Séminaire P.LELONG
(Analyse)
14e année, 1974/75.

Juillet 1975

# SUR UN THÉORÈME DE GROTHENDIECK

par M. Walter SCHACHERMAYER

Nous voulons présenter le théorème suivant (d'après la démonstration de Gil de Lamadrid, TAMS 114 (1965), p. 98-110) :

Théorème : Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach ; un dual (disons $E'$) doit vérifier la "propriété d'approximation métrique", et un dual (c'est-à-dire $E'$ ou $F'$) doit être un "espace de Radon-Nikodym". Or

$$(E \hat{\hat{\otimes}} F)' = E' \hat{\otimes} F' ,$$

au sens d'une isomorphie isométrique ; le produit scalaire est donné pour les tenseurs finis par

$$< \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i , \sum_{j=1}^{m} x_j' \otimes y_j' > = \sum_{i,j} < x_i , x_j' > . < y_i , y_j' > .$$

Remarque : On va bien expliquer les termes utilisés dans la formulation du théorème.

La présentation ici s'appuie aussi largement sur un cours de Prof. Cigler, donné en 1974 à l'Université de Vienne.

## A) PRODUIT TENSORIEL PROJECTIF ($\hat{\otimes}$) ET INDUCTIF ($\hat{\hat{\otimes}}$)

### (a) Produit tensoriel projectif :

Définition : Soient $E$, $F$ Banach. On appelle le produit tensoriel projectif

al theory of
tute of mathematics.
Journal of Func-
. 123-181.
ques et espaces nu-
rivées fonctionnel-
hema cs. Springer,
47.
vées partielles
physique.
aré (1975).
s espaces complète-
s, Série A
ly differentiable
a de Mat., vol. VIII
mappings.
8).
P.et M.Curie
es, ur 45-46
ssieu

de $E$ et $F$ un espace de Banach $E \hat{\otimes} F$ avec une application bilinéaire

$$w : E \times F \longmapsto E \hat{\otimes} F \quad \text{telle que} \quad \|w(x, y)\|_{\hat{\otimes}} = \|x\| \, . \, \|y\|$$

$\forall x \in E$, $y \in F$, et tel que $E \hat{\otimes} F$ vérifie la propriété universelle :

Pour chaque Banach $G$ et chaque application bilinéaire, continue $\varphi : E \times F \longmapsto G$ il existe une et une seule application continue $T_\varphi : E \hat{\otimes} F \longmapsto G$, qui rende commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
E \times F \arrow[r, "w"] \arrow[d, "\varphi"'] & E \hat{\otimes} F \arrow[dl, dashed, "\exists !\, T_\varphi"] \\
G &
\end{tikzcd}$$

<u>Résultats bien connus</u> : $E \hat{\otimes} F$ existe toujours et est unique (à isomorphie près). On a

$$\|\varphi\| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} \|\varphi(x, y)\|_G = \|T_\varphi\| .$$

Le produit tensoriel algébrique $E \otimes F$, formé par les tenseurs finis $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ est contenu dans $E \hat{\otimes} F$ et partout dense. La norme $\|.\|_{\hat{\otimes}}$ induit sur $E \otimes F$ la norme

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \Big\|_{\hat{\otimes}} = \inf \sum_{j=1}^{m} \|x_j\| \, . \, \|y_j\| ,$$

l'inf pris sur tous les représentations <u>finies</u> $\sum_{j=1}^{m} x_j \otimes y_j$ de $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$.

On a $(E \hat{\otimes} F)' = \mathcal{L}(E, F') = \mathrm{Bil}\,(E, F, \mathbb{K})$, où $\mathcal{L}(E, F')$ sont les applications linéaires continues $E \longmapsto F'$, et $\mathrm{Bil}\,(E, F\,;\, \mathbb{K})$ sont les applications bilinéaires continues de $E \times F \longmapsto \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). C'est une isomorphie isométrique et la correspondance est donnée par le diagramme de la définition en posant $G = \mathbb{K}$ .

<u>Proposition 1</u> : Soit $(\Omega, \Sigma, \mu)$ un espace mesurable, $E$ un Banach. Alors

$$L^1_\mu\,(\Omega\,;\, E) = L^1_\mu\,(\Omega) \hat{\otimes} E.$$

$L^1_\mu\ (\Omega,\ E)$ est l'espace des fonctions $f$ sur $\Omega$ à valeurs dans $E$, qui sont limite simple d'une suite des fonctions étagées sur $\Omega$ à valeurs dans $E$ et telles que $\|f\|_{L^1_\mu(\Omega\ ;\ x)} = \int_\Omega \|f(\omega)\|\ d\mu(\omega) < \infty$

La correspondance est donné par

$$\phi : L^1_\mu\ (\Omega) \otimes E \longmapsto L^1_\mu\ (\Omega_i\ E)$$

$$u = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes x_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i\ .\ f_i(\omega) = \tilde{u}\ .$$

<u>Démonstration</u>. (Schaefer, T.V.S., p. 95) :

Evidemment $\phi$ est une application linéaire.

$$\|\tilde{u}\|_{L^1_\mu(\Omega,\ E)} = \int_\Omega \|\sum_{i=1}^{n} x_i\ .\ f_i(\omega)\|\ d\mu\ (\omega) \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\ .\ \|f_i\|_{L^1}$$

Cette inégalité est vraie pour tous les représentations de $u$ ; or

$$\|\tilde{u}\|_{L^1_\mu(\Omega,\ E)} \leq \|u\|_{L^1_\mu(\Omega)\ \hat{\otimes}\ E}\ .$$

Inversement, soit $S(\Omega)$ l'espace des fonctions étagées (c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\ 1_{A_i}$, avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $A_i \in \sum$ et $\mu(A_i) < \infty$ si $\lambda_i \neq 0$). $S(\Omega)$ est partout dense dans $L^1_\mu(\Omega)$ ; alors $S(\Omega) \otimes E$ est aussi partout dense dans $L^1_\mu(\Omega)\ \hat{\otimes}\ E$ .

Soit $u \in S(\Omega) \otimes E$ ; on peut choisir une représentation $u = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i} \otimes x_i$, tel que les $A_i$ sont des ensembles disjoints. Or

$$\|u\|_{L^1_\mu\ \hat{\otimes}\ E} \leq \sum_{i=1}^{n} \|1_{A_i}\|_{L^1}\ .\ \|x_i\| = \|\tilde{u}\|_{L^1_\mu(\Omega\ ;\ E)}.$$

b) <u>Produit tensoriel inductif</u> :

On peut identifier le produit tensoriel algébrique $E \otimes F$ avec un sous-espace de $\mathcal{L}(E',\ F)$ :

$$i : E \otimes F \overset{\supset}{\longrightarrow} \mathcal{L}(E', F)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} < x_i, . > y_i$$

$\mathcal{L}(E', F)$ induit ainsi une norme sur $E \otimes F$ qu'on note $\| . \|_{\hat{\hat{\otimes}}}$ :

$$\| \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \|_{\hat{\hat{\otimes}}} = \sup_{\substack{\|x'\| \leq 1 \\ \|y'\| \leq 1}} | \sum_{i=1}^{n} < x_i, x' > . < y_i, y' > | .$$

Définition : On appelle l'espace de Banach $E \hat{\hat{\otimes}} F$, formé par l'adhérence de $E \otimes F$, pour la norme $\| . \|_{\hat{\hat{\otimes}}}$ le produit tensoriel inductif de E et F.

Remarque : En général on n'a plus une description simple du dual comme on l'avait pour $E \hat{\otimes} F$ [ $(E \hat{\otimes} F)' = \mathcal{L}(E, F')$] . On a toujours, que $(E \hat{\hat{\otimes}} F)' \subseteq \mathcal{L}(E, F')$, comme $E \hat{\otimes} F$ est dense dans $E \hat{\hat{\otimes}} F$ et la norme $\| . \|_{\hat{\otimes}}$ est plus grande que la norme $\| . \|_{\hat{\hat{\otimes}}}$ .

Définition : Les applications $T \in \mathcal{L}(E, F')$, qui appartiennent à $(E \hat{\hat{\otimes}} F)'$ sont appelées applications intégrales (au sens de Buchwalter) ; elles forment un espace de Banach pour la norme intégrale $\| . \|_{\hat{\hat{\otimes}}'}$

$$\|T\|_{\hat{\hat{\otimes}}'} = \sup_{\{\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \; : \; \|\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\|_{\hat{\hat{\otimes}}} \leq 1\}} |< \sum_{i=1}^{n} < y_i, T x_i >|$$

Remarque : Il est notre but de montrer, que les opérateurs intégraux et les opérateurs nucléaires coïncident sous les conditions données plus haut.

Exemple : Nous donnons, toute suite un exemple d'une application intégrale, qui n'est même pas compacte, à fortiori pas nucléaire.

Soit $E = F = \ell^1$ . Soit $i : \ell^1 \longmapsto \ell^\infty$ l'injection canonique. $i \in \mathcal{L}(\ell^1, \ell^\infty) = (\ell^1 \hat{\otimes} \ell^1)'$ .

Pour que $i$ soit une application intégrale (c'est-à-dire $i \in (\ell^1 \hat{\hat{\otimes}} \ell^1)'$)

de norme intégrale

$i_n( \{x_1, \ldots$

sont des applicati

En effet, la

si l'on a une suit

pour une topologie

la topologie $\sigma((E$

dans la boule unit

Chaque $i_n$ d

$< \sum_{k=1}^{\infty} x_k \otimes y_k, i$

On peut écrire

$< \sum_{k=1}^{\infty} x_k \otimes y_k, i_n >$

Les éléments $S(t_1,$

appartiennent à la

$\int_{T_n} \sum_{k=1}^{\infty} < x_k , S(t$

Or $|< \sum_{k=1}^{\infty} x_k \otimes y_k,$

Or $\|i_n\|_{\hat{\hat{\otimes}}'} \leq 1$

Enfin il est c

$\ell^1 \otimes \ell^1)$. En effet

$< x \otimes y, i_n > =$

de norme intégrale $\|i\|_{\hat{\hat{\otimes}}'} \leqslant 1$, il suffit que les "troncatures" $i_n$ :

$$i_n(\{x_1,\dots, x_n, x_{n+1},\dots\}) = \{x_1,\dots, x_n, 0, \dots\}$$

sont des applications intégrales de norme $\|i_n\|_{\hat{\hat{\otimes}}'} \leqslant 1$.

En effet, la boule unité de $(E \hat{\otimes} F)'$ est $\sigma((E \hat{\otimes} F)', E \hat{\otimes} F)$ - compacte ; si l'on a une suite $\{i_n\}_{n=1}^{\infty}$ dans la boule unité de $(E \hat{\hat{\otimes}} F)'$, qui converge pour une topologie séparée plus faible que $\sigma((E \hat{\hat{\otimes}} F)', E \hat{\otimes} F)$ [par exemple la topologie $\sigma((E \hat{\hat{\otimes}} F)', E \otimes F)$], elle converge vers une limite unique $i$ dans la boule unité de $(E \hat{\hat{\otimes}} F)'$.

Chaque $i_n$ définit une fonctionnelle linéaire continue sur $\ell^1 \hat{\hat{\otimes}} \ell^1$ :

$$< \sum_{k=1}^{\infty} x_k \otimes y_k, i_n > = \sum_{k=1}^{\infty} < x_k, i_n(y_n) > = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{n} x_k^{\ell} \cdot y_k^{\ell}$$

On peut écrire

$$< \sum_{k=1}^{\infty} x_k \otimes y_k, i_n > = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1 \Big( \sum_{\ell,m=1}^{n} x_k^{\ell}\, e^{2\pi i\, d_\ell} \cdot y_k^{m} \cdot e^{-2\pi i\, d_m} \Big) dt_1 \dots dt_n}_{\left[ = \sum_{\ell=1}^{n} x_k^{\ell}\, y_k^{\ell} \right]}$$

Les éléments $S(t_1,\dots, t_n) = (e^{2\pi i\, t_1},\dots, e^{2\pi i\, t_n}, 0, \dots)$ appartiennent à la boule unité de $\ell^{\infty}$. On peut écrire la dernière expression

$$\int_{T_n} \sum_{k=1}^{\infty} < x_k, S(t_1,\dots, t_n) > . < y_k, \bar{S}(t_1,\dots, t_n) > dt_1, \dots, dt_n .$$

Or $\displaystyle |< \sum_{k=1}^{\infty} x_k \otimes y_k, i_n >| \leqslant \sup_{\substack{x', y' \in \ell^{\infty} \\ \|x'\| \leqslant 1, \|y'\| \leqslant 1}} |\sum_{k=1}^{\infty} <x_k, x'>. <y_k, y'>| = \|\sum_{k=1}^{\infty} x_k \otimes y_k\|_{\hat{\hat{\otimes}}}$ .

