THÉORIE DES PROBABILITÉS. — *Mesures cylindriques sur les espaces de Banach, qui ont la propriété de Radon-Nikodym.* Note (*) de M. Walter Schachermayer, présentée par M. Laurent Schwartz.

Il y a deux résultats principaux dans cette Note. Le premier est une légère extension d'un théorème de L. Schwartz : soit B un espace de Banach vérifiant RNP; chaque mesure cylindrique sur B, scalairement concentrée sur les parties faiblement compactes de B et de Radon sur $\sigma(B'', B')$ est une mesure de Radon sur B. Comme corollaire, on obtient une légère généralisation d'un théorème de Linde-Pietsch.

Pour le deuxième résultat, on suppose que l'espace de Banach B est isomorphe à un sous-espace fermé d'un espace de Banach dual E', qui vérifie RNP. Alors $\sigma(B, B')$ est un espace universellement Radon-mesurable et toute mesure cylindrique normale sur $\sigma(B, B')$ est une mesure de Radon sur $\sigma(B, B')$.

1. Théorème 1. — *Si l'espace de Banach* B *vérifie la propriété de Radon-Nikodym* [(1), en abrégé RNP] *toute probabilité cylindrique* μ *sur* B, *qui est scalairement concentrée sur les parties* $\sigma(B, B')$*-compactes de* B *et de Radon sur* $\sigma(B'', B')$, *est de Radon sur* B.

Pour ramener ce résultat au théorème IV, 4.3 de (1), on utilise les lemmes suivants, le premier étant une conséquence d'un théorème de Grothendieck, le deuxième une conséquence du théorème de Lebesgue sur la convergence p-dominée.

Lemme 1. — *Un e. l. c. séparé* E *est complet si et seulement si toute forme linéaire f sur* E', *dont les restrictions aux parties équicontinues de* E' *sont* $\tau(E', E)$*-continues, appartient à* E.

En particulier, si B est un Banach, toute forme linéaire sur B', dont la restriction à la boule unité est $\tau(B', B)$-continue, appartient à B.

Lemme 2. — *Soit* λ *une mesure positive finie, définie sur* $(\Omega, \mathscr{A})$. *Sur la boule unité de* $L^\infty(\Omega, \lambda)$ *les topologies induites par* $L^p(\Omega, \lambda)$ *coïncident pour* $0 \leqq p < \infty$.

Tirons la conséquence dont nous avons besoin :

Lemme 3. — *Soient* B *un Banach,* $(\Omega, \mathscr{A}, \lambda)$ *un espace probabilisé, et u une application linéaire continue*

$$u : \quad \tau(B', B) \to L^0(\Omega, \lambda).$$

Si $u(B') \subseteq L^\infty(\Omega, \lambda)$ *u est aussi une application continue de* $\tau(B', B)$ *dans* $L^p(\Omega, \lambda)$ *pour chaque* $p \in [0, \infty[$.

Démonstration du théorème 1. — Soit μ réalisé par $v : B' \to L^0(\Omega, \lambda)$; d'après l'hypothèse (et le théorème de Krein) v est $\tau(B', B)$-continue.

Comme μ est une mesure de Radon sur $\sigma(B'', B')$, il existe [avec les notations du théorème IV, 4.1 de (1)] $\varphi \in \mathscr{L}^0_*(\Omega, \lambda; B'')$ telle que $\langle \varphi, \xi \rangle^{\cdot} = v(\xi)$ pour tout $\xi \in B'$ et on peut supposer $\|\varphi(\omega)\| \in \mathscr{L}^0(\Omega, \lambda)$.

Posant $\Omega_n = \{\omega : n-1 \leqq \|\varphi(\omega)\| < n\}$, $n \in \mathbb{N}$, on obtient une partition de Ω en une suite de parties λ-mesurables. $\varphi_n(\omega) = \varphi(\omega) . 1_{\Omega_n}(\omega)$ définit une mesure de Radon μ_n sur $\sigma(B'', B')$. Le lemme 3 implique que l'on peut appliquer le théorème IV, 4.3 de (1) : μ_n est une mesure de Radon sur B. En recollant les morceaux, on obtient que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ est une mesure de Radon sur B, prolongeant μ.

Remarque 1. — Le théorème 1 généralise aussi le théorème II, 3.3 dans (2).

Grâce à un résultat du à Acosta [(2), p. 65], on peut même, dans le théorème 1, remplacer B″ par B′*, le dual algébrique de B′ :

COROLLAIRE 1. — *Si* B *vérifie* RNP, *toute probabilité cylindrique sur* B, *qui est scalairement concentrée sur les parties* σ (B, B′)-*compactes de* B *et de Radon sur* σ (B′*, B′), *est de Radon sur* B.

Une autre conséquence du théorème 1 est la généralisation suivante d'un théorème de Linde-Pietsch [Théorème IV, 4.4 de (1)] :

COROLLAIRE 2. — *Si* B *vérifie* RNP *toute application* O-*sommante d'un Banach* G *dans* B (*ce qui équivaut à dire qu'elle est p-sommante pour un* $p \in]-1, +1[$ *d'après le théorème de Maurey-Chevet*) *est approximativement* O-*radonifiante de* G *dans* B.

— 2. Une mesure borélienne $m \geqq 0$ sur un espace topologique X est dite normale (3) si, pour toute famille filtrante croissante d'ouverts $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$, on a

$$m(\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i) = \sup_{i \in I} m(\mathcal{O}_i).$$

LEMME 4. — *Soient* $\langle X, Y \rangle$ *un couple d'espaces vectoriels en dualité et* μ *une probabilité cylindrique sur* σ (X, Y). *Elle induit une probabilité de Radon* $\check{\mu}$ *sur* $\check{\mathbf{R}}^Y$. *Les assertions suivantes sont alors équivalentes :*

(i) *Pour toute famille filtrante croissante de cylindres ouverts* $\{Z_i\}_{i \in I}$ *de réunion* X, $\sup_{i \in I} \mu(Z_i) = 1$;

(ii) $\check{\mu}^*(X) = 1$;

(iii) μ *se prolonge en une probabilité normale sur la tribu borélienne de* σ (X, Y).

De plus, si l'on a (iii), *le prolongement est unique et on dira alors que* μ *est une probabilité cylindrique normale.*

Sunyach a démontré (3) que, pour un espace complètement régulier X, les énoncés suivants sont équivalents :

(i) X est une partie universellement Radon-mesurable de tous ses sur-espaces;

(ii) X est une partie universellement Radon-mesurable dans un de ses compactifiés;

(iii) Chaque mesure borélienne normale finie $\geqq 0$ sur X est une mesure de Radon.

Un espace complètement régulier, qui vérifie ces conditions, est dit (3) universellement Radon-mesurable. Par exemple, un espace localement compact, un espace métrique complet et une réunion dénombrable de parties compactes sont universellement Radon-mesurable, car ils sont respectivement un ouvert, un G_δ (4) et un F_σ dans leur compactifié de Stone-Čech. En particulier, un espace de Banach muni de la topologie de la norme ou un dual d'un Banach muni de la topologie *-faible est universellement Radon-mesurable

LEMME 5. — *Soit* $(X, \mathcal{T})$ *un espace complètement régulier. Supposons qu'il existe une topologie complètement régulière* $\mathcal{T}_1$ *sur* X, *moins fine que* $\mathcal{T}$, *telle que* $(X, \mathcal{T}_1)$ *soit universellement Radon-mesurable, et que l'application identique* $i : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T})$ *soit universellement Radon-mesurable. Alors* $(X, \mathcal{T})$ *est lui aussi universellement Radon-mesurable.*

THÉORÈME 2. — *Soit* B *un espace de Banach, isomorphe à un sous-espace fermé d'un Banach dual* E′, *avec* E′ *vérifiant* RNP.

Alors $\sigma(B, B')$ *est universellement Radon-mesurable et chaque probabilité cylindrique normale sur* $\sigma(B, B')$ *est de Radon sur* $\sigma(B, B')$.

Démonstration. — Remarquons que l'on peut reformuler le théorème V, 5.5 de (1) comme suit : un Banach dual E' vérifie RNP, si et seulement si l'application identique

$$i: \quad \sigma(E', E) \to \sigma(E', E'')$$

est universellement Radon-mesurable.

Le lemme 5 implique alors que $\sigma(E', E'')$ est un espace universellement Radon-mesurable et il en est de même pour $\sigma(B, B')$, qui est isomorphe à un sous-espace fermé de $\sigma(E', E'')$.

— 3. Donnons encore un résultat, où l'on peut remplacer la condition de la normalité par la σ-additivité :

PROPOSITION 1. — *Soit* F *un espace de Fréchet. Toute probabilité cylindrique* μ *sur* $\sigma(F', F)$, *σ-additive sur l'algèbre des cylindres boréliens de* $\sigma(F', F)$, *est de Radon sur* $\sigma(F', F)$.

Démonstration. — $\sigma(F', F)$ est réunion dénombrable de parties compactes et en particulier un espace de Lindelöf. Chaque mesure cylindrique, σ-additive sur l'algèbre des cylindres boréliens de $\sigma(F', F)$ vérifie alors la propriété (i) du lemme 4 et se prolonge ainsi en une mesure normale sur $\sigma(F', F)$. Comme $\sigma(F', F)$ est un espace universellement Radon-mesurable, c'est bien une mesure de Radon.

On peut alors généraliser le théorème V, 5.5 de (1).

COROLLAIRE 3. — *Si l'espace de Banach dual* E' *vérifie* RNP, *toute probabilité cylindrique sur* $\sigma(E', E)$, *qui est σ-additive sur l'algèbre des cylindres boréliens de* $\sigma(E', E)$, *se prolonge de manière unique en une mesure de Radon sur* $\sigma(E', E'')$.

Remarque 2. — Il ne semble pas possible de remplacer dans le théorème 2 la normalité par la σ-additivité. Le point essentiel est qu'une partie $\sigma(E', E'')$-compacte n'appartient pas, en général, à la tribu engendrée par les cylindres. Si le théorème 2 était valable sous l'hypothèse de la σ-additivité, cela entraînerait la solution affirmative du problème de la mesurabilité des cardinaux : il suffit d'identifier un ensemble I avec la base de $\sigma(l^1(I), l^\infty(I))$; chaque probabilité σ-additive sur $\mathscr{P}(I)$ définit d'une façon évidente une probabilité cylindrique σ-additive sur $\sigma(l^1(I), l^\infty(I))$. On pourrait alors en déduire que chaque probabilité σ-additive sur I est une mesure de Radon.

(*) Séance du 15 décembre 1975.

(1) *Séminaire Maurey-Schwartz*, exposés IV et V, 1974/1975.
(2) BADRIKIAN-CHEVET, *Springer Lecture Notes n°* 379.
(3) C. SUNYACH, *Comptes rendus*, 268, série A, 1969, p. 864.
(4) E. ČECH, *Annals of Math.*, 38, 1937, p. 823.

Université de Clermont,
Complexe scientifique des Cézeaux,
Département de Mathématiques appliquées,
B. P. n° 45,
63170 *Aubière*.