Exposé IV. Additif au théorème (4.3)

(Schachermayer)

Dans le théorème (4.3), on peut remplacer le type $(\tau,1)$ par le type (τ,p), pour un $p \geq 0$ arbitraire fini. C'est intéressant pour le type $(\tau,0)$; rappelons qu'une probabilité cylindrique Λ est de type $(\tau,0)$ si et seulement si elle est scalairement concentrée sur la famille des parties faiblement compactes convexes, ou encore si son image de Fourier est continue pour $\tau(E',E)$.

Lemme (4.3 bis) : Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé complet. Pour qu'une application linéaire u de E' dans un espace vectoriel topologique localement convexe F soit continue de $\tau(E',E)$ dans F, il faut et il suffit que sa restriction à toute partie équicontinue de E' le soit[♦].

Démonstration : Soit W un voisinage disqué de 0 dans F. Nous devons montrer que $M' = u^{-1}(W)$ est un voisinage de 0 de $\tau(E',E)$; comme toute application linéaire est continue de $\sigma(E',E'^{*})$ dans $\sigma(F,F')$, M' est disqué dans $\sigma(E',E'^{*})$. Les polarités seront considérées pour la dualité séparante entre E' et E'^{*}. Soit V un voisinage disqué de 0 dans E ; V^{o} est équicontinue. Donc la restriction de u à V^{o} est continue de $\tau(E',E)$ dans F, donc $M' \cap V^{o}$ est un voisinage de 0 dans V^{o} pour la topologie induite par $\tau(E',E)$. Donc il existe K faiblement compact disqué de E tel que $K^{o} \cap V^{o} \subset M' \cap V^{o} \subset M'$. Donc $M'^{o} \subset (K^{o} \cap V^{o})^{o}$; mais K^{o} et V^{o} sont disqués dans $\sigma(E',E'^{*})$, donc $(K^{o} \cap V^{o})^{o} = (K^{oo} \cup V^{oo})^{oo} = (K \cup V^{oo})^{oo}$ (puisque K est faiblement compact disqué) $\subset (K + V^{oo})^{oo} = K + V^{oo}$, car la somme d'un compact disqué et d'un fermé disqué est fermée disquée. Ainsi $M'^{o} \subset K + V^{oo} \subset E + V^{oo}$. Cela prouve que, dans E'^{*} muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E', tout point de M'^{o} est adhérent à E ; mais E est complet pour cette topologie, par hypothèse, donc fermé dans E'^{*}, donc $M'^{o} \subset E$ donc $\subset K + V$: pour tout V, il existe K tel que $M'^{o} \subset K + V$. Cela

---

♦ Résultat voisin d'un théorème général de Grothendieck.

prouve aussitôt que M'^{o} est borné dans E ; mais un disqué borné de $\sigma(E'^{*},E')$ est compact dans cet espace, donc M'^{o} est faiblement compact disqué dans E. Puisque M' est disqué dans $\sigma(E',E'^{*})$, $M' = M'^{oo}$ est un voisinage de 0 de $\tau(E',E)$, cqfd.

Lemme (4.3 ter) : Soit E un Banach. Une probabilité cylindrique Λ sur E, de type $p > 1$ et de type $(\tau,0)$, est de type (τ,q) pour tout $q < p$.

Démonstration : Il suffit de le montrer pour $1 < q < p$. Alors Λ es réalisable par une application linéaire $f : E' \to L^{o}(\Omega,\mu)$, continue de E' dans $L^{p}(\Omega,\mu)$ et de $\tau(E',E)$ dans $L^{o}(\Omega,\mu)$. Nous voulons montrer qu'elle est continue de $\tau(E',E)$ dans $L^{q}(\Omega,\mu)$ localement convexe. D'après le lemme précédent, il suffit que sa restriction à la boule unité de E' le soit. Mais l'image de cette boule par f est dans une boule de $L^{p}(\Omega,\mu)$, et, sur une boule de L^{p}, la topologie L^{o} coïncide avec celle de L^{q}, $q < p$. cqfd.

Théorème (4.3) modifié : Si E vérifie RNP, toute probabilité cylindrique Λ de type $(\tau,0)$ sur E et de Radon sur $\sigma(E'',E')$ est de Radon sur E. Inversement, si toute probabilité cylindrique sur E, de type $+\infty$ et de type (τ,p), $p \geq 0$ fini, est de Radon sur E, E a la propriété RNP.

Démonstration : Supposons que E ait la propriété RNP. Soit Λ une probabilité cylindrique sur E, de type $(\tau,0)$, réalisée par une fonction aléatoire linéaire $f : E' \to L^{o}(\Omega,\mu)$, continue sur $\tau(E',E)$, et de Radon sur $\sigma(E'',E')$. On peut alors la réaliser par $\Phi : \Omega \to E''$, $*$-scalairement μ-mesurable, $|\Phi|$ μ-mesurable, avec $f(\xi) = \xi \circ \Phi$ pour $\xi \in E'$ (théorème 4.1)). Soit $\Omega_N = \{\omega \in \Omega \ ; \ |\Phi(\omega)| \leq N\}$, μ-mesurable. Alors $\Phi 1_{\Omega_N}$ réalise une mesure de Radon sur $\sigma(E'',E')$, portée par la boule de rayon N, réalisée par $\xi \mapsto (\xi \circ \Phi) 1_{\Omega_N}$, donc de type $+\infty$. Alors cette mesure cylindrique, de type $+\infty$ et de type $(\tau,0)$, est de type $(\tau,1)$ par le lemme (4.3 ter), et par le théorème (4.3) démontré dans l'exposé, elle est de Radon sur E. Cela prouve que $\Phi 1_{\Omega_N}$ est $*$-scalairement μ-presque partout égale à une fonction μ-mesurable, bornée en module par N, à valeurs dans E, et portée par Ω_N. Comme $\bigcup_N \Omega_N = \Omega$, Φ a la même propriété, et Λ est de Radon sur E.

Inversement, supposons que toute probabilité cylindrique Λ sur E, de type $+\infty$, de type (τ,p) (p fini), soit de Radon sur E. Si $p \leq 1$, c'est a fortiori vrai pour le type $(\tau,1)$. Si $p > 1$, le lemme (4.3 ter) dit que toute probabilité cylindrique de type $+\infty$, de type $(\tau,1)$, est de type (τ,p), donc c'est encore vrai pour le type $(\tau,1)$. Alors le théorème (4.3) de l'exposé permet de conclure que E a la propriété RNP.

Remarque : On ne peut par contre pas supprimer toute condition. Si E n'est pas réflexif, et si $a \in E'' \setminus E$, δ_a est une probabilité de Radon sur $\sigma(E'',E')$ qui n'est pas de Radon sur E. Elle n'est pas de type $(\tau,0)$. D'ailleurs, toute probabilité de Radon sur E est de type $(\tau,0)$.
