Addendum: UNE MODIFICATION STANDARD DE LA DEMONSTRATION NON STANDARD DE REEB ET SCHWEITZER

par

W. SCHACHERMAYER (Mexico)

Nous donnons une autre démonstration du lemme de Thurston, qui n'utilise qu'une soussuite mais dont l'idée essentielle est identique à celle de la démonstration plus haut. A nôtre avis il est le mérite de l'analyse non standard, qu'elle rend claire la situation et permet de trouver la très simple démonstration suivante, qui remplace le quotient des quantités infiniment petites par une limite des quotients usuels.

Il convient de changer la notation un peu: Nous notons $\{g_1,\ldots,g_k\}$ une famille finie symétrique de générateurs de G et pour $g \in G$ nous posons $g(x)=\bar{g}(x)+x$. Par hypothèse $(\bar{g})'(0)=0$. En abus de notation nous écrivons aussi g pour un représentant arbitraire du germe g.

Autre preuve du lemme: Par un calcul élémentaire on vérifie la formule suivante $\forall\, g,h \in G$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}$:

$$(\overline{g\circ h})\ (x) = \bar{g}(x) + \bar{h}(x) + (\bar{g}(x+\bar{h}\ (x)) - \bar{g}(x)) \qquad (*)$$

Editor's Note. This standard proof, inspired by the nonstandard proof given in the preceding note, illustrates the heuristic value of nonstandard mathematics. The nonstandard proof has also led to short standard proofs by J. Jouanolou and by J. Cantwell.

Choisissons maintenant une suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dans $\mathbb{R}$ tendant vers 0 telle que pour au moins un $i \in \{1,\dots k\}$ la suite $\{\bar{g}_i(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ soit différente de zéro pour un nombre infini des $n \in \mathbb{N}$.

Posons $M_n = \max\{|\bar{g}_1(x_n)|,\dots,|\bar{g}_k(x_n)|\}$. Passant a une sous-suite on peut supposer que $M_n > 0$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et aussi que pour chaque $i \in \{1,\dots k\}$ la suite $\{\bar{g}_i(x_n)/M_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers un élément de $[-1, +1]$, disons vers b_i. Pour un certain $i_\circ \in \{1,\dots,k\}$ nous avons alors $|b_{i_\circ}| = 1$.

Si g est un élément arbitraire de G tel que $\{\bar{g}(x_n)/M_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge (disons vers b), alors pour chaque générateur g_i la suite $\{(\overline{g_i \circ g})(x_n)/M_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers $b + b_i$.

En effet en vue de la formule (*) il suffit de vérifier

$$\lim_{n\to\infty} M_n^{-1}(\bar{g}_i(x_n + \bar{g}(x_n)) - \bar{g}_i(x_n)) = 0 \qquad (**)$$

Utilisant le théorème de valeur moyenne nous avons

$$\lim_{n\to\infty} M_n^{-1}(\bar{g}_i(x_n + \bar{g}(x_n)) - \bar{g}_i(x_n)) =$$
$$\lim_{n\to\infty} M_n^{-1}\, \bar{g}(x_n)\,((\bar{g}_i)'(s_n))$$

où s_n note un point entre $x_n + \bar{g}(x_n)$ et x_n. Le premier terme est une suite convergente et le deuxième tend vers zéro, parce que s_n tend vers zéro et par hypothèse $(\bar{g}_i)'$ est continu et zéro en zéro, ce qui démontre (**).

Si l'on pose alors

$$H : G \to \mathbb{R}$$
$$g \mapsto \lim_{n\to\infty} \bar{g}(x_n)/M_n \quad ,$$

H est bien défini et c'est un homomorphisme non-trivial.

<u>Remarque</u>: Evidemment cet argument se généralise aussi immédiatement à $\mathbb{R}^k$.