Séminaire Paul KRÉE
Equations aux dérivées partielles
en dimension infinie
1re année, 1974/75, n° 3, 8 p.

SUPPORTEURS DES PRODISTRIBUTIONS ET MESURES CYLINDRIQUES

par Walter SCHACHERMAYER

La notion de supporteur d'une prodistribution, généralisation d'une mesure cylindrique, a été introduite par P. KRÉE ([1] et [2]). On étudie des conditions nécessaires pour l'existence d'un supporteur minimal d'une prodistribution et d'une mesure cylindrique.

1. Notations et préliminaires.

On considère, dans toute la suite, un espace vectoriel topologique localement convexe réel (en abrégé, un e. l. c. s.), et $\mathfrak{F} = \{F_i\}_{i\in I}$, une "bonne famille" [1] de sous-espaces de X , fermés de codimension finie, ordonnée par inclusion et filtrante à droite, telle que $\bigcap_{i\in I} F_i = (0)$.

Soient X_i les espaces quotient X/F_i ,

$\pi_i : X \longmapsto X_i$ les surjections canoniques et

$\sigma_i : X' \longleftarrow X_i'$ les injections canoniques.

Aussi, pour $j \geq i$,

$\pi_{ij} : X_j \longmapsto X_i$, et

$\sigma_{ij} : X_j' \longleftarrow X_i'$ les applications canoniques.

(1.1) Définition : Une bonne famille $\mathfrak{F}$ est dite complète, si chaque $\xi \in X'$ se factorise à travers un X_i

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\xi"] \arrow[dr, "\pi_i"'] & & \underset{\sim}{R} \\ & X_1 \arrow[ur, "\hat{\xi}"'] & \end{tikzcd}$$

Cette condition est équivalente à la condition suivante :

$$\Xi' = \bigcup_{i\in I} \sigma_i(X_i') = X' ,$$

où Ξ' représente la réunion des espaces X_i' , canoniquement identifiés à des parties de X' . En particulier, la bonne famille maximale, formée par tous les sous-espaces fermés de codimension finie, est complète.

Soit Y un espace topologique, et soit μ une mesure de Radon sur Y . Alors, on peut définir le support de μ comme le plus petit fermé, qui soit le complémentaire d'un ouvert de nullité de μ . On le note $\mathrm{Supp}(\mu)$.

Cette notion de support est spécifique aux mesures de Radon, en vertu de la propriété des mesures de Radon : Soit $\{V_i\}_{i\in I}$ une famille d'ouverts μ-négligeable, alors $\mu(\bigcup_{i\in I} V_i) = 0$.

On a la même notion de support pour les distributions sur R^n .

Soient maintenant X e. l. c. s., et $T = \{T_i\}_{i\in I}$ une prodistribution par rapport à une bonne famille $\mathfrak{F} = \{F_i\}_{i\in I}$ (voir [1]), c'est-à-dire un système projectif des distributions T_i sur les espaces X_i .

(1.2) <u>Définition</u> : On appelle <u>supporteur</u> de T un sous-ensemble S de X tel que, pour tout $i \in I$, on ait :

$$\overline{\pi_i(S)} \supseteq \mathrm{Supp}\ T_i \ ,$$

où l'adhérence est prise pour la topologie de $\underset{\sim}{R}^n$, compatible avec sa structure d'un espace vectoriel.

(1.3) <u>Remarques</u>.

(1.3.1) Cette notion de supporteur est plus faible que la notion de support. En effet, soit μ une mesure de Radon sur X . μ définit une mesure cylindrique $\{\mu_i\}_{i\in I}$ sur les espaces X_i . Soit B un ouvert sur X_i tel que :

$$B \cap \pi_i(\mathrm{Supp}(\mu)) = \Phi \ .$$

Alors,

$$\pi_i^{-1}(B) \cap \pi_i^{-1}(\pi_i(\mathrm{Supp}(\mu))) = \Phi \ ,$$

$$\pi_i^{-1}(B) \cap \mathrm{Supp}(\mu) = \Phi \ ,$$

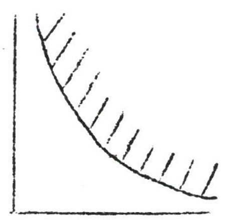
$$\mu_i(B) = \mu(\pi_i^{-1}(B)) = 0 \ ,$$

ce qui démontre bien que $\mathrm{Supp}(\mu)$ est un supporteur de $\{\mu_i\}_{i\in I}$.

(1.3.2) L'exemple suivant montre la nécessité de considérer l'adhérence de $\pi_i(S')$: Soient $X = \underset{\sim}{R}^2$, et f la fonction sur $\underset{\sim}{R}^2$

$$f(x\ ,\ y) = \exp(-(x^2 + y^2)/2).\chi E \ ,$$

où $E = \{(x\ ,\ y)\ ;\ x \geq 0\ ,\ y \geq 1/x\}$.



Alors $f(x\ ,\ y)$ définit une mesure de Radon, f.dm , dont le support est évidemment E . Mais l'image de E par la première projection est la demi-droite ouverte $\underset{\sim}{R}_+$, tandis que le support de la projection de f.dm est la demi-droite fermée.

(1.3.3) L'espace X est toujours supporteur, ainsi que tous les sous-ensembles du type $X \setminus B$, où B est un borné de X , si X est de dimension infinie.

Cette possibilité de "faire des trous" dans un supporteur donne l'idée de ne considérer que des supporteurs faiblement fermés.

2. Supporteurs compacts des prodistributions.

(2.4) PROPOSITION. - Soient X un e. l. c. s., et $T = \{T_i\}_{i \in I}$ une prodistribution par rapport à une bonne famille complète.

Supposons qu'il existe un supporteur S faiblement compact. Alors il existe un supporteur K faiblement compact, qui est minimal parmi les supporteurs faiblement fermés, c'est-à-dire, pour tout supporteur K_1 faiblement fermé, on a

$$K_1 \supseteq K .$$

(2.5) Remarque : Si $\{T_i\}_{i \in I} = \{\mu_i\}_{i \in I}$ est une mesure cylindrique, la proposition est une conséquence triviale du théorème de Prokhorov. En effet, $\{\mu_i\}_{i \in I}$ est cylindriquement concentrée sur S ; alors $\{\mu_i\}_{i \in I}$ est défini par une mesure de Radon sur $\sigma(X , X')$.

Alors il existe un support, qui est a fortiori supporteur, et on va voir facilement que ce support est minimal aussi parmi les supporteurs faiblement fermés par la démonstration du cas général.

(2.6) Démonstration : Soit K_i le support de T_i dans X_i . K_i est compact, parce que $K_i \subseteq \pi_i(S)$. Nous définissons

$$\tilde{K}_i = \overline{\bigcup_{j \geq i} \pi_{ij}(K_j)} ,$$

l'adhérence prise dans X_i .

Ainsi nous avons $\tilde{K}_i \subseteq \pi_i(S)$, parce que, pour $j \geq i$, on a

$$\pi_i = \pi_{ij} \circ \pi_j$$

et alors

$$\pi_i(S) = \pi_{ij} \circ \pi_j(S) \supseteq \pi_{ij}(K_j) , \qquad \forall\, j \geq i$$

et

$$\pi_i(S) = \overline{\pi_i(S)} \geq \overline{\bigcup_{j \geq i} \pi_{ij}(K_j)} .$$

Soit $K = \bigcap_{i \in I} \pi^{-1}(\tilde{K}_i)$. Montrons que K convient.

Soit K_1 un supporteur faiblement fermé, et montrons qu'on a $K \subseteq K_1$. Soit $x_1 \notin K_1$; alors il existe un voisinage U de 0 dans X

$$U = \{x \in X \; ; \; |\langle x , f_k \rangle| < \varepsilon , \; f_k \in X' , \; k = 1 , \dots , n\}$$

tel que $(x_1 + U) \cap K_1 = \Phi$.

