ZYLINDRISCHE MASZE UND DIE RADON-NIKODYM-EIGENSCHAFT VON BANACH-RÄUMEN

DISSERTATION

zur Erlangung des Doktorgrades

an der

philosophischen Fakultät

der

Universität Wien

Eingereicht von

Walter Schachermayer

Wien 1976

Mein aufrichtiger Dank gilt in erster Linie Herrn Prof. J. Cigler, denn es waren hauptsächlich seine Vorlesungen, die mein Interesse an der Mathematik geweckt haben, obwohl ich sie anfangs als Student der Betriebswirtschaft nur nebenbei besuchen konnte.

Sodann möchte ich den Professoren A. Badrikian, P. Krée und L. Schwartz dafür danken, dasz sie mich während der Arbeit an der Dissertation in Frankreich in jeder Weise unterstützt haben.

Schlieszlich bedanke ich mich bei S. Chevet, V. Losert und J. St-Raymond für wertvolle Hinweise.

INHALTSVERZEICHNIS

EINLEITUNG

Bei der Abfassung meiner Dissertation habe ich vor allem versucht, sie auch für Leute lesbar zu Machen, die die Notationen der Theorie der zylindrischen Masze nicht kennen. Kapitel 1 und 3 geben daher eine kurze Einführung in diese Theorie, gestützt vor allem auf das Buch von Schwartz [27] und die Arbeit von Le Cam [18]. Natürlich findet man in diesen Kapiteln keine neuen Resultate ; aber ich glaube dennoch, dasz die Art und Weise der Darstellung von gewissem Interesse ist, vor allem die zentrale Rolle, die von Satz 1.10. gespielt wird.

Im Kapitel 2 geben wir eine Verallgemeinerung des Satz von Kolmogoroff : Jedes zylindrische Produkt-Masz auf einem Produkt-Raum ist τ-regulär. Ein Gegenbeispiel zeigt, dasz das für ein beliebiges zylindrisches Masz auf einem Produkt-Raum nicht gelten musz.

Im Kapitel 4 definieren wir das Bild eines zylindrisches Maszes unter einer nach unten halbstetigen positiven Funktion und insbesondere unter einer Moreau-Funktion. Die skalare Konzentration eines zylindrischen Maszes μ auf den schwach kompakten, konvexen Teilmengen eines topologischen Vektorraumes X erlaubt es, eine gewisse τ-Regularitäts-Eigenschaft der Moreau-Funktionen zu beweisen. Dies hat einige interessante Konzequenzen, insbesondere die Lösung einer in ([27], p. 341) gestellten Frage.

Die Kapitel 5 und 7 sind der Radon-Nikodym-Eigenschaft von Banach-Räumen B gewidmet : Unter der Bedingung der skalaren Konzentration auf den $\sigma(B, B')$-kompakten Mengen, fallen die Radon-Wahrscheinlichkeits-Masze auf $\sigma(B'', B')$ und $\sigma(B, B')$ genau dann zusammen, wenn B die Radon-Nikodym-Eigenschaft hat.

Im Kapitel 7 zeigen wir für einen dualen Banachraum E', der die Radon-Nikodym-Eigenschaft besitzt, dasz er bezüglich der Topologie $\sigma(E', E'')$ ein universell Radon-meszbarer Raum ist, d.h. eine universell Radon-meszbare Teilmenge seiner Stone-Čech-Kompaktifizierung. Daraus folgt, dasz die τ-regulären zylindrischen Masze auf $\sigma(E', E'')$ mit den Radon-Wahrscheinlichkeits-Maszen auf $\sigma(E', E'')$ zusammenfallen.

Das Kapitel 6, in Verbindung mit einem Lemma, das man im Kapitel 5 verwendet, gibt Charakterisationen der Vervollständigung eines lokalkonvexen Vektorraum E mittels der Mackey-Topologie $\tau(E', E)$. Sie sind Folgerungen aus dem bekannten Satz von Grothendieck.

Schlieszlich wird in einem Appendix noch die übliche Methode bei der Behandlung zylindrischer Masze, in ein "geeignetes Kompaktum" einzubetten, näher untersucht. Es wird gezeigt, dasz alle Ergebnisse unabhängig von der Wahl des "geeigneten Kompaktums" sind.

1. RADON-WAHRSCHEINLICHKEITEN, τ-REGULÄRE WAHRSCHEINLICHKEITEN UND ZYLINDRISCHE MASZE

1.1. Sei $\mathcal{X}$ ein vollständig regulärer topologischer Raum und $\mathcal{B}$ die σ-Algebra der Borel-Mengen von $\mathcal{X}$. Eine Wahrscheinlichkeit m auf $\mathcal{B}$ (d.h. ein positives, normiertes, σ-additives Masz) heiszt :

a) Radon-Wahrscheinlichkeit, wenn sie nach innen regulär bezüglich der kompakten Teilmengen von $\mathcal{X}$ ist, d.h. wenn für jedes $B \in \mathcal{B}$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge K existiert, enthalten in B, sodasz $m\,(B \setminus K) < \varepsilon$. [27]

b) τ-reguläre Wahrscheinlichkeit, wenn sie die folgende Bedingung erfüllt [18,21,30]*:

(τ) für jede nach oben filtrierende Familie $\{\mathcal{O}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ von offenen Mengen von $\mathcal{X}$, gilt

$$\sup_{\alpha\in A} m(\mathcal{O}_\alpha) = m\,(\bigcup_{\alpha\in A} \mathcal{O}_\alpha).$$

Bekanntlich gilt a) $\Rightarrow$ b), aber die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht.

Das folgende Lemma ist bekannt ([23], ex. I, 4.4.)

1.2. LEMMA : Sei $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ ein (abstrakter) Wahrscheinlichkeitsraum und sei Ω' eine Teilmenge von Ω mit äuszerem Masz eins :

$$P^*(\Omega') = \inf\ \{P\,(T) : T \in \mathcal{T},\ T \supset \Omega'\} = 1$$

Dann definiert die folgende Formel die von P auf der Spur-σ-Algebra $\mathcal{T} \cap \Omega'$ induzierte Wahrscheinlichkeit

$$Q\,(B) := P\,(A) \tag{1.a}$$

wobei $B \in \mathcal{T} \cap \Omega'$ und $A \in \mathcal{T}$ (beliebig), sodasz $A \cap \Omega' = B$.

□

---

* Sunyach nennt ein τ-reguläres Masz "normal". Ich ziehe die auf MacShane zurückgehende Notation vor, da es schon genug "normale" Dinge in der Mathematik gibt, vor allem in unserem Fall das Gausz-Masz.

Im Falle einer Radon-Wahrscheinlichkeit gilt darüber hinaus :

1.3. LEMMA (Siehe auch [30]) :

Sei $\mathfrak{X}$ ein vollständig regulärer topologischer Raum, $\mathcal{B}$ seine Borel-σ-Algebra, und p eine Radon-Wahrscheinlichkeit auf $\mathfrak{X}$.

Sei $\mathcal{Y}$ ein Teilraum von $\mathfrak{X}$. Wenn $p^*(\mathcal{Y}) = \inf \{p(B) : B \in \mathcal{B}, B \supseteq \mathcal{Y}\} = 1$, dann ist die von p auf der σ-Algebra $\mathcal{B} \cap \mathcal{Y}$ (das ist die Borel-σ-Algebra von $\mathcal{Y}$) gemäsz 1.2. induzierte Wahrscheinlichkeit τ-regulär und nach auszen regulär bezüglich der offenen Teilmengen von $\mathcal{Y}$.

q ist eine Radon-Wahrscheinlichkeit genau dann, wenn $\mathcal{Y}$ eine p-meszbare Teilmenge von $\mathfrak{X}$ ist, das heiszt $p_*(\mathcal{Y}) = 1$.

BEWEIS :

1) Wir wissen bereits, dasz q ein Borel-Masz ist. Sei $\{O_\alpha\}_{\alpha\in A}$ eine nach oben filtrierende Familie von offenen Mengen in $\mathcal{Y}$. Für jedes $\alpha \in A$, sei $\tilde{O}_\alpha$ eine offene Menge in $\mathfrak{X}$, sodasz $\tilde{O}_\alpha \cap \mathcal{Y} = O_\alpha$.

Man kann annehmen, dasz die Familie $\{\tilde{O}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ nach oben filtrierend ist (indem man $\tilde{O}'_\alpha := \bigcup_{\beta\leq\alpha} \tilde{O}_\beta$ setzt).

Dann gilt

$$\sup_{\alpha\in A} q(O_\alpha) = \sup_{\alpha\in A} p(\tilde{O}_\alpha) = p\Big(\bigcup_{\alpha\in A} \tilde{O}_\alpha\Big) = q\Big(\bigcup_{\alpha\in A} \tilde{O}_\alpha \cap \mathcal{Y}\Big) = q\Big(\bigcup_{\alpha\in A} O_\alpha\Big).$$

2) Wenn B eine Borel-Menge von $\mathcal{Y}$ ist, und A eine Borel-Menge von $\mathfrak{X}$, sodasz $A \cap \mathcal{Y} = B$, dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $\tilde{O}$ in $\mathfrak{X}$, die A enthält, sodasz $p(\tilde{O} \setminus A) < \varepsilon$. Die Menge $O := \tilde{O} \cap \mathcal{Y}$ ist offen in $\mathcal{Y}$, enthält B und $q(O \setminus B) < \varepsilon$.

3) Sei $p_*(\mathcal{Y}) = 1$. Wir haben gerade gezeigt, dasz q nach innen regulär bezüglich der abgeschlossenen Mengen ist. Um zu zeigen, dasz q eine Radon-Wahrscheinlichkeit ist, genügt es daher, dasz für $\varepsilon > 0$ eine kompakte Teilmenge K von $\mathcal{Y}$ existiert, sodasz $q(K) = p(K) \geq 1 - \varepsilon$. Aber das ist genau die Bedingung $p_*(\mathcal{Y}) = 1$.

Umgekehrt sei q ein Radon-Masz. Dann existiert eine Folge von kompakten Teilmenge K_n von $\mathcal{Y}$, sodasz $q(K_n) = p(K_n) > 1 - \frac{1}{n}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ ist dann eine Borel-Menge in $\mathfrak{X}$, enthalten in $\mathcal{Y}$ und von p-Masz 1, d.h. $p_*(\mathcal{Y}) = 1$. □

1.4. Sei $\{\mathcal{X}_i, \pi_{i_2,i_1}\}_{i\in I}$ ein projektives System von vollständig regulären Räumen und sei Z der projektive Limes und $p_i : Z \to \mathcal{X}_i$ die kanonischen Abbildungen. Wir nehmen in der Folge immer an, dasz die Abbildungen p_i surjektiv sind. Insbesondere sind dann die Abbildungen π_{i_2,i_1} surjektiv.

Man nennt ein <u>zylindrisches Masz</u> auf dem projektiven System $\{\mathcal{X}_i, \pi_{i_2,i_1}\}_{i\in I}$ eine Familie $\{\mu_i\}_{i\in I}$ von Radonwahrscheinlichkeiten auf den Räumen $\mathcal{X}_i$, die die folgende Kohärenzbedingung erfüllt :

(C) Wenn $i_1 \geqslant i_2$, $\pi_{i_2,i_1}(\mu_{i_1}) = \mu_{i_2}$.

Selbstverständlich wäre "zylindrische Wahrscheinlichkeit" die korrekte Bezeichnung. Aber die Bezeichnung "zylindrisches Masz" ist allgemein üblich. Sei $\mathcal{X}$ ein Teilraum von Z, von dem wir annehmen, dasz er die folgende Surjektivitätsbedingung erfüllt :

(S) Für jedes $i \in I$ ist die Restriktion von p_i auf $\mathcal{X}$ eine surjektive Abbildung $\pi_i : \mathcal{X} \to \mathcal{X}_i$.

Die Mengen von der Form $\pi_i^{-1}(B_i)$, wobei B_i eine Borel-Menge in $\mathcal{X}_i$ ist, heiszen Zylinder (immer im Sinn von Borelsche Zylinder) von $\mathcal{X}$ mit Basis $\mathcal{X}_i$.

Definieren wir für jeden Zylinder $B = \pi_i^{-1}(B_i)$ von $\mathcal{X}$

$$\mu(B) := \mu_i(B_i) \tag{1.b}$$

Wegen der Bedingung (C) hängt die Definition nicht von der speziellen Wahl von i ab. Man kann daher - für festes $\mathcal{X}$ - den Begriff eines zylindrischen Mazses reinterpretieren : ein zylindrisches Masz auf $\mathcal{X}$, in bezug auf ein projektives System $\{\mathcal{X}_i, \pi_{i_2,i_1}\}_{i\in I}$, ist eine additive Mengenfunktion μ auf den Zylindern von $\mathcal{X}$, sodasz die Restriktion auf die Zylinder mit einer gemeinsamen (festen) Basis $\mathcal{X}_i$ eine Radon-Wahrscheinlichkeit ist (wenn man die Zylinder mit Basis $\mathcal{X}_i$ mit den Borel-Mengen von $\mathcal{X}_i$ identifiziert).

Da es in den Anwendungen dieser Definition immer klar sein wird, welches projektive System $\{\mathcal{X}_i, \pi_{i_2,i_1}\}_{i\in I}$ gemeint ist, sagen wir einfach ein "zylindrisches Masz auf $\mathcal{X}$". Das darf jedoch nicht darüber hinwegtäuschen, dasz die Bezeichnung sich auf des projektive System $\{\mathcal{X}_i, \pi_{i_2,i_1}\}_{i\in I}$ bezieht.

Wenn $\mathcal{H}_1$ ein zweiter Teilraum von $\mathcal{Z}$ ist, der (S) erfüllt, so gibt es eine bijektive Zuordnung zwischen den Zylindrischen Maszen μ auf $\mathcal{H}$ und μ_1 auf $\mathcal{H}_1$. Wenn $\mathcal{H}_1 \supset \mathcal{H}$ dann ist die Zuordnung für jeden Zylinder B_1 in $\mathcal{H}_1$ gegeben durch :

$$\mu_1 \ (B_1) \ = \ \mu \ (B_1 \cap \mathcal{H}) \tag{1.c}$$

(wegen der Formel (1.b)).

Ab dem 3. Kapitel werden ausschlieszlich zylindrische Masze auf topologischen Vektorräumen behandelt :

1.5. BEISPIEL

Sei $\langle X, Y\rangle$ ein duales Paar von Vektorräumen. Sei $\{Z_i\}_{i\epsilon I}$ die Familie der $\sigma(X, Y)$-abgeschlossenen Teilräume von X von endlicher Kodimension und $X_i = X/Z_i$ die Familie der durch die Z_i definierten (endlich-dimensionalen) Quotienten-Räume. I ist nach oben filtrierend bezüglich der Ordnung $i_1 \geqslant i_2 \Longleftrightarrow Z_{i_1} \subseteq Z_{i_2}$.

Seien, für $i_1 \geqslant i_2$, $\pi_{i_2,i_1} : X_{i_1} \to X_{i_2}$ die kanonischen Projektionen.

Es ist bekannt dasz der projektive Limes von $\{X_i, \pi_{i_2,i_1}\}_{i\epsilon I}$ algebraisch und topologisch isomorph zu $\sigma(Y^*, Y)$ ist, dem algebraischen Dualraum von Y mit der Topologie $\sigma(Y^*, Y)$ ([27]; p. 177).

Mit $\mathcal{Z} = \sigma(Y^*, Y)$ und $\mathcal{H} = \sigma(X, Y)$ findet man daher die Situation von 1.4. Eine zylindrisches Masz μ auf $\sigma(X, Y)$ ist daher eine kohärente Familie $\{\mu_i\}_{i\epsilon I}$ von Borel-Wahrscheinlichkeiten auf X_i (da $X_i \cong \mathbb{R}^n$ ein polnischer Raum), das man als additive Mengenfunktion μ auf den Zylindern von X interpretieren kann, deren Restriktionen auf die Zylinder mit einer gemeinsamen, festen Basis σ-additiv ist.

Bemerken wir noch, dasz die Familie $\{\mu_i\}_{i\epsilon I}$ ein zylindrisches Masz μ_1 auf jedem Vektorraum X_1, der in Dualität zu Y steht, definiert.

1.6. Kommen wir zum allgemeinen Fall eines zylindrischen Maszes μ auf $\mathcal{H}$ (in bezug auf ein projektives System $\{\mathcal{H}_i, \pi_{i_2,i_1}\}_{i\epsilon I}$) zurück :

Bezeichnen wir mit $\mathcal{A}$ die von den Zylindern von $\mathcal{H}$ erzeugte σ-Algebra und mit $\mathcal{B}$ die σ-Algebra der Borel-Mengen von $\mathcal{H}$. $\mathcal{A}$ ist eine (im allgemeinen echte) Teil-σ-Algebra von $\mathcal{B}$.

DEFINITION

a) μ heiszt σ-additiv, wenn es die Restriktion eines Maszes m auf $\mathcal{A}$ ist,

b) μ heiszt τ-regulär, wenn es die Restriktion eines τ-regulären Maszes m auf $\mathcal{B}$ ist,

c) μ heiszt ein Radon-Masz, wenn es die Restriktion eines Radon-Maszes m auf $\mathcal{B}$ ist.

BEMERKUNG : In allen 3 Fällen ist m, wenn es existiert, eindeutig bestimmt, (für a) nach dem klassischen Fortsetzungsatz, für b) und c), da die offenen Zylinder eine Basis für die Topologie von $\mathcal{X}$ bilden). μ ist σ-additiv [bzw. τ-regulär], wenn für jede wachsende Folge $\{\mathcal{O}_n\}_{n=1}^{\infty}$ [bzw. für jedes nach oben filtrierende System $\{\mathcal{O}_\alpha\}_{\alpha\in A}$], von offenen Zylindern, die $\mathcal{X}$ überdecken, gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(\mathcal{O}_n) = 1$ [bzw. $\sup_{\alpha\in A} \mu(\mathcal{O}_\alpha) = 1$]. (Das wird eine Konsequenz des Beweises von Satz 1.10 sein).

Bemerken wir noch, dasz hier zum ersten Mal die Rolle von $\mathcal{X}$ (anstatt des projektiven Systems $\{\mathcal{X}_i, \pi_{i_2,i_1}\}_{i\in I}$) eingeht.

1.7. Bezeichnen wir mit $\mathcal{C}_{cyl}(\mathcal{X})$ [$\mathcal{C}^+_{cyl}(\mathcal{X})$] den Raum der reellen [positiven], stetigen, beschränkten, zylindrischen Funktionen auf $\mathcal{X}$, d.h. der Funktionen der Form $f = f_i \circ \pi_i$, mit $f_i \in \mathcal{C}(\mathcal{X}_i)$ [bzw. $f_i \in \mathcal{C}^+(\mathcal{X}_i)$].

Man kann nun das Integral einer Funktion $f \in \mathcal{C}_{cyl}(\mathcal{X})$ bezüglich μ und das Bild-Masz von μ unter f definieren : wenn f von der Form $f_i \circ \pi_i$, dann

$$\int_{\mathcal{X}} f(x)\, d(x) := \int_{\mathcal{X}_i} f_i(\xi)\, d\mu_i(\xi) \qquad (1.d)$$

und

$$f(\mu) := f_i(\mu_i)\ . \qquad (1.e)$$

Die Kohärenzbedingung (C) stellt sicher, dasz die Definition nicht von der speziellen Wahl von $i\in I$ abhängt.

1.8. SATZ [27]

Sei $\{\mathcal{X}_i, \pi_{i_2,i_1}\}_{i\in I}$ ein projektives System von kompakten Räumen. Jedes zylindrische Masz μ auf dem projektiven Limes $\mathcal{X} = \varprojlim_{i\in I} \mathcal{X}_i$ ist ein Radon-Masz.

BEWEIS : Klarerweise ist $\mathcal{X}$ kompakt.

Nach der Formel (1.d) definiert μ eine positive Linearform ϕ_μ von Norm 1 auf $\mathcal{C}_{cyl}(\mathcal{X})$. Es folgt aus dem Satz von Stone-Weierstrasz, dasz $\mathcal{C}_{cyl}(\mathcal{X})$ [bzw. $\mathcal{C}^+_{cyl}(\mathcal{X})$] dicht in $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ [bzw. $\mathcal{C}^+(\mathcal{X})$], dem Raum der stetigen, reellen [positiven], beschränkten Funktionen auf $\mathcal{X}$ mit der Topologie der $||.||_\infty$-Norm. ϕ_μ läszt sich daher in eine positive Linearform ϕ_m auf $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ fortsetzen. ϕ_m definiert ein Radon-Masz m auf $\mathcal{X}$, das klarerweise eine Fortsetzung von μ ist.

□

1.9. Dieser Satz führt in natürlicher Weise zur folgenden Methode bei der Behandlung von Zylindrischen Maszen : Man bettet jedes $\mathcal{X}_i$ (isomorph) in einen kompakten Raum $s_i : \mathcal{X}_i \to \hat{\mathcal{X}}_i$ ein, zum Beispiel seine Stone-Čech-Kompaktifikation. Wir nehmen an, dasz $\mathcal{X}_i$ dicht in $\hat{\mathcal{X}}_i$ ist und dasz die Abbildungen π_{i_2,i_1} eine stetige Fortsetzung $\hat{\pi}_{i_2,i_1} : \hat{\mathcal{X}}_{i_1} \to \hat{\mathcal{X}}_{i_2}$ habe. (Diese Bedingungen sind immer erfüllt, wenn man als $\hat{\mathcal{X}}_i$ die Stone-Čech-Kompaktifizierungen wählt. Wir werden im Appendix zeigen, dasz die spezielle Wahl der Kompaktifiezierung keinerlei Rolle spielt.)

$\{\hat{\mathcal{X}}_i, \hat{\pi}_{i_2,i_1}\}_{i\epsilon I}$ ist ein projektives System, das die Bedingungen von 1.4. erfüllt. Sei $\hat{\mathcal{X}}$ der projektive Limes mit den Abbildungen $\hat{\pi}_i : \hat{\mathcal{X}} \to \hat{\mathcal{X}}_i$.

Z, der projektive Limes von $\{\mathcal{X}_i, \pi_{i_2,i_1}\}_{i\epsilon I}$, und erst recht $\mathcal{X}$, sind isomorph in $\hat{\mathcal{X}}$ eingebettet und ihre Bilder sind dicht in $\hat{\mathcal{X}}$. Wir werden Z und $\mathcal{X}$ mit ihren Bildern in $\hat{\mathcal{X}}$ identifizieren.

Indem man $\hat{\mu}_i := s_i(\mu_i)$ setzt, erhält man ein zylindrisches Masz $\hat{\mu} := \{\hat{\mu}_i\}_{i\epsilon I}$ auf $\hat{\mathcal{X}}$, das nach 1.8. ein Radon-Masz ist. Man nennt $\hat{\mu}$ das zu μ assoziierte Radon-Masz auf $\hat{\mathcal{X}}$.

Der Zusammenhang zwischen μ und $\hat{\mu}$ ist für jeden Zylinder $\hat{B} = \hat{\pi}_i^{-1}(\hat{B}_i)$, $\hat{B}_i$ Borel-Menge in $\hat{\mathcal{X}}_i$, gemäsz der Formel (1.b) und der Definition von $\hat{\mu}_i$ gegeben durch

$$\underline{\underline{\hat{\mu}(\hat{B})}} = \hat{\mu}_i(\hat{B}_i) = \mu_i(\hat{B}_i \cap \mathcal{X}_i) = \mu\left(\pi_i^{-1}(\hat{B}_i \cap \mathcal{X}_i)\right) = \underline{\underline{\mu(\hat{B} \cap \mathcal{X})}}. \quad (1.f)$$

Wir haben durch diese Methode das zylindrische Masz μ zu einem Radon-Masz $\hat{\mu}$ (d.h. zum bestmöglichen) gemacht, indem wir $\mathcal{X}$ in einen (viel gröszeren)

Raum $\hat{\mathfrak{X}}$ eingebettet haben. Aber man möchte natürlich gute Eigenschaften von μ schon auf $\mathfrak{X}$ haben.

Bezeichnen wir mit $\hat{\mathcal{A}}$ die von den Zylindern von $\hat{\mathfrak{X}}$ erzeugte σ-Algebra und mit $\hat{\mathcal{B}}$ die Borel-σ-Algebra von $\hat{\mathfrak{X}}$. Sei $\hat{\mu}_{\hat{\mathcal{A}}}$ die Restriktion von $\hat{\mu}$ auf $\hat{\mathcal{A}}$.

1.10 SATZ [18] :

Sei μ ein zylindrisches Masz auf $\mathfrak{X}$ und $\hat{\mathfrak{X}}$ und $\hat{\mu}$ wie in 1.9. konstruiert.

(i) μ ist Radon-Masz $\iff$ $\hat{\mu}_*(\mathfrak{X}) = 1$

(ii) μ ist τ-regulär $\iff$ $\hat{\mu}^*(\mathfrak{X}) = 1$

(iii) μ ist σ-additiv $\iff$ $(\hat{\mu}_{\hat{\mathcal{A}}})^*(\mathfrak{X}) = 1$.

BEWEIS : Die Richtung $\Leftarrow$ von (i), (ii) und (iii), folgt aus den Lemmas 1.2. und 1.3. und der Formel (1.f).

(ii) $\Rightarrow$: Sei O eine offene Menge in $\hat{\mathfrak{X}}$, die $\mathfrak{X}$ enthält. Da die offenen Zylinder von $\hat{\mathfrak{X}}$ eine Basis der Topologie von $\hat{\mathfrak{X}}$ bilden, ist O Vereinigung der nach oben filtrierenden Menge $\{O_\alpha\}_{\alpha\in A}$ der offenen Zylinder, die in O enthalten sind. Da $O \supseteq \mathfrak{X}$, $\bigcup_{\alpha\in A}(O_\alpha \cap \mathfrak{X}) = \mathfrak{X}$. Da wir annehmen, dasz μ τ-regulär ist, gilt nach der Formel (1.f)

$$\hat{\mu}(O) = \sup_{\alpha\in A} \hat{\mu}(O_\alpha) = \sup_{\alpha\in A} \mu(O_\alpha \cap \mathfrak{X}) = 1 .$$

Daher

$$\underline{\hat{\mu}^*(\mathfrak{X}) = 1} .$$

(i) $\Rightarrow$: folgt aus (ii) $\Rightarrow$ und dem letzten Teil das Lemma 1.3.

(iii) $\Rightarrow$: Auf der Algebra der Zylinder von $\hat{\mathfrak{X}}$, die $\hat{\mathcal{A}}$ erzeugt, ist $\hat{\mu}_{\hat{\mathcal{A}}}$ klarerweise nach auszen regulär bezüglich der offenen Zylinder. Es folgt aus dem klassischen Fortsetzungssatz (und einem $\frac{\varepsilon}{2^k}$-Argument), dasz $\hat{\mu}_{\hat{\mathcal{A}}}$ auf $\hat{\mathcal{A}}$ nach auszen regulär bezüglich der abzählbaren Vereinigungen von offenen Zylindern, d.h. bezüglich der offenen Mengen in $\hat{\mathcal{A}}$ ist.

Sei O also eine offene Menge in $\hat{\mathcal{A}}$, die $\mathfrak{X}$ enthält. O hängt nur von abzählbar vielen Indizes $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$ aus I ab, die man als steigende Folge annehmen kann. Daher $O = \bigcup_{k=1}^{\infty} O_{i_k}$, wobei O_{i_k} der gröszte offene Zylinder mit Basis $\mathfrak{X}_{i_k}$

ist, der in $\mathcal{O}$ enthalten ist. Es gilt wieder nach Voraussetzung und der Formel (1.f)

$$\hat{\mu}_{\hat{\mathcal{A}}}(\mathcal{O}) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \hat{\mu}(\mathcal{O}_{i_k}) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \mu(\mathcal{O}_{i_k} \cap \mathcal{H}) = 1 .$$ □

Bemerken wir noch, dasz wir insbesondere die in 1.6 nach der Definition aufgestellten Behauptungen bewiesen haben.

1.11. KOROLLAR (Satz von Prokhorov ([27], p. 74) :

Ein zylindrisches Masz μ auf $\mathcal{H}$ ist genau dann ein Radon-Masz, wenn es die folgende (ε, K)-Bedingung erfüllt:

(ε, K) : Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine kompakte Menge K von $\mathcal{H}$, sodasz für jeden Zylinder B in $\mathcal{H}$, der K enthält, gilt

$$\mu(B) \geqslant 1 - \varepsilon .$$

BEWEIS : Die Notwendigkeit der Bedingung ist eine unmittelbare Folge der Definition 1.6.

Um zu zeigen, dasz sie hinreichend ist, sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei K eine kompakte Menge in $\mathcal{H}$ (das wir mit einer Teilmenge von $\hat{\mathcal{H}}$ identifizieren), die (ε, K) erfüllt. K ist auch in $\hat{\mathcal{H}}$ kompakt und - nach einer wohlbekannten Eigenschaft von projektiven Limiten - der Durchschnitt der nach unten filtrierenden Familie $\{K_\alpha\}_{\alpha\in A}$ von abgeschlossenen (= kompakten) Zylindern, die K enthalten. Daher

$$\hat{\mu}(K) = \inf_{\alpha\in A} \hat{\mu}(K_\alpha) = \inf_{\alpha\in A} \mu(K_\alpha \cap \mathcal{H}) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Daher $\hat{\mu}_*(\mathcal{H}) \geqslant 1 - \varepsilon$, d.h. $\hat{\mu}_*(\mathcal{H}) = 1$ und man kann 1.10 anwenden.

□

1.12. KOROLLAR (Satz von Kolmogoroff) :

Jedes zylindrische Masz μ (Definition 1.4. !) auf einem projektiven Limes $\mathcal{H} = \varprojlim_{i\in I} (\mathcal{H}_i, \pi_{i_2,i_1})$ ist σ-additiv.

BEWEIS : Betten wir $\mathcal{H}$ in ein $\hat{\mathcal{H}} = \varprojlim_{i\in I} (\hat{\mathcal{H}}_i, \hat{\pi}_{i_2,i_1})$ ein (gemäsz 1.9.). Sei $\hat{A}$ aus $\hat{\mathcal{A}}$ gegeben, das $\mathcal{H}$ enthält, und sei $\{i_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine steigende Folge von Indizes, sodasz A nur von $\{i_n\}_{n=1}^{\infty}$ abhängt.

Um $\hat{\mu}(\hat{A}) = 1$ zu zeigen, was wegen 1.10. die Behauptung ergeben wird, musz man nur faktorisieren :

Sei $\mathfrak{X}_\sigma = \varprojlim_{n\to\infty} (\mathfrak{X}_{i_n}, \pi_{i_n,i_{n+1}})$ und $\hat{\mathfrak{X}}_\sigma = \varprojlim_{n\to\infty} (\hat{\mathfrak{X}}_{i_n}, \hat{\pi}_{i_n,i_{n+1}})$. Wegen der universellen Eigenschaft der projektiven Limiten (für $\mathfrak{X}_\sigma$ und $\hat{\mathfrak{X}}_\sigma$) existieren kanonische Abbildungen $p : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}_\sigma$ und $\hat{p} : \hat{\mathfrak{X}} \to \hat{\mathfrak{X}}_\sigma$, die wegen der Surjektivität der π_{i_2,i_1} und $\hat{\pi}_{i_2,i_1}$ ebenfalls surjektiv sind ([6], Ch. III, §7, n° 4 prop. 1).

Wegen der Formel (1.f) ist das Bild von $\hat{\mu}$ unter $\hat{p}$, $\hat{\mu}_\sigma := \hat{p}(\hat{\mu})$, das Radon-Masz auf $\hat{\mathfrak{X}}_\sigma$, das zum zylindrischen Masz $\mu_\sigma := \{\mu_{i_n}\}_{n=1}^\infty$ assoziiert ist. ($\mu_\sigma = p(\mu)$, wenn man den Begriff des Bild eines zylindrischen Maszes eingeführt hat ([27], p. 181)).

Nach Konstruktion $\hat{A} = \hat{p}^{-1}\big(\hat{p}(\hat{A})\big)$ und $\hat{p}(\hat{A}) \supseteq \mathfrak{X}_\sigma$, wegen $\hat{A} \supset \mathfrak{X}$ und der Surjektivität von p. Daher $\hat{\mu}(\hat{A}) = \hat{\mu}_\sigma\big(\hat{p}(\hat{A})\big) \geq \hat{\mu}_\sigma^*(\mathfrak{X}_\sigma)$.

Wir haben also die Behauptung zurückgeführt auf die bekannte Tatsache, dasz ein abzählbarer projektiver Limes von Radon-Maszen ein Radon-Masz ist. Führen wir trotzdem den Beweis aus :

Für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ konstruieren wir induktiv eine abnehmende Folge $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ von kompakten Zylindern von $\hat{\mathfrak{X}}_\sigma$, von der Form $K_n = \hat{\pi}_{i_n}^{-1}(K_{i_n})$, wobei K_{i_n} kompakt in $\mathfrak{X}_{i_n}$ ist (identifiziert mit einer Teilmenge von $\hat{\mathfrak{X}}_{i_n}$) und $\hat{\pi}_{i_n} : \hat{\mathfrak{X}}_\sigma \to \hat{\mathfrak{X}}_{i_n}$ die kanonische Projektion ist, sodasz :

$$\hat{\mu}(K_n) > 1 - \varepsilon .$$

Für $n = 1$ existiert, da μ_{i_1} Radon-Masz, ein K_{i_1}, sodasz $\mu_{i_1}(K_{i_1}) = \hat{\mu}_\sigma\big(\hat{\pi}_{i_1}^{-1}(K_{i_1})\big) > 1 - \varepsilon$. Seien $K_{i_1}, \ldots, K_{i_n}$ gewählt, wobei $\mu_{i_n}(K_{i_n}) = \mu_{i_{n+1}}\big(\pi_{i_n,i_{n+1}}^{-1}(K_{i_n})\big) > 1 - \varepsilon$. Da $\mu_{i_{n+1}}$ ein Radon-Masz, existiert eine kompakte Menge $K_{i_{n+1}}$ in $\mathfrak{X}_{i_{n+1}}$, sodasz $K_{i_{n+1}} \subseteq \pi_{i_n,i_{n+1}}^{-1}(K_{i_n})$ und $\mu_{i_{n+1}}(K_{i_{n+1}}) > 1 - \varepsilon$.

Sei $K = \bigcap_{n=1}^\infty K_n = \bigcap_{n=1}^\infty \hat{\pi}_{i_n}^{-1}(K_{i_n})$. Dann ist K eine in $\mathfrak{X}_\sigma$ enthaltene kompakte Menge ; da $\hat{\mu}_\sigma$ ein Radon-Masz (und insbesondere σ-additiv), gilt $\hat{\mu}_\sigma(K) \geq 1-\varepsilon$.

Daher $(\hat{\mu}_\sigma)_*(\mathfrak{X}_\sigma) = 1$ und a fortiori $\hat{\mu}(\hat{A}) \geq (\hat{\mu}_\sigma)^*(\mathfrak{X}_\sigma) = 1$.

