

Die Generationen-Sterbetafeln EROM G 1950 und EROF G 1950

F. G. Liebmann, W. Schachermayer, M. Willomitzer

Abstract: Auf der Basis der vorhergehenden Arbeit des Autoren-Teams zur Erstellung von Sterbetafeln EROM 85 und EROF 85 werden Generationentafeln EROM G 1950 und EROF G 1950 ausgearbeitet. Zur Anwendung dieser Tafel für verschiedene Geburtsjahrgänge wird die Methode der Altersverschiebung eingesetzt. Die jeweiligen Verschiebungswerte sind ebenfalls angegeben.

## 1. Einleitung

Der vorliegende Artikel stellt eine Fortführung der Arbeit [L-S-W] dar, in der Grundlagen für die Extrapolation der Sterbewahrscheinlichkeiten und die Berücksichtigung der Rentnerselektion berