2. 1. A/

C. R. A. S. Paris
t. 281 (15. Sept. 1975)
Série A – p. 377

Série A

B

THÉORIE DE LA MESURE. — *Supporteur d'une probabilité cylindrique ou d'une prodistribution.* Note (*) de M. **Walter Schachermayer**, présentée par M. Laurent Schwartz.

La notion du supporteur ([1]) permet de localiser une probabilité cylindrique et, plus généralement, une prodistribution ([1]) sur un espace vectoriel topologique. On étudie des conditions suffisantes assurant l'existence d'un supporteur minimal pour une probabilité cylindrique ou pour une prodistribution.

1. Soit $\langle E, F \rangle$ un couple d'espaces vectoriels réels en dualité et soit E muni de la topologie $\sigma(E, F)$. Soit $\{E_i\}_{i \in I}$ la famille des sous-espaces fermés de E de codimension finie, filtrante pour l'ordre suivant : $i \geqslant j$ si $E_i \subseteq E_j$. Soient $\pi_i : E \to E/E_i$ et pour $i \geqslant j$, $\pi_{j,i} : E/E_i \to E/E_j$ les projections canoniques.

Une *prodistribution* T sur E est une famille $\{T_i\}_{i \in I}$ de distributions intégrables [au sens de ([2])] sur les E/E_i telles que $i \geqslant j$ entraîne $\pi_{ji}(T_i) = T_j$. En particulier si T_i est une loi de probabilité μ_i pour chaque $i \in I$, on dit que $\mu = \{\mu_i\}_{i \in I}$ est une *probabilité cylindrique*.

On note $\operatorname{supp}(T_i)$ le support de T_i. On appelle *supporteur* de la prodistribution T un ensemble fermé S dans E, tel que pour chaque $i \in I$ l'adhérence de $\pi_i(S)$ (prise pour la topologie unique, qui rende E/E_i un espace vectoriel topologique séparé) contient $\operatorname{supp}(T_i)$.

Par exemple, E est trivialement supporteur. Mais l'intersection même de deux supporteurs n'est pas forcément un supporteur [exemple (*b*)].

2. LEMME. — *Soit* T *une prodistribution sur* E *muni de la topologie* $\sigma(E, F)$. *S'il existe un ensemble compact* K *dans* E, *supporteur de* T, *alors il existe un supporteur* S *minimal, c'est-à-dire* S *est contenu dans chaque supporteur de* T.

Esquisse de la démonstration. — Soit $S_i = \operatorname{supp}(T_i)$ et $\tilde{S}_i = \overline{\bigcup_{j \geqslant i} \pi_{i,j}(S_j)}$. Soit $S = \bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}(\tilde{S}_i)$.

S est fermé et contenu dans chaque supporteur.

Démontrons, que S est supporteur : Soit $x_{i_0} \in \operatorname{supp}(T_{i_0})$; la famille

$$\{\pi_{i_0}^{-1}(x_{i_0}) \cap \pi_i^{-1}(\tilde{S}_i) \cap K\}_{i \in \Gamma}$$

a la propriété d'intersection finie; donc

$$\bigcap_{i \in \Gamma} \pi_{i_0}^{-1}(x_{i_0}) \cap \pi_i^{-1}(S_i) \cap K \neq \varnothing$$

et *a fortiori* $S \cap \pi_{i_0}^{-1}(x_{i_0}) \neq \varnothing$. S est donc supporteur et on a même $\pi_i(S) \supset \operatorname{supp}(T_i)$.

C. Q. F. D.

(5) THÉORÈME. — *Soit* μ *une probabilité cylindrique sur* E *munie de la topologie* $\sigma(E, F)$, *scalairement concentrée* ([3]) *sur les parties convexes compactes de* E. *Alors il existe un supporteur* S *convexe, qui est minimal parmi les supporteurs convexes, c'est-à-dire chaque supporteur convexe contient* S ([4]).

Esquisse de la démonstration. — Soit $\Gamma(S_i)$ l'enveloppe convexe de $\text{supp}(\mu_i)$ et $S = \bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}(\Gamma(S_i))$. C'est un ensemble fermé et convexe, qui est contenu dans chaque supporteur convexe de μ.

