Gespiegelt und verkehrt: Über die Kombinatorik von musikalischen Themen

Christian Krattenthaler

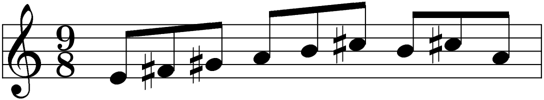
Fakultät für Mathematik, Universität Wien

Johann Sebastian Bach (1685–1750): *Sinfonia E-Dur BWV 792* (1723)

Thema und Umkehrung

Johann Sebastian Bach (1685–1750): *Sinfonia E-Dur BWV 792* (1723)

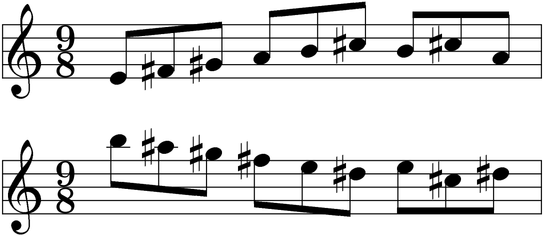
Das Thema der Sinfonia:



Thema und Umkehrung

Johann Sebastian Bach (1685–1750): *Sinfonia E-Dur BWV 792* (1723)

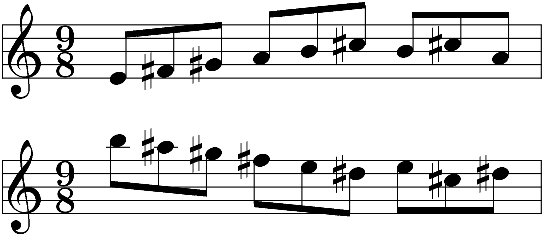
Das Thema der Sinfonia:



Thema und Umkehrung

Johann Sebastian Bach (1685–1750): *Sinfonia E-Dur BWV 792* (1723)

Das Thema der Sinfonia:



Wird ein Thema „auf den Kopf gestellt“, so nennt man dies Umkehrung (**Spiegel**, **Inversion**).

Thema und Umkehrung

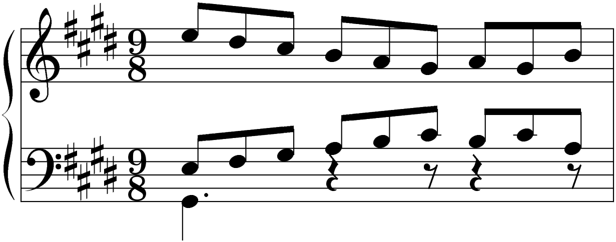
Die Verwendung der Umkehrung eines Themas ist und war immer eine oft verwendete Technik der „Verarbeitung“ von Themen, insbesondere in Fugen.

Man findet sie etwa in einigen Fugen des *Wohltemperierten Klaviers*, vermehrt im *Musikalischen Opfer* und in der *Kunst der Fuge* (J. S. Bach), selbstverständlich im Fugensatz der *“Großen Sonate für das Hammerklavier"* op. 106 (L. v. Beethoven), usw. usw.

Thema und Umkehrung

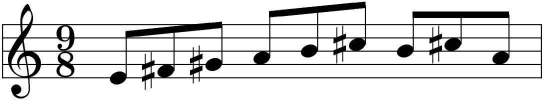
JOHANN SEBASTIAN BACH (1685–1750): *Sinfonia E-Dur BWV 792* (1723)

Thema und Umkehrung *zugleich*:

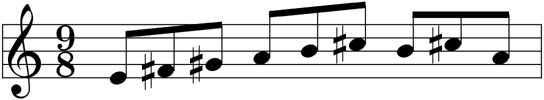


Thema und Krebs

Das Thema der Sinfonia:



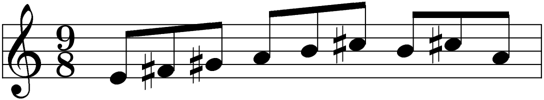
Das Thema der Sinfonia:



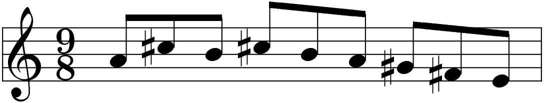
Warum nicht von hinten nach vorne?

Thema und Krebs

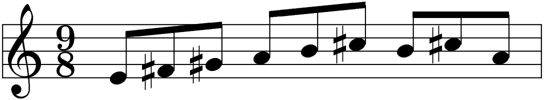
Das Thema der Sinfonia:



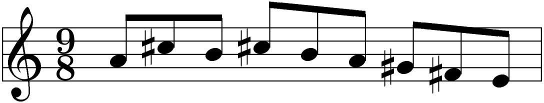
Warum nicht von hinten nach vorne?



Das Thema der Sinfonia:



Warum nicht von hinten nach vorne?



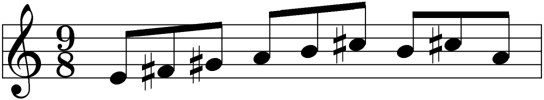
Wird ein Thema von hinten nach vorne gespielt, so nennt man dies Krebs.

Thema und Krebs

Der Krebs ist ebenfalls eine Technik der „Verarbeitung" von Themen.
Bei J. S. Bach kommt er allerdings nur selten vor (praktisch nicht im *Wohltemperierten Klavier*; im *Musikalischen Opfer* gibt es einen Krebskanon; der Krebs wird auch in der *Kunst der Fuge* verwendet), sehr wohl aber in der *"Großen Sonate für das Hammerklavier"* op. 106 von L. v. Beethoven.

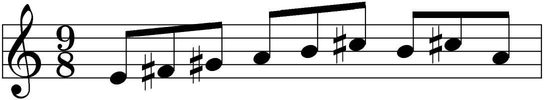
Thema und Spiegelkrebs

Das Thema der Sinfonia:



Thema und Spiegelkrebs

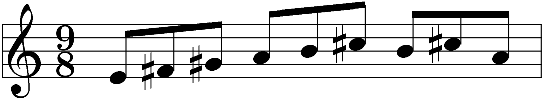
Das Thema der Sinfonia:



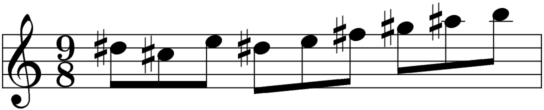
Gespiegelt und von hinten nach vorne:

Thema und Spiegelkrebs

Das Thema der Sinfonia:



Gespiegelt und von hinten nach vorne: der Spiegelkrebs



Thema und Spiegelkrebs

Den Spiegelkrebs („Krebsumkehrung") findet man in Fugen der Barockmusik (eigentlich aber nicht bei J. S. Bach).