Or $\|i_n\|_{\hat{\hat{\otimes}}'} \leqslant 1$ .

Enfin il est clair, que $i_n \longmapsto i$ pour la topologie $\sigma((\ell^1 \hat{\hat{\otimes}} \ell^1)', \ell^1 \otimes \ell^1)$. En effet pour chaque tenseur décomposable $x \otimes y \in \ell^1 \otimes \ell^1$ on a

$$< x \otimes y, i_n > = \sum_{\ell=1}^{n} x^{\ell} \cdot y^{\ell} \longmapsto \sum_{\ell=1}^{\infty} x^{\ell} . y^{\ell} = < x \otimes y, i >$$

Retournons au produit tensoriel inductif :

Nous avons vu, que $\hat{\otimes}$ correspond à $\| \cdot \|_1$ $[L^1_\mu \hat{\otimes} E = L^1_\mu(\Omega\ ;\ E)]$ ; aussi $\hat{\hat{\otimes}}$ correspond dans un certain sens à $\| \cdot \|_\infty$ :

<u>Proposition</u> : Soit $S$ un espace topologique <u>compact</u> séparé, $\mathcal{C}(S)$ les fonctions continues sur $S$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) avec la norme $\| \cdot \|_\infty$ .

Soit $E$ un Banach et $\mathcal{C}(S\ ;\ E)$ l'espace de Banach, formé par les fonctions continues $f : S \longmapsto E$ , muni de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{C}(S\ ;\ E)} = \sup_{s \in S} \|f(s)\|_E \ .$$

Alors, $$\mathcal{C}(S) \hat{\hat{\otimes}} E = \mathcal{C}(S\ ;\ E)$$

au sens d'une isométrie ; la correspondance est donné pour les tenseurs finis par

$$\sum_{i=1}^n f_i \otimes x_i \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i \cdot f_i(s)$$

<u>Démonstration</u> : $\mathcal{C}(S) \otimes E$ est plongé isométriquement dans $\mathcal{C}(S;E)$ pour la norme $\hat{\hat{\otimes}}$:

$$\left\| \sum_{i=1}^n f_i \otimes x_i \right\|_{\hat{\hat{\otimes}}} = \sup_{\|x'\| \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^n \langle x_i, x' \rangle \cdot f_i \right\|_{\mathcal{C}(S)}$$

$$= \sup_{\|x'\| \leq 1} \sup_{s \in S} \left| \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \cdot f_i(s)\ ,\ x' \right\rangle \right|$$

$$= \sup_{s \in S} \left\| \sum_{i=1}^n x_i \cdot f_i(s) \right\|_E = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \cdot f_i(s) \right\|_{\mathcal{C}(S\ ;\ E)} .$$

La démonstration sera achevée, si nous montrerons, que $\mathcal{C}(S) \otimes E$ est dense dans $\mathcal{C}(S\ ;\ E)$. Soit $f \in \mathcal{C}(S\ ;\ E)$ et $\varepsilon > 0$ donné :

Définissons $V_s := \{t \in S : \|f(s) - f(t)\|_E < \varepsilon\}$ pour chaque $s \in S$ et soit $U_s$ un ouvert tel que

$$s \in U_s \subseteq \bar{U}_s \subseteq V_s \ .$$

S étant compact, on

$$\bigcup_{i=1}^n$$

On peut construire u

continues à valeurs

$$\sum_{i=1}^n e_i(S) = 1$$

L'élément $\sum_{i=1}^n$

pour chaque $s \in S$

$$\left\| \sum_{i=1}^n e_i(s)\ f(s_i \right.$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \|e_i(s)\ (f($$

Donc $\left\| \sum_{i=1}^n e_i(s) \right.$

B) RESULTA

<u>Définition</u> : Un espac

<u>métrique</u>" (en abrégé

existe une applicatio

telle que

$$\|u\| \leq 1$$

<u>Définition</u> : Soient

cations compacts u :

dans un ensemble <u>rela</u>

$S$ étant compact, on trouve $s_1, \dots, s_n$ t.q.

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i} = S .$$

On peut construire une partition de l'unité $e_1(S), \dots, e_n(S)$ des fonctions continues à valeurs dans $[0,1]$, t.q.

$$\sum_{i=1}^{n} e_i(S) = 1 \qquad \text{et} \qquad e_i \mid_{U_{s_i}} = 1$$

$$e_i \mid_{\complement V_{s_i}} = 0.$$

L'élément $\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f(s_i)$ appartient à $\mathcal{C}(S) \otimes E$, et on trouve pour chaque $s \in S$

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} e_i(s)\, f(s_i) - f(s) \Big\|_E = \Big\| \sum_{i=1}^{n} e_i(s)\, (f(s_i) - f(s)) \Big\|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \| e_i(s)\, (f(s_i) - f(s)) \| < \varepsilon \,.\, \sum_{i=1}^{n} |e_i(s)| = \varepsilon \,.$$

Donc $\quad \Big\| \sum_{i=1}^{n} e_i(s) \,.\, f(s_i) - f(s) \Big\|_{\mathcal{C}(S\,;\,E)} < \varepsilon$

## B) RESULTATS SUR LA PROPRIETE D'APPROXIMATION

Définition : Un espace de Banach $E$ vérifie la "propriété d'approximation métrique" (en abrégé "p.a.m." , si pour chaque compact $K \subseteq E$ et $\varepsilon > 0$ il existe une application $u : E \longmapsto E$ de rang fini [ c'est-à-dire $u \in E' \otimes E$ ] telle que

$$\|u\| \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \sup_{x \in K} \|u(x) - x\| < \varepsilon \,.$$

Définition : Soient $E$, $F$ deux Banach. On note $K(E, F)$ l'espace des applications compacts $u : E \longmapsto F$, c'est-à-dire $u$ transforme la boule unité de $E$ dans un ensemble relativement compact de $F$.