□

1.13. BEMERKUNG

Der hier gegebene Beweis (etwas umständlich niederzuschreiben aber ganz einfach in seiner Grundidee) scheint mir wesentlich durchsichtiger zu sein als der üblicher Weise gegebene (z.B.[23],p.82) da er eher zeigt, warum die Radon-Masze ins Spiel kommen, was im allgemeinen wesentlich ist nach dem Gegenbeispiel von Andersen und Jessen.

Als ich den Beweis fand, habe ich sehr wohl vermutet, dasz er bekannt sein müszte. Tatsächlich findet man in der Note historique von Bourbaki ([7],p.120). "Eine Variante der Konstruktion von Kolmogoroff stammt von Kakutani und wurde seither mehrere Male wiederentdeckt." Kakutani machte genau die selbe Konstruktion für den Fall eines Produktes der Zahlengeraden $\mathbb{R}^A$, das er in $\overline{\mathbb{R}}^A$ einbettete.

2. ZYLINDRISCHE MASZE AUF PRODUKTRÄUMEN

2.1. Sei $\{\mathfrak{X}_j\}_{j\varepsilon J}$ eine Familie von vollständig regulären Räumen. Die endlichen Produkte $\prod_{j\varepsilon F} \mathfrak{X}_j$, F endliche Teilmenge von J, formen ein projektives System (mit den kanonischen Projektionen). Der projektive Limes ist $\mathfrak{X} := \prod_{j\varepsilon J} \mathfrak{X}_j$. Ein zylindrisches Masz μ auf $\mathfrak{X}$ ist daher gegeben durch eine kohärente Familie $\{\mu_F$: F durchläuft die endlichen Teilmengen von J$\}$ von Radon-Wahrscheinlichkeiten auf $\prod_{j\varepsilon F} \mathfrak{X}_j$. Gemäsz dem Satz von Kolmogoroff (1.12) wissen wir bereits, dasz μ immer σ-additiv ist. Wenn J abzählbar ist oder wenn die $\mathfrak{X}_j$ kompakt sind, wissen wir, dasz μ ein Radon-Masz ist (1.11 und 1.12).

Unter welchen Bedingungen ist μ τ-regulär ? Geben wir zuerst ein Beispiel, das mir von Herrn Saint-Raymond gezeigt worden ist, das zeigt, dasz das im allgemeinen nicht der Fall ist :

2.2. BEISPIEL

Sei J = $[0, 1]$ und $\mathfrak{X}_j =]-1, +1[$ für alle j ε $[0, 1]$. Wir betten die endlichen Produkte $]-1, +1[^{\{j_1, \ldots, j_n\}}$ in $[-1, +1]^{\{j_1, \ldots, j_n\}}$ ein. Mit den oben eingeführten Bezeichnungen findet man $\mathfrak{X} =]-1, +1[^{[0,1]}$ und $\hat{\mathfrak{X}} = [-1, +1]^{[0,1]}$.

Sei f die Funktion

$$f : [0, 1] \to [-1, +1]^{[0,1]}$$
$$s \to \{1 - |j-s|\}_{j\varepsilon J} \ .$$

f ist stetig und f(m), das Bild des Lebesgue-Masz m auf $[0, 1]$, ist daher ein Radon-Masz auf $\hat{\mathfrak{X}} = [-1, +1]^{[0,1]}$, das wir mit $\hat{\mu}$ bezeichnen. $\hat{\mu}$ ist von f($[0, 1]$) getragen, das eine kompakte Teilmenge von $\hat{\mathfrak{X}} \setminus \mathfrak{X} = [-1, +1]^{[0,1]} \setminus]-1, +1[^{[0,1]}$ ist. Sei $\hat{\mu}_{\hat{\mathcal{A}}}$ die Restriktion von $\hat{\mu}$ auf die σ-Algebra $\hat{\mathcal{A}}$, die von den Zylindern von $\hat{\mathfrak{X}} = [-1, +1]^{[0,1]}$ erzeugt wird.

Dann gilt $\hat{\mu}_{\hat{\mathcal{A}}}^{*}(]-1, +1[^{[0,1]}) = 1$. Sei nämlich $\hat{A}$ ein Element aus $\hat{\mathcal{A}}$, das $]-1, +1[^{[0,1]}$ enthalte und $\{j_k\}_{k=1}^{\infty}$ die höchstens abzählbare Menge von Indizes von denen $\hat{A}$ abhängt. Dann überlegt man sich leicht, dasz gilt $f^{-1}(\hat{A}) \supseteq [0, 1] \setminus \{j_k\}_{k=1}^{\infty}$, daher $f(m)(\hat{A}) = \hat{\mu}_{\hat{\mathcal{A}}}(\hat{A}) = 1$.

$\hat{\mu}_{\hat{\mathcal{A}}}$ induziert daher ein σ-additives Masz μ auf der σ-Algebra $\hat{\mathcal{A}} \cap]-1, +1[^{[0,1]}$, d.h. ein zylindrisches Masz μ auf $\mathfrak{X} =]-1, +1[^{[0,1]}$ (da die endlichen Produkte von $]-1, +1[$ polnisch sind).

Da aber $\hat{\mu}$ von der zu $]-1, +1[^{[0,1]}$ disjunkten kompakten Menge $f([0, 1])$ getragen wird, gilt $\hat{\mu}^{*}(]-1, +1[^{[0,1]}) = 0$ und nach Satz 1.10 ist μ nicht τ-regulär.

2.3. Aber für den Fall eines zylindrischen Produktmaszes $\mu = \underset{j \in J}{\otimes} \mu_j$, d.h. die Familie $\{\mu_F,$ F endliche Teilmenge von J$\}$ wird gebildet durch $\{\underset{j \in F}{\otimes} \mu_j\}$, wobei μ_j eine Radon-Wahrscheinlichkeit auf $\mathfrak{X}_j$, gilt die

<u>PROPOSITION</u> :

Jedes zylindrische Produktmasz $\mu = \underset{j \in J}{\otimes} \mu_j$ auf $\mathfrak{X} = \prod_{j \in J} \mathfrak{X}_j$ ist τ-regulär.

<u>BEWEIS</u>

Betten wir jedes $\mathfrak{X}_j$ in eine kompakte Menge $\hat{\mathfrak{X}}_j$ ein und die endlichen Produkte $\prod_{j \in F} \mathfrak{X}_j$ in $\prod_{j \in F} \hat{\mathfrak{X}}_j$. Mit den oben eingeführten Notationen gilt $\hat{\mathfrak{X}} = \prod_{j \in J} \hat{\mathfrak{X}}_j$. Nach Satz 1.10. müssen wir zeigen $\hat{\mu}^{*}(\mathfrak{X}) = 1$.

Nehmen wir das Gegenteil an : Dann existiert eine offene Menge $\mathcal{O}$ in $\hat{\mathfrak{X}}$, die $\mathfrak{X}$ enthält, sodasz $\hat{\mu}(\mathcal{O}) < 1$. $\mathcal{O}$ ist Vereinigung der nach oben filtrierenden Familie der offenen Zylinder $\{\mathcal{O}_\alpha\}_{\alpha \in A}$, die in $\mathcal{O}$ enthalten sind. Da $\hat{\mu}$ ein Radon-Masz, gilt

$$\hat{\mu}(\mathcal{O}) = \sup_{\alpha \in A} \hat{\mu}(\mathcal{O}_\alpha)$$

Man kann daher eine Teilfolge $\{\mathcal{O}_{\alpha_n}\}_{n=1}^{\infty}$ auswählen, sodasz

$$\hat{\mu}(\mathcal{O}) = \hat{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_{\alpha_n}) .$$

Die $\{\mathcal{O}_{\alpha_n}\}_{n=1}^{\infty}$ hängen nur von einer höchstens abzählbaren Teilmenge J_σ der Indizes J ab. Sei $\mathfrak{X}_\sigma = \prod_{j\epsilon J_\sigma} \mathfrak{X}_j$, $\hat{\mathfrak{X}}_\sigma = \prod_{j\epsilon J_\sigma} \hat{\mathfrak{X}}_j$ und seien $\pi : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}_\sigma$ und $\hat{\pi} : \hat{\mathfrak{X}} \to \hat{\mathfrak{X}}_\sigma$ die kanonischen Projektionen.

Das Radon-Masz auf $\hat{\mathfrak{X}}_\sigma$, assoziiert zum zylindrischen Masz $\mu_\sigma : = \boxtimes_{j\epsilon J_\sigma} \mu_j$ auf $\mathfrak{X}_\sigma$ ist dann $\hat{\mu}_\sigma : = \boxtimes_{j\epsilon J_\sigma} \hat{\mu}_j = \hat{\pi}(\hat{\mu})$.

Nach Konstruktion $\hat{\pi}^{-1}\left(\hat{\pi}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_{\alpha_n}\right)\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_{\alpha_n}$, daher

$$\hat{\mu}_\sigma\left(\hat{\pi}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_{\alpha_n}\right)\right) = \hat{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_{\alpha_n}\right) < 1 .$$

Da J_σ abzählbar ist, wird $\hat{\mu}_\sigma$ von $\mathfrak{X}_\sigma$ getragen (siehe Ende des Beweises des Satz von Kolmogoroff). Es existiert daher eine kompakte Menge K_σ in $\mathfrak{X}_\sigma$ disjunkt von $\hat{\pi}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_{\alpha_n}\right) \cap \mathfrak{X}_\sigma$, sodasz $\hat{\mu}_\sigma(K_\sigma) > 0$.

Wählen wir nun für jedes $j \epsilon J \setminus J_\sigma$ eine kompakte Menge K_j in $\mathfrak{X}_j$, sodasz $\mu_j(K_j) > 0$. Die Menge

$$K : = K_\sigma \times \prod_{j\epsilon J\setminus J_\sigma} K_j$$

ist eine kompakte Teilmenge von $\mathfrak{X}$. Da die $\{\mathcal{O}_\alpha\}_{\alpha\epsilon A}$ eine Überdeckung von $\mathfrak{X}$ durch eine nach oben filtrierende Familie von offenen Mengen bilden, gibt es ein $\mathcal{O}_{\alpha_0}$, das K enthält. $\mathcal{O}_{\alpha_0}$ hängt nur von endlich vielen Koordinaten von J ab, sagen wir $\{j_1, \ldots, j_m\} \subsetneq J \setminus J_\sigma$ und $\{j'_1, \ldots, j'_l\} \subseteq J_\sigma$.

Es gilt dann

$$\mathcal{O}_{\alpha_0} \supseteq K_\sigma \times \prod_{k=1}^{m} K_{j_k} \times \prod_{j\epsilon J\setminus\{J_\sigma \cup \{j_1,\ldots,j_m\}\}} \hat{\mathfrak{X}}_j$$

und da

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_{\alpha_n}\right) \cap \left(K_\sigma \times \prod_{j\epsilon J\setminus J_\sigma} \hat{\mathfrak{X}}_j\right) = \emptyset ,$$

gilt sogar

$$\mathcal{O}_{\alpha_0} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_{\alpha_n} \supseteq K_\sigma \times \prod_{k=1}^{m} K_{j_k} \times \prod_{j\epsilon J\setminus\{J_\sigma \cup \{j_1,\ldots,j_m\}\}} \hat{\mathfrak{X}}_j$$

Daher

$$\hat{\mu}\left(\mathcal{O}_{\alpha_0} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_{\alpha_n}\right) \geq \hat{\mu}(K_\sigma) \times \prod_{k=1}^{m} \mu_{j_k}(K_{j_k}) > 0,$$

und wird erhalten einen Widerspruch :

$$\hat{\mu}(\mathcal{O}) \geq \hat{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_{\alpha_n} \cup \mathcal{O}_{\alpha_0}\right) = \hat{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_{\alpha_n}\right) + \hat{\mu}\left(\mathcal{O}_{\alpha_0} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_{\alpha_n}\right)$$

$$> \hat{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_{\alpha_n}\right) = \hat{\mu}(\mathcal{O}) .$$

BEMERKUNG

Die normaler Weise wichtigste Anwendung der τ-Regularität eines Maszes besteht darin, dasz man einen Träger des Maszes definieren kann. Das ist in unserem Fall leider äuszerst trivial direkt zu sehen :

$$\operatorname{supp}\left(\bigotimes_{j\in J} \mu_j\right) = \prod_{j\in J} \operatorname{supp}(\mu_j).$$

2.4. Ein zylindrisches Produktmasz $\mu = \bigotimes_{j\in J} \mu_j$ ist genau dann ein Radon-Masz, wenn alle μ_j bis auf höchstens abzählbar viele von einer kompakten Menge in $\mathfrak{X}_j$ getragen werden : Die Bedingung ist klarer Weise hinreichend. Um die Notwendigkeit zu zeigen, nehmen wir an, dasz eine überabzählbare Anzahl der μ_j nicht von einer kompakten Teilmenge von $\mathfrak{X}_j$ getragen wird. Da jede kompakte Teilmenge K von $\mathfrak{X}$ in einem Kompaktum der Form $K_1 = \prod_{j\in J} K_j$, K_j kompakt in $\mathfrak{X}_j$, enthalten ist, gilt

$$\mu(K) \leqslant \mu(K_1) \leqslant \inf\{\prod_{j\in F} \mu_j(K_j) : F \text{ endliche Teilmenge von } J\}.$$

Dieses Infimum ist null, da eine überabzählbare Anzahl der $\mu_j(K_j)$ strikt kleiner als 1 ist. μ ist daher kein Radon-Masz (1.11).

2.5. Im Kapitel 7 werden wir einen vollständig regulären Raum $\mathfrak{X}$ universell Radon-meszbar nennen, wenn die τ-regulären Masze und die Radon-Masze auf $\mathfrak{X}$ zusammenfallen. Wir erhalten daher die

PROPOSITION [30]

$\mathfrak{X} = \prod_{j\in J} \mathfrak{X}_j$ ist ein universell Radon-meszbarer Raum genau dann, wenn alle $\mathfrak{X}_j$ (vollständig reguläre) universell Radon-meszbare Räume sind und auf allen $\mathfrak{X}_j$, bis auf höchstens abzählbar viele, jede Radon-Wahrscheinlichkeit von einer kompakten Teilmenge von $\mathfrak{X}_j$ getragen wird.

BEWEIS :

($\Rightarrow$) Sei $\mathfrak{X}$ universell Radon-meszbar. Klarerweise ist jedes $\mathfrak{X}_j$ universell Radon-meszbar. Die zweite Bedingung musz ebenfalls erfüllt sein, da man sonst ein Produkt-Masz $\mu = \bigotimes_{j\in J} \mu_j$ konstruieren kann, das nach 2.3. τ-regulär nach 2.4. aber kein Radon-Masz ist.

($\Leftarrow$) a) Das Produkt von 2 universell Radon-meszbaren Räumen ist universell Radon-meszbar. (Der elementare $\varepsilon/2$-Beweis sei eine Übungsaufgabe für den Leser).

b) Das Produkt $\mathfrak{X} = \prod_{n=1}^{\infty} \mathfrak{X}_n$ von abzählbar vielen universell Radon-meszbaren Räumen ist universell Radon-meszbar : Sei μ ein τ-reguläres Masz auf $\mathfrak{X}$. Sei π_N die kanonische Projektion $\mathfrak{X} \to \prod_{n=1}^{N} \mathfrak{X}_n$. $\mu_N := \pi_N(\mu)$ ist dann ein τ-reguläres Masz auf $\prod_{n=1}^{N} \mathfrak{X}_n$ und nach a) ein Radon-Masz. μ ist daher ein zylindrisches Masz auf $\mathfrak{X}$, und da $\mathfrak{X}$ ein abzählbares Produkt, ein Radon-Masz.

c) Das Produkt $\mathfrak{X} = \prod_{j\in J} \mathfrak{X}_j$ von universell Radon-meszbaren Räumen, sodasz auf jedem $\mathfrak{X}_j$ jede Radon-Wahrscheinlichkeit von einer kompakten Menge getragen wird, ist universell Radon-meszbar : sei μ ein τ-reguläres Masz auf $\mathfrak{X}$ und sei $\pi_j : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}_j$ die kanonische Projektion. $\pi_j(\mu)$ ist dann ein Radon-Masz auf $\mathfrak{X}_j$ und nach Voraussetzung von einer kompakten Menge K_j getragen. $K = \prod_{j\in J} K_j$ ist dann kompakt in $\mathfrak{X}$ und trägt μ.

Die Behauptung ergibt sich nun aus a), b) und c).

$\square$

3. ZYLINDRISCHE MASZE AUF TOPOLOGISCHEN VEKTORRÄUMEN

3.1. Im folgenden werden wir den im Beispiel 1.5. behandelten Fall eines zylindrischen Maszes auf einem topoligischen Vektorraum $\sigma(X, Y)$betrachten. Die dort eingeführten Notationen behalten wir bei.

3.2. BEMERKUNG : Warum beschränkt man sich auf den Fall eines topologischen Vektorraumes mit der schwachen Topologie $\sigma(X, Y)$?

Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein lokalkonvexer hausdorffscher Vektorraum. Die Familie $\{Z_i\}_{i\in I}$ der abgeschlossenen Teilräume von endlicher Kodimension von $(X, \mathfrak{T})$ fällt mit derjenigen von $\sigma(X, X')$ zusammen. Alle Begriffe, die nur von den Zylindern abhängen, insbesondere die zylindrischen Masze, fallen daher ebenfalls zusammen.

Darüberhinaus weisz man ([27],p. 112 und p.161), dasz für den Fall, dasz $(X, \mathfrak{T})$ suslinsch und Y in Dualität mit X oder $(X, \mathfrak{T})$ ein Fréchet-Raum und $Y = (X, \mathfrak{T})'$, die Radon-Masze auf $(X, \mathfrak{T})$ und $\sigma(X, Y)$ zusammenfallen. Bemerken wir schon jetzt, dasz für den Fall, dasz $(X, \mathfrak{T}) = B'$ ein dualer Banachraum ist, die Radon-Masze auf $\sigma(B', B)$ und $B'_{||\cdot||}$ genau dann zusammenfallen, wenn B' die Radon-Nikodym- Eigenschaft hat. Aber auch hier reduziert sich das Problem auf einen Vergleich zwischen $\sigma(B', B)$ und $\sigma(B', B'')$.

