANDREI OKOUNKOV im Jahr 2000 beantwortet, indem er eine Verbindung zu Eigenwerten von Zufallsmatrizen herstellte.

Er erhielt (unter anderem dafür) 2006 die Fieldsmedaille.

Vom Patience-Legen bis zur Fieldsmedaille

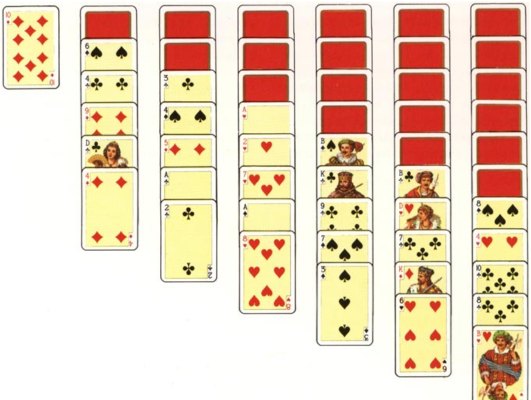


Abb. 27