Soit $F_{i_0} \in \mathfrak{F}$ choisi tel que $f_k | F_{i_0} = 0$, $k = 1 , \dots , n$ (Ici il est essentiel que la bonne famille soit complète).

$$\pi_{i_0}(U) = U_{i_0} = \{x_{i_0} \in X_{i_0} \; ; \; |\langle x_{i_0} , f_k \rangle| < \varepsilon , \; k = 1 , \dots , n\}$$

est un voisinage de zéro dans X_{i_0} et on a :

$$\pi_{i_0}(K_1) \cap \pi_{i_0}(x_1 + U) = \Phi$$

donc

$$\pi_{i_0}(K_1) \cap (\pi_{i_0}(x_1) + U_{i_0}) = \Phi .$$

Pour tout $j \geq i_0$, on a $\pi_j(K_1) \supseteq K_j$, et alors

$$\pi_{i_0 j} \circ \pi_j(K_1) = \pi_{i_0}(K_1) \supseteq \pi_{i_0 j}(K_j) .$$

Or

$$\tilde{K}_{i_0} \cap (\pi_{i_0}(x_1) + U_{i_0}) = \Phi$$

et $x_1 \notin K$, ce qui montre

$$K \subseteq K_1 .$$

En particulier, $K \subseteq S$; étant faiblement fermé K, est faiblement compact.

Montrons que K est supporteur : Soit $x_i \in K_i$; il suffit de montrer que

$$\pi_i^{-1}(x_i) \cap K = \pi_i^{-1}(x_i) \cap \bigcap_{j\in I} \pi_j^{-1}(\tilde{K}_j)$$
$$= \pi_i^{-1}(x_i) \cap \bigcap_{j\in I} \pi_j^{-1}(\tilde{K}_j) \cap S \neq \Phi .$$

En vertu de la compacité de S , il suffit de montrer

$$\pi_i^{-1}(x_i) \cap \bigcap_{j_1 \ldots j_n} \pi_{j_k}^{-1}(\tilde{K}_{j_k}) \cap S \neq \Phi .$$

Si $j_1 \geq j_2$, on a

$$\pi_{j_1}^{-1}(\tilde{K}_{j_1}) \subseteq \pi_{j_1}^{-1}(\pi_{j_2 j_1}^{-1}(\tilde{K}_{j_2})) = \pi_{j_2}^{-1}(\tilde{K}_{j_2}) .$$

Alors il suffit de prendre $j = \mathrm{Supp}(j_1 , \ldots , j_k)$, et de montrer

$$\pi_i^{-1}(x_i) \cap \pi_j^{-1}(\tilde{K}_j) \cap S \neq \Phi .$$

Soit $\ell = \mathrm{Supp}(i , j)$. Comme $\pi_{i\ell}(T_\ell) = T_i$ et, comme $K_\ell = \mathrm{Supp}(T_\ell)$ est compact, on peut trouver $x_\ell \in K_\ell$ tel que

$$\pi_{i,\ell}(x_\ell) = x_i .$$

Par la définition de $\tilde{K}_j$, on a $\pi_{j\ell}(x_\ell) \in \tilde{K}_j$. S étant supporteur, on a

$$\pi_i^{-1}(x_i) \cap \pi_j^{-1}(\tilde{K}_j) \cap S \supseteq \pi_\ell^{-1}(x_\ell) \cap S \neq \Phi .$$

Alors $\pi_i(K) \supseteq K_i$, c'est-à-dire K est supporteur.

C. Q. F. D.

(2.7) Remarque : Si la "bonne famille" $\mathfrak{F}$ n'est pas complète, pour aucune prodistribution $\{T_i\}_{i\in I}$ non nulle, il n'existe pas de supporteur qui soit minimal parmi les supporteurs faiblement fermés.

(2.8) Exemple : Soient X un e. l. c. s., et $\mathfrak{F} = \{F_i\}_{i\in I}$ une "bonne famille", qui n'est pas complète. Alors il existe $f \in X'$ tel que

$$f|F_i \neq 0 \,, \qquad \forall\, i \in I \,.$$

Soit $T = \{T_i\}_{i\in I}$ une prodistribution non nulle, définie par rapport à $\mathfrak{F}$. X est trivialement supporteur faiblement fermé, mais il en est de même de $X \setminus (\frac{f}{n})^0 = S_n$ avec

$$(f/n)^0 = \{x \in X \; ; \quad |\langle x \,, f\rangle| < n\} \,,$$

le polaire ouvert de f/n. En effet, on a

$$f|F_i \neq 0 \,, \qquad \forall\, i \in I$$

$$\Longrightarrow [f] \not\subset F_i^0 \,, \qquad \forall\, i \in I \,, \; [f] \text{ notant l'espace engendré par } f$$

$$\Longrightarrow [f]^0 \not\supset F_i^{00} = F_i \,, \qquad \forall\, i \in I \,.$$

Pour chaque X_i, on peut ainsi trouver un $y_i \in F_i$, $y_i \notin [f]^0$. Pour chaque $x_i \in X_i$, on peut alors trouver un représentant $Z_i \in \pi_i^{-1}(x_i) + F_i$, tel que $|\langle Z_i \,, f\rangle| \geq n$, d'où :

$$\pi_i(S_n) = X_i \,, \qquad \forall\, i \in I \text{ et } S_n \text{ est supporteur.}$$

Mais $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \emptyset$, ce qui montre bien, qu'il n'y a pas de supporteur minimal.

Pourtant, on peut énoncer la proposition suivante.

(2.9) PROPOSITION. - Soient X un e. l. c. s., $\mathfrak{F}$ une bonne famille, pas nécessairement complète, et $\{T_i\}_{i\in I}$ une prodistribution relative à $\mathfrak{F}$.

Supposons qu'il existe un supporteur S faiblement compact. Alors il existe un supporteur K faiblement compact, minimal parmi les supporteurs faiblement compacts.

(2.10) Démonstration : Comme dans la démonstration précédente, on considère :

$$K = \bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}(\tilde{K}_i) \,.$$

On sait que K est supporteur, d'après la proposition précédente (on ne s'est pas servi de la complétude de $\mathfrak{F}$ que pour la minimalité).

Il suffit alors de montrer que, pour chaque K_1, supporteur faiblement compact, on a $K_1 \supseteq K$. Soit

$$\Xi' = \bigcup_{i\in I} \sigma_i(X_i') \subseteq X' \,.$$

Vu la définition de bonne famille $(\bigcap_{i\in I} F_i = (0))$ la topologie $\sigma(X \,, \Xi')$ est séparée.

Alors $\sigma(X \,, X')$ et $\sigma(X \,, \Xi')$ induisent sur les espaces K et K_1 des topologies équivalentes.

On note $\varprojlim X_i$ la limite projective de la famille des espaces quotients $\{X_i\}_{i\in I}$. On sait :

$$\varprojlim X_i = \Xi' \,.$$

D'autre part, on a une injection canonique $i : X \to \Xi'^*$, et on sait que la topologie $\sigma(\Xi'^*, \Xi')$ induit la topologie $\sigma(X, \Xi')$ sur X.

Ainsi $i(K)$ est aussi compact dans l'espace $\varprojlim X_i$, et il en est de même pour $i(K_1)$.