3.3. Fixieren wir ein für alle Mal eine spezielle Kompaktifizierung von $\sigma(X, Y)$: Wir betten X_i in seine Stone-Čech-Kompaktifizierung $\check{X}_i$ ein und nennen

$$\check{X}_{cyl} := \varprojlim_{i\in I} \check{X}_i$$

die zylindrische Kompaktifizierung von $\sigma(X, Y)$. Der Grund für diese Bezeichnung wird im Appendix klar werden. Wir haben die isomorphen Einbettungen

$$\sigma(X, Y) \overset{c}{\to} \sigma(Y^*, Y) \overset{c}{\to} \check{X}_{cyl} .$$

Sei $\mu = \{\mu_i\}_{i \in I}$ ein zylindrisches Masz auf $\sigma(X, Y)$ und sei $\check{\mu}$ das zu μ assoziierte Radon-Masz auf $\check{X}_{cyl}$. Wir haben in 1.5. bemerkt, dasz μ ein zylindrisches Masz μ_1 auf jedem mit Y in Dualität stehenden Vektorraum X_1 definiert. Je gröszer X_1 ist, umso gröszere Chancen hat μ_1, schöne Eigenschaften zu haben wie Satz 1. 10. zeigt.

<u>BEISPIEL</u> : Sei $\sigma(X_1, Y) \supsetneqq \sigma(X, Y)$ und $x_1 \in X_1 \setminus X$. $\delta_{\{x_1\}}$ ist ein Radon-Masz auf $\sigma(X_1, Y)$ und definiert daher ein zylindrisches Masz auf $\sigma(X, Y)$, das nach Satz 1.10 nicht τ-regulär ist. (Es kann allerdings vorkommen, dasz es σ-additiv ist, wie wir sehen werden).

3.4. Der Satz von Kolmogoroff (1.12) besagt, dasz jedes zylindrische Masz μ auf $\sigma(X, Y)$ σ-additiv auf $\sigma(Y^*, Y)$ ist. Man kann daher $\sigma(Y^*, Y)$, mit der von den Zylindern erzeugten σ-Algebra $\mathcal{A}$ und dem σ-additiven Masz μ_{Y^*} auf $\mathcal{A}$, auffassen als einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. Man erhält so eine Abbildung

$$\begin{aligned} v : Y &\to L^0(\Omega, \mathcal{T}, P) \\ y &\to \langle \cdot, y \rangle \quad , \end{aligned}$$

die offensichtlich linear ist (und im allgemeinen nichts weiter). Man hätte aber ebensogut (zum Beispiel) $\check{X}_{cyl}$, mit der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}$ und dem Radon-Masz $\check{\mu}$ auf $\mathcal{B}$, als $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ nehmen können. (Wir werden im Appendix zeigen, dasz jedes $y \in Y$ sich eindeutig in eine Funktion auf $\check{X}_{cyl}$ fortsetzen läszt).

Man kann nun zeigen (siehe [27], p. 256), dasz es eine bijektive Beziehung zwischen den zylindrischen Maszen auf $\sigma(X, Y)$ und den "Isonomie-Klassen" der linearen Abbildungen $v : Y \to L^0(\Omega, \mathcal{T}, P)$. Hier sieht man wiederum, dasz der Begriff eines zylindrischen Maszes auf $\sigma(X, Y)$ in Wirklichkeit nur von Y abhängt.

3.5. Ein zylindrisches Masz μ auf $\sigma(X, Y)$ heiszt skalar auf den konvexen, kompakten Mengen von $\sigma(X, Y)$ konzentriert, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine konvexe, kompakte Menge K in $\sigma(X, Y)$ existiert, sodasz für alle $y \in Y$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, für die $\langle x, y \rangle \leq \alpha$, $\forall x \in K$ gilt, die folgende Bedingung erfüllt ist

$$\mu(\{x \in X : \langle x, y \rangle > \alpha\}) < \varepsilon .$$

Der Leser wird den Unterschied zur (ε, K)-Bedingung im Satz von Prokhorov (1.11.) bemerken.

μ ist genau dann auf den konvexen, kompakten Teilmengen von $\sigma(X, Y)$ skalar konzentriert, wenn ein (jeder) Repräsentant der assoziierten Isonomie-Klasse

$$v : Y \to L^0(\Omega, \mathcal{T}, P)$$

stetig ist bezüglich der Mackey-Topologie $\tau(Y, X)$.

4. BILD EINES ZYLINDRISCHEN MASZ UNTER EINER NACH UNTEN HALBSTETIGEN POSITIVEN FUNKTION

Sei μ ein zylindrisches Masz auf einem topologischen Vektorraum $\sigma(X, Y)$.

Wir haben bemerkt (1.7.), dasz für $f \in \mathcal{C}_{cyl}(X)$ das Bild des zylindrischen Maszes μ unter f ein wohldefiniertes Element $f(\mu)$ aus $\mathcal{M}^1(\mathbb{R})$, dem Raum der Wahrscheinlichkeiten auf $\mathbb{R}$, ist. Wir wollen diese Definition auf die nach unten halbstetigen positiven Funktionen auf $\sigma(X, Y)$ ausdehnen. (Der Bequemlichkeit halber beschränken wir uns auf positive Funktionen. Selbstverständlich könnte man die Resultate allgemeiner formulieren, was aber umständlich zu schreiben wäre).

4.1. DEFINITION ([29], 69/70, exp. IV) :

Sei $\mathcal{M}^1(\bar{\mathbb{R}})$ der Raum der Wahrscheinlichkeiten auf $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. Es gibt eine natürliche Ordnungsrelation auf $\mathcal{M}^1(\bar{\mathbb{R}})$: Man sagt, $\lambda_1 \leq \lambda_2$, wenn $\forall\, t \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1(]t, +\infty]) \leq \lambda_2(]t, +\infty]) .$$

(Sie hat keinerlei Beziehung mit der üblichen Ordnungsrelation von Maszen; aber $\lambda_1 \leq \lambda_2$ kann nicht zu Miszverständnissen führen, da für Masze der gleichen Masse 1, $\lambda_1 \leq \lambda_2$ bedeuten würde $\lambda_1 = \lambda_2$).

Jede Familie $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in A}$ in $\mathcal{M}^1(\bar{\mathbb{R}})$ erlaubt eine obere Grenze (und auch untere, was wir im folgenden aber nicht benötigen) $\lambda = \sup\limits_{\alpha\in A} \lambda_\alpha$, sodasz die folgende Formel für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt :

$$\lambda(]t, \infty]) = (\sup_{\alpha\in A} \lambda_\alpha)(]t, \infty]) = \sup_{\alpha\in A} \left(\lambda_\alpha(]t, +\infty])\right) .$$

Es genügt dazu die Verteilungsfunktion (im verkehrten Sinn) zu definieren :

$\Phi_\alpha(t) := \lambda_\alpha(]t, +\infty])$ für $t \in \mathbb{R}$.

$\{\Phi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ist eine Familie von nach unten halbstetigen abnehmenden Funktionen mit Werten in $[0, 1]$, wobei $\lambda_\alpha(\{+\infty\}) = \lim_{t\to +\infty} \Phi_\alpha(t)$ und $\lambda_\alpha(\{-\infty\}) = 1 - \lim_{t\to -\infty} \Phi_\alpha(t)$. Das Supremum ist daher auch eine nach unten halbstetige, abnehmende Funktion auf $\mathbb{R}$ mit Werten in $[0, 1]$, die eine Wahrscheinlichkeit λ auf $\bar{\mathbb{R}}$ definiert. Es ist trivial zu verifizieren, dasz λ die obere Grenze von $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ist und die obige Formel gilt.

Führen wir noch das folgende Lemma aus, (um es später zitieren zu können).

4.2. LEMMA :

λ ist das Supremum einer Familie $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in A}$ genau dann, wenn es die folgenden Bedingungen erfüllt

(i) $\quad \lambda_\alpha \leq \lambda \qquad \forall\, \alpha \in A$

(ii) $\quad \forall\, \varepsilon > 0, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \exists\, \alpha_0 \in A :$

$$\lambda_{\alpha_0}(]t-\varepsilon, \infty]) > \lambda(]t, +\infty]) - \varepsilon \,.$$

BEWEIS : Wenn $\lambda = \sup_{\alpha\in A} \lambda_\alpha$, sind die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt.

Umgekehrt nehmen wir an, dasz (i) und (ii) erfüllt seien und sei $\lambda' = \sup_{\alpha\in A} \lambda_\alpha$. Wegen (i) gilt $\lambda' \leq \lambda$.

Wenn $\lambda' \neq \lambda$ wäre, dann gäbe es ein $t \in \mathbb{R}$ sodasz

$$\lambda'(]t, \infty]) < \lambda(]t, +\infty]) \,,$$

und wegen der σ-Additivität von λ gäbe es ein $\varepsilon > 0$, sodasz

$$\lambda'(]t, \infty]) < \lambda(]t+\varepsilon, \infty]) \,.$$

Mit $\qquad \varepsilon' = \min\big(\varepsilon, \lambda(]t+\varepsilon, \infty]) - \lambda'(]t, +\infty])\big)$,

und $\qquad t' = t + \varepsilon$,

erhält man einen Widerspruch zu (ii).

$\square$

4.3. DEFINITION :

Sei Θ ein Element aus $\mathcal{J}_+\big(\sigma(X, Y)\big)$, der Menge der nach unten halbstetigen (im folgenden n.u.h. abgekürzt) positiven Funktionen auf $\sigma(X, Y)$ und sei μ ein zylindrisches Masz auf $\sigma(X, Y)$. Wir definieren

$$\Theta(\mu) := \sup\{f(\mu) : f \in \mathcal{C}_{cyl}(X),\ f \leq \Theta\} \,,$$

wobei das Supremum im Sinn der Definition 4.1. genommen wird. Es gilt dann $\Theta(\mu) \geq \delta_{\{0\}}$ und man definiert das Integral von Θ bezüglich μ

$$\int_X \Theta(x)\, d\mu(x) := \int_{\mathbb{R}} t \,.\, d\big(\Theta(\mu)\big)(t)\,.$$

Dieses Integral nimmt seine Werte in $[0, +\infty]$.

4.4. BEMERKUNG :

1) Da für $f, g \in \mathcal{C}_{cyl}(X)$, $f \leq g$, $f(\mu) \leq g(\mu)$ gilt, stimmt diese Definition für den Fall von zylindrischen Funktionen mit der in 1.7. gegebenen überein.

2) Man verifiziert leicht, dasz :

$$\int_X \Theta(x)\, d\mu(x) = \sup \{ \int_X f(x)\, d\mu(x) : f \in \mathcal{C}_{cyl}(X),\ f \leq \Theta\}.$$

4.5. Eine Borel-Wahrscheinlichkeit m auf einem vollständig regulären Raum $\mathfrak{X}$ ist genau dann τ-regulär, wenn die Formel

$$\underline{\sup_{\alpha\in A} \{\Theta_\alpha(m)\} = \{\sup_{\alpha\in A} \Theta_\alpha\}(m)} \tag{4.a}$$

für jede nach oben filtrierende Familie $\{\Theta_\alpha\}_{\alpha\in A}$ von Funktionen in $J_+(\mathfrak{X})$ gilt. (Das ist praktisch die Definition der τ-Regularität. Siehe auch [30]).

Führen wir dieses Resultat für den Fall eines zylindrischen Maszes aus :

4.6. PROPOSITION : Wenn das zylindrische Masz μ auf $\sigma(X, Y)$ τ-regulär ist, so fällt die Definition 4.3. mit dem Bild-Masz im üblichen Sinn ([27], p. 29) bezüglich der Fortsetzung von μ in ein τ-reguläres Borel-Masz auf $\sigma(X, Y)$ zusammen.

Darüber hinaus gilt dann für jede nach oben filtrierende Familie $\{\Theta_\alpha\}_{\alpha\in A}$ aus $J_+\big(\sigma(X, Y)\big)$

$$\sup_{\alpha\in A} \big(\Theta_\alpha(\mu)\big) = (\sup_{\alpha\in A} \Theta_\alpha)(\mu)\,.$$

Umgekehrt, wenn für ein zylindrisches Masz μ auf $\sigma(X, Y)$ die Formel

$$\sup_{\alpha\in A} \big(f_\alpha(\mu)\big) = (\sup_{\alpha\in A} f_\alpha)(\mu)$$

für jede nach oben filtrierende Familie aus $\mathcal{C}^+_{cyl}(X)$ gilt, dann ist μ τ-regulär.

BEWEIS :

($\Longrightarrow$) Sei μ ein τ-reguläres zylindrisches Masz auf $\sigma(X, Y)$, das wir mit seiner Fortsetzung in ein τ-reguläres Borel-Masz auf $\sigma(X, Y)$ identifizieren.

Sei $\Theta \in \mathcal{J}_+ \big(\sigma(X, Y)\big)$ und $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ die nach oben filtrierende Familie von Elementen aus $\mathcal{C}_{cyl}(X)$, die von Θ majorisiert werden. Für $t \in \mathbb{R}$ formen die $\{f_\alpha^{-1}(]t, +\infty])\}_{\alpha\in A}$ eine nach oben filtrierende Familie von offenen Mengen in $\sigma(X, Y)$, deren Vereinigung $\Theta^{-1}\ (]t, +\infty])$ ist.

Daher $\mu\ \big(\Theta^{-1}(]t, +\infty]\big) = \sup\limits_{\alpha\in A} \mu\ \big(f_\alpha^{-1}(]t, +\infty])\big)$. Genau das muszten wir zeigen.

Wenn man dieselbe Schluszweise mit $\{\Theta_\alpha\}_{\alpha\in A}$ anstatt $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ noch einmal anwendet, erhält man den Beweis des zweiten Teils der Proposition.

($\Longleftarrow$) Um die Umkehrung zu zeigen, nehmen wir an, dasz μ nicht τ-regulär sei. Nach der Bemerkung in 1.6. gibt es dann eine nach oben filtrierende Familie $\{\mathcal{O}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ von offenen Zylindern in $\sigma(X, Y)$, die X überdeckt und sodasz $\sup\limits_{\alpha\in A} \mu\ (\mathcal{O}_\alpha) = \eta < 1$.

Die Indikatorfunktion $\chi_{\mathcal{O}_\alpha}$ ist das Supremum der Familie $\{f_\alpha^\beta\}_{\beta\in B(\alpha)}$ der zylindrischen Funktionen, die sie majorisiert. Mit $\{f_\gamma\}_{\gamma\in C} := \bigcup\limits_{\alpha\in A} \{f_\alpha^\beta\}_{\beta\in B(\alpha)}$ findet man eine nach oben filtrierende Familie von zylindrischen Funktionen, sodasz gilt

$$\sup_{\gamma\in C} \big(f_\gamma(\mu)\big) = \eta\ .\ \delta_{\{1\}} + (1-\eta)\ .\ \delta_{\{0\}}$$

während

$$\big(\sup_{\gamma\in C} (f_\gamma)\big)\ (\mu) = \delta_{\{1\}}.$$

□

4.a. Moreau-Funktionen

Die τ-Regularität eines zylindrischen Maszes μ ist eine "starke" Bedingung, oft schon äquivalent dazu, dasz μ ein Radon-Masz ist. (Wir werden diese Frage im Kapitel 7 besprechen).

Dagegen ist die skalare Konzentration (3.5.) auf den schwach kompakten, konvexen Teilmengen von $\sigma(X, Y)$ eine "schwache" Bedingung, die in den Anwendungen oft erfüllt ist. Unter dieser Bedingung werden wir ein Analogon zur Proposition 4.6. für den Fall von Moreau-Funktionen beweisen.

4.7. Eine Funktion $\Theta : \sigma(X, Y) \to [0, \infty]$ heiszt eine positive Moreau-Funktion, wenn :

(i) Θ konvex ist, d.h. $\Theta(\lambda x + \mu y) \leq \lambda \cdot \Theta(x) + \mu \cdot \Theta(y)$, $\forall\, x, y \in \sigma(X,Y)$ $\forall\, \lambda, \mu \in]0, 1[$, sodasz $\lambda + \mu = 1$.

(ii) Θ nach unten halbstetig ist.

BEISPIEL :

1) Sei C eine konvexe, abgeschlossene Menge in $\sigma(X, Y)$, die den Ursprung enthält. Dann ist das Minkowski-Funktional von C

$$j_C(x) := \inf \{t \in \mathbb{R}^+ : x \in t.C\}$$

eine Moreau-Funktion (wobei $\inf(\emptyset) = +\infty$ sei).

2) Fixieren wir die folgende Notation, die wir von nun an beibehalten : Für eine Teilmenge M von $\sigma(X, Y)$ sei

$$\Psi_M(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in M \\ +\infty & \text{für } x \notin M \end{cases}$$

Das ist eine Moreau-Funktion genau dann, wenn M konvex und abgeschlossen ist.

BEZEICHNUNG : Wir nennen eine Funktion $h : \sigma(X, Y) \to \mathbb{R}$ affin, wenn sie von der Form $x \to \langle x, y\rangle + a$, mit $y \in Y$ und $a \in \mathbb{R}$, ist. Wir bezeichnen mit $\mathcal{A}(\sigma(X, Y))$ den von den affinen Funktionen gebildeten Vektorraum (den man mit $Y \oplus \mathbb{R}$ identifizieren kann) und mit $\mathcal{A}_\Phi(\sigma(X, Y))$ die Menge der endlichen Suprema von affinen Funktionen : $h : x \to \sup_{j=1,\dots,n} \{\langle x, y_j\rangle + a_j\}$. Das sind insbesondere Moreau-Funktionen.