Proposition : Si $E$ vérifie "p.a.m.", on a pour chaque Banach $F$

$$F' \hat{\hat{\otimes}} E = K(F, E).$$

Démonstration : Comme $F' \otimes E \subseteq K(F, E) \subset \mathcal{L}(F, E)$, et $K(F, E)$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{L}(F, E)$, qui induit sur $F' \otimes E$ la norme $\| \cdot \|_{\hat{\hat{\otimes}}}$, on a toujours (aussi sans "p.a.m.")

$$F' \hat{\hat{\otimes}} E \subseteq K(F, E) \qquad \text{isométriquement.}$$

Ce qu'il faut démontrer, c'est, que $F' \otimes E$ est dense dans $K(F, E)$. Chaque $f \in K(F, E)$ transforme la boule unité de $F$ dans un ensemble relativement compact $K$ dans $E$. Pour chaque $\varepsilon > 0$ on peut trouver $u \in E' \otimes E$, t.q.

$$\sup_{x \in K} \|u(x) - x\| < \varepsilon .$$

L'application $u \circ f$, étant de rang fini, appartient à $F' \otimes E$ et

$$\sup_{\substack{\|y\| \leq 1 \\ y \in F}} \|u \circ f(y) - f(y)\| < \varepsilon .$$

Proposition 4 : Si $E$ vérifie "p.a.m.", l'injection canonique

$$j : E \hat{\otimes} F \longmapsto (E' \hat{\hat{\otimes}} F')'$$

est une injection isométrique.

Démonstration : $E \hat{\otimes} F$ est un sous-espace de $(E \hat{\otimes} F)'' = (\mathcal{L}(E, F'))'$. La restriction au sous-espace $E' \hat{\hat{\otimes}} F'$ de $\mathcal{L}(E, F')$ définit donc une contraction linéaire, c'est-à-dire $\|j\| \leq 1$.

$j$ est une injection isométrique, ssi, la transposée $j' : (E' \hat{\hat{\otimes}} F')'' \longrightarrow (E \hat{\otimes} F)'$ est une projection de norme 1, c'est-à-dire une application quotient. C'est le cas, ssi $j'$ applique la boule unité de $(E' \hat{\hat{\otimes}} F')''$ sur la boule unité de $(E \hat{\otimes} F)'$ ; comme la boule de $(E' \hat{\hat{\otimes}} F')$ et

$\sigma^*$ - partout - dens

que l'image par $j'$

boule de $(E \hat{\otimes} F)' =$

Comme la boule

coïncide sur la boul

Mais pour cette

à conclure, que la bo

unité de $\mathcal{L}(E, F')$ :

$\|u_\alpha\| \leq 1$, qui tende

sembles finis) vers l

Or pour chaque

on a :

$$\lim_{\alpha \in I} \Big| \sum_{i=1}^{n} < f \circ$$

Comme $f \circ u_\alpha$

est achevée.

Corollaire 1 : Si $E$

$\in E' \otimes F'$ séparent l

Démonstration : Soit

d'après prop. 4.

Comme les élément

ils séparent les point

Corollaire 2 : (import

Si $E$ vérifie la

$E \hat{\otimes} F \longmapsto \mathcal{L}(E', F)$

Démonstration : Conséq

$\sigma^\star$ - partout - dense dans la boule de $(E' \hat{\hat{\otimes}} F')''$ , il suffit de démontrer que l'image par $j'$ de la boule de $E' \hat{\hat{\otimes}} F'$ est $\sigma^\star$ - partout dense dans la boule de $(E \hat{\otimes} F)' = \mathcal{L}(E, F')$.

Comme la boule unité de $\mathcal{L}(E, F')$ est $\sigma^\star$-compacte, cette topologie coïncide sur la boule avec la topologie $\sigma(\mathcal{L}(E, F'), E \otimes F)$.

Mais pour cette dernière topologie, c'est la "p.a.m.", qui nous permet à conclure, que la boule unité de $E' \otimes F'$ est déjà $\sigma^\star$-dense dans la boule unité de $\mathcal{L}(E, F')$ : On a une suite généralisée $\{u_\alpha\}_{\alpha \in I} \in E' \otimes E$, avec $\|u_\alpha\| \leq 1$, qui tende uniformément sur les compacts (à fortiori sur les ensembles finis) vers l'identité.

Or pour chaque $f \in \mathcal{L}(E, F')$ et chaque $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in E \otimes F$ on a :

$$\lim_{\alpha \in I} \left| \sum_{i=1}^{n} \langle f \circ u_\alpha (x_i) - f(x_i) , y_i \rangle \right| = 0 .$$

Comme $f \circ u_\alpha$ appartient à la boule unité de $E' \otimes F'$, la démonstration est achevée.

<u>Corollaire 1</u> : Si $E$ vérifie la "p.a.m.", alors les éléments $x' \otimes y' \in E' \otimes F'$ séparent les points de $E \hat{\otimes} F$ .

<u>Démonstration</u> : Soit $j : E \hat{\otimes} F \xrightarrow{\subset} (E' \hat{\hat{\otimes}} F')'$ l'injection isométrique d'après prop. 4.

Comme les éléments $x' \otimes y'$ forment un système total dans $E' \hat{\hat{\otimes}} F'$, ils séparent les points de $(E' \hat{\hat{\otimes}} F')'$, donc aussi les points de $E \hat{\otimes} F$.

<u>Corollaire 2</u> : (<u>important</u>)

Si $E$ vérifie la "p.a.m.", alors l'injection canonique $E \hat{\otimes} F \longmapsto \mathcal{L}(E', F)$ est injective.

<u>Démonstration</u> : Conséquence immédiate du corollaire 1.

## C) MESURES VECTORIELLES

Définition : Soit $S$ un espace compact séparé, $B(S)$ la famille des boréliens et $F$ un Banach.

On appelle une application $m : B(S) \longmapsto F$ une F-mesure de Radon, si pour chaque $y \in F'$ l'application $y \circ m = m_y : B(S) \longmapsto \mathbb{K}$ est une mesure de Radon.

Pour chaque $y \in F'$, la variation totale $|m_y|(S)$ est finie, parce que $S$ est compact. Une application du théorème de Baire montre, que

$$\|m\| = \sup_{\|y'\| \leqslant 1} \{|m_y|(S)\} < \infty .$$

$\|\cdot\|$ définit une norme sur les F-mesures, qui forment ainsi un espace de Banach, que l'on note $N(S, F)$. On appelle la norme $\|\cdot\|$ la semi variation.

Chaque $m \in N(S\,;F)$ définit une mesure de Radon $|m|$, à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}_+$ appelée la variation totale

$$|m|\,(A) := \sup \{ \sum_{n=1}^{N} \|m\,(A_n)\| \; : A_1, \ldots, A_N \text{ partition de } A \}.$$

Le sous-espace de $N(S\,;F)$, formé par les mesures $m$ avec $|m|(A) < \infty$ est un espace de Banach, noté $M(S\,;F)$ avec la norme

$$|||m||| = |m|(S).$$

Définition : On dit, qu'un Banach $F$ a la "propriété de Radon-Nikodym", en abrégé R N P, si l'on a pour chaque $S$ compact et chaque mesure de Radon $\mu$ sur $S$

$$\mathcal{L}(L^1_\mu(S), F) = L^\infty_\mu(S\,;F),$$

c'est-à-dire pour chaque application linéaire continue $T : L^1_\mu(S) \longmapsto F$ il existe une fonction mesurable [pour la norme de $F$] $f : S \longmapsto F$, t.q.

$$T\varphi = \int_S \varphi(s)\, f(s)\, d\mu(s) \qquad \forall \varphi \in L^1_\mu .$$

Il s'en suit :

On a la caract

Proposition 5 : F

représentation

g(s) une fonction

Démonstration :

et il suffit d'appli

Soit $T : L^1_\mu$

m (A)

et $|m|$ (A

On a $|m|$ (A) $\leqslant$ $\|T$

de Radon-Nikodym on

Maintenant, il est c

définit une F-mesure

$g(s) \in L^\infty_{|m|}(S\,;F) \subseteq$

Il s'en suit : $\|T\| = \operatorname{ess.\,sup}_{s \in S} \|f(s)\|$ .

On a la caractérisation suivante.

<u>Proposition 5</u> : F a la R N P $\Longleftrightarrow$ pour chaque $m \in M(S\ ;\ F)$ on a une représentation

$$m = g(s)\ .\ |m|\ ,$$

$g(s)$ une fonction mesurable (pour la norme) à valeurs dans F avec

$$\operatorname{ess\ sup}_{s \in S} \|g(s)\| = 1.$$

<u>Démonstration</u> : ($\Rightarrow$) Soit $m \in M(S\ ;\ F)$ ; m définit une application

$$T_m : L^1_{|m|}(S) \longmapsto F$$

$$\varphi(S) \longmapsto \int_S \varphi(S)\ d\ m(S)\ ,$$

et il suffit d'appliquer la définition de R N P.

($\Leftarrow$) Soit $T : L^1_\mu \longmapsto F$ une application continue. Définissons

$$m\ (A) := T\ (1_A)$$

et
$$|m|\ (A) := \{\sup \sum_{n=1}^{N} \|T(1_{A_n})\| \ :\ A_1, \ldots, A_N \text{ partition de } A\}\ .$$

On a $|m|\ (A) \leqslant \|T\|\ .\ \mu(A)$ pour chaque $A \in B(S)$. Par le théorème classique de Radon-Nikodym on trouve une fonction h , avec $|h(s)| \leqslant \|T\|$ , t.q.

$$|m| = h\ .\ \mu$$

Maintenant, il est clair, que

$$m(A) = T(1_A)$$

définit une F-mesure de variation $|m|$. D'après l'hypothèse on peut trouver $g(s) \in L^\infty_{|m|}(S\ ;\ F) \subseteq L^\infty_\mu(S\ ;\ F)$, t.q.

$$m = g\ .\ |m| = g\ .\ h\ .\ \mu,$$

avec $\operatorname{ess}\sup_{s \in S} \|g(s)\| \leqslant 1$ et ainsi $\operatorname{ess}\sup_{s \in S} \|g(s).\, h(s)\| \leqslant \|T\|$ .

## D) PRODUITS TENSORIELS D'ESPACES DES MESURES

Nous considérons dans la suite les espaces $\mathcal{C}'(S)\, \hat{\otimes}\, F$ et $\mathcal{C}'(S)\, \hat{\hat{\otimes}}\, F$ ; on sait [Grothendieck P.T.T., p. 164], que $\mathcal{C}'(S)$ vérifie la propriété d'appproximation métrique.

Proposition 6 : On a une injection isométrique $j : \mathcal{C}'(S)\, \hat{\hat{\otimes}}\, F \longmapsto N(S, F)$, qui fait correspondre à chaque $t \in \mathcal{C}'(S) \otimes F$, $t = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \otimes y_i$ la mesure $m^t(A) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \mu_i(A)$.

Démonstration :

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} \mu_i \otimes y_i \Big\|_{\hat{\hat{\otimes}}} = \sup_{\substack{y' \in F' \\ \|y'\| \leqslant 1}} \Big\| \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot \langle y_i , y' \rangle \Big\|_{\mathcal{C}'(S)}$$

$$= \sup_{\|y'\| \leqslant 1}\ \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{C}(S) \\ \|\varphi\| \leqslant 1}} \Big| \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi , \mu_i \rangle . \langle y_i , y' \rangle \Big|$$

$$= \sup_{\|y'\| \leqslant 1} \Big\{\text{variation } \Big( \sum_{i=1}^{n} \langle y_i , y' \rangle . \mu_i \Big)\Big\}$$

$$= \Big\| \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \mu_i \Big\|_{N(S,\, F)} .$$

Cette isométrie sur le sous-espace dense $\mathcal{C}'(S) \otimes F$ se prolonge d'une façon unique à $\mathcal{C}'(S)\, \hat{\hat{\otimes}}\, F$ .

Proposition 7 : La restriction de l'injection $j : \mathcal{C}'(S)\, \hat{\hat{\otimes}}\, F \mapsto N(S, F)$ au sous-espace $\mathcal{C}'(S)\, \hat{\otimes}\, F$ définit une injection isométrique

$$j : \mathcal{C}'(S)\, \hat{\otimes}\, F \longmapsto M(S\, ,\, F)$$

<u>Démonstration</u> :

L'application bilinéaire

$$w : \mathcal{C}'(S) \times F \longmapsto M(S\ ,\ F)$$

$$(\mu\ ,\ y) \longmapsto \mu \cdot y$$

est de norme 1. D'après la définition du produit tensoriel projectif on a $\|j\| = 1$, c'est-à-dire pour chaque $t \in \mathcal{C}'(S) \otimes F$

$$\underline{\|t\|_{\hat{\otimes}} \geq \||j(t)\||_{M(S,\ F)}}$$

Pour montrer l'inégalité inverse, il suffit de la faire pour $t = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \otimes y_i \in \mathcal{C}'(S) \otimes F$.

