58 - 14 - A

29 NOV 1976

THÉORIE DE LA MESURE. — *Eberlein-compacts et espaces de Radon.*

Note (*) de Walter Schachermayer, présentée par M. Laurent Schwartz.

On montre, que, moyennant une certaine restriction de cardinalité, un Eberlein-compact est un espace de Radon. Comme corollaire on obtient qu'un espace de Banach réflexif muni de la topologie affaiblie est un espace de Radon, et une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace topologique métrisable soit un espace de Radon moyennant une restriction de cardinalité).

It is shown that, under a certain cardinality restriction, an Eberlein-compact is a Radon-space. As a corollary we show that a reflexive Banach-space equipped with weak topology is a Radon-space.

DÉFINITION 1. — Un espace topologique K est dit Eberlein-compact ([5]), s'il est homéomorphe à une partie faiblement compacte d'un Banach.

DÉFINITION 2. — Un espace topologique X est dit espace de Radon ([6]), si chaque mesure borélienne finie sur X est de Radon.

DÉFINITION 3. — Soit m un nombre cardinal que nous identifions à un ensemble I_m de cardinalité m. On dit que le cardinal m est « de mesure zéro » si chaque mesure positive finie sur la tribu $\mathscr{P}(I_m)$ de toutes les parties de I_m, qui s'annule sur les points de I_m est identiquement 0. On dit que m est « non mesurable » si cette propriété est vraie pour les mesures sur $\mathscr{P}(I_m)$ qui ne prennent que les valeurs 0 et 1. Nous renvoyons le lecteur à ([9]), ([3]) et ([4]) et aux références données dans ces articles, et mentionnons seulement que chaque cardinal m inférieur au premier cardinal faiblement inaccessible est de mesure zéro.

THÉORÈME 1. — *Soit* K *un Eberlein-compact, tel que* K *contient un ensemble dense* D, *dont la cardinalité soit de mesure zéro. Alors* K *est un espace de Radon.*

Démonstration (esquisse). — Nous appliquons les idées de ([5]) et ([10]). D'après ([1]) nous pouvons supposer, que K est un ensemble $\sigma(c_0(\mathrm{I}), l^1(\mathrm{I}))$-compact de $c_0(\mathrm{I})$ pour un certain ensemble I; comme la cardinalité de D est de mesure zéro, on voit facilement que l'on peut supposer, que la cardinalité de I est aussi de mesure zéro.

Si K n'est pas un espace de Radon, on peut fabriquer une probabilité borélienne λ et une probabilité de Radon λ^R sur les boréliens de K, telles que λ et λ^R coïncident sur la tribu bairienne de K, alors que $\lambda(S) = 0$, où S note le support de λ^R. D'après le théorème de Phillips [([6]), p. 162] S est contenu dans un sous-espace séparable de $c_0(\mathrm{I})$. Il existe donc une partie dénombrable I_1 de I, telle que $S \subseteq c_0(\mathrm{I}_1)$. Comme $\sigma(c_0(\mathrm{I}_1), l^1(\mathrm{I}_1))$ est lusinien, on a

$$\lambda(c_0(\mathrm{I}_1)) = 0 \quad \text{alors que} \quad \lambda^Z(c_0(\mathrm{I}_1)) = 1.$$

Posons $\mathrm{I}_2 = \mathrm{I}/\mathrm{I}_1$ et définissons pour chaque $i \in \mathrm{I}_2$ et $n \in \mathrm{N}$:

$$G_i^n = \left\{ x \in \mathrm{K} : |x_i| > \frac{1}{n} \right\},$$

x_i notant la i-ième coordonnée de x. Aussi posons

$$G^n = \bigcup_{i \in \mathrm{I}_2} G_i^n.$$

Comme chaque G_i^n appartient à la tribu bairienne de K et est disjoint de S, nous avons

$$\lambda(G_i^n) = \lambda^R(G_i^n) = 0, \qquad \forall i \in I_2, \quad \forall n \in N.$$

Définissons pour n fixé la fonction $f^n(x)$ sur K :

$$f^n(x) = \sum_{i \in I_2} 1\, G_i^n(x),$$

$L\text{-}1_{G_i^n}(x)$

$1_{G_i^n}$ notant la fonction indicatrice de G_i^n. f^n est une fonction finie sur K et semi-continue inférieurement.

Pour chaque $(n, k) \in N \times N$ définissons

$$G^{n,k} = \{x \in G^n : f^n(x) \leqq k\}.$$

$G^{n,k}$ est borélien, et $G^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} G^{n,k}$.