Es ist bekannt [17], dasz eine Moreau-Funktion das (punktweise) Supremum der affinen Funktionen, die es majorisiert, ist. Es gilt sogar

4.8. PROPOSITION : Sei μ ein zylindrisches Masz auf $\sigma(X, Y)$ und sei $\Theta : \sigma(X, Y) \to [0, \infty]$ eine positive Moreau-Funktion. Dann gilt

$$\underline{\Theta(\mu) = \sup \{h(\mu) : h \in \mathcal{A}_\Phi(\sigma(X, Y)) : h \leq \Theta\}.}$$

<u>BEWEIS</u> : Sei $i \in I$ fest gewählt und sei Θ_i die Funktion auf X_i

$$\Theta_i(x_i) := \inf \{\Theta(x) : \pi_i(x) = x_i\}.$$

Θ_i ist offensichtlich eine konvexe Funktion, aber im allgemeinen nicht mehr nach unten halbstetig. Sei $\tilde{\Theta}_i$ die n.u.h. regularisierte Funktion von Θ_i, d.h. die gröszte n.u.h. Funktion, die von Θ_i majorisiert wird.

Da μ_i ein Radon-Masz auf X_i ist, gilt wegen der Formel (4.a) und der Bemerkung unmittelbar vor der Proposition

$$\tilde{\Theta}_i \circ \pi_i(\mu) = \tilde{\Theta}_i(\mu_i) = \sup \{h_i(\mu_i) : h_i \in \mathcal{A}_\Phi(X_i),\ h_i \leq \tilde{\Theta}_i\}.$$

Andererseits gilt, dasz

$$\tilde{\Theta}_i \circ \pi_i = \sup \{f \in \mathcal{C}_i(X) : f \leq \Theta\},$$

wobei $\mathcal{C}_i(X)$ der Raum der zylindrischen Funktionen auf $\sigma(X, Y)$ mit Basis X_i sei : Jedes solche f wird von $\Theta_i \circ \pi_i$ majorisiert und da $f = f_i \circ \pi_i$, wobei f_i stetig auf X_i ist, auch von $\tilde{\Theta}_i \circ \pi_i$. Andererseits ist $\tilde{\Theta}_i$ das Supremum der stetigen Funktionen auf X_i, die sie majorisiert ; daher gilt die obige Formel.

Daher
$$\begin{aligned}
\Theta(\mu) &= \sup \{\phi(\mu) : \phi \in \mathcal{C}_{cyl}(X),\ \phi \leq \Theta\} \\
&= \sup_{i \in I} \left\{\sup \{\phi_i(\mu) : \phi_i \in \mathcal{C}_i(X),\ \phi_i \leq \Theta\}\right\} \\
&= \sup_{i \in I} \tilde{\Theta}_i \circ \pi_i(\mu) \\
&= \sup_{i \in I} \left\{\sup\{h_i \circ \pi_i(\mu) : h_i \in \mathcal{A}_\Phi(X_i),\ h_i \leq \tilde{\Theta}_i\}\right\} \\
&= \sup \{h(\mu) : h \in \mathcal{A}_\Phi(\sigma(X, Y)),\ h \leq \Theta\}.
\end{aligned}$$

□

Nun können wir das angekündigte Resultat beweisen :

4.9. <u>PROPOSITION</u>

Nehmen wir an, dasz das zylindrische Masz μ auf $\sigma(X, Y)$ auf den kompakten, konvexen Teilmengen von $\sigma(X, Y)$ skalar konzentriert sei (3.5.).

Sei $\{\Theta_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine nach oben filtrierende Familie von positiven Moreau-Funktionen. Dann gilt

$$\sup_{\alpha \in A} \left(\Theta_\alpha(\mu)\right) = (\sup_{\alpha \in A} \Theta_\alpha)(\mu).$$

BEWEIS : Wegen der Proposition 4.8. und der unmittelbar vorhergehenden Bemerkung genügt es, das folgende Ergebnis zu zeigen : Seien $\{h_\alpha\}_{\alpha\in A}$ (eine nach oben filtrierende Familie) und h aus $\mathcal{A}_\Phi(\sigma(X,Y)$. Wenn $\sup\limits_{\alpha\in A} h_\alpha \geq h$, dann $\sup\limits_{\alpha\in A} \big(h_\alpha(\mu)\big) \geq h(\mu)$.

Seien $h = \sup\{\langle\cdot, y_j\rangle + a_j\ ,\ j = 1, \ldots, n\}$ und $\varepsilon > 0$ fest gewählt. Sei K eine kompakte konvexe Menge in $\sigma(X, Y)$, sodasz μ auf K bis auf ε/n konzentriert sei. Nach dem Satz von Dini existiert ein $\alpha_0 \in A$, sodasz

$$h_{\alpha_0}(x) > h(x) - \varepsilon \qquad \forall\ x \in K\ ,$$

d.h.

$$h_{\alpha_0}(x) > (\langle x, y_j\rangle + a_j) - \varepsilon \quad \forall\ x \in K,\ \forall\ j = 1, \ldots, n.$$

Die Funktion $h_{\alpha_0} - (\langle\cdot, y_j\rangle + a_j)$ ist konvex und stetig, daher ist die Menge

$$\{x \in X : h_{\alpha_0}(x) - (\langle x, y_j\rangle + a_j) \leq -\varepsilon\}$$

konvex, abgeschlossen und disjunkt zu K ; sie läszt sich daher von K durch eine abgeschlossene Hyperebene trennen. Nach Voraussetzung

$$\mu\,\{x \in X : h_{\alpha_0}(x) - (\langle x, y_j\rangle + a_j) \leq -\varepsilon\} < \frac{\varepsilon}{n}$$

daher

$$\mu\,\{x \in X : h_{\alpha_0}(x) - h(x) \leq -\varepsilon\} < \varepsilon\ ,$$

d.h. $h_{\alpha_0} > h(x) - \varepsilon$ auf einem Zylinder mit Masz $> 1 - \varepsilon$. Nach Lemma 4.2. gilt daher

$$\sup_{\alpha\in A} h_\alpha(\mu) \geq h(\mu)\ .$$

□

Diese Proposition gestattet uns, zwei interessante Resultate abzuleiten. Zitieren wir zuerst die folgende Definition ([5], p. 48) :

4.10. DEFINITION

Sei μ ein zylindrisches Masz auf $\sigma(X, Y)$ und M eine Teilmenge von X. Man definiert :

$$\bar{\mu}\,(M) : = \inf\{\mu(C) : C \text{ abgeschlossener Zylinder in } \sigma(X,Y),\text{ sodasz } C \supseteq M\}\ .$$

Der Zusammenhang mit der Definition des Bildes eines zylindrisches Maszes unter einer n.u.h. Funktion ist durch die folgende Formel gegeben :

$$\Psi_{\bar{M}}\,(\mu) = \bar{\mu}(M)\ .\ \delta_{\{0\}} + \big(1 - \bar{\mu}(M)\big)\ .\ \delta_{\{+\infty\}} \qquad (4.b)$$

wobei $\Psi_{\bar{M}}$ die in Beispiel 2 von 4.7. eingeführte Indikatorfunktion des Abschlusses $\bar{M}$ von M in $\sigma(X, Y)$ ist.

Denn für jedes $f \in \mathcal{C}_{cyl}(X)$, $f \leq \Psi_{\bar{M}}$, ist $f^{-1}(]-\infty, 0])$ ein abgeschlossener Zylinder, der M enthält, daher $f(\mu) \leq \bar{\mu}(M) \,.\, \delta_{\{0\}} + \{1 - \bar{\mu}(M)\} \,.\, \delta_{\{+\infty\}}$.

Umgekehrt wählen wir einen abgeschlossenen Zylinder F, der M (und daher $\bar{M}$) enthält, sodasz $\mu(F) < \bar{\mu}(M) + \varepsilon$. F ist von der Form $\pi_i^{-1}(F_i)$, F_i abgeschlossen in X_i. In X_i existiert eine abgeschlossene Menge F_i', disjunkt zu F_i, sodasz $\mu_i(F_i) + \mu_i(F_i') > 1 - \varepsilon$. Sei f_i eine stetige Funktion auf X_i mit Werten in $[0, n]$, sodasz $f_i \mid F_i' = n$ und $f_i \mid F_i = 0$ ($X_i \cong \mathbb{R}^n$ ist normal). Für $f = f_i \circ \pi_i$ gilt dann

$$f(\mu) \geq (\bar{\mu}(M) + 2\varepsilon) \,.\, \delta_{\{0\}} + \left(1 - (\bar{\mu}(M) + 2\varepsilon)\right) \,.\, \delta_{\{n\}} \,.$$

Nach Lemma 4.2. ist die Formel (4.b) bewiesen.

4.11. PROPOSITION :

Nehmen wir an, dasz $\sigma(X, Y)$ ein Teilraum von $\sigma(X_1, Y)$ ist und dasz $\sigma(X, Y)$ und $\sigma(X_1, Y)$ quasivollständig sind.

Sei μ ein zylindrisches Masz auf $\sigma(X, Y)$, skalar konzentriert auf den kompakten Teilmengen von $\sigma(X, Y)$. Wenn das zylindrische Masz μ_1, das von μ auf $\sigma(X_1, Y)$ definiert ist, ein Radon-Masz auf $\sigma(X_1, Y)$ ist, dann ist μ ein Radon-Masz auf $\sigma(X,Y)$.

BEWEIS : μ ist eine Radon-Masz genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine kompakte Teilmenge K von $\sigma(X, Y)$ existiert, sodasz $\bar{\mu}(K) > 1 - \varepsilon$. (Satz von Prokhorov (1.11) und die Tatsache, dasz $\pi_i(K)$ kompakt und daher abgeschlossen in X_i ist).

Wählen wir eine kompakte, absolutkonvexe (nach dem Satz von Krein) Teilmenge K_1 von $\sigma(X_1, Y)$, sodasz $\bar{\mu}_1(K_1) > 1 - \varepsilon$. $K_1 \cap X$ ist eine absolutkonvexe, $\sigma(X,Y)$-beschränkte und daher $\sigma(X,Y)$-präkompakte ([26], p. 144), vollständige Teilmenge von $\sigma(X, Y)$. $K_1 \cap X$ ist daher absolutkonvex und kompakt in $\sigma(X, Y)$.

Sei $\{h_\alpha\}_{\alpha \in A}$ die nach oben filtrierende Familie von Funktionen in $\mathcal{R}_\Phi(\sigma(X_1, Y))$, die von Ψ_{K_1} majorisiert werden, und seien $\{\tilde{h}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ deren Restriktionen auf $\sigma(X, Y)$. Da

$$\sup_{\alpha\in A} h_\alpha = \Psi_{K_1}$$

gilt

$$\sup_{\alpha\in A} \tilde{h}_\alpha = \Psi_{K_1 \cap X}$$

Auszerdem gilt - nach der Definition von μ_1 - $h_\alpha(\mu_1) = \tilde{h}_\alpha(\mu)$.

Man kann also die Proposition 4.9. auf die Familien $\{\tilde{h}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ und $\{h_\alpha\}_{\alpha\in A}$ anwenden :

$$\Psi_{K_1 \cap X}(\mu) = \sup_{\alpha\in A}\{\tilde{h}_\alpha(\mu)\}$$

$$= \sup_{\alpha\in A}\{h_\alpha(\mu_1)\} = \Psi_{K_1}(\mu_1) .$$

Daher $\bar{\mu}(K_1 \cap X) = \bar{\mu}_1(K_1) > 1 - \varepsilon$, und alles ist gezeigt.

□

4.12. <u>KOROLLAR</u> :

Sei Y ein tonnelierter Raum, X sein topologischer und X_1 sein algebraischer Dualraum ; sei μ ein zylindrisches Masz auf $\sigma(X, Y)$, skalar auf den kompakten (d.h. den beschränkten) Teilmengen von $\sigma(X, Y)$ konzentriert.

μ ist ein Radon-Masz auf $\sigma(X, Y)$ genau dann, wenn μ_1 ein Radon-Masz auf $\sigma(X_1, Y)$ ist.

<u>BEWEIS</u> : $\sigma(X, Y)$ und $\sigma(X_1, Y)$ sind quasivollständig. □

4.13. <u>BEMERKUNG</u> :

1) Dieses Korollar beantwortet insbesondere die in([27] p. 341) gestellte Frage : Für das kanonische Gauszsche zylindrische Masz auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ von unendlicher Dimension gilt $(\check{\gamma}_{cyl})_*(\mathcal{H}'^*) = \check{\gamma}_{cyl}(\mathcal{H}) = 0$.

Dieses spezielle Resultat habe ich mit einem ziemlich langen und umständlichen Beweis gezeigt, in Unkenntnis der Arbeiten von De Acosta [1] , der die Proposition 4.11. bewiesen hat.

Der hier gegebene einfache Beweis ist verschieden zu dem von De Acosta gegebenen und vor allem ein Resultat von Hinweisen von A. Badrikian.

2) Ich weisz nicht, was der Wert von $(\check{\gamma}_{cyl})^*(\mathcal{H}'^*)$ ist ; d.h. ich weisz nicht ob das kanonische Gauszsche zylindrische Masz γ auf $\mathcal{H}'^*$ τ-regulär ist.

4.14. Um das zweite "interessante Resultat" von der Proposition 4.9. abzuleiten, führen wir die folgende Notation ein :

DEFINITION [15] : Für ein zylindrisches Masz μ auf $\sigma(X, Y)$, nennt man eine abgeschlossene Menge S aus $\sigma(X, Y)$, für die $\bar{\mu}(S) = 1$ gilt, einen Pseudo-Träger von μ. (Mir fällt keine bessere Übersetzung für "supporteur" ein).

4.15. PROPOSITION [24]

Sei μ ein zylindrisches Masz auf $\sigma(X, Y)$, skalar konzentriert auf den kompakten konvexen Teilmengen von $\sigma(X, Y)$.

Der Durchschnitt aller konvexen Pseudo-Träger von μ ist dann ein Pseudo-Träger von μ, sein minimaler konvexer Pseudo-Träger.

BEWEIS :

Da jeder Pseudo-Träger S von μ als $\sigma(X, Y)$-abgeschlossene, konvexe Menge Durchschnitt der konvexen, abgeschlossenen Zylinder ist, die S enthalten, genügt es zu zeigen, dasz der Durchschnitt aller konvexen, abgeschlossenen Zylinder $\{C_\alpha\}_{\alpha\in A}$ mit μ-Masz 1 ein Pseudo-Träger ist.

Die Familie $\{C_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ist nicht leer, da X Pseudo-Träger ist und nach unten filtrierend (wegen der Additivität von μ).

Es gilt also für jedes $\alpha \in A$, $\Psi_{C_\alpha}(\mu) = \delta_{\{0\}}$. Nach Proposition 4.9. und der Formel (4.b.) gilt

$$\delta_{\{0\}} = \sup_{\alpha\in A} \left(\Psi_{C_\alpha}(\mu)\right) = (\sup_{\alpha\in A} \Psi_{C_\alpha})(\mu) = \Psi_{\bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha}(\mu) .$$

Daher

$$\bar{\mu}(\bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha) = 1,$$

was zu beweisen war.

4.16. Geben wir 2 Beispiele, die zeigen, dasz die in Proposition 4.15 gemachten Voraussetzungen nötig sind.

<u>BEISPIEL 1</u> :

Sei $X = Y = l^2$ und sei $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen, wobei jedes f_n die Werte ± 1 mit Wahrscheinlichkeit 1/2 annimmt ("Kopf oder Adler").

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n$ für $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$ (in Wahrscheinlichkeit) konvergiert, definiert die Folge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ein zylindrisches Masz auf $\sigma(l^2, l^2)$, das skalar auf den Kugeln von l^2 konzentriert ist ([28], prop. (1.1.) oder auch direkt leicht zu sehen).

Der minimale konvexe Pseudo-Träger ist offensichtlich

$$S = \left\{ \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2 : \sup |\alpha_n| \leq 1 \right\} .$$

Aber der Durchschnitt aller (auch nicht-konvexen) Pseudo-Träger ist leer : Sei nämlich für $k \in \mathbb{N}$

$$S_k = \left\{ \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2 : |\alpha_n| \geq 1 \ , \ \forall \ n = 1, \ldots, k \right\} .$$

Dann ist für jedes $k \in \mathbb{N}$, S_k Pseudo-Träger von μ, aber $\bigcap_{k=1}^{\infty} S_k = \emptyset$.

<u>BEISPIEL 2</u> :

Sei $X = l^1$, $Y = l^{\infty}$ und ξ ein Banach-Limes, d.h. ein Element aus $(l^{\infty})'$, sodasz für eine konvergente Folge $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ in l^{∞} , $\langle \xi, y \rangle = \lim y_n$ gilt und $||\xi|| = 1$.

Das Dirac-Masz $\delta_{\{\xi\}}$ auf $\sigma\big((l^{\infty})', l^{\infty}\big)$ definiert ein zylindrisches Masz auf $\sigma(l^1, l^{\infty})$, das wir auch mit $\delta_{\{\xi\}}$ bezeichnen. $\delta_{\{\xi\}}$ ist nicht auf den $\sigma(l^1, l^{\infty})$-kompakten Mengen skalar konzentriert.

Sei $y = \{1 - \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \in l^{\infty}$. Dann ist $S_1 = y^{-1}(\{1\})$ eine abgeschlossene Hyperebene in $\sigma(l^1, l^{\infty})$, und man verifiziert $\delta_{\{\xi\}}(S_1) = 1$. Aber S_2, die abgeschlossene Einkeitskugel von l^1 ist ebenfalls ein Pseudo-Träger, jedoch $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

4.17. <u>BEMERKUNG</u> : Ich weisz nicht, ob die Bedingung, dasz μ auf den konvexen, schwachkompakten Mengen skalar konzentriert sei, auch notwendig ist für die Gültigkeit der Proposition 4.9.