Pour démontrer que S est supporteur, soient $x_{i_0} \in \text{supp}(\mu_{i_0})$ et U_{i_0} un voisinage convexe fermé de x_{i_0} dans E/E_{i_0}. Comme $\mu_{i_0}(U_{i_0}) > 0$ on peut trouver un compact convexe K dans E tel que μ soit scalairement concentrée sur K à $(1/2)\,\mu_{i_0}(U_{i_0})$ près. On montre, que la famille

$$\{\pi_{i_0}^{-1}(U_{i_0}) \cap \pi_i^{-1}(\Gamma(S_i)) \cap K\}_{i \in I}$$

a la propriété d'intersection finie; donc l'intersection n'est pas vide et *a fortiori* $S \cap \pi_{i_0}^{-1}(U_{i_0}) \neq \varnothing$.

C. Q. F. D.

3. *Exemples.* — Les exemples suivants montrent que les hypothèses dans le théorème 2 sont bien nécessaires.

(*a*) Soit $E = F = l^2$ et soit $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, où chaque X_n prend les valeurs ± 1 avec probabilité 1/2 [« pile ou face »; on trouve cette construction dans ([4]), p. 54].

Comme $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n$ converge (en probabilité) pour $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ dans l^2, la suite $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ définit une probabilité cylindrique $\{\nu_i\}_{i \in I}$ sur E, qui est scalairement concentrée sur les boules.

Le supporteur minimal convexe est évidemment

$$S = \{\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2 : \sup_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n| \leqslant 1\}.$$

Mais il n'existe pas un supporteur, qui soit minimal parmi tous les supporteurs : En effet soit

$$S_k : = \{\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2 : |\alpha_n| \geqslant 1, \forall n = 1, \ldots, k\}.$$

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, S_k est supporteur de $\{\nu_i\}_{i \in I}$ et $\bigcap_{k=1}^{\infty} S_k = \varnothing$.

(*b*) Soit $E = l^1$, $F = l^\infty$ et $x \in (l^\infty)'$ une « limite de Banach », c'est-à-dire : pour une suite convergente $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ dans l^∞ ,on a

$$\langle x, y \rangle = \lim y_n \qquad \text{et} \qquad \|x\| = 1.$$

La mesure de Dirac δ_x sur $(l^\infty)'$, muni de la topologie $\sigma((l^\infty)', l^\infty)$, définit une mesure cylindrique sur l^1, notée aussi δ_x, qui n'est pas scalairement concentrée sur les parties faiblement compactes.

Soit $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de nombres réels, positifs, strictement inférieurs à 1, telle que $\lim y_n = 1$. Alors l'ensemble $S_1 = y^{-1}(\{1\})$ est un hyperplan fermé dans l^1 et un supporteur convexe de δ_x. Mais S_2, la boule unité fermée de l^1, est aussi un supporteur convexe et $S_1 \cap S_2 = \varnothing$.

première page (*) Séance du 7 juillet 1975.

(1) P. Krée, *Solutions faibles d'équations aux dérivées fonctionnelles* (*Séminaire P. Lelong*, 1972-73; *Lecture Notes in Mathematics*, n° 410l, Springer Verlag). L 410,

(2) L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.

(3) L. Schwartz, *Radon Measures on Arbitrary Topological Spaces and Cylindrical Measures*, Oxford University press, 1973.

(4) L. Schwartz, *Mesures cylindriques et applications radonifiantes dans les espaces de suites* (*Proc. Intern. Conf. on Functional Analysis and Related Topies*, Tokyo, 1969, p. 41-59).

(4) Ce résultat était connu de M. Laurent Schwartz, qui l'a démontré avec l'aide de la théorie des fonctions convexes conjuguées. L (5)

Landstr. 4,
A - 4010 *Linz*,
Autriche.

Supporter of a Cylindrical Probability or a Prodistribution

For a cylindrical probability μ (resp. a prodistribution T), defined on a topological vector space E, one calls a weakly closed subset S of E *supporter*, if for every linear application $g : E \to F$ into a finite-dimensional space F the closure $\overline{g(S)}$ contains the support of the Radon-measure $g(m)$ [resp. the distribution $g(T)$].

For a cylindrical probability, scalarly concentrated on the weakly compact, convex subsets of E, we prove the existence of a minimal convex supporter (that is to say, it is contained in every convex supporter).