Soit $\nu$ une mesure positive sur $S$ par rapport à laquelle $\mu_1, \dots \mu_n$ sont absolument continues. On a une injection isométrique

$$T : L^1_\nu \longmapsto \mathcal{C}'(S)$$

$$\varphi \longmapsto \varphi \cdot \nu$$

et chaque $\mu_i$ est image d'un $\varphi_i \in L^1_\nu$ d'après Radon-Nikodym.

Comme $T$ est une isométrie, l'application

$$T \otimes \mathrm{id} : L^1_\nu \hat{\otimes} F \longmapsto \mathcal{C}'(S) \hat{\otimes} F$$

est de norme 1 (de nouveau d'après la propriété universelle, cette fois pour $L^1_\nu \hat{\otimes} F$).

Pour chaque $A \in B(S)$ on a

$$j(t)\ (A) = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_A \varphi_i(s)\ d_\nu(s)\right) y_i = \int_A f(s)\ d_\nu(s)$$

avec $f(s) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \varphi_i(s)$ .

On applique la proposition 1 $[L^1_v \hat{\otimes} F = L^1_v(F)]$ :

$$|||j(t)|||_{M(S,F)} = |j(t)|(S) = \int_S \|f(S)\|\,dv(S) = \Big\|\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes y_i\Big\|_{L^1_v \hat{\otimes} F} \geq \|t\|_{\mathcal{C}'(S)\hat{\otimes} F}$$

Or $$|||j(t)|||_{M(S,F)} \geq \|t\|_{\hat{\otimes}}$$

Proposition 8 : Une mesure $m \in N(S\ ,\ F)$ est l'image d'un élément $t \in \mathcal{C}'(S)\,\hat{\hat{\otimes}}\,F$ par l'injection $j\ :\ \mathcal{C}'(S)\,\hat{\hat{\otimes}}\,F \longmapsto N(S\ ,\ F)$, ssi

$$V^m : \mathcal{C}(S) \longmapsto F$$

$$\varphi \longmapsto \int_S \varphi(S)\,dm$$

est une transformation compacte.

Démonstration : D'après prop. 6 on a $\mathcal{C}'(S)\,\hat{\hat{\otimes}}\,F \hookrightarrow N(S\ ,\ F)$ ; proposition 8 revient à dire, que $\mathcal{C}'(S)\,\hat{\hat{\otimes}}\,F$ sont les opérateurs compacts de $\mathcal{C}(S)$ à valeurs dans $F$ ; c'est vrai, parce que $\mathcal{C}'(s)$ vérifie "p.a.m.".

Proposition 9 : Si $F$ vérifie R N P, on a

$$\underline{\underline{\mathcal{C}'(S)\,\hat{\otimes}\,F = M(S\ ,\ F)}}$$

Démonstration : Vu la proposition 7 il suffit de montrer, que chaque $m \in M(S\ ,\ F)$ est de la forme $j(t)$ avec $t \in \mathcal{C}'(S)\,\hat{\otimes}\,F$.

Soit $m \in M(S\ ,\ F)$ ; d'après proposition 5 on peut trouver $g\ :\ S \longmapsto F$, fortement mesurable, $\|g\| \leq 1$, t.q.

$$m = g(s)\ .\ |m|\ .$$

Comme $|m|(S) < \infty$ on a

$$g \in L^{\infty}_{|m|}(S\ ;\ F) \subseteq L^1_{|m|}(S\ ;\ F) = L^1_{|m|}\,\hat{\otimes}\,F\ .$$

Donc $g$ est définie par un élément $t_o \in L^1_{|m|}\,\hat{\otimes}\,F$ de la forme

$$t_o = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \otimes y_i \qquad \text{avec} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\|\ .\ \|y_i\| < \infty\ .$$

Si l'on note

E)

Théorème de Singer :

$(\mathcal{C}(S)\,\hat{\hat{\otimes}}\,F$

Démonstration : On l

Proposition 10 : Si

$(\mathcal{C}(S)$

Remarque : C'est not

Démonstration : Propo

Théorème : Soit E ,

fiant "p.a.m.". Or

$(E\,\hat{\hat{\otimes}}\,F$

Démonstration : La d

thèse de R N P :

D'après "p.a.m.

et, comme la boule de

$\mathcal{L}(E\ ,\ F')$.

Pour chaque $t$

avec $\sum \|x_j'\|\ .\ \|y_j'$

Si l'on note $\mu_i = \mathcal{S}_i \cdot |m|$ , on a $m = j(t)$ avec

$$t = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \otimes y_i \in \mathcal{C}'(S) \hat{\otimes} F$$

## E) DUALITE DES PRODUITS TENSORIELS

Théorème de Singer : Il y a une isomorphie isométrique

$$(\mathcal{C}(S) \hat{\hat{\otimes}} F)' = (\mathcal{C}(S ; F))' = M(S , F').$$

Démonstration : On la donnera dans l'appendix.

Proposition 10 : Si $F'$ vérifie R N P , on a

$$\underline{\underline{(\mathcal{C}(S) \hat{\hat{\otimes}} F)' = \mathcal{C}'(S) \hat{\otimes} F}}$$

Remarque : C'est notre théorème pour le cas $E = \mathcal{C}(S)$.

Démonstration : Proposition 9 et le théorème de Singer.

Théorème : Soit E , F Banach, F' vérifiant R N P et E' ou F' vérifiant "p.a.m.". Or

$$\underline{\underline{(E \hat{\hat{\otimes}} F)' = E' \hat{\otimes} F'}} .$$

Démonstration : La direction $E' \hat{\otimes} F' \subseteq (E \hat{\hat{\otimes}} F)'$ est vrai, même sans hypothèse de R N P :

D'après "p.a.m." $E' \hat{\otimes} F'$ est plongé injectivement dans $\mathcal{L}(E'', F')$ et, comme la boule de E est $\sigma^*$-dense dans la boule de E , aussi dans $\mathcal{L}(E , F')$.

Pour chaque $t = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in E \otimes F$ et $t' = \sum_{j=1}^{\infty} x_j' \otimes y_j' \in E' \hat{\otimes} F'$, avec $\sum \|x_j'\| \cdot \|y_j'\| < \infty$ , on a

$$|\langle t, t'\rangle| = |\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1} \langle x_i', x_j' \rangle . \langle y_i, y_j' \rangle|$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j'\| \cdot \|y_j'\| \cdot \sup_{\substack{\|x'\|\leqslant 1 \\ \|y'\|\leqslant 1}} |\sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x'\rangle . \langle y_i, y'\rangle|$$

$$\leqslant \sum_{j=1} \|x_j'\| \cdot \|y_j'\| \cdot \|t\|_{\hat{\otimes}} .$$

Or $t'$ définit sur $E \otimes F$ une fonctionnelle continue par rapport à $\|\cdot\|_{\hat{\otimes}}$, qui se prolonge sur $E \hat{\otimes} F$ .

Pour démontrer la direction $(E \hat{\hat{\otimes}} F)' \subseteq E' \hat{\otimes} F'$ , il faut démontrer que chaque $t' \in (E \hat{\hat{\otimes}} F)'$ est représentable par un élément de $E' \hat{\otimes} F'$. On se ramène au cas $E = \mathcal{C}(S)$ : -

Soit $S$ la boule unité de $E'$, compacte pour $\sigma(E', E)$. On a une injection isométrique

$$\mathcal{S} : E \hat{\hat{\otimes}} F \longmapsto \mathcal{C}(S) \hat{\hat{\otimes}} F$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \langle x_i , . \rangle . y_i .$$

Soit $t' \in (E \hat{\hat{\otimes}} F)'$ ; d'après Hahn - Banach on peut le prolonger à un $q' \in (\mathcal{C}(S) \hat{\hat{\otimes}} F)'$ , t. q.

$$\|q'\|_{(\mathcal{C}(S) \hat{\hat{\otimes}} F)'} = \|t'\|_{(E \hat{\hat{\otimes}} F)'} .$$

D'après prop. 10 on trouve une représentation $q' = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \otimes y_j'$ , avec $\mu_j \in \mathcal{C}'(S)$ , $y_j' \in F'$

et

$$\sum \|\mu_j\| \cdot \|y_j'\| \leqslant \|t'\|_{(E \hat{\hat{\otimes}} F)'} + \varepsilon .$$

Pour chaque $t = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in E \otimes F$

on a

$\langle t, t'\rangle = \langle$

Comme $x \longmapsto$

continue sur $E$ , el

$\langle x , x_j' \rangle = \int$

et $\|x_j'\| =$

$\leqslant$

Or $t' = \sum_{j=1}^{\infty} x_j'$

avec $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j'\| \cdot$

Nous avons ainsi (E

Le théorème de

original de Singer

a compact Handooff

(1957) , p. 309-315]

Mais je vais do

suivants :

Théorème 1 : [voir B

et théorème de Radon-

Soit S compact

pact à valeurs dans u

t.q.

(a) $T(f) = \int_S f(s)$ d

on a

$$< t, t' > = < t, q' > = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} ( < y_i, y'_j > \int_S < x_i, x' > d\mu_j(x')).$$

Comme $x \longmapsto \int_S < x , x' > d\mu_j(x')$ est une fonctionnelle linéaire continue sur $E$ , elle est définie par $x'_j \in E'$ :

$$< x , x'_j > = \int_S < x, x' > d\mu_j(x') \qquad \forall\, x \in X$$

et

$$\|x'_j\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \int_S < x, x' > d\mu_j(x')$$

$$\leq \sup_{\substack{\|\varphi\| \leq 1 \\ \varphi \in \mathscr{C}(S)}} \int_S \varphi(x')\, d\mu_j(x') = \|\mu_j\|$$

Or $\quad t' = \sum_{j=1}^{\infty} x'_j \otimes y'_j$

avec $\sum_{j=1}^{\infty} \|x'_j\| \cdot \|y'_j\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|y'_j\| \cdot \|\mu_j\|' < \|t'\|_{(E \hat{\hat{\otimes}} F)} + \varepsilon.$

Nous avons ainsi $(E \hat{\hat{\otimes}} F)' \subseteq E' \hat{\otimes} F'$ et la démonstration est achevée.

APPENDIX

Le théorème de Singer : Comme je ne peux pas lire en russe, l'article original de Singer [Linear functionals on spaces of continuous mappings of a compact Handooff space into a Banach space, Rev. Math. Pures et Appl. 2 (1957) , p. 309-315] n'est pas accessible à moi.

Mais je vais donner une démonstration en admettant les trois énoncés suivants :

Théorème 1 : [voir Buchwalter , Cours de D.E.A. 1975, Intégration vectorielle et théorème de Radon-Nikodym, p. 121] :

Soit $S$ compact séparé, $T : \mathscr{C}(S) \longmapsto E$ un opérateur faiblement compact à valeurs dans un Banach $E$ ; il existe une unique $E$-mesure de Radon $m$ t.q.

(a) $T(f) = \int_S f(s)\, dm(s) \qquad \forall\, f \in \mathscr{C}(S)$

(b) $\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}(S),\, E)} = \|m\|$ (la norme de la sémivarisation)

(c) $T'\, x' = x' \circ m \qquad \forall\, x' \in E'$

(d) $m(A) = T''\,(1_A) \qquad \forall\, A \in B(S)$

[$T''(1_A)$ est bien un élément de $E$, comme $T$, étant faiblement compact, envoi $\mathcal{C}''(S)$ dans $E$.]

Le deuxième énoncé, dont nous avons besoin est une conséquence (très faible) de la théorie de la factorisation des applications p-sommantes [voir Perrson, Pietsch : p-nukleare und p-integrale Abbildungen in Banach-Raeumen Studia Math. XXIII (1969), p.19-62] : chaque application intégrale se factorise à travers un espace de Hilbert. Donc

Lemme : Chaque application $T : E \longmapsto F'$ intégrale [c'est-à-dire image d'un élément de $(E \,\hat{\hat{\otimes}}\, F)'$] est faiblement compacte.

Aussi nous avons besoin d'un théorème de Orlicz-Pettis , que chaque F-mesure de Radon "faible" $m$ [(c'est-à-dire notre définition, que $\forall\, y \in F'$ $y \circ m$ est une mesure de Radon ] est déjà une mesure de Radon pour la topologie forte de $F$ :

$$\forall\, A \in B(S) : \; m(A) = \lim_{\|\cdot\|}\{m(K) : K \text{ compact}, \; K \leqslant A\}$$

$$= \lim_{\|\cdot\|}\{m(G) : G \text{ ouvert}, \; G \geqslant A\}$$

et $\forall\, G$ ouvert : $m(G) = \lim \; \{\int_S f\, dm : f \leqslant 1_G \;\; f \in \mathcal{C}(S)\}$.