Ich kann die Umkehrung nur beweisen, wenn μ "skalar vollständig nicht-konzentriert" ist, d.h. wenn für jede konvexe, schwach kompakte Menge K ein $y \in Y$ existiert, sodasz $\langle y, K\rangle \leq 1$ und $\mu\{x : \langle x, y\rangle > 1\} = 1$. (Zum Beispiel das obige Beispiel 2).

Dann kann man nämlich eine Familie von affinen Funktionen $\{h(K,n) : K$ konvexe, schwach kompakte Menge, $n \in \mathbb{N}\}$ konstruieren, sodasz $h(K,n) \geq n$ auf K und $h(K,n)(\mu) \leq \delta_{\{0\}}$. Für die Familie der endlichen Suprema dieser Funktionen, sagen wir $\{h_\alpha\}_{\alpha\in A}$, gilt dann

$$(\sup_{\alpha\in A} h_\alpha)(\mu) = \delta_{\{+\infty\}}$$

während

$$\sup_{\alpha\in A} \left(h_\alpha(\mu)\right) \leq \delta_{\{0\}} .$$

Aber im allgemeinen Fall weisz ich nicht einmal, ob die τ-Regularität von μ bedingt, dasz μ skalar konzentriert auf den kompakten konvexen Teilmengen von $\sigma(X, Y)$ ist. Es wäre interessant zu wissen, ob diese Implikation richtig ist, da wir dann einige Resultate im Kapitel 7 allgemeiner formulieren und einfacher beweisen könnten.

5. ZYLINDRISCHE MASZE AUF BANACHRÄUMEN MIT DER RADON-NIKODYM-EIGENSCHAFT - 1. TEIL

5.1. Dieses Kapitel und Kapitel 7 geben eine detaillierte Ausführung der Resultate von [25]. Es sind nur Ergänzungen zu den Ergebnissen von [22], die wir im folgenden als bekannt voraussetzen ; wir werden auch die Notationen von [22] ohne weitere Erklärungen gebrauchen.

Das wesentliche Resultat dieses Kapitels besteht darin, dasz man im Satz (IV, (4.3.)) (von [22]) die Bedingung "vom Typ $(\tau, 1)$" durch die übliche Bedingung "vom Typ $(\tau, 0)$" ersetzen kann, d.h. dasz das zylindrische Masz auf den schwach kompakten Mengen von B skalar konzentriert sei .

5.2. SATZ

Wenn der Banachraum B die Radon-Nikodym-Eigenschaft (im folgenden (RNP) abgekürzt) hat, so ist jedes zylindrische Masz μ auf $\sigma(B, B')$, das skalar auf den $\sigma(B, B')$-kompakten Teimengen von B konzentriert und ein Radon-Masz auf $\sigma(B'', B')$ ist, bereits ein Radon-Masz auf $\sigma(B, B')$ (bzw. auf $B_{||\cdot||}$ nach 3.2.).

Um dieses Resultat auf den Satz (IV, (4.3.)) zurückzuführen, verwenden wir die folgenden Lemmas. Das erste ist eine Folgerung aus einem bekannten Satz von Grothendieck, das zweite eine Folgerung aus dem Satz von Lebesgue über p-dominierte Konvergenz.

5.3. LEMMA

Ein lokalkonvexer Vektorraum E ist genau dann vollständig, wenn jede Linearform f auf E', deren Restriktionen auf die gleichgradig stetigen Teilmengen von E' stetig bezüglich der Mackey-Topologie $\tau(E', E)$

sind, ein Element von E ist.

Insbesondere gilt für einen Banachraum B, dasz jede Linearform auf E' deren Restriktion auf die Einheitskugel von E' $\tau(E', E)$-stetig ist, ein Element von B ist.

BEWEIS : Der Satz von Grothendieck ([26], p. 148) besagt : Sei $(F, \mathfrak{T})$ ein lokalkonvexer Vektorraum und $\mathfrak{S}$ eine saturierte Familie von beschränkten Teilmengen von F, die F überdeckt. F' ist genau dann vollständig bezüglich der $\mathfrak{S}$-Topologie, wenn jede Linearform auf F, deren Restriktion auf jedes $S \in \mathfrak{S}$ für die von $\mathfrak{T}$ induzierte Topologie stetig ist, bereits stetig auf $(F, \mathfrak{T})$ ist.

Es genügt daher $(F, \mathfrak{T}) = (E', \tau(E', E))$ zu setzen und als $\mathfrak{S}$ die gleichgradig stetigen Mengen von E' zu wählen, um die erste Behauptung des Lemmas zu erhalten. Die zweite Behauptung folgt dann sofort.

□

5.4. LEMMA

Sei λ ein positives, endliches Masz auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Auf der Einheitskugel von $L^\infty(\Omega, \lambda)$ fallen die von $L^p(\Omega, \lambda)$ induzierten Topologien für $0 \leq p < \infty$ zusammen.

BEWEIS : Es genügt zu zeigen, dasz die von $L^0(\Omega, \lambda)$ induzierte Topologie feiner als die von $L^p(\Omega, \lambda)$, $1 \leq p < \infty$, induzierte ist. Wenn das Gegenteil der Fall wäre, gäbe es eine Folge $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ von Elementen aus der Einheitskugel von $L^\infty(\Omega, \lambda)$, die in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert und sodasz $||g_n||_{L^p} \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man könnte dann eine Teilfolge auswählen die λ-f.ü. konvergiert und erhielte so einen Widerspruch zum Satz von der p-dominierten Konvergenz ([16], p. 312).

□

Formulieren wir das Resultat der beiden Lemmas in der Form, die wir benötigen :

5.5. LEMMA

Sei B ein Banachraum, $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und

$$u : \tau(B', B) \rightarrow L^{0}(\Omega, \lambda)$$

eine stetige lineare Abbildung. Wenn $u(B') \subset L^{\infty}(\Omega, \lambda)$, so ist u auch eine stetige Abbildung von $\tau(B', B)$ nach $L^{p}(\Omega, \lambda)$ für jedes $0 \leq p < \infty$.

BEWEIS : Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ([16], p. 190) ist u stetig von $B'_{||\cdot||}$ nach $L^{\infty}(\Omega, \lambda)$, daher insbesondere von $B'_{||\cdot||}$ nach $L^{p}(\Omega, \lambda)$ für $1 \leq p < \infty$. Die Transponierte ${}^{t}u$ bildet daher $L^{p'}(\Omega, \lambda)$ nach B'' ab, wobei $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$. Die Abbildung $u : B' \rightarrow L^{p}(\Omega, \lambda)$, $1 \leq p < \infty$, ist genau dann $\tau(B', B)$-stetig, wenn ${}^{t}u$ $L^{p'}(\Omega, \lambda)$ nach B abbildet.

Für jedes $\psi \in L^{p'}(\Omega, \lambda)$ ist ${}^{t}u(\psi) = \psi \circ u$ eine Linearform auf B'. Nach Lemma 5.4. ist die Restriktion von ψ auf die Einheitskugel von $L^{\infty}(\Omega, \lambda)$ stetig für die von $L^{0}(\Omega, \lambda)$ induzierte Topologie. Daher ist die Restriktion von ${}^{t}u(\psi)$ auf die Einheitskugel von B' $\tau(B', B)$-stetig und nach Lemma 5.3. ist ${}^{t}u(\psi)$ ein Element von B.

□

5.6. BEWEIS des Satz 5.2. :

Sei μ gemäsz (3.4.) realisiert durch $v : B' \rightarrow L^{0}(\Omega, \lambda)$. Nach Voraussetzung (und dem Satz von Krein) ist v $\tau(B', B)$-stetig.

Da μ ein Radon-Masz auf $\sigma(B'', B')$ ist, existiert ein $\phi \in \mathcal{L}^{0}_{*}(\Omega, \lambda ; B'')$, sodasz $\langle \phi, \xi \rangle^{\bullet} = v(\xi)$ für alle $\xi \in B'$ und man kann annehmen $\|\phi(\omega)\|_{B''} \in \mathcal{L}^{0}(\Omega, \lambda)$ (Satz IV.4.1. und IV.2.5.).

Wenn man $\Omega_{n} := \{\omega : n-1 \leq \phi(\omega) < n\}$ setzt, so erhält man eine Partition von Ω in eine Folge von λ-meszbaren Teilmengen. Definieren wir für $n \in \mathbb{N}$

$$\phi_{n}(\omega) = \phi(\omega) \cdot 1_{\Omega_{n}}(\omega) \quad .$$

ϕ_{n} definiert ein zylindrisches Masz μ_{n} auf $\sigma(B, B')$ (dessen Masse allerdings gleich $\lambda(\Omega_{n}) \in [0, 1]$ ist), das ein Radon-Masz auf $\sigma(B'', B')$ ist. Eine zu μ_{n} assoziierte lineare Zufallsfunktion ist gegeben durch

$$v_n = \pi_n \circ v : B' \to L^0(\Omega, \lambda) ,$$

wobei
$$\pi_n : L^0(\Omega, \lambda) \to L^0(\Omega, \lambda)$$
$$f \to f \cdot 1_{\Omega_n} \quad .$$

Nach Konstruktion nimmt v_n seine Werte in $L^\infty(\Omega, \lambda)$ an und das Lemma 5.5. impliziert daher, dasz v_n stetig ist bezüglich $\tau(B', B)$ und $L^1(\Omega, \lambda)$.

Man kann daher Satz (IV, 4.3.) auf μ_n anwenden : μ_n ist ein Radon-Masz auf B, das wir mit μ_n^R bezeichnen wollen. Klarerweise gilt $||\mu_n^R||_{\mathcal{M}(B)} = \lambda(\Omega_n)$. $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^R$ konvergiert daher in $\mathcal{M}(B)$ gegen ein Radon-Masz μ^R. Für jedes $\xi \in B'$ gilt

$$\xi(\mu^R) = \xi(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^R) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi(\mu_n^R) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi(\mu_n) = \xi(\mu) \quad ,$$

wobei die Summen in der Norm von $\mathcal{M}(B)$ beziehungsweise $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ konvergieren.

μ ist daher durch das Radon-Masz μ^R induziert, womit alles bewiesen ist.

□

5.7. <u>BEMERKUNG</u> : Der Satz 5.2. verallgemeinert auch den Satz (II, 3.3.) und das Lemma (VII, 1.1.) in [5].

5.8. Nach Korollar 4.12. kann man in Satz 5.2. B" sogar durch B'^*, den algebraischen Dualraum von B', ersetzen :

<u>KOROLLAR</u>

Wenn B die RNP hat, so ist jedes zylindrische Masz μ auf $\sigma(B, B')$, das skalar auf den $\sigma(B, B')$-kompakten Teilmengen von B konzentriert und ein Radon-Masz auf $\sigma(B'^*, B')$ ist, bereits ein Radon-Masz auf $\sigma(B, B')$.

5.9. Eine andere Folgerung aus Satz 5.2. ist die folgende Verallgemeinerung eines Satz von Linde-Pietsch (Satz (IV, 4.4.) in [22]) :

<u>KOROLLAR</u>

Wenn B die RNP besitzt, so ist jede 0-summierende Abbildung von einem Banachraum G nach B (was nach dem Satz von Maurey-Chevet äquivalent dazu ist, dasz u p-summierend ist für ein [bzw. für alle] $p \in]-1, +1[$) approximativ 0-radonifizierend von G nach B.

<u>BEWEIS</u> : u ist approximativ 0-radonifizierend von G nach $\sigma(B'', B')$ ([29]).

Sei μ ein zylindrisches Masz auf G vom Typ 0 approximierbar (Siehe [29]). $u(\mu)$ ist ein Radon-Masz auf $\sigma(B'', B')$. Wenn $v : G' \to L^0(\Omega, \lambda)$ eine zu μ assoziierte lineare Zufallsfunktion ist, so ist sie stetig bezüglich der Norm von G', da μ vom Typ 0 ist.

Da u schwach kompakt ist, ist ${}^t u : B' \to G'$ stetig bezüglich $\tau(B', B)$ und $G'_{||.||}$. Daher ist $v \circ {}^t u$, das eine zu $u(\mu)$ assoziierte linear Zufallsfunktion ist, stetig bezüglich $\tau(B', B)$, d.h. $u(\mu)$ ist auf den schwach kompakten Mengen von B skalar konzentriert. Nach Satz 5.2. ist $u(\mu)$ daher ein Radon-Masz auf B.

$\square$

6. EXKURS ÜBER DIE MACKEY-TOPOLOGIE

Der Anstosz zu diesem Kapitel ist das Lemma 5.3. : Denn es ist erstaunlich, dasz die Folgerungen aus dem Satz von Grothendieck (meines Wissens nach) immer bezüglich der Topologie $\sigma(E', E)$ gezogen werden, obwohl sie auch bezüglich der Topologie $\tau(E', E)$ gelten. Nützen wir die Gelegenheit, um das hier zu tun :

6.1. PROPOSITION

Die folgenden Behauptungen über einen lokalkonvexen Vektorraum E sind äquivalent :

(a) E ist vollständig.

(b) [bzw. (b')] Jede Linearform auf E', deren Restriktion auf jede gleichgradig stetige Teilmenge $\sigma(E', E)$-stetig [bzw. $\tau(E', E)$-stetig] ist, ist ein Element von E.

(c) [bzw. (c')] Jede Hyperebene H in E', deren Durchschnitt $H \cap A$ für jede gleichgradig stetige Menge A in E' abgeschlossen ist in A bezüglich der von $\sigma(E', E)$ [bzw. der von $\tau(E', E)$] induzierten Topologie, ist $\sigma(E', E)$-abgeschlossen.

(d) Die Topologie $\tau(E', E)$ ist die feinste lokalkonvexe Topologie auf E', die auf den gleichgradig stetigen Mengen von E' mit der von $\tau(E', E)$ induziertenTopologie übereinstimmt.

(e) Jede <u>konvexe</u> Teilmenge G von E', für die der Durchschnitt $G \cap A$ mit jeder gleichgradig stetigen Menge A in E' offen ist bezüglich der von $\tau(E', E)$ induziertenTopologie, ist $\tau(E', E)$-offen.

(f) Jede lineare Abbildung $T : E' \to F$ von E' in einen lokalkonvexen Vektorraum F, für die die Restriktionen von T auf die gleichgradig stetigen Mengen von E' $\tau(E', E)$-stetig ist, ist $\tau(E', E)$-stetig.

BEWEIS

(a) $\iff$ (b) $\iff$ (c), da ich sie von ([26], p. 149) abgeschrieben habe.

(a) $\iff$ (b') ist die Aussage von Lemma 5.3.

(c) $\iff$ (c') : man kann annehmen, dasz die gleichgradig stetige Menge A konvex und $\sigma(E', E)$-abgeschlossen ist. $H \cap A$ ist daher als konvexe Menge genau dann $\sigma(E', E)$-abgeschlossen, wenn sie $\tau(E', E)$-abgeschlossen ist ([26], p. 130).

(b') $\Rightarrow$ (d) : Für jede Topologie $\mathcal{T}$ auf E', die auf den gleichgradig stetigen Mengen die Topologie $\tau(E', E)$ induziert, gilt nach (b'), dasz $(E', \mathcal{T})' = E$. Da $\tau(E', E)$ gerade die feinste lokalkonvexe Topologie auf E' ist, die E als Dualraum ergibt, folgt die Behauptung.

(d) $\Rightarrow$ (e) : Es folgt aus ([13], prop. 1), dasz eine Basis der Nullumgebungen für die feinste lokalkonvexe Topologie, die auf den gleichgradig stetigen Teilmengen $\{A_\beta\}_{\beta\in B}$ von E' mit $\tau(E', E)$ zusammenfällt, gegeben ist durch die $\Gamma_{\beta\in B} (A_\beta \cap V_\beta)$, wobei die $\{V_\beta\}_{\beta\in B}$ Nullumgebungen bezüglich $\tau(E', E)$ sind.

Wenn G die Voraussetzung von (e) erfüllt, so kann man für jedes $x \in G$ und A_β eine Nullumgebung V_β finden, sodasz $(A_\beta \cap V_\beta) \subseteq G - x$. Da G als konvex vorausgesetzt ist, gilt auch $\Gamma_{\beta\in B} (A_\beta \cap V_\beta) \subseteq G - x$.

G ist daher eine Umgebung eines jeden seiner Punkte für die feinste lokalkonvexe Topologie, die auf den gleichgradig stetigen Mengen von E' $\tau(E', E)$ induziert, daher wegen (d) für $\tau(E', E)$.

BEMERKUNG : Es ist nicht schwer, (d) $\Rightarrow$ (e) direkt zu sehen : Sei G wie oben die durch Translationen und Homothetien aus G erzeugten Mengen bilden die Basis einer Topologie $\mathcal{T}_G$.

Das ist eine lokalkonvexe Topologie auf E', die auf den gleichgradig stetigen Mengen eine gröbere Topologie als $\tau(E', E)$ induziert. Daher ist $\mathcal{T}_G$ gröber als $\tau(E', E)$ und insbesondere G offen in $\tau(E', E)$.

(e) $\Rightarrow$ (f) : Sei V eine konvexe, offene Nullumgebung in F. Die Menge $G = T^{-1}(V)$ erfüllt die Voraussetzungen von (e) und ist daher $\tau(E', E)$-offen

(f) $\Rightarrow$ (b') ist schlieszlich trivial. □

6.2. <u>BEMERKUNG</u> : Man weisz, dasz für einen vollständigen lokalkonvexen Vektorraum E die feinste lokalkonvexe Topologie, die auf den gleichgradig stetigen Mengen von E' mit $\sigma(E', E)$ übereinstimmt, die Topologie $c(E', E)$ der kompakten Konvergenz ist ([Bourbaki, Espaces vectoriels topologiques (1967), Ch. 3-5, p. 84, ex. 17]) ; E musz übrigens nicht metrisierbar sein für dieses Resultat.