Thema und Spiegelkrebs

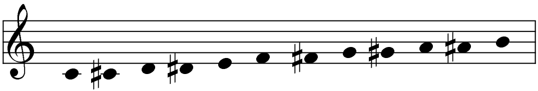
Den Spiegelkrebs („Krebsumkehrung“) findet man in Fugen der Barockmusik (eigentlich aber nicht bei J. S. Bach).
Zusammen mit Umkehrung, Krebs, gelangt er zur essentiellen Bedeutung in der Zwölftonmusik ARNOLD SCHÖNBERGS.

Die Postulate („Axiome“) der Zwölftonmusik:

Zwölftonmusik

Die Postulate („Axiome“) der Zwölftonmusik:

- Jeder der 12 Töne der wohltemperierten Skala

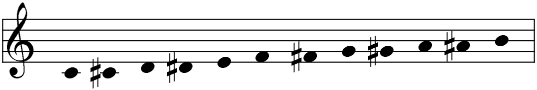


ist gleichberechtigt.

Zwölftonmusik

Die Postulate („Axiome“) der Zwölftonmusik:

- Jeder der 12 Töne der wohltemperierten Skala



  ist gleichberechtigt.
- Tonalität (= Bezug auf einen Grundton) hat hier keinen Platz und muß deshalb unter allen Umständen vermieden werden.

Zwölftonmusik

Die Gesetze der Zwölftonmusik:

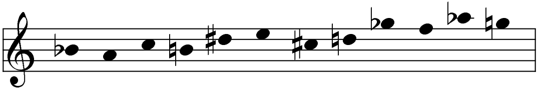
Zwölftonmusik

Die Gesetze der Zwölftonmusik:

- Jedem Musikstück liegt eine Reihe zu Grunde.

Die Gesetze der Zwölftonmusik:

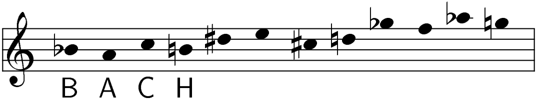
- Jedem Musikstück liegt eine Reihe zu Grunde.
- Eine Reihe ist eine Folge von 12 Tönen, die jeden Ton der wohltemperierten Skala genau einmal enthält.



(Anton von Webern (1883–1945): *Streichquartett op. 28* (1938))

Die Gesetze der Zwölftonmusik:

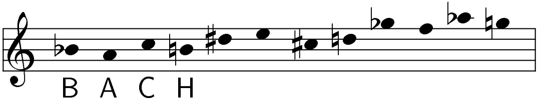
- Jedem Musikstück liegt eine Reihe zu Grunde.
- Eine Reihe ist eine Folge von 12 Tönen, die jeden Ton der wohltemperierten Skala genau einmal enthält.



(Anton von Webern (1883–1945): *Streichquartett op. 28* (1938))

Die Gesetze der Zwölftonmusik:

- Jedem Musikstück liegt eine Reihe zu Grunde.
- Eine Reihe ist eine Folge von 12 Tönen, die jeden Ton der wohltemperierten Skala genau einmal enthält.



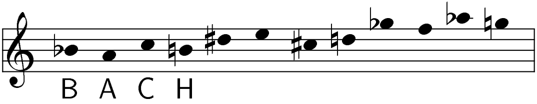
(Anton von Webern (1883–1945): *Streichquartett op. 28* (1938))

- Im Ablauf des Stückes erklingt diese Reihe immer wieder, (möglicherweise) in verarbeiteter Form.

Zwölftonmusik

Die Gesetze der Zwölftonmusik:

- Jedem Musikstück liegt eine Reihe zu Grunde.
- Eine Reihe ist eine Folge von 12 Tönen, die jeden Ton der wohltemperierten Skala genau einmal enthält.

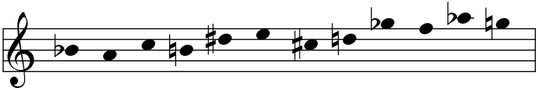


(Anton von Webern (1883–1945): *Streichquartett op. 28* (1938))

- Im Ablauf des Stückes erklingt diese Reihe immer wieder, (möglicherweise) in verarbeiteter Form.
- Neben rythmischer Verarbeitung sind die fundamentalen Verarbeitungstechniken Umkehrung, Krebs und Spiegelkrebs.

Die fundamentalen vier Erscheinungsformen („Modi") eines Themas:

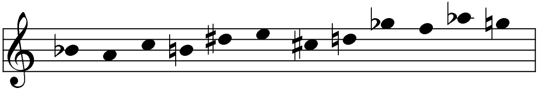
Grundgestalt:



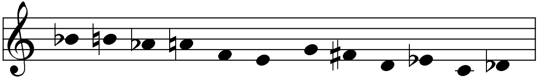
Zwölftonmusik

Die fundamentalen vier Erscheinungsformen („Modi“) eines Themas:

Grundgestalt:



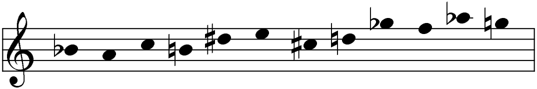
Umkehrung:



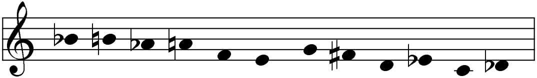
Zwölftonmusik

Die fundamentalen vier Erscheinungsformen („Modi“) eines Themas:

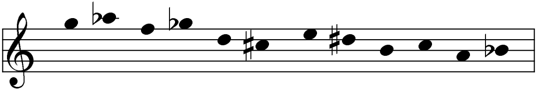
Grundgestalt:



Umkehrung:

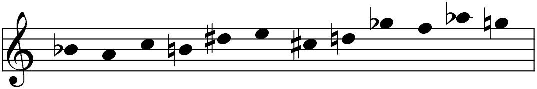


Krebs:

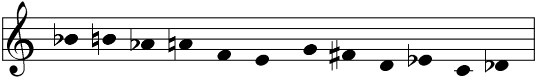


Die fundamentalen vier Erscheinungsformen („Modi“) eines Themas:

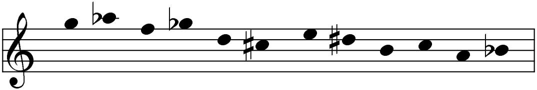
Grundgestalt:



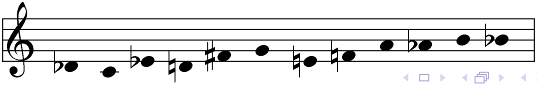
Umkehrung:



Krebs:



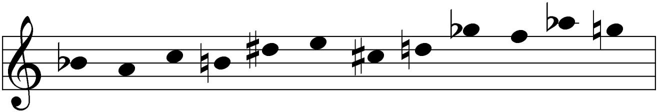
Spiegelkrebs:



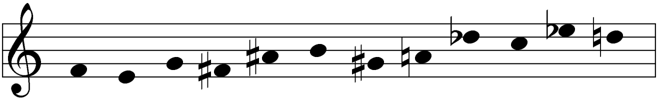
Zwölftonmusik

Da alle Töne gleichberechtigt sind, ergibt sich auch zwingendermaßen, daß alle Transponierungen eines Themas als gleichberechtigt zu betrachten sind.

Da alle Töne gleichberechtigt sind, ergibt sich auch zwingendermaßen, daß alle Transponierungen eines Themas als gleichberechtigt zu betrachten sind.
Also:



ist gleichberechtigt mit:



Eine kombinatorische Fragestellung

Wieviele im Sinne der eben besprochenen Äquivalenzen[1] verschiedene Reihen gibt es?

[1] Eine Reihe, die sich von einer anderen nur um eine Kombination von Transponieren, Umkehren, Krebs unterscheidet, wird als äquivalent zur anderen betrachtet.

Eine kombinatorische Fragestellung

Wieviele im Sinne der eben besprochenen Äquivalenzen[1] verschiedene Reihen gibt es?

Die Lösung dieses Problems wird durch die sogenannte Pólya–Redfield Theorie der Abzählung gefärbter kombinatorischer Objekte geliefert.

[1] Eine Reihe, die sich von einer anderen nur um eine Kombination von Transponieren, Umkehren, Krebs unterscheidet, wird als äquivalent zur anderen betrachtet.

György Pólya (1887–1985)

war einer der bedeutendsten Mathematiker des 20. Jahrhunderts. Sein mathematisches Werk umfaßt bedeutende Beiträge in Komplexer Analysis, Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitstheorie u.v.a.

Er wurde in Budapest geboren, studierte an der Universität in Budapest zunächst Rechtswissenschaft, dann Sprachen und Literatur (wo er die Lehrberechtigung erwarb), und schließlich Physik und Mathematik (1910/11 verbrachte er ein „Auslandsjahr" an der Universität Wien), und schloß 1911 mit dem Doktortitel in Mathematik ab. Weitere Stationen waren Göttingen, Frankfurt und Paris, bevor er eine Stelle als Privatdozent (später Professor) in Zürich antrat. 1940 ist er gezwungen in die USA auszuwandern, wo er schließlich an der Stanford University Professor wird und bis zu seinem Tod bleibt.

György Pólya (1887–1985)

Der Artikel, der jene Theorie der Abzählung gefärbter kombinatorischer Objekte entwickelt, ist

Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen, Acta Mathematica **68** (1937), 145–254.

John Howard Redfield (1879–1944)

wurde in Philadelphia (Pennsylvania, USA) geboren. Er war vielseitigst talentiert. 1895 begann er Studien in Sprachen, Mathematik, Mechanik und Physik am Haverford College und schloß mit einem Bachelor in Science (mechanalia) 1899 ab. Er erlangte einen weiteren Abschluß als Zivilingenieur am M.I.T. in Boston, einen in Études Françaises an der Sorbonne in Paris, und 1914 das Doktorat in Romanischen Sprachen an der Harvard University in Boston. Er beherrschte zahlreiche Sprachen und interessierte sich für eine weite Bandbreite mathematischer Probleme. Einer akademischen Karriere stand jedoch seine Unfähigkeit zu unterrichten entgegen. Er bekleidete zahllose Stellen, als Ingenieur, Übersetzer, und als Lektor am United States Navy Yard in Philadelphia. Er starb an seinem Geburtsort 1944 an einem Krebsleiden.

John Howard Redfield (1879–1944)

1951 entdeckte Frank Harary, daß Redfield in den unten angeführten beiden Artikeln Pólyas Theorie großteils vorweggenommen hatte:

The theory of group-reduced distributions, Amer. J. Math. **49** (1927), 433–455.

Enumeration by frame group and range groups, J. Graph Theory **8** (1984), 205–223.[2]

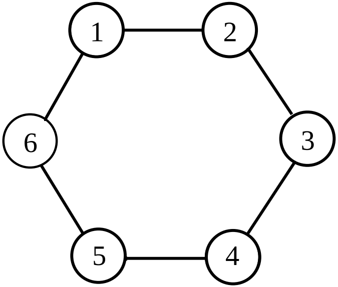
[2] Dieser Artikel war zu Lebzeiten Redfields für eine Veröffentlichung abgelehnt worden, und ist nach seiner Wiederentdeckung 1981 erst posthum durch die Herausgeber des Journal of Graph Theory gedruckt worden.

Das fundamentale „Werkzeug“ der Pólya–Redfield Theorie ist der Zykelindex einer Gruppe von Transformationen.

Pólya–Redfield Theorie: Der Zykelindex

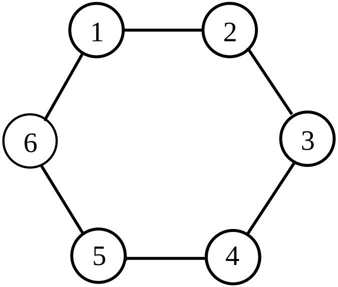
Das fundamentale „Werkzeug“ der Pólya–Redfield Theorie ist der Zykelindex einer Gruppe von Transformationen.

Beispiel. Gegeben eine Kette mit sechs Perlen.



Das fundamentale „Werkzeug“ der Pólya–Redfield Theorie ist der Zykelindex einer Gruppe von Transformationen.