Pour (n, k) fixés définissons la mesure positive $\nu_{n,k}$ sur les parties J de I_2 :

$$\nu_{n,k}(J) = \int_{G^{n,k}} \left(\sum_{i \in J} 1\, G_i^n\right) d\lambda.$$

$L\, 1_{G_i^n}$

D'après Beppo-Levi $\nu_{n,k}$ est σ-additive, $\nu_{n,k}$ s'annule sur les points de I_2 et $\nu_{n,k}$ est bornée. Comme I_2 est un cardinal de mesure zéro, nous avons $\nu_{n,k}(I_2) = 0$, donc $\lambda(G^{n,k}) = 0$. Or

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G^n\right) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} G^{n,k}\right) = 0.$$

$L\, G^n$

Comme le complément de $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ est $c_0(I_1)$ nous arrivons à une contradiction.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1. — *Soit* E *un Banach réflexif, admettant un ensemble dense* D *de cardinalité de mesure zéro. Alors* E *muni de la topologie* $\sigma(E, E')$ *est un espace de Radon.*

Démonstration. — Une réunion dénombrable d'espaces de Radon est un espace de Radon [(6), p. 119].

Ce corollaire fournit une réponse partielle à une question posée dans (7).

COROLLAIRE 2. — *Soit* X *un espace topologique homéomorphe à une partie d'un Eberlein-compact* K *et admettant un sous-ensemble dense de cardinalité de mesure zéro. Alors chaque mesure borélienne* μ *sur* X *est* τ*-additive, c'est-à-dire* $\mu\left(\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha\right) = \sup_{\alpha \in A} \mu(G_\alpha)$ *pour chaque famille filtrante croissante d'ouverts* $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$. X *est un espace de Radon, si et seulement si* X *est une partie universellement Radon-mesurable de* K (8).

PROPOSITION 1. — *Un espace topologique métrisable est homéomorphe à une partie relativement faiblement compacte d'un Hilbert, donc en particulier homéomorphe à une partie d'un Eberlein-compact.*

$\{f_i^n\}_{i \in I_n}$

Démonstration. — Pour $n \in N$ soit $\{f_i^n\}_{i \in N}$ une partition de l'unité sur X, subordonnée au recouvrement de X par les boules de rayon $1/n$. Soit $\varphi : X \to l^2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right)$ définie par

$$\varphi(x) = \{\{2^{-n} . f_i^n(x)\}_{i \in I_n}\}_{n \in N}.$$

Alors φ est un homéomorphisme de X dans la boule unité de $l^2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right)$, munie de la topologie affaiblie.

COROLLAIRE 3. — *Un espace topologique métrisable X admettant un sous-ensemble dense de cardinalité zéro est un espace de Radon si et seulement s'il est universellement Radon-mesurable.*

Le corollaire 3 répond à une question posée dans (²), appendice.

Remarque. — Les résultats de cette Note seront présentés plus en détail dans le fascicule de *Springer Lecture Notes* sur l'école d'été à Saint-Flour 1976.

(*) Séance du 29 novembre 1976.

(¹) D. AMIR et J. LINDENSTRAUSS, *Ann. of Math.*, 88, 1968, p. 35-46.
(²) P. BILLINGSLEY, *Convergence of Probability Measures*, J. Wiley, 1968.
(³) W. MORAN, *Proc. London Math. Soc.*, (3), 20, 1970, p. 507-54.
(⁴) J. C. OXTOBY, *Measure and Category*, Springer, 1971.
(⁵) H. P. ROSENTHAL, *Compositio Math.*, 28, 1974, p. 83-111.
(⁶) L. SCHWARTZ, *Radon-Measures on Arbitrary Topological Spaces*, Oxford University Press, 1973.
(⁷) L. SCHWARTZ, *Séminaire Maurey-Schwartz*, exposé XXIII, 1975-1976.
(⁸) C. SUNYACH, *Comptes rendus*, 268, série A, p. 864.
(⁹) S. ULAM, *Fund. Math.*, 16, 1930, p. [redacted].
(¹⁰) V. S. VARADARAJAN, *Amer. Math. Soc. Transl.*, 2, n° 48, 1965, p. 161-228.

Centro de Investigacinó del I. P. N.,
Apartado Postal 14-740,
Mexico 14, *D.F.*

Measure Theory

It is shown that, under a certain cardinality restriction, an Eberlein-compact is a Radon-space. As a corollary we show that a reflexive Banach-space equipped with weak topology is a Radon-space.