Andererseits ist es für einen Banachraum E trivial, dasz die Norm-Topologie auf E' die feinste Topologie ist, die auf den Kugeln von E' mit der Norm-Topologie übereinstimmt.

Im Fall eines nichtreflexiven Banachraumes E, in dem es eine schwach kompakte Menge gibt, die nicht stark kompakt ist, erhält man daher für die Restriktionen der folgenden Topologien auf die Einheitskugel $\mathcal{B}(E')$:

$$\sigma(E',E) \Big| \mathcal{B}(E') = c(E',E) \Big| \mathcal{B}(E') \lneqq \tau(E',E) \Big| \mathcal{B}(E') \lneqq \beta(E',E) \Big| \mathcal{B}(E')$$

6.3. Ich danke Laurent Schwartz, der mich darauf hingewiesen hat, dasz die Charakterisationen (d), (e) und (f) eine Folgerung aus (b') sind.

7. ZYLINDRISCHE MASZE AUF BANACHRÄUMEN MIT DER RADON-NIKODYM-EIGENSCHAFT - 2. TEIL

7.1. Sunyach hat gezeigt [30], dasz für einen vollständig regulären Raum $\mathfrak{X}$ die folgenden Behauptungen äquivalent sind :

(i) $\mathfrak{X}$ ist eine universell Radon-meszbare Teilmenge jedes Überraumes von $\mathfrak{X}$.

(ii) $\mathfrak{X}$ ist eine universell Radon-meszbare Teilmenge in einer Kompaktifizierung von $\mathfrak{X}$.

(iii) Jedes τ-reguläre Wahrscheinlichkeits-Borel-Masz auf $\mathfrak{X}$ ist ein Radon-Masz.

Ein vollständig regulärer Raum, der diese äquivalenten Bedingungen erfüllt, heiszt ein <u>universell Radon-meszbarer Raum</u>. Zum Beispiel ist ein lokalkompakter Raum, ein vollständig metrisierbarer Raum oder eine abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen universell Radon-meszbar, da diese Räume eine offene Menge, eine G_δ-Menge [8], beziehungsweise eine F_σ-Menge in ihrer Stone-Čech-Kompaktifizierung sind. Insbesondere ist ein Banachraum mit der Normtopologie oder ein dualer Banachraum mit der σ^*-Topologie ein universell Radon-meszbarer Raum.

Aber der Fall, der uns vor allem interessiert, ist der eines Banachraumes $\sigma(B, B')$ mit der schwachen Topologie. Klarerweise ist $\sigma(B, B')$ als abzählbare Vereinigung von Kugeln genau dann universell Radon-meszbar, wenn es die Einheitskugel von $\sigma(B, B')$ ist. Man überzeugt sich nun leicht, dasz die Einheitskugel von $\sigma(B, B')$ in der Einheitskugel von $\sigma(B'', B')$ -die eine Kompaktifizierung von ihr ist- im allgemeinen weit davon entfernt ist, eine Borel-Teilmenge zu sein.

Selbstverständlich ist aber ein separabler Banachraum $\sigma(B, B')$ mit der schwachen Topologie universell Radon-meszbar, da er ein Lusin-Raum ist und daher schon jedes σ-additive Borel-Masz ein Radon-Masz ist.

7.2. LEMMA :

Sei $(\mathfrak{X}, \mathcal{T})$ ein vollständig regulärer Raum. Nehmen wir an, dasz eine vollständig reguläre Topologie $\mathcal{T}_1$ auf $\mathfrak{X}$ existiert, schwächer als $\mathcal{T}$, sodasz $(\mathfrak{X}, \mathcal{T}_1)$ ein universell Radon-meszbarer Raum und die Identität $i : (\mathfrak{X}, \mathcal{T}_1) \to (\mathfrak{X}, \mathcal{T})$ eine universell Radon-meszbare Abbildung ist.

Dann ist $(\mathfrak{X}, \mathcal{T})$ ebenfalls ein universell Radon-meszbarer Raum.

BEWEIS : Sei μ eine τ-reguläre Borel-Wahrscheinlichkeit auf $(\mathfrak{X}, \mathcal{T})$. Die Restriktion ν von μ auf die Borel-σ-Algebra von $(\mathfrak{X}, \mathcal{T}_1)$ ist dann erst recht τ-regulär und nach Voraussetzung eine Radon-Wahrscheinlichkeit auf $(\mathfrak{X}, \mathcal{T}_1)$. Sein Bild $i(\nu)$ in $(\mathfrak{X}, \mathcal{T})$ ist daher eine Radon-Wahrscheinlichkeit auf $(\mathfrak{X}, \mathcal{T})$ ([3], p. 85).

Für jede kompakte Teilmenge K von $(\mathfrak{X}, \mathcal{T})$ gilt

$$i(\nu)\,(K) = \nu(K) = \mu(K) \quad ;$$

μ ist daher ein Radon-Masz auf $(\mathfrak{X}, \mathcal{T})$ und $i(\nu) = \mu$.

□

7.3. SATZ

Sei B ein Banachraum, isomorph zu einem abgeschlossenen Teilraum eines dualen Banachraumes E', sodasz E' die RNP hat. (Insbesondere hat dann B die RNP).

$\sigma(B, B')$ ist dann ein universell Radon-meszbarer Raum und jedes τ-reguläre zylindrische Masz auf $\sigma(B, B')$ ist daher ein Radon-Masz.

BEWEIS : Bemerken wir zuerst, dasz man Satz (V, 5.5.) in [22] folgender Maszen formulieren kann : Ein dualer Banachraum E' hat die RNP genau dann, wenn die identische Abbildung $i : \sigma(E', E) \to \sigma(E', E'')$ universell Radon-meszbar ist. Denn i ist universell Radon-meszbar genau dann, wenn für jede Radon-Wahrscheinlichkeit m auf $\sigma(E', E)$, eine $\sigma(E', E)$-kompakte Menge K existiert, sodasz $m(K) > 1 - \varepsilon$ und die Topologien $\sigma(E', E)$ und $\sigma(E', E'')$

auf K zusammenfallen. Das heiszt aber genau, dasz m von den $\sigma(E', E'')$-kompakten Mengen von E' getragen wird, beziehungsweise dasz m die Restriktion eines Radon-Maszes auf $\sigma(E', E'')$ ist.

Es folgt daher aus dem Lemma 7.2., dasz $\sigma(E', E'')$ universell Radon-meszbar ist. Daher ist auch $\sigma(B, B')$ universell Radon-meszbar, da jede universell Radon-meszbare Teilmenge eines universell Radon-meszbaren Raumes ein universell Radon-meszbarer Raum ist [30].

□

7.4. <u>BEMERKUNGEN</u> :

1) Ich weisz nicht, ob es Banachräume B mit der RNP gibt, die die Voraussetzungen von Satz 7.3. nicht erfüllen. (Vergleiche dazu [9], p. I-7, Problem 1).

2) Wenn man zeigen könnte, dasz die τ-Regularität eines zylindrischen Maszes μ auf $\sigma(B, B')$ die skalare Konzentration auf den schwach kompakten Teilmengen von $\sigma(B, B')$ impliziert, wäre Satz 7.3. eine unmittelbare Folgerung aus Satz 5.2. und würde für alle Banachräume B mit der RNP gelten.

3) Ich kenne kein Beispiel eines τ-regulären zylindrischen Maszes auf einem Banachraum $\sigma(B, B')$ mit der schwachen Topologie, das kein Radon-Masz ist ; d.h. ich weisz nicht, ob Satz 7.3. sogar für alle Banachräume gilt. Ich glaube allerdings, dasz das nicht der Fall ist.*

Wir haben andererseits gesehen (2.5.), dasz $\mathbb{R}^A$ universell Radon-meszbar ist genau dann, wenn die Kardinalität von A höchstens abzählbar ist.

7.5. Ich kenne allerdings ein Beispiel, eines σ-additiven zylindrischen Maszes auf $\sigma(B, B')$, wobei B ein Banachraum ist (weit entfernt davon, die RNP zu haben), das kein Radon-Masz (nicht einmal τ-regulär) auf $\sigma(B, B')$ ist :

<u>BEISPIEL</u> : Sei $S = [0, \omega]$ der Raum der Ordinalzahlen, die kleiner oder gleich der ersten überabzählbaren Ordinalzahl ω sind. Mit der Ordnungstopologie ist das ein kompakter Raum.

---

* Siehe jedoch Nachtrag am Ende dieses Kapitels.

Sei $B = \mathcal{C}(S)$, der Raum der stetigen Funktionen auf S. Die Indikatorfunktion 1_ω von ω definiert eine Linearform auf $B' = \mathcal{M}(S)$, dem Raum der Radon-Masze auf S : $\langle 1_\omega, m\rangle = m(\{\omega\})$. 1_ω ist ein Element von B", da es offensichtlich Norm-stetig ist. Sei $\mu = \delta_{1_\omega}$ das Dirac-Masz im Punkt 1_ω auf $\sigma(B'', B')$.

μ definiert daher ein zylindrisches Masz, ebenfalls mit μ bezeichnet, auf $\sigma(B, B')$, von dem wir zeigen wollen, dasz es σ-additiv ist. Es genügt zu zeigen, dasz für $\varepsilon > 0$ und für eine abnehmende Folge $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ von Zylindern, sodasz $\mu(Z_n) \geq \varepsilon$ gilt, der Durchschnitt $\bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n$ nicht leer ist.

Da μ vom Dirac-Masz δ_{1_ω} induziert wird, ist $\mu(Z_n) \geq \varepsilon$ genau dann, wenn $\mu(Z_n) = 1$. Sei also $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine abnehmende Folge Zylindern sodasz $\mu(Z_n) = 1$. Die $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ hängen nur von einer abzählbaren Menge $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ von Elementen von $B' = \mathcal{M}(S)$ ab.

Setzen wir $$m_k' = m_k \big|_{S \setminus \{\omega\}}$$
und $$m_k'' = m_k \big|_{\{\omega\}}$$

Dann gilt $m_k = m_k' + m_k''$ und jedes m_k' wird getragen von einer abzâhlbaren Vereinigung von kompakten Mengen in $[0, \omega[$, d.h. von einem einzigen Kompaktum $[0, a_k] \subseteq [0, \omega[$.

Die abzählbare Menge $\{m_k'\}_{k=1}^{\infty}$ wird daher getragen von einem Kompaktum $[0, a_\infty] \subseteq [0, \omega[$.

Nach Tietze-Urysohn existiert ein $f \in \mathcal{C}(S)$, sodasz
$$f \big|_{[0, a_\infty]} = 0$$
und $$f(\omega) = 1 .$$

Dann gilt $\langle f, m_k\rangle = \langle 1_\omega, m_k\rangle$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $\mu(Z_n) = 1$ impliziert daher $f \in Z_n$. Daher $f \in \bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n$, was zu zeigen war.

□

7.6. <u>BEMERKUNGEN</u> : Ich danke V. Losert, den ich zu diesem Problem befragt habe, und der dieses Beispiel gefunden hat. Während des Anstausches der Briefe hatte ich allerdings bereits selbst dasselbe Beispiel gefunden, ein Beweis für seine psychologische Eindeutigkeit (im Sinn von Halmos).

Das zylindrische Masz μ aus 7.5. ist (trivialer Weise) ein Gausz-Masz und verifiziert daher eine Vermutung von H. Sato.

Wie der Leser bemerkt hat, ist dieses Beispiel nur eine Adaptation des berühmeten Beispiels von Dieudonné auf den Fall von zylindrischen Maszen. μ ist also definiert auf der von den Zylindern erzeugten σ-Algebra $\mathcal{A}$ von $\sigma(B, B')$. Es besteht kein Grund dafür, dasz μ sich auf die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}$ von $\sigma(B, B')$ fortsetzen läszt (und ich glaube, dasz das auch tatsächlich nicht geht, kann es aber nicht exakt beweisen).

Für die σ^*-Topologie liegt der Fall einfacher : Man kann $[0, \omega]$ mit den Punkt-Maszen in $\sigma(\mathcal{M}(S), \mathcal{C}(S))$ identifizieren, die eine kompakte Teilmenge bilden. Das berühmte Beispiel eines Borel-Maszes auf $[0, \omega]$, das kein Radon-Masz ist (Halmos, Measure Theory, Ex. 52.10) läszt sich daher unmittelbar auf die Borel-σ-Algebra von $\sigma(\mathcal{M}(S), \mathcal{C}(S))$ fortsetzen (Vergleiche auch [10]).

7.7. Es erhebt sich andererseits die Frage, ob man in Satz 7.3. die τ-Regularität durch die σ-Additivität ersetzen kann.

Wenn die $\sigma(E', E'')$-kompakten, konvexen Mengen zu der von den Zylindern erzeugten σ-Algebra $\mathcal{A}$ gehören, kann man dies leicht aus 1.10 folgern. Aber das ist genau dann der Fall, wenn E separabel ist ; in diesem Fall ist E', wenn es die RNP besitzt, ebenfalls separabel ([22], exp. IX) und man findet nichts Neues.

Man stöszt hier auf einen Zusammenhang mit dem berühmten Problem der Meszbarkeit der Kardinalitäten ([12], [31]). Man kann eine Menge I mit der diskreten Topologie mit der Basis $\{e_i\}_{i\in I}$ von $\sigma(l^1_I, l^\infty_I)$ identifizieren ; es ist bekannt, dasz l^1_I ein Dualraum mit der RNP ist.

Jedes (0, 1)-Masz m auf der Potenzmenge P(I) definiert ein zylindrisches Masz μ auf $\sigma(l^1_I, l^\infty_I)$, wenn man für jeden Zylinder Z von l^1_I setzt:

$$\mu(Z) := m(Z \cap \{e_i\}_{i\in I})$$

Die σ-Additivität von m impliziert dann die von μ (nach 1.6.). Wenn nun Satz 7.3. unter der Annahme der σ-Additivität gäbte, dann wäre μ ein Radon-Masz.

Es ergäbe sich sofort, dasz m auch ein Radon-Masz ist und daher jede Kardinalität nicht-meszbar ist.

Da der Abschlusz von $\{e_i\}_{i\in I}$ in $\sigma\big((l^\infty_I)', l^\infty_I\big)$ isomorph zur Stone-Čech-Kompaktifizierung von I ist, definiert μ auf jeden Fall ein Dirac-Masz $\delta_{\{x\}}$ auf $\sigma\big((l^\infty_I)', l^\infty_I\big)$, wobei $x \in (l^\infty_I)'$. Beispiel 7.5. zeigt, dasz die σ-Additivität von μ auf $\sigma(l^1_I, l^\infty_I)$ äquivalent dazu ist, dasz man x von $\{e_i\}_{i\in I}$ nicht durch eine abzählbare Anzahl von Elementen aus l^∞_I trennen kann (bzw. mit einem $\sum 1/2^k$-Argument durch ein Element von l^∞_I). Man findet daher wieder den Satz von Mackey, dasz die Kardinalität von I genau dann nicht-meszbar ist, wenn I real-kompakt ist [20].

7.8. Fassen wir zusammen, was wir über die Zusammenhänge zwischen σ-additiven, τ-regulären und Radonschen zylindrischen Maszen auf $\sigma(B, B')$ wissen :

	Jedes σ-add. zyl. Masz auf $\sigma(B, B')$ ist ein Radon-Masz	Jedes τ-reg. zyl. Masz auf $\sigma(B, B')$ ist ein Radon-Masz
B separabler Banachraum	ja	ja
B erfüllt die Vs. von Satz 7.3.	?	ja
B beliebiger Banachraum	nein	?

7.9. <u>NACHTRAG</u> : L. Schwartz hat jüngst mit Hilfe eines Satzes von Ionescu-Tulcea gezeigt, dasz, für jeden Fréchet-Raum F, $\sigma(F, F')$ ein universell Radon-meszbarer Raum ist.

Die in 7.4. 3) geäuszerte Vermutung ist daher falsch, und wir können das "?" im rechten unteren Kästchen von 7.8. durch ein "ja" ersetzen.

APPENDIX : DIE H-KOMPAKTIFIZIERUNGEN VON $\sigma(X, Y)$

A.1. Wir wollen in diesem Kapitel die in (1.9.) angewendete Methode rechtfertigen, die damals etwas "Kochrezept"-artig geschienen haben mag : wir haben $\sigma(X, Y)$ in ein "geeignetes Kompaktum" eingebettet. Wir wollen zeigen, dasz die spezielle Wahl dieses Kompaktums nicht in den daraus abgeleiteten Werten eines zylindrischen Maszes μ eingeht.

LeCam folgend[18], betrachten wir nicht direkt die Kompaktifizierungen von $\sigma(X, Y)$, sondern eher Teilmengen der stetigen beschränkten Funktionen auf $\sigma(X, Y)$, die dann bekanntlich zu Kompaktifizierungen führen : Sei nämlich $\mathfrak{X}$ ein topologischer Raum und H eine Teilmenge von $\mathcal{C}(\mathfrak{X})$, dem Raum der stetigen, reellwertigen, beschränkten Funktionen auf $\mathfrak{X}$. Für jedes $h \in H$ und $\varepsilon > 0$, sei

$$U_{\varepsilon,\, h} = \{(x_1, x_2) : |h(x_1) - h(x_2)| < \varepsilon\}.$$

Das ist eine Basis einer uniformen Struktur $\mathfrak{U}(H)$ auf $\mathfrak{X}$, die präkompakt ist und eine Topologie $\sigma(H)$ auf $\mathfrak{X}$ definiert, welche (im allgemeinen echt) schwächer als die Ausgangstopologie von $\mathfrak{X}$ ist.

Wir bezeichnen mit $(\mathfrak{X}, \sigma(H))$ [bzw. $(\mathfrak{X}, \mathfrak{U}(H))$] den Raum $\mathfrak{X}$ mit der Topologie $\sigma(H)$ [bzw. der uniformen Struktur $\mathfrak{U}(H)$] , wobei wir übereinkommen für den Fall, dasz $\sigma(H)$ nicht hausdorffsch ist, d.h. dasz H nicht die Punkte trennt, darunter den Quotientenraum bezüglich der von H definierten Äquivalenzrelation zu verstehen.

Bezeichnen wir mit $\hat{\mathfrak{X}}_H$ die Vervollständigung von $(\mathfrak{X}, \mathfrak{U}(H))$, die wegen der Präkompaktheit von $\mathfrak{U}(H)$ ein kompakter Raum ist.

A.2. Kommen wir zum Fall eines topologischen Vektorraumes $\sigma(X, Y)$. Sei H eine Teilmenge von $\mathcal{C}_{cyl}(X)$. Wir bezeichnen mit H_i die Teilmenge der Funktionen aus H, die sich über $X_i = X/Z_i$ faktorisieren lassen, d.h. von der Form $h = h_i \circ \pi_i$ sind. Klarerweise gilt $H = \bigcup_{i \in I} H_i$. Man kann dabei die Elemente aus H_i auch als stetige Funktionen auf X_i auffassen.

PROPOSITION :

Nehmen wir an, dasz H die folgende Eigenschaft hat :

(T) Für jedes $i \in I$ stimmt $\sigma(H_i)$ auf X_i mit der Ausgangstopologie von X_i überein.

Die Topologie $\sigma(H)$ auf dem Raum $\sigma(X, Y)$ stimmt dann mit der Topologie $\sigma(X, Y)$ überein und der Raum $\sigma(X, Y)$ [und sogar $\sigma(Y^*, Y)$] sind isomorph in dem Kompaktum $\check{X}_H$ eingebettet.

$\check{X}_H$ ist isomorph zum projektiven Limes $\varprojlim_{i \in I} \left((\check{X}_i)_{H_i}, \check{\pi}_{i_2,i_1}\right)$, wobei $\check{\pi}_{i_2,i_1}$ die stetige Fortsetzung der Projektion $\pi_{i_2,i_1} : X_{i_1} \to X_{i_2}$ auf die Vervollständigungen $(\check{X}_{i_1})_{H_{i_1}}$ und $(\check{X}_{i_2})_{H_{i_2}}$ ist, für $i_1 \geq i_2$.

Man nennt $\check{X}_H$ die H-Kompaktifikation von $\sigma(X, Y)$.

BEWEIS :

Jedes X_i ist wegen (T) (topologisch) isomorph eingebettet in $(\check{X}_i)_{H_i}$.

Für $i_1 \geq i_2$ gilt $H_{i_1} \geq H_{i_2}$; die Projektion $\pi_{i_2,i_1} : X_{i_1} \to X_{i_2}$ ist daher gleichmäszig stetig für $\mathcal{U}(H_{i_1})$ und $\mathcal{U}(H_{i_2})$ und läszt sich daher auf die Vervollständigungen fortsetzen : $\check{\pi}_{i_2,i_1} : (\check{X}_{i_1})_{H_{i_1}} \to (\check{X}_{i_2})_{H_{i_2}}$.

Die uniforme Struktur $\mathcal{U}(H)$ auf X ist die obere Grenze der uniformen Strukturen $\{\mathcal{U}(H_i)\}_{i \in I}$ auf X. Mit anderen Worten

$$(X, \mathcal{U}(H)) = \varprojlim_{i \in I} \left[(X, \mathcal{U}(H_i)), id_X\right]$$

$$= \varprojlim_{i \in I} \left[(X_i, \mathcal{U}(H_i)), \pi_{i_2,i_1}\right],$$

und daher

$$\check{X}_H = \varprojlim_{i \in I} \left((\check{X}_i)_{H_i}, \check{\pi}_{i_2,i_1}\right).$$

Nun ist klar, dasz $\sigma(Y^*, Y)$, das isomorph zu $\varprojlim_{i \in I} (X_i, \pi_{i_2, i_1})$, und erst recht $\sigma(X, Y)$ isomorph in $\check{X}_H$ eingebettet sind.

□

A.3. Wir haben also gesehen, dasz jede Teilmenge H von $\mathcal{C}_{cyl}(X)$, die (T) erfüllt zu einer Kompaktifizierung von $\sigma(X, Y)$ führt, wie wir sie in (1.9.) charakterisiert haben. Umgekehrt sei $\hat{X}$ eine Kompaktifizierung von $\sigma(X, Y)$ wie in (1.9.), so bilden die Funktionen $h \in \mathcal{C}_{cyl}(X)$, die sich auf $\hat{X}$ stetig fortsetzen lassen, eine Familie H, sodasz $\check{X}_H = \hat{X}$.

A.4. <u>PROPOSITION</u>

Sei $\check{X}_H$ eine H-Kompaktifizierung von $\sigma(X, Y)$. Jedes $h \in H$ läszt sich eindeutig in eine stetige Funktion $\check{h}$ auf $\check{X}_H$ fortsetzen.

Der Raum $\mathcal{C}(\check{X}_H)$ ist die Vervollständigung des von den stetigen Fortsetzungen $\check{h}$ von Elementen h aus H und den Konstanten erzeugten Vektorverbandes L(H) [bzw. der von den $\check{h}$ und den Konstanten erzeugten Algebra A(H)].

<u>BEWEIS</u> : Es ergibt sich direkt aus der Konstruktion der $\check{X}_H$, dasz sich die $h \in H$ eindeutig in stetige Funktionen $\check{h}$ auf $\check{X}_H$ fortsetzen lassen.

Da jedes $\check{h} \in \mathcal{C}(\check{X}_H)$ und da $\mathcal{C}(\check{X}_H)$ ein vollständiger Verband [eine vollständige Algebra] ist, müssen wir nur zeigen, dasz L(H) [bzw. A(H)] dicht in $\mathcal{C}(\check{X}_H)$ ist. Aber nach der Definition von $\check{X}_H$ trennen die $\check{h}$ die Punkte von $\check{X}_H$. Es folgt daher aus einem bekannten Lemma ([19], P. 8) [bzw. dem Satz von Stone-Weierstrasz], dasz L(H) [bzw. A(H)] dicht in $\mathcal{C}(\check{X}_H)$ ist.

□

A.5. <u>BEISPIELE</u>

a) Sei $H = \mathcal{C}_{cyl}(X)$; dann nennt man $\check{X}_H$ die zylindrische Kompaktifizierung $\check{X}_{cyl}$.

b) Sei $H = \mathcal{C}^u_{cyl}(X)$, die Menge der gleichmäszig stetigen Funktionen in $\mathcal{C}_{cyl}(X)$. Mann nennt $\check{X}_H$ die gleichmäszige zylindrische Kompaktifizierung $\check{X}^u_{cyl}$.

c) Sei $H = \{\mathrm{arctg} \circ y : y \in Y\}$; man nennt dann $\check{X}_H$ die affine Kompaktifizierung $\check{X}_{aff}$.

A.6. <u>PROPOSITION</u>

Die zylindrische Kompaktifizierung $\check{X}_{cyl}$ hat die folgende universelle Eigenschaft : Für jede H-Kompaktifizierung $\check{X}_H$ läszt sich die Einbettung j_H von $\sigma(X, Y)$ nach $\check{X}_H$ eindeutig in eine Surjektion p von $\check{X}_{cyl}$ auf $\check{X}_H$ fortsetzen :

$$\begin{tikzcd}
\sigma(X, Y) \arrow[r, "j_H"'] \arrow[d, "j_{cyl}"] & \check{X}_H \\
\check{X}_{cyl} \arrow[ur, "\exists ! p"'] &
\end{tikzcd}$$

Es gibt dann $p\left[\check{X}_{cyl} \setminus j_{cyl}\left(\sigma(X, Y)\right)\right] = \check{X}_H \setminus j_H\left(\sigma(X, Y)\right)$.

<u>BEWEIS</u> (trivial) : Wir haben $H \subseteq \mathcal{C}_{cyl}(X)$ angenommen. Die Identität $\left[X, \mathcal{U}\left(\mathcal{C}_{cyl}(X)\right)\right] \to \left(X, \mathcal{U}(H)\right)$ ist daher gleichmäszig stetig und läszt sich eindeutig auf die Vervollständigungen fortsetzen.

Die letzte Behauptung gilt allgemein für jede stetige Abbildung einer Kompaktifizierung eines vollständig regulären Raumes in eine andere, die die die Identität fortsetzt [12].

□

A.7. Sei nun μ ein zylindrisches Masz auf $\sigma(X, Y)$ und $\check{X}_H$ eine H-Kompaktifizierung von $\sigma(X, Y)$. Nach 1.9. definiert μ ein "zu μ assoziiertes" Radon-Masz $\check{\mu}_H$ auf $\check{X}_H$. Die Formel (1.f) lautet nun

$$\check{\mu}_H\,(\check{Z}) = \mu\,(\check{Z} \cap X) \tag{A.a}$$

für jeden Zylinder $\check{Z}$ von $\check{X}_H$. Wenn wir für $k \in H$ mit $\check{h}$ seine stetige Fortsetzung auf $\check{X}_H$ bezeichnen, so gilt

$$\check{h}(\check{\mu}) = h\,(\mu). \tag{A.b}$$

Denn h faktorisiert $h = h_i \circ \pi_i$, und daher auch $\check{h} = \check{h}_i \circ \check{\pi}_i$. Da h_i und $\check{h}_i$ auf X_i übereinstimmen, gilt wegen der Definition von $\check{\mu}_H$

$$\check{h}(\check{\mu}_H) = \check{h}_i\left(\check{\pi}_i(\check{\mu}_H)\right) = h_i(\mu_i) = h(\mu) .$$

A.8. PROPOSITION :

Sei μ ein zylindrisches Masz auf $\sigma(X, Y)$ und sei $\check{X}_H$ eine H-Kompaktifikation von $\sigma(X, Y)$. Seien $\check{\mu}_H$ und $\check{\mu}_{cyl}$ die zu μ assoziierten Radon-Masze auf $\check{X}_H$ und $\check{X}_{cyl}$, und sei $p : \check{X}_{cyl} \to \check{X}_H$ die Projektion gemäsz Proposition A.6.

Dann ist $\check{\mu}_H$ das Bild von $\check{\mu}_{cyl}$ unter p, d.h.

$$\underline{\check{\mu}_H = p\,(\check{\mu}_{cyl})} \;.$$

BEWEIS : Sei $\mathcal{O}$ eine offene Menge von $\check{X}_H$. Dann ist $\mathcal{O}$ Vereinigung der nach oben filtrierenden Familie $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ der in $\mathcal{O}$ enthaltenen offenen Zylinder. Man sieht unmittelbar, dasz $p^{-1}(\mathcal{O}_i)$ ein offener Zylinder in $\check{X}_{cyl}$ ist und dasz gilt

$$\check{\mu}_H\,(\mathcal{O}_i) = \check{\mu}_{cyl}\,\big(p^{-1}(\mathcal{O}_i)\big) \;.$$

Daher

$$\check{\mu}_H(\mathcal{O}) = \sup_{i\in I} \check{\mu}_H(\mathcal{O}_i) = \sup_{i\in I} \check{\mu}_{cyl}\,\big(p^{-1}(\mathcal{O}_i)\big) = \check{\mu}_{cyl}\,\Big(\bigcup_{i\in I} p^{-1}(\mathcal{O}_i)\Big) = \check{\mu}_{cyl}\big(p^{-1}(\mathcal{O})\big).$$

Für jede offene Menge $\mathcal{O}$ in $\check{X}_H$ gilt daher $\check{\mu}_H(\mathcal{O}) = p(\check{\mu}_{cyl})(\mathcal{O})$; daher gilt auch für jede Borel-Menge B in $\check{X}_H$ $\check{\mu}_H(B) = p(\check{\mu}_{cyl})(B)$, da $\check{\mu}_H$ und $p(\check{\mu}_{cyl})$ als Radon-Masze nach auszen regulär sind.

□

KOROLLAR :

Sei μ ein zylindrisches Masz auf $\sigma(X, Y)$, $\check{X}_{H_1}$ und $\check{X}_{H_2}$ zwei H-Kompaktifikationen von $\sigma(X, Y)$, $\check{\mu}_{H_1}$ und $\check{\mu}_{H_2}$ die zu μ assoziierten Radon-Masze.

Für jede Teilmenge M von $\sigma(X, Y)$ gilt

$$\check{\mu}_{H_1}{}^*(M) = \check{\mu}_{H_2}{}^*(M)$$

und

$$\check{\mu}_{H_1}\,(\overline{M}^{\check{X}_{H_1}}) = \check{\mu}_{H_2}\,(\overline{M}^{\check{X}_{H_2}}) \;.$$

BEWEIS : Man kann annehmen, dasz $\check{X}_{H_2} = \check{X}_{cyl}$. Sei $p : \check{X}_{cyl} \to \check{X}_{H_1}$ die Projektion gemäsz Proposition A.6.

Wegen des zweiten Teils der Proposition A.6. gilt $p^{-1}(M) = M$, daher folgt die erste Formel aus einer bekannten Eigenschaft der Bilder von Radon-Maszen ([27], p. 32 ; bei Radon-Maszen gibt es keine "image-measure-catastrophe" !).

Für die zweite Formel genügt es zu bemerken, dasz $\overline{M}^{\check{X}_{cyl}} = p^{-1}(\overline{M}^{\check{X}_{H_1}})$, da X dicht in $\check{X}_{cyl}$ und $\check{X}_{H_1}$ ist, und da $M = p^{-1}(M)$.

$\square$

<u>BEMERKUNG</u> : Dieses Korollar rechtfertigt also die in (1.9.) angewandte Methode.

LITTERATUR

[1] De Acosta : On regular extensions of cylindrical measures (preprint).

[2] E. Andersen, B. Jessen : On the introduction of measures in infinite product sets, Dansk. Vid. Selbskab. Mat. Fys. Medd. t. XXV (1948), n° 4, p. 1-7.

[3] A. Badrikian : Séminaire sur les fonctions aléatoires linéaires et les Mesures Cylindriques, Springer Lecture Notes, 139.

[4] A. Badrikian : Fonctions convexes et mesures cylindriques (preprint)

[5] A. Badrikian, S. Chevet : Mesures cylindriques, espaces de Wiener et Fonctions Aléatoires Gaussiennes.

[6] N. Bourbaki : Théorie des Ensembles, Hermann, Paris 1970.

[7] N. Bourbaki : Intégration, Chapitre IX, Hermann, Paris 1969.

[8] E. Cech : On bicompact spaces, Annals of Mathematics, Vol. 38 (1937), p. 823.

[9] J. Diestel, J. Uhl : The Radon-Nikodym-Property for Banach-Space-valued measures (preprint).

[10] R. Dudley : Random linear functionals, TAMS, Vol. 136, Feb. 1969, p. 1-24.

[11] R. Dudley, J. Feldmann, L. Lecam : On seminorms and probabilities, and abstract Wiener spaces. Ann. of Math. 93, (1971), p. 390-408.

[12] R. Engelking : An outline of topology, 1968, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

[13] D.J.H. Garling : a generalized form on inductive-limit-topology for vector spaces, PLMS n° 53, (1964).

[14] S. Kakutani : Proc. Imp. Ac. Tokyo, XIX (1943), p. 184-188.

[15] P. Krée : Solutions faibles d'équations aux dérivées fonctionnelles, Sem. P. Lelong, 1972-73, Lecture Notes n° 410, Springer.

[16] S. Lang : Real analysis, Addison-Wesley Inc., 1973.

[17] P. Laurent : Approximation et Optimisation, Hermann, Paris, 1972.

[18] L. Le Cam : Convergence in distribution of stochastic processes, Univ. Calif. Pub. Stat., vol. 2, n° 11, 1957, p. 207-236.

[19] L.H. Loomis : Abstract harmonic Analysis, Van Nostrand 1953.

[20] G.W. Mackey : Equivalence of a problem in measure theory to a problem in the theory of vector lattices, Bull. Am. Math. Soc. 50 (1944) 719-722.

[21] J. Mac Shane : Order preserving maps and integration processes, Ann. Math. studies, n° 31, Princetown, N.J. 1953.

[22] B. Maurey, L. Schwartz : Séminaire 1974, exposés IV, V et VI.

[23] J. Neveu : Mathematical foundations of the calculus of probabilities, Holden-Day, Inc., 1965.

[24] W. Schachermayer : Supporteur d'une probabilité cylindrique ou d'une prodistribution, CRAS, Paris, t. 281 (1975) Série A, p. 377.

[25] W. Schachermayer : Mesures cylindriques sur les espaces de Banach, qui ont la propriété de Radon-Nikodym, à paraitre dans C.R.A.S., Paris.

[26] H.H. Schäfer : Topological vector spaces, Macmillan Series in advanced Mathematics (1966).

[27] L. Schwartz : Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures, Oxford University Press, 1973.

[28] L. Schwartz : Mesures cylindriques et applications radonifiantes dans les espaces de suites, Proc. Intern. Conf. on Functional Analysis and Related Topics, Tokyo (1969), p. 41-59.

[29] L. Schwartz : Séminaire 1969/1970, exp. IV.

[30] C. Sunyach : Une caractérisation des espaces universellement Radon-mesurables, C.R.A.S. Paris, t. 268 (1969), série A, p. 864.

[31] S. Ulam : Zur Masztheorie in der allgemeinen Mengenlehre, Fund. Math. 16 (1930), 140-150.