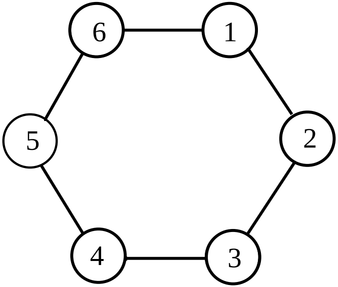
Beispiel. Gegeben eine Kette mit sechs Perlen.



Betrachten wir alle Rotationen der Kette (die Perlen in Perlen überführen).

Das fundamentale „Werkzeug“ der Pólya–Redfield Theorie ist der Zykelindex einer Gruppe von Transformationen.

Beispiel. Gegeben eine Kette mit sechs Perlen.

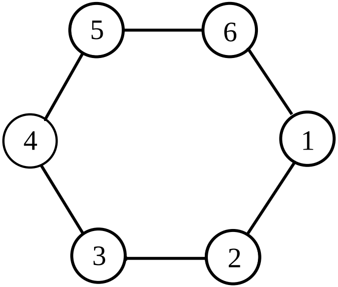


Betrachten wir alle Rotationen der Kette (die Perlen in Perlen überführen).

Pólya–Redfield Theorie: Der Zykelindex

Das fundamentale „Werkzeug“ der Pólya–Redfield Theorie ist der Zykelindex einer Gruppe von Transformationen.

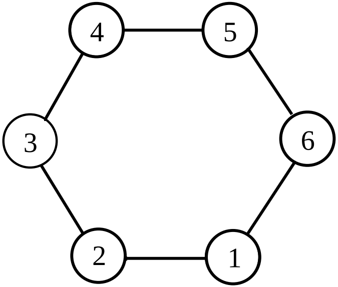
Beispiel. Gegeben eine Kette mit sechs Perlen.



Betrachten wir alle Rotationen der Kette (die Perlen in Perlen überführen).

Das fundamentale „Werkzeug“ der Pólya–Redfield Theorie ist der Zykelindex einer Gruppe von Transformationen.

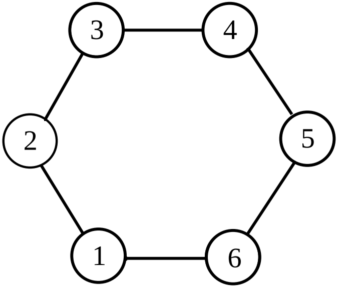
Beispiel. Gegeben eine Kette mit sechs Perlen.



Betrachten wir alle Rotationen der Kette (die Perlen in Perlen überführen).

Das fundamentale „Werkzeug“ der Pólya–Redfield Theorie ist der Zykelindex einer Gruppe von Transformationen.

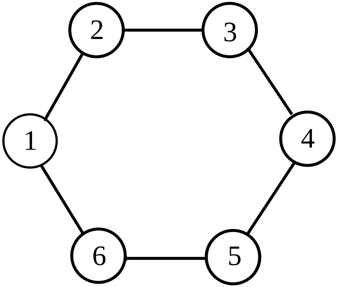
Beispiel. Gegeben eine Kette mit sechs Perlen.



Betrachten wir alle Rotationen der Kette (die Perlen in Perlen überführen).

Das fundamentale „Werkzeug“ der Pólya–Redfield Theorie ist der Zykelindex einer Gruppe von Transformationen.

Beispiel. Gegeben eine Kette mit sechs Perlen.

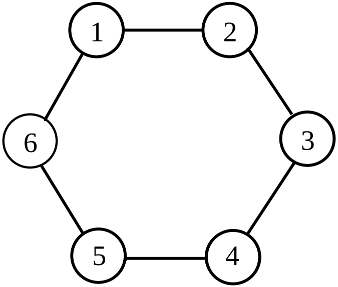


Betrachten wir alle Rotationen der Kette (die Perlen in Perlen überführen).

Pólya–Redfield Theorie: Der Zykelindex

Das fundamentale „Werkzeug“ der Pólya–Redfield Theorie ist der Zykelindex einer Gruppe von Transformationen.

Beispiel. Gegeben eine Kette mit sechs Perlen.

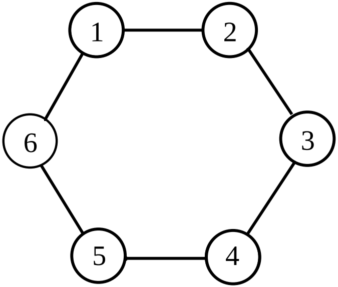


Betrachten wir alle Rotationen der Kette (die Perlen in Perlen überführen).

Pólya–Redfield Theorie: Der Zykelindex

Das fundamentale „Werkzeug“ der Pólya–Redfield Theorie ist der Zykelindex einer Gruppe von Transformationen.

Beispiel. Gegeben eine Kette mit sechs Perlen.



Betrachten wir alle Rotationen der Kette (die Perlen in Perlen überführen).
Diese bilden eine solche Gruppe von Transformationen.

Definition

Gegeben eine Gruppe G von Transformationen. Der *Zykelindex* Z_G von G ist die Summe aller Werte $X(T)$, wo T alle Transformationen in G durchläuft, dividiert durch die Anzahl der Transformationen.

Pólya–Redfield Theorie: Der Zykelindex

Definition

Gegeben eine Gruppe G von Transformationen. Der *Zykelindex* Z_G von G ist die Summe aller Werte $X(T)$, wo T alle Transformationen in G durchläuft, dividiert durch die Anzahl der Transformationen.

Was ist dabei $X(T)$?

Definition

Gegeben eine Gruppe G von Transformationen. Der *Zykelindex* Z_G von G ist die Summe aller Werte $X(T)$, wo T alle Transformationen in G durchläuft, dividiert durch die Anzahl der Transformationen.

Was ist dabei $X(T)$?
Jede Transformation teilt die „Grundmenge“ von Zahlen in kleinere Mengen auf, je nachdem, welche Elemente aufeinander abgebildet werden.

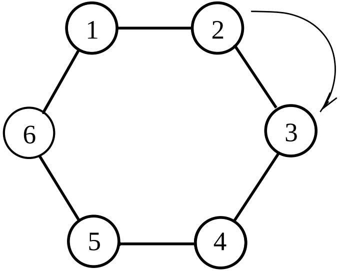
Pólya–Redfield Theorie: Der Zykelindex

Jede Transformation teilt die Grundmenge in kleinere Mengen auf, je nachdem, welche Zahlen aufeinander abgebildet werden.