Théorème de I. Singer : Soit $S$ compact, séparé, $E$ un Banach ; alors

$$(\mathcal{C}(S) \,\hat{\hat{\otimes}}\, E)' = (\mathcal{C}(S\,;\,E))' = M(S\,,\,E')$$

au sens d'une isométrie. A chaque $t \in (\mathcal{C}(S) \,\hat{\hat{\otimes}}\, E)'$ correspond $m_t \in M(S\,,\,E')$, t. q.

$$(*) \quad \Big\langle \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes x_i\,,\, t \Big\rangle = \sum_{i=1}^{n} \Big\langle x_i\,,\, \int_S f_i(s)\, dm_t(s) \Big\rangle \quad \forall \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes x_i \in \mathcal{C}(S) \otimes E.$$

Démonstration :

Chaque $t \in (\mathcal{C}(S$

Le théorème 1 e

une E'-mesure de Rado

rème 1 donne

$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}(S)}$

Le théorème de Singer

En effet $\|m\| = \sup$

$= \sup$

$= \sup$

$\leqslant \sup$

$= \sup$

$\leqslant \sup$

$= \|t\|$

Inversement soit

La relation $(*)$

un opérateur correspond

$T_m$

<u>Démonstration</u> :

Chaque $t \in (\mathcal{C}(S) \hat{\hat{\otimes}} E)'$ définit une application intégrale

$$T : \mathcal{C}(S) \longmapsto E' .$$

Le théorème 1 et le lemme donnent déjà la représentation de $T$ par une $E'$-mesure de Radon $m_t$ et on vérifie toute suite $(*)$. Aussi le théorème 1 donne

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}(S),\, E')} = \|t\|_{\hat{\otimes}}' = \|m\| .$$

Le théorème de Singer dit, que l'on a aussi

$$\|t\|_{\hat{\hat{\otimes}}}' = |\|m\|| \quad :$$

En effet
$$\begin{aligned}
|\|m\|| &= \sup \{ \sum_{i=1}^{n} \|m(A_i)\| \ : A_1, \dots, A_n \text{ partition finie de } S,\ A_i \in B(S)\} \\
&= \sup \{ \sum_{i=1}^{n} \|m(K_i)\| \ : K_1, \dots, K_n \text{ compacts, disjoints}\} \\
&= \sup \{ \sum_{i=1}^{n} \|m(G_i)\| \ : G_1, \dots, G_n \text{ ouverts, disjoints}\} \\
&\leq \sup \{ \sum_{i=1}^{n} \| \int_S f_i(s)\, dm\| \ : f_i \in \mathcal{C}(\ )\ ,\ \sum_{i=1}^{n} |f_i(s)| \leq 1\} \\
&= \sup \{ | \sum_{i=1}^{n} < x_i\ ,\ \int_S f_i(s) d(m) > | \ : \sum_{i=1}^{n} |f_i(s)| \leq 1,\ \|x_i\| < 1\} \\
&\leq \sup \{ | < \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes x_i,\ t > | \ : \| \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes x_i \|_{\mathcal{C}(S) \hat{\hat{\otimes}} E} \leq 1\} \\
&= \|t\|_{\hat{\hat{\otimes}}}' .
\end{aligned}$$

Inversement soit $m \in M(S\ ,\ E')$ donné.

La relation $(*)$ définit une forme linéaire $t_m$ sur $\mathcal{C}(S) \otimes E$ , et un opérateur correspondant

$$T_m : \mathcal{C}(S) \longmapsto E'$$

$$f(s) \longmapsto \int_S f(s)\, dm .$$

Soit $B(S)$ l'espace des fonctions Borel - mesurables muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On a $\mathcal{C}(S) \subseteq B(S) \subseteq \mathcal{C}''(S)$. Notons $j : B(S) \longmapsto \mathcal{C}''(S)$ l'injection et $\pi : E''' \longmapsto E'$ la projection canonique et définissons

$$\begin{tikzcd} V_m = \pi \circ T''_m \circ j : B(S) \arrow[r, mapsto, "V_m"] \arrow[d, "j"] & E' . \\ \mathcal{C}''(S) \arrow[r, mapsto, "T''_m"] & E''' \arrow[u, "\pi"] \end{tikzcd}$$

$V_m$ coïncide sur $\mathcal{C}(S)$ avec $T_m$.

Comme $\mathcal{L}(B(S), E') = (B(S) \hat{\otimes} E)'$, $V_m$ définit une forme linéaire $v_m$ sur $B(S) \otimes E$, qui coïncide sur $\mathcal{C}(S) \otimes E$ avec $t_m$.

Or $$\|t_m\|_{\hat{\otimes}'} \leq \|v_m\|_{\hat{\otimes}'} =$$

$$= \sup \{ |< \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes x_i, v_m >| : \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes x_i \in B(S) \otimes E : |\sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes x_i|_{\hat{\otimes}} \leq 1 \}$$

$$= \sup \{ |< \sum_{i=1}^n 1_{A_i} \otimes x_i , v_m >| : A_1, \dots, A_n \text{ partition de } S, \|x_i\| \leq 1 \}$$

$$= \sup \{ \sum_{i=1}^n \|V_m (1_{A_i})\| : A_1, \dots, A_n \text{ partition de } S \}$$

$$= \sup \{ \sum_{i=1}^n \|m(A_i)\| : A_1, \dots, A_n \text{ partition de } S \} = |||m||| .$$

On a ainsi trouvé une correspondance isométrique entre $M(S, E')$ et $(\mathcal{C}(S ; E))'$.

---

Séminaire P.LELONG
(Analyse)
15e année, 1974/75.

COMPACT POLYNOM

§1 Let E and F
space of holomorp
be the space of c
to F ($n \in \mathbb{N}$); we
On H(E;F), we put
or $\tau_\omega$ defined in
Banach space norm:
It will be useful
to $\mathcal{L}_s({}^nE;F)$, the
mappings of E x ..
n ti
$\hat{A} \in \mathcal{P}({}^nE;F)$, wher
is in turn a compl
continuous n-line

In [1], the
E to F was defined
if for each $x \in E$,
is relatively comp

Proposition [1]
equivalent:

(a). f is com
(b). There is
relative
(c). For each
of f at
relativel
(d). There is

The space of compa
homogeneous polyno

* Research partially
Universidade Federal
de Desenvolvimento C
de Estudos e Projetos