D'après une propriété de la limite projective, on a :

$$K = \bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}(\pi_i(K)) \quad \text{et} \quad K_1 = \bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}(\pi_i(K_1))$$

$$\pi_i(K) \subseteq \tilde{K}_i \subseteq \overline{\pi_i(K_1)} = \pi_i(K_1) ,$$

donc

$$K = \bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}(\pi_i(K)) \subseteq \bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}(\pi_i(K)) = K_1 .$$

C. Q. F. D.

(2.11) Remarque : Si $\{T_i\}_{i\in I} = \{\mu_i\}_{i\in I}$ est une mesure cylindrique, on peut déduire d'un théorème, énoncé dans [3] (théorème 4, p. 202), qu'il existe une, et une seule, mesure de Radon μ , qui est scalairement concentrée sur S , telle que $\pi_i(\mu) = \mu_i$ (prolongement de $\{\mu_i\}_{i\in I}$, qui n'est pas définie sur tous les espaces quotients de dimension finie).

Dans ce cas, K est le support de cette mesure μ .

3. Supporteurs convexes des mesures cylindriques.

(3.12) Définition : Soit γ une famille de sous-ensembles de X .

On dit qu'une mesure cylindrique $\{\mu_i\}_{i\ I}$ est scalairement concentrée sur γ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $S \in \gamma$ tel que, pour tout sous-espace fermé F_i de X de codimension 1 , on a

$$\mu_i(C(\pi_i(S))) < \varepsilon .$$

Ceci est équivalent à dire que : pour tout sous-espace fermé F_j de X de codimension finie et pour toute partie $A \subseteq X_j = X/F_j$, que l'on peut séparer de $\pi_j(S)$ par un hyperplan de X_j , on a

$$\mu_j(A) < \varepsilon .$$

(3.13) PROPOSITION 3. - Soient X un e. l. c. s., et $\{\mu_i\}_{i\in I}$ une mesure positive cylindrique scalairement concentrée sur la famille γ des parties faiblement compactes, absolument convexes.

Alors il existe un supporteur K faiblement fermé, convexe, minimal parmi les supporteurs faiblement fermés, convexes.

(3.14) Démonstration : On voit facilement que $\mathrm{Supp}(\mu_i) = K_i = \tilde{K}_i$ pour une mesure positive avec les notations précédentes. Alors il suffit de considérer K_i .

Soit $G_i = \Gamma(\mathrm{Supp}(\mu_i))$, Γ notant l'enveloppe convexe. Soit

$$K = \cap_{i\in I} \pi_i^{-1}(G_i) .$$

Montrons que K est supporteur : soit $x_{i_0} \in \mathrm{Supp}(\mu_{i_0}) \subseteq X_{i_0}$.

Il faut montrer que, pour chaque voisinage U_0 de x_{i_0} dans x_{i_0} , on a

$$\pi_{i_0}^{-1}(U_0) \cap K = \pi_{i_0}^{-1}(U_0) \cap \cap_{i\in I} \pi_i^{-1}(G_i) \neq \Phi .$$

Soit U_0 dans X_{i_0} fixé ; on peut supposer U_0 convexe et fermé.

Il suffit de montrer qu'il existe $S \in \gamma$, tel que

(3.14.1) $$\pi_{i_0}^{-1}(U_0) \cap \pi_i^{-1}(G_i) \cap S \neq \Phi , \qquad \forall\ i \in I ,$$

ce qui nous ramène à la démonstration de la proposition 1 (S étant faiblement compact).

Comme $x_{i_0} \in \mathrm{Supp}(\mu_{i_0})$, on a

$$\mu_{i_0}(U_0) = \delta > 0 .$$

D'après une remarque faite dans la première démonstration, il suffit pour montrer la relation (3.14.1) de ne considérer que les $j \geq i_0$. Soit

$$\widehat{\mu_j} = \mu_j|\pi_{i_0 j}^{-1}(U_0) , \qquad \forall\ j \geq i_0 .$$

Alors $\widehat{\mu_j}$ définit une mesure sur chaque X_j , $j \geq i_0$ et pour $j_1 \geq j_2 \geq i_0$, on a

$$\pi_{j_2 j_1}(\widehat{\mu_{j_1}}) = \widehat{\mu_{j_2}} .$$

En effet, soit B un borélien dans X_{j_2}

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu_{j_2}}(B) &= \mu_{j_2}(B \cap \pi_{i_0 j_2}^{-1}(U_0)) \\
&= (\pi_{j_2 j_1}(\mu_{j_1}))(B \cap \pi_{i_0 j_2}^{-1}(U_0)) \\
&= \mu_{j_1}(\pi_{j_2 j_1}^{-1}(B \cap \pi_{i_0 j_2}^{-1}(U_0))) \\
&= \mu_{j_1}(\pi_{j_2 j_1}^{-1}(B) \cap \pi_{i_0 j_1}^{-1}(U_0)) \\
&= \widehat{\mu_{j_1}}(\pi_{j_2 j_1}^{-1}(B)) = \pi_{j_2 j_1}(\widehat{\mu_{j_1}})(B) .
\end{aligned}$$

En particulier, on a $\widehat{\mu_j}(X_j) = \delta$.

$\{\mu_i\}_{i\in I}$ étant scalairement concentrée sur γ , il existe $S \in \gamma$ tel que $\mu_j(A) < \delta/2$, où A vérifie les conditions données dans la définition (3.12).

S vérifie la relation (3.14.1) : Supposons qu'il existe $j \in I$, $j \geq i_0$ et

$$[\pi_{i_0}^{-1}(U_0) \cap \pi_j^{-1}(G_j)] \cap S = \Phi$$

$$\pi^{-1}[\pi_{i_0 j}^{-1}(U_0) \cap G_j] \cap S = \Phi$$

$$\pi^{-1}[\Gamma(\mathrm{Supp}(\widehat{\mu_j}))] \cap S = \emptyset$$

$$\Gamma(\mathrm{Supp}(\widehat{\mu_j})) \cap \pi_j(S) = \emptyset$$

$\Gamma(\mathrm{Supp}(\tilde{\mu}_j))$ est convexe et fermé, $\pi_j(S)$ convexe et compact dans X_j ; alors on peut les séparer par un hyperplan H de X_j . Mais

$$\mu_j(\Gamma(\mathrm{Supp}(\tilde{\mu}_j))) > \tilde{\mu}_j(X_j) = \delta \ ,$$

et nous arrivons à une contradiction, en montrant la condition (3.14.1), et que K est supporteur.

(3.15) Minimalité : Soit K_1 un autre supporteur convexe faiblement fermé. On suppose qu'il existe $x_1 \in K$ tel que $x_1 \notin K_1$.

Alors on peut séparer x_1 et K_1 par un hyperplan

$$H = \{x \in X \ ; \ \langle x \ , \ f\rangle = a\} \text{ pour un } f \in X' \text{ et } a \in \mathbb{R} \ .$$

f engendre un sous-espace E de X' . Soit σ l'injection canonique de E dans X' . Par transposition, on a une projection π de X dans E' . Dans E' , on applique le même raisonnement par l'absurde que plus haut, et on montre que $K \subset K_1$.

C. Q. F. D.

N.B.: La proposition 3 était connue par L. SCHWARTZ, qui avait prouvé cette proposition par une technique de fonctions convexes conjuguées.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KRÉE (P.). - Solutions faibles d'équations aux dérivées fonctionnelles, I., Séminaire P. Lelong : Analyse, 13e année, 1972/73, n° 12, p. 142-181. - Berlin, Springer-Verlag, 1974 (Lecture Notes in Mathematics, 410).

[2] KRÉE (P.). - Prodistributions, Séminaire Paul Krée : Equations aux dérivées partielles en dimension infinie, 1re année, 1974/75, n° 2, 14 p.

[3] SCHWARTZ (L.). - Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures. - Bombay, Oxford University Press, 1973 (Tata Institute of fundamental Research. Studies in Mathematics, 6).

Walter SCHACHERMAYER
Mathématiques
Université de Clermont-Ferrand
Complexe des Cézeaux
Boîte postale 45
63170 AUBIÈRE