Pólya–Redfield Theorie: Der Zykelindex

Jede Transformation teilt die Grundmenge in kleinere Mengen auf, je nachdem, welche Zahlen aufeinander abgebildet werden.

Beispiel: Einfache Rotation im Uhrzeigersinn:



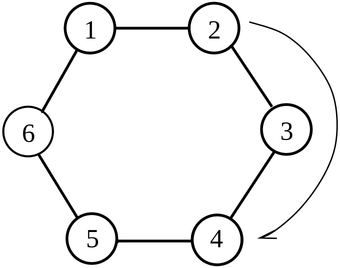
$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 1.$$

Also: Alle Zahlen $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ „gehören zusammen".

Pólya–Redfield Theorie: Der Zykelindex

Jede Transformation teilt die Grundmenge in kleinere Mengen auf, je nachdem, welche Zahlen aufeinander abgebildet werden.

Beispiel: Zweifache Rotation im Uhrzeigersinn:



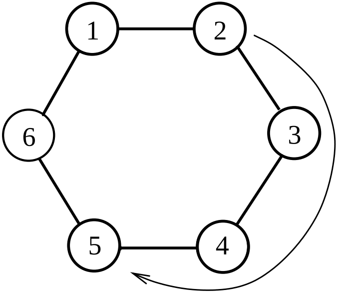
$$1 \to 3 \to 5 \to 1, \qquad 2 \to 4 \to 6 \to 2.$$

Also: $\{1, 3, 5\}$ „gehören zusammen", und $\{2, 4, 6\}$ „gehören zusammen".

Pólya–Redfield Theorie: Der Zykelindex

Jede Transformation teilt die Grundmenge in kleinere Mengen auf, je nachdem, welche Zahlen aufeinander abgebildet werden.

Beispiel: Dreifache Rotation im Uhrzeigersinn:



$$1 \to 4 \to 1, \quad 2 \to 5 \to 2, \quad 3 \to 6 \to 3.$$

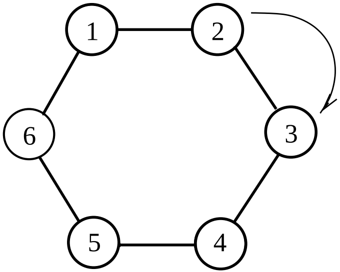
Also: $\{1, 4\}$ „gehören zusammen“, $\{2, 5\}$ „gehören zusammen“, und $\{3, 6\}$ „gehören zusammen“.

Wie berechnet man dann $X(T)$?

Pólya–Redfield Theorie: Der Zykelindex

Wie berechnet man dann $X(T)$?
Wenn eine dieser Mengen „zusammengehöriger“ Zahlen die Größe m hat, schreibt man x_m. Man bildet das Produkt aller dieser x_m's.

Wie berechnet man dann $X(T)$?
Wenn eine dieser Mengen „zusammengehöriger“ Zahlen die Größe m hat, schreibt man x_m. Man bildet das Produkt aller dieser x_m's.
Bei der einfachen Rotation T_1 im Uhrzeigersinn:



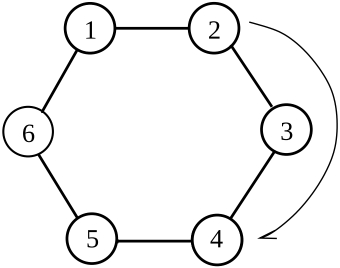
$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 1.$$

$\{1,2,3,4,5,6\}$ „gehören zusammen“, daher schreiben wir x_6. Es ist also

$$X(T_1) = x_6.$$

Pólya–Redfield Theorie: Der Zykelindex

Wie berechnet man dann $X(T)$?
Wenn eine dieser Mengen „zusammengehöriger“ Zahlen die Größe m hat, schreibt man x_m. Man bildet das Produkt aller dieser x_m's.
Bei der zweifachen Rotation T_2 im Uhrzeigersinn:

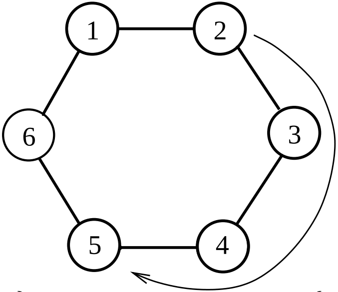


$1 \to 3 \to 5 \to 1, \qquad 2 \to 4 \to 6 \to 2.$

Also: $\{1, 3, 5\}$ „gehören zusammen“, da schreiben wir x_3.
$\{2, 4, 6\}$ „gehören zusammen“, da schreiben wir auch x_3.
Es ist also

$$X(T_2) = x_3 \cdot x_3 = x_3^2.$$

Wie berechnet man dann $X(T)$?
Wenn eine dieser Mengen „zusammengehöriger" Zahlen die Größe m hat, schreibt man x_m. Man bildet das Produkt aller dieser x_m's.
Bei der dreifachen Rotation T_3 im Uhrzeigersinn:



$$1 \to 4 \to 1, \quad 2 \to 5 \to 2, \quad 3 \to 6 \to 3.$$

$\{1,4\}$ „gehören zusammen", $\{2,5\}$ „gehören zusammen", und $\{3,6\}$ „gehören zusammen". In jedem Fall schreiben wir x_2.
Es ist also

$$X(T_3) = x_2 \cdot x_2 \cdot x_2 = x_2^3.$$

Pólya–Redfield Theorie: Der Zykelindex

Definition

Gegeben eine Gruppe G von Transformationen. Der *Zykelindex* Z_G von G ist die Summe aller Werte $X(T)$, wo T alle Transformationen in G durchläuft, dividiert durch die Anzahl der Transformationen.

Definition

Gegeben eine Gruppe G von Transformationen. Der *Zykelindex* Z_G von G ist die Summe aller Werte $X(T)$, wo T alle Transformationen in G durchläuft, dividiert durch die Anzahl der Transformationen.

Insgesamt für unsere Gruppe G von Rotationen:

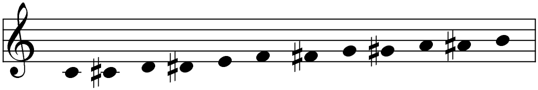
Definition

Gegeben eine Gruppe G von Transformationen. Der *Zykelindex* Z_G von G ist die Summe aller Werte $X(T)$, wo T alle Transformationen in G durchläuft, dividiert durch die Anzahl der Transformationen.

Insgesamt für unsere Gruppe G von Rotationen:

$$Z_G = \frac{1}{6}(x_6 + x_6 + x_3^2 + x_3^2 + x_2^3 + x_1^6) = \frac{1}{6}(2x_6 + 2x_3^2 + x_2^3 + x_1^6).$$

Um das Reihenproblem mathematisch zu formulieren, einigen wir uns zunächst darauf statt der Notennamen c,cis,d,dis,e,f,fis,g,gis,a,b,h, respektive statt



Zahlen zu benutzen: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$.

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Wir suchen die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, die zwölf Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ in einer Reihe aufzuschreiben, etwa

$$11\ 10\ 1\ 12\ 4\ 5\ 2\ 3\ 7\ 6\ 9\ 8,$$ [3]

[3] Anton von Webern (1883–1945): *Streichquartett op. 28* (1938)

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Wir suchen die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, die zwölf Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ in einer Reihe aufzuschreiben, etwa

$$11\ 10\ 1\ 12\ 4\ 5\ 2\ 3\ 7\ 6\ 9\ 8,$$ [3]

wobei aber Reihen, die durch Transponieren (= Dazuzählen derselben Zahl zu allen Zahlen und Reduzieren modulo 12) nicht als verschieden gelten, und ebensowenig jene die durch Krebs (= Umkehren der Reihenfolge der Töne) oder Umkehrung (= Ersetzen der von 1 durch 12, von 2 durch 11, von 3 durch 10, ..., von 12 durch 1).

[3] Anton von Webern (1883–1945): *Streichquartett op. 28* (1938)

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Reihen, die nicht als verschieden gelten:
Die originale Reihe von Weberns:

11 10 1 12 4 5 2 3 7 6 9 8

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Reihen, die nicht als verschieden gelten:
Die originale Reihe von Weberns:

$$11\ 10\ 1\ 12\ 4\ 5\ 2\ 3\ 7\ 6\ 9\ 8$$

Transponiert (überall -5):

$$6\ 5\ 8\ 7\ 11\ 12\ 9\ 10\ 2\ 1\ 4\ 3$$

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Reihen, die nicht als verschieden gelten:
Die originale Reihe von Weberns:

11 10 1 12 4 5 2 3 7 6 9 8

Transponiert (überall -5):

6 5 8 7 11 12 9 10 2 1 4 3

Krebs:

8 9 6 7 3 2 5 4 12 1 10 11

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Reihen, die nicht als verschieden gelten:
Die originale Reihe von Weberns:

$$11\ 10\ 1\ 12\ 4\ 5\ 2\ 3\ 7\ 6\ 9\ 8$$

Transponiert (überall -5):

$$6\ 5\ 8\ 7\ 11\ 12\ 9\ 10\ 2\ 1\ 4\ 3$$

Krebs:

$$8\ 9\ 6\ 7\ 3\ 2\ 5\ 4\ 12\ 1\ 10\ 11$$

Umkehrung:

$$2\ 3\ 12\ 1\ 9\ 8\ 11\ 10\ 6\ 7\ 4\ 5$$

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

„Klauben“ wir das ordentlich auseinander:

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

„Klauben" wir das ordentlich auseinander:

- Das Umkehren der Reihenfolge (Krebs) der Noten (Zahlen) ist eine Transformation der **Anordnung** der Noten, also des kombinatorischen Objektes.

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

„Klauben" wir das ordentlich auseinander:

- Das Umkehren der Reihenfolge (Krebs) der Noten (Zahlen) ist eine Transformation der **Anordnung** der Noten, also des kombinatorischen Objektes.
- Transponieren und Umkehrung sind Transformationen **der Noten** (Zahlen), nicht des kombinatorischen Objektes.

„Klauben“ wir das ordentlich auseinander:

- Das Umkehren der Reihenfolge (Krebs) der Noten (Zahlen) ist eine Transformation der **Anordnung** der Noten, also des kombinatorischen Objektes.
- Transponieren und Umkehrung sind Transformationen **der Noten** (Zahlen), nicht des kombinatorischen Objektes.

Wir haben es mit **zwei** Gruppen von Transformationen zu tun: Eine „wirkt“ auf den kombinatorischen Objekten, die andere „wirkt“ auf den Noten (Zahlen).

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

„Klauben“ wir das ordentlich auseinander:

- Das Umkehren der Reihenfolge (Krebs) der Noten (Zahlen) ist eine Transformation der **Anordnung** der Noten, also des kombinatorischen Objektes.
- Transponieren und Umkehrung sind Transformationen **der Noten** (Zahlen), nicht des kombinatorischen Objektes.

Wir haben es mit **zwei** Gruppen von Transformationen zu tun: Eine „wirkt“ auf den kombinatorischen Objekten, die andere „wirkt“ auf den Noten (Zahlen).
(In Pólyas Theorie sind letztere Farben.)

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Satz (Pólya–Redfield)

Sei eine Gruppe G von Transformationen gegeben, die auf kombinatorischen Objekten wirkt, und eine Gruppe H von Transformationen, die Farben transformieren.
Die Anzahl der verschiedenen gefärbten Objekte, wobei zwei gefärbte Objekte nicht als verschieden gelten, wenn sie durch eine der Transformationen aus G oder aus H ineinander übergeführt werden können, ist

$$Z_G\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) Z_H(1+x_1, 1+2x_2, \dots, 1+nx_n)\Big|_{x_1=\cdots=x_n=0}.$$

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Für unser Reihenproblem gilt:

$$Z_G = \frac{1}{2}(1 + x_2^6)$$

und

$$Z_H = \frac{1}{24}(4x_{12} + 2x_6^2 + 2x_4^3 + 2x_3^4 + 7x_2^6 + 6x_1^2x_2^5 + x_1^{12}).$$

Für unser Reihenproblem gilt:

$$Z_G = \frac{1}{2}(1 + x_2^6)$$

und

$$Z_H = \frac{1}{24}(4x_{12} + 2x_6^2 + 2x_4^3 + 2x_3^4 + 7x_2^6 + 6x_1^2x_2^5 + x_1^{12}).$$

Wir setzen in der Formel

$$Z_G\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{12}}\right) Z_H(1+x_1, 1+2x_2, \dots, 1+12x_{12})\Big|_{x_1=\dots=x_{12}=0}$$

ein,

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Für unser Reihenproblem gilt:

$$Z_G = \frac{1}{2}(1 + x_2^6)$$

und

$$Z_H = \frac{1}{24}(4x_{12} + 2x_6^2 + 2x_4^3 + 2x_3^4 + 7x_2^6 + 6x_1^2 x_2^5 + x_1^{12}).$$

Wir setzen in der Formel

$$Z_G\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{12}}\right) Z_H(1+x_1, 1+2x_2, \dots, 1+12x_{12})\Big|_{x_1=\cdots=x_{12}=0}$$

ein, werfen den Computer an,

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Für unser Reihenproblem gilt:

$$Z_G = \frac{1}{2}(1 + x_2^6)$$

und

$$Z_H = \frac{1}{24}(4x_{12} + 2x_6^2 + 2x_4^3 + 2x_3^4 + 7x_2^6 + 6x_1^2x_2^5 + x_1^{12}).$$

Wir setzen in der Formel

$$Z_G\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{12}}\right) Z_H(1+x_1, 1+2x_2, \dots, 1+12x_{12})\Big|_{x_1=\dots=x_{12}=0}$$

ein, werfen den Computer an, und erhalten

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Für unser Reihenproblem gilt:

$$Z_G = \frac{1}{2}(1 + x_2^6)$$

und

$$Z_H = \frac{1}{24}(4x_{12} + 2x_6^2 + 2x_4^3 + 2x_3^4 + 7x_2^6 + 6x_1^2 x_2^5 + x_1^{12}).$$

Wir setzen in der Formel

$$Z_G\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{12}}\right) Z_H(1{+}x_1, 1{+}2x_2, \dots, 1{+}12x_{12})\Big|_{x_1=\dots=x_{12}=0}$$

ein, werfen den Computer an, und erhalten

...

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Für unser Reihenproblem gilt:

$$Z_G = \frac{1}{2}(1 + x_2^6)$$

und

$$Z_H = \frac{1}{24}(4x_{12} + 2x_6^2 + 2x_4^3 + 2x_3^4 + 7x_2^6 + 6x_1^2x_2^5 + x_1^{12}).$$

Wir setzen in der Formel

$$Z_G\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{12}}\right) Z_H(1+x_1, 1+2x_2, \dots, 1+12x_{12})\Big|_{x_1=\dots=x_{12}=0}$$

ein, werfen den Computer an, und erhalten

. . . . . .

Für unser Reihenproblem gilt:

$$Z_G = \frac{1}{2}(1 + x_2^6)$$

und

$$Z_H = \frac{1}{24}(4x_{12} + 2x_6^2 + 2x_4^3 + 2x_3^4 + 7x_2^6 + 6x_1^2 x_2^5 + x_1^{12}).$$

Wir setzen in der Formel

$$Z_G\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{12}}\right) Z_H(1{+}x_1, 1{+}2x_2, \dots, 1{+}12x_{12})\Big|_{x_1=\cdots=x_{12}=0}$$

ein, werfen den Computer an, und erhalten

. . . .

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Für unser Reihenproblem gilt:

$$Z_G = \frac{1}{2}(1 + x_2^6)$$

und

$$Z_H = \frac{1}{24}(4x_{12} + 2x_6^2 + 2x_4^3 + 2x_3^4 + 7x_2^6 + 6x_1^2x_2^5 + x_1^{12}).$$

Wir setzen in der Formel

$$Z_G\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{12}}\right) Z_H(1+x_1, 1+2x_2, \dots, 1+12x_{12})\Big|_{x_1=\cdots=x_{12}=0}$$

ein, werfen den Computer an, und erhalten

. . . .

Für unser Reihenproblem gilt:

$$Z_G = \frac{1}{2}(1 + x_2^6)$$

und

$$Z_H = \frac{1}{24}(4x_{12} + 2x_6^2 + 2x_4^3 + 2x_3^4 + 7x_2^6 + 6x_1^2 x_2^5 + x_1^{12}).$$

Wir setzen in der Formel

$$Z_G\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{12}}\right) Z_H(1{+}x_1, 1{+}2x_2, \dots, 1{+}12x_{12})\Big|_{x_1=\dots=x_{12}=0}$$

ein, werfen den Computer an, und erhalten

. . . .

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Für unser Reihenproblem gilt:

$$Z_G = \frac{1}{2}(1 + x_2^6)$$

und

$$Z_H = \frac{1}{24}(4x_{12} + 2x_6^2 + 2x_4^3 + 2x_3^4 + 7x_2^6 + 6x_1^2x_2^5 + x_1^{12}).$$

Wir setzen in der Formel

$$Z_G\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{12}}\right) Z_H(1+x_1, 1+2x_2, \dots, 1+12x_{12})\Big|_{x_1=\dots=x_{12}=0}$$

ein, werfen den Computer an, und erhalten

. . . .

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Für unser Reihenproblem gilt:

$$Z_G = \frac{1}{2}(1 + x_2^6)$$

und

$$Z_H = \frac{1}{24}(4x_{12} + 2x_6^2 + 2x_4^3 + 2x_3^4 + 7x_2^6 + 6x_1^2x_2^5 + x_1^{12}).$$

Wir setzen in der Formel

$$Z_G\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{12}}\right) Z_H(1+x_1, 1+2x_2, \dots, 1+12x_{12})\Big|_{x_1=\dots=x_{12}=0}$$

ein, werfen den Computer an, und erhalten

. . . .

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Für unser Reihenproblem gilt:

$$Z_G = \frac{1}{2}(1 + x_2^6)$$

und

$$Z_H = \frac{1}{24}(4x_{12} + 2x_6^2 + 2x_4^3 + 2x_3^4 + 7x_2^6 + 6x_1^2 x_2^5 + x_1^{12}).$$

Wir setzen in der Formel

$$Z_G\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{12}}\right) Z_H(1{+}x_1, 1{+}2x_2, \dots, 1{+}12x_{12})\Big|_{x_1=\cdots=x_{12}=0}$$

ein, werfen den Computer an, und erhalten

. . . .

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Für unser Reihenproblem gilt:

$$Z_G = \frac{1}{2}(1 + x_2^6)$$

und

$$Z_H = \frac{1}{24}(4x_{12} + 2x_6^2 + 2x_4^3 + 2x_3^4 + 7x_2^6 + 6x_1^2x_2^5 + x_1^{12}).$$

Wir setzen in der Formel

$$Z_G\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{12}}\right) Z_H(1+x_1, 1+2x_2, \dots, 1+12x_{12})\Big|_{x_1=\cdots=x_{12}=0}$$

ein, werfen den Computer an, und erhalten

. . . .

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Für unser Reihenproblem gilt:

$$Z_G = \frac{1}{2}(1 + x_2^6)$$

und

$$Z_H = \frac{1}{24}(4x_{12} + 2x_6^2 + 2x_4^3 + 2x_3^4 + 7x_2^6 + 6x_1^2 x_2^5 + x_1^{12}).$$

Wir setzen in der Formel

$$Z_G\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{12}}\right) Z_H(1+x_1, 1+2x_2, \dots, 1+12x_{12})\Big|_{x_1=\dots=x_{12}=0}$$

ein, werfen den Computer an, und erhalten

. . . .

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Für unser Reihenproblem gilt:

$$Z_G = \frac{1}{2}(1 + x_2^6)$$

und

$$Z_H = \frac{1}{24}(4x_{12} + 2x_6^2 + 2x_4^3 + 2x_3^4 + 7x_2^6 + 6x_1^2 x_2^5 + x_1^{12}).$$

Wir setzen in der Formel

$$Z_G\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{12}}\right) Z_H(1+x_1, 1+2x_2, \dots, 1+12x_{12})\Big|_{x_1=\cdots=x_{12}=0}$$

ein, werfen den Computer an, und erhalten

. . . .

$$9\,985\,920.$$

Diese und andere Fragen der Kombinatorik von Tönen und Tonreihen (etwa: wieviele verschiedene Akkorde kann man bilden, usw.) sind systematisch für Reihen bestehend aus n Tönen von

HARALD FRIPERTINGER

in

Enumeration in Musical Theory, Séminaire Lotharingien de Combinatoire **B26** (1991), Artikel B26a

behandelt worden. Er weist nach, daß für jedes Problem die **Pólya–Redfield Theorie** die richtigen Werkzeuge zur Verfügung stellt.

Thema und Umkehrung

Ludwig van Beethoven (1770–1827): *Sonate As-Dur op. 110* (1821)

Thema und Umkehrung

LUDWIG VAN BEETHOVEN (1770–1827): *Sonate As-Dur op. 110* (1821)

Der Schlußsatz verschmilzt einen langsamen Satz mit einer Fuge.

Thema und Umkehrung

Ludwig van Beethoven (1770–1827): *Sonate As-Dur op. 110* (1821)

Der Schlußsatz verschmilzt einen langsamen Satz mit einer Fuge.

Der Beginn der Fuge (das Thema):

Thema und Umkehrung

Ludwig van Beethoven (1770–1827): *Sonate As-Dur op. 110* (1821)

Der Schlußsatz verschmilzt einen langsamen Satz mit einer Fuge.

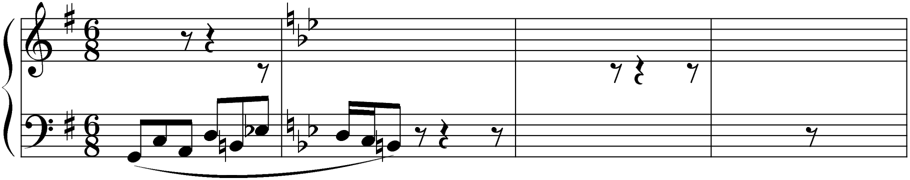
Der Beginn der Fuge (das Thema):

Die „Wiederkehr“ der Fuge:

Thema und Umkehrung

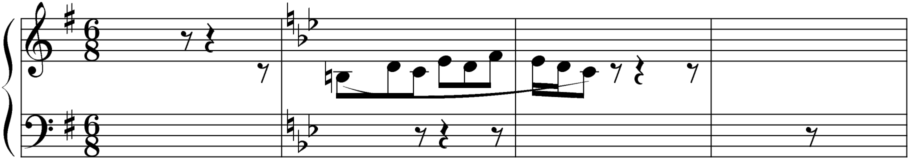
Ludwig van Beethoven (1770–1827): *Sonate As-Dur op. 110* (1821)

Ludwig van Beethoven (1770–1827): *Sonate As-Dur op. 110* (1821)



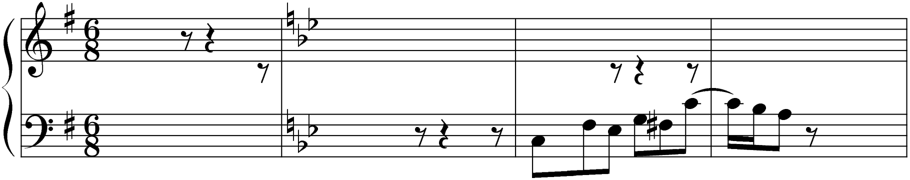
Thema und Umkehrung

Ludwig van Beethoven (1770–1827): *Sonate As-Dur op. 110* (1821)



Thema und Umkehrung

Ludwig van Beethoven (1770–1827): *Sonate As-Dur op. 110* (1821)



Ludwig van Beethoven (1770–1827): *Sonate As-Dur op. 110* (1821)

LUDWIG VAN BEETHOVEN (1770–1827): *Sonate As-Dur op. 110* (1821)

Thema und Umkehrung

Ludwig van Beethoven (1770–1827): *Sonate As-Dur op. 110* (1821)

Thema und Umkehrung

Ludwig van Beethoven (1770–1827): *Sonate As-Dur op. 110* (1821)

Thema und Umkehrung

LUDWIG VAN BEETHOVEN (1770–1827): *Sonate As-Dur op. 110* (1821)

Thema und Umkehrung

Ludwig van Beethoven (1770–1827): *Sonate As-Dur op. 110* (1821)

Schlußsatz:

Adagio ma non troppo — Recitativo — Arioso dolente — Fuga: Allegro ma non troppo — L'istesso tempo di Arioso: perdendo le forze, dolente — L'istesso tempo della Fuga: l'inversione della Fuga