NUMERO 61

MATHEMATIQUES
14e FASCICULE

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE
L'UNIVERSITE DE CLERMONT

PUBLIEES PAR L'UNITE D'ENSEIGNEMENT
ET DE RECHERCHE DE SCIENCES EXACTES ET NATURELLES

EXTRAIT

Tiré à part

CLERMONT-FERRAND
1976

EBERLEIN-COMPACTS ET ESPACES DE RADON

W. SCHACHERMAYER, UNIVERSITE DE CLERMONT

EBERLEIN-COMPACTS ET ESPACES DE RADON

par W. Schachermayer

Théorème 1: Soit K un Eberlein-compact, tel que K contient un ensemble dense D, dont la cardinalité soit de mesure zéro. Alors K est un espace de Radon.

Les définitions suivantes vont expliquer les termes utilisés dans le théorème.

Définition 1: (voir [8] et [3]) Un espace topologique K est dit Eberlein-compact, s'il est homéomorphe à une partie faiblement compacte d'un Banach (munie de la topologie affaiblie).

Selon les travaux d'Amir et Lindenstrauss [1] il existe alors un ensemble I, tel que K soit homéomorphe à une partie $\sigma(c_o(I), \ell^1(I))$ - compacte de $c_o(I)$.

Définition 2: Soit X un espace topologique et notons par $\mathcal{B}(X)$ la tribu borélienne et par $\mathcal{B}^*(X)$ la tribu bairienne de X. Nous appellons <u>mesure borélienne</u> (resp. <u>bairienne</u>) sur X une mesure positive finie μ sur $B(X)$ (resp. $B^*(X)$).

μ peut avoir des propriétés supplémentaires:

(i) on appelle μ <u>régulière</u>, si pour chaque borélien B de X on a

$$\mu(B) = \inf\{\mu(G) : G \text{ ouvert}, G \supset B\}.$$

(ii) on appelle μ <u>τ-additive</u>, si pour chaque famille filtrante croissante $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ d'ouverts dans X on a

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha\right) = \sup\{\mu(G_\alpha) : \alpha \in A\}.$$

(iii) on appelle μ <u>mesure de Radon</u>, si pour chaque borélien B de X on a

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compact}, K \subset B\}.$$

Il est facile de vérifier que (iii) implique (ii) et si X est un espace topologique régulier, que (ii) implique (i) (voir [5]). La question se pose, de savoir sous quelles conditions sur la structure topologique de X on a des implications dans l'autre direction. Dans la littérature on trouve les notations suivantes:

(a) On appelle X <u>espace de Radon</u>, si chaque mesure borélienne sur X est de Radon (voir [10]; par exemple les espaces polonais).

(b) On appelle X τ-espace, si chaque mesure borélienne est τ-additive.

(c) On appelle X un <u>espace Borel-mesure-compact</u> si chaque mesure borélienne régulière sur X est τ-additive (par exemple les espaces paracompacts vérifiant une certaine hypothèse sur la cardinalité) et <u>espace fortement Borel-mesure-compact</u>, si chaque mesure borélienne régulière est une mesure de Radon (voir [5]).

(d) On appelle X un <u>espace universellement Radon-mesurable</u>, si chaque mesure borélienne τ-additive sur X est une mesure de Radon. La raison de cette notation vient de ce que Sunyach [13] a démontré que les énoncés suivants sont équivalents pour un espace complétement régulier X:

(i) X est un espace universellement Radon-mesurable.

(ii) X est une partie universellement Radon-mesurable d'un surespace compact K de X (i.e. X se plonge dans K et pour chaque mesure de Radon μ sur K, X est une partie μ-mesurable).

(iii) X est une partie universellement Radon-mesurable de tout surespace compact K de X.

<u>Définition 3</u>: Soit m un nombre cardinal que nous identifions à l'ensemble I_m de cardinalité m et muni de la topologie discrète.

(a) On dit, que le cardinal m est <u>de mesure zéro</u> si I_m est un espace de Radon (i.e. si chaque mesure finie μ sur la tribu $\mathcal{P}(I_m)$ de toutes les parties de I_m, telle que $\mu(\{i\}) = 0$ pour tout $i \in I_m$, est identiquement 0).

(b) On dit, que le cardinal m est <u>non-mesurable</u>, si chaque mesure μ sur $\mathcal{P}(I)$, qui ne prend que les valeurs 0 et 1 et telle que $\mu(\{i\}) = 0$ pour tout $i \in I$, est identiquement 0.

Notons $\mathfrak{M}$ la famille des cardinaux de mesure zéro et $\mathfrak{N}$ la famille des cardinaux non-mesurables. Evidemment $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ et $\aleph_0 \in \mathfrak{M}$.

Pour une étude des propriétés de $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ nous renvoyons le lecteur à [14], (voir aussi [6] et [7]). Nous mentionnons seulement, que tous les cardinaux inférieurs au premier cardinal faiblement inaccessible appartiennent à $\mathfrak{M}$ et tous les cardinaux inférieurs au premier cardinal fortement inaccessible appartiennent à $\mathfrak{N}$ (et même le premier cardinal fortement inaccessible d'après un théorème de Hanf et Tarski ([12], p. 313)). Si $\aleph_c$, le cardinal de la puissance du continu appartient à $\mathfrak{M}$ (par exemple si l'on suppose l'hypothèse du continu) alors $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ coïncident.

<u>Démonstration du théorème 1</u>: Nous exploitons les idées de [15] et [8].

D'après les remarques de la définition 2, nous pouvons supposer, que K est une partie faiblement compacte de $c_o(I)$ pour un certain ensemble I. Aussi nous pouvons supposer, que la cardinalité de I est de mesure zéro. [En effet , soit D une partie dense dans K de cardinalité de mesure zéro. Comme chaque $d \in D$ ne charge qu'une partie au plus dénombrable d'indices de I, l'ensemble I_o d'indices chargés par les $d \in D$ est aussi de mesure zéro. Or D est contenu dans $c_o(I_o)$ et comme $c_o(I_o)$ est faiblement fermé dans $c_o(I)$, K aussi est contenu dans $c_o(I_o)$. Evidemment nous pouvons supposer $I = I_o$.]

Soit μ une mesure borélienne positive finie sur K, qui n'est pas de Radon. Il est bien connu (et facile à vérifier; voir [9], sec. 52, th. H) qu'une mesure borélienne sur un compact est de Radon, si et seulement si μ est régulière ou bien si et seulement si pour chaque fermé F dans K,

$$\mu(F) = \inf \{\mu(G) : G \text{ ouvert, } G \supset F\}$$

donc il existe un fermé F_o dans K tel que

$$\mu(F_o) < \inf \{\mu(G) : G \text{ ouvert, } G \supset F_o\}.$$

Soit $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de voisinages de F_o, telle que

$$\inf \{\mu(G_n)\} = \inf \{\mu(G) : G \text{ ouvert, } G \supset F_o\}.$$

Définissons une mesure λ sur les boréliens B de K par

$$\lambda(B) = \frac{\mu\left[B \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \setminus F_o\right)\right]}{\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \setminus F_o\right)} .$$

Or λ est une probabilité borélienne sur K, $\lambda(F_o) = 0$ et pour chaque voisinage G de F_o nous avons

$$\lambda(G) = 1 . \qquad (*)$$

Associons à λ la mesure de Radon unique λ^R sur $\mathcal{B}(K)$, telle que λ et λ^R coïncident sur la tribu bairienne $\mathcal{B}^*(K)$ ([9], sec. 54). Nous pouvons considérer λ^R comme une mesure sur $[c_o(I), \sigma(c_o(I), \ell^1(I))]$ (en la posant zéro en dehors de K); le théorème classique de Phillips ([10], p. 162) implique que λ^R soit portée par un sous-espace séparable de $c_o(I)$. Comme chaque suite d'éléments dans $c_o(I)$ ne charge qu'un nombre dénombrable d'indices, nous pouvons choisir une partie dénombrable I_1 de I, t.q. $\lambda^R(c_o(I_1)) = 1$.

Posons $I_2 = I \setminus I_1$ et définissons pour chaque $i \in I_2$ et $n \in \mathbb{N}$

$$G_i^n = \{x \in K : |x_i| > \frac{1}{n}\} ,$$

x_i notant la i-ième composante de x. Aussi posons

$$G^n = \bigcup_{i \in I_2} G_i^n .$$

Comme chaque G_i^n appartient à la tribu bairienne de K et est disjoint de $c_o(I_1)$ nous avons

$$\lambda(G_i^n) = \lambda^R(G_i^n) = 0 \quad \forall\, i \in I_2, \forall\, n \in \mathbb{N} .$$

Définissons pour n fixé la fonction $f^n(x)$ sur K

$$f^n(x) = \sum_{i \in I_2} 1_{G_i^n}(x),$$

$1_{G_i^n}$ notant la fonction indicatrice de G_i^n. La valeur de $f^n(x)$ est le nombre de coordonnées de x dans I_2 qui sont en module plus grandes que $\frac{1}{n}$. Or f^n est une fonction finie sur K et semicontinue inférieurement, étant le sup des fonctions indicatrices des ouverts.

Pour chaque couple $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définissons

$$G^{n,k} = \{x \in G^n : f^n(x) \leq k\} .$$

$G^{n,k}$ est borélien, étant l'intersection d'un ouvert et d'un fermé, et $G^n = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G^{n,k}$.

Pour (n,k) fixés, définissons la mesure positive $\nu_{n,k}$ sur les parties J de I_2 :

$$\nu_{n,k}(J) = \int_{G^{n,k}} \left(\sum_{i \in J} 1_{G_i^n}\right) d\lambda .$$

D'après Beppo-Levi $\nu_{n,k}$ est σ-additive et $\nu_{n,k}$ s'annule sur les points de I_2, parce que $\lambda(G_i^n) = 0$ pour chaque $i \in I_2$. Aussi $\nu_{n,k}$ est bornée, parce que

$$\nu_{n,k}(I_2) = \int_{G^{n,k}} f^n \, d\lambda \leqslant \int_{G^{n,k}} k \, . \, d\lambda \leqslant k.$$

Comme I_2 est un cardinal de mesure zéro, nous avons $\nu_{n,k}(I_2) = 0$; ainsi,

$$\lambda(G^{n,k}) = \int_{G^{n,k}} d\lambda \leqslant \int_{G^{n,k}} f^n \, d\lambda = \nu_{n,k}(I_2) = 0$$

et

$$\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} G^n) = \lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} G^{n,k}) = 0 \, .$$

Mais le complément de $\bigcup_{n=1}^{\infty} G^n$ dans $c_o(I)$ est justement $c_o(I_1)$, donc $\lambda(c_o(I_1)) = 1$. Or λ et λ^R sont portées par l'espace lusinien $(c_o(I_1), \sigma(c_o(I_1), \ell^1(I_1)))$ et coïncident sur la tribu de Baire. Donc elles sont égales ([10], p. 92) et λ est une mesure de Radon. Nous arrivons donc à une contradiction.

c.q.f.d.

<u>Corollaire 1</u>: Soit E un Banach réflexif, t.q. E admet un ensemble dense D de cardinalité de mesure zéro. Alors E muni de la topologie $\sigma(E,E')$ est un espace de Radon.

Démonstration: Une réunion dénombrable d'espaces de Radon est un espace de Radon ([10], p. 119).

Ce corollaire fournit une réponse partielle à une question posée dans [11].

Corollaire 2: Soit X un espace topologique, plongeable dans un Eberlein-compact (c'est à dire homéomorphe à un sousensemble d'un Eberlein-compact; dans la suite nous dirons, que X est "Eberlein-compactifiable") t.q. admet un sous-ensemble dense D de cardinalité de mesure zéro. Alors X est un τ-espace. X est un espace de Radon si et seulement si X est un espace universellement Radon-mesurable.

Démonstration: Soit X un sousensemble d'un Eberlein-compact K, dans laquelle nous pouvons supposer que X et alors D soient denses, et soit μ une mesure borélienne sur X. Définissons une mesure borélienne $\tilde{\mu}$ sur les boréliens $\tilde{B}$ de K :

$$\tilde{\mu}(\tilde{B}) = \mu(\tilde{B} \cap X) .$$

Pour chaque borélien B de X on a évidemment $\mu(B) = \tilde{\mu}^*(B)$, c'est a dire μ est la mesure induite par la mesure extérieure $\tilde{\mu}^*$ sur X. $\tilde{\mu}$ est une mesure de Radon et est a fortiori τ-additive. Comme une mesure induite par une mesure τ-additive est τ-additive ([13]) μ est aussi

τ-additive.

La deuxième partie de l'énoncé suit directement de la définition d'espaces universellement Radon-mesurables.

c.q.f.d.

Il serait donc intéressant de caractériser les espaces topologiques "Eberlein-compactifiables".

<u>Proposition</u>: Un espace topologique X est Eberlein-compactifiable si et seulement s'il existe une famille $\{f_i\}_{i \in I}$ de fonctions réelles continues bornées sur X, t.q. $\{f_i\}_{i \in I}$ définit la topologie de X (c.à.d. la topologie de X est la topologie la plus faible pour laquelle toutes les f_i soient continues) et que, pour chaque $z \in \beta X$, $\{\tilde{f}_i(z)\}_{i \in I}$ appartient à $c_o(I)$, où βX note le compactifié de Stone-Čech de X et $\tilde{f}_i$ le prolongement continu de f_i sur βX.

<u>Démonstration</u>: Soit X plongé dans un Eberlein-compact K, que nous supposons une partie faiblement compacte de $c_o(I)$; alors les fontions coordonnées $f_i : x \to x_i$ sur $c_o(I)$ définissent la topologie de X. Soit βX le compactifié de Stone-Čech de X et $\pi : \beta X \to K$ la projection de βX sur K, prolongeant l'identité sur

X. Evidemment pour chaque $i \in I$ nous avons $\tilde{f}_i = f_i \circ \pi$; pour $z \in \beta X$ on a donc $\{\tilde{f}_i(z)\}_{i \in I} = \{f_i(\pi(x))\}_{i \in I} \in c_o(I)$.

Inversement supposons donnée une famille $\{f_i\}_{i \in I}$ vérifiant les conditions de l'énoncé. Evidemment on peut supposer $\|f_i\|_\infty \leq 1$ pour chaque $i \in I$.

Définissons

$$\begin{aligned} \phi : \beta X &\longrightarrow \mathbb{R}^I \\ z &\longrightarrow \{\tilde{f}_i(z)\}_{i \in I}. \end{aligned}$$

Alors $K = \phi(\beta X)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^I$ qui est contenue dans la boule unité de $c_o(I)$. Comme sur la boule unité de $c_o(I)$ la topologie faible $\sigma(c_o(I), \ell^1(I))$ coïncide avec la topologie induite par $\mathbb{R}^I$, K est une partie faiblement compacte de $c_o(I)$. Donc la restriction de ϕ à X plonge X homéomorphiquement dans l'Eberlein-compact K.

Remarque: Dans l'énoncé de la proposition 1 on peut évidemment remplacer βX par n'importe quel compactifié de X sur lequel les f_i soient continûment prolongeables.

La proposition suivante, qui ne dépend pas de la proposition 1, montre que les espaces métriques sont Eberlein-compactifiables. Mais on a même plus:

Proposition 2: Un espace métrique (X, ρ) est plongeable dans une partie faiblement compacte d'un Hilbert.

Démonstration: Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et $x \in X$ soit

$$B_n(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < \frac{1}{n}\}.$$

Alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$ $\{B_n(x)\}_{x \in X}$ est un recouvrement ouvert de X. Comme X est paracompact, il existe une partition de l'unité $\{f_i^n\}_{i \in I_n}$, subordonnée à $\{B_n(x)\}_{x \in X}$ ([4], p. 211).

Soit $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ et définissons $\phi : X \to \ell^2(I)$ par

$$\phi(x) = \{\{2^{-n} \cdot f_i^n(x)\}_{i \in I_n}\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Il est facile de vérifier, que ϕ est une injection homéomorphe de X dans $\ell^2(I)$ qui prend ses valeurs dans la boule unité de $\ell^1(I)$, donc a fortiori dans la boule unité de $\ell^2(I)$. L'adhérence K de $\phi(X)$ dans $(\ell^2(I), \sigma(\ell^2(I), \ell^2(I)))$ est donc une partie faiblement compacte de l'Hilbert $\ell^2(I)$ et ϕ plonge X dans K.

Remarque: Proposition 2 et corollaire 2 impliquent donc que chaque espace métrique X admettant un sousensemble dense de cardinalité de mesure zéro est un τ-espace et que X est un espace de Radon si et seulement si X est un espace universellement Radon-mesurable. Alors que cela répond à une question posée dans ([2], Appendice) ce résultat n'est pas très original. Par exemple, c'est (implicitement) démontré dans [11] sans utiliser la technique de plongement dans un Eberlein-compact. Mais il serait intéressant de trouver d'autres classes d'espaces topologiques, qui soient Eberlein-compactifiables et alors donner un autre point de vue sur la théorie des espaces de Radon.

Les deux exemples suivants montrent, que l'on ne peut pas être très optimiste sur cette question:

Exemple 1: Un espace héréditairement paracompact, qui n'est pas Eberlein-compactifiable.

Soit I un ensemble de cardinalité $\aleph_1$ et soit $X = I \cup \{p\}$. Soit $\mathfrak{T}$ la topologie sur X qui induit sur I la topologie discrète et telle que les voisinages de p soient les compléments des parties dénombrables de I.

Alors X est héréditairement paracompact et il est laissé au lecteur le soin de vérifier en vertu de la proposition 1 que X n'est pas Eberlein-compactifiable. Remarquons aussi que X est un espace de Radon.

D'autre part, un sousespace ouvert d'un Eberlein-compact n'est pas forcément normal:

Exemple 2: Un espace localement compact et Eberlein-compactifiable, qui n'est pas normal:

Soient I et J deux ensembles discrets t.q.

$\aleph_0 < \mathrm{card}\,(I) < \mathrm{card}\,(J)$; soient $I^A = I \cup \{p_i\}$ et $J^A = J \cup \{p_j\}$ les compactifiés de Alexandroff. Or I^A (homéomorphe à $\{e_i\}_{i \in I} \cup \{0\}$ dans $(c_o(I), \sigma(c_o(I), \ell^1(I))))$, e_i notant le i-ième vecteur de la base canonique) et J^A sont Eberlein-compacts. Or il en est de même de $I^A \times J^A$ (un produit dénombrable d'Eberlein-compacts est Eberlein-compact). L'espace $X = I^A \times J^A \setminus (p_i, p_j)$ est alors localement compact et Eberlein-compactifiable, mais X n'est pas normal ([4], p. 81, ex. 2. 3.2).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Amir D. et Lindenstrauss J.: The structure of weakly compact sets in Banach spaces. Ann. of Math. 88(1968) p. 35-46.

[2] Billingsley P.: Convergence of probability measures, J. Wiley 1968.

[3] Diestel J.: Geometry of Banach spaces, Springer lecture notes 485.

[4] Engelking R.: An outline of topology; North Holland Publishing Company 1968.

[5] Gardner R.J.: The regularity of Borel-measures and Borel-measure-compactness, Proc. London Math. Soc. 30(1975) 95-113.

[6] Moran W.: Measures on metacompact spaces, Proc. London Math. Soc. (3) 20 (1970) 507-24.

[7] Oxtoby J.C.: Measure and Category, Springer 1971.

[8] Rosenthal H.P.: The heriditary problem for weakly compactly generated Banach spaces. Compositio Math. vol. 28 (1974), 83-111.

[9] Halmos P.R.: Measure Theory, van Nostrand 1950.

[10] Schwartz L.: Radon-measures on arbitrary topological spaces, Oxford University press 1973.

[11] Schwartz L.: Exposé XXIII du séminaire Maurey-Schwartz 1975/76.

[12] Shoenfield J.R.: Mathematical logic. Reading, Mass., Addison Wesley 1967.

[13] Sunyach C.: Une caractérisation des espaces universellement mesurables, C.R.A.S. Paris, 268, p. 864-866.

[14] Ulam S.: Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre, Fund. Math. XVI, 1930.

[15] Varadarajan V.S.: Measures on topological spaces, Am. Math. Soc. Transl. 2, 48(1965) p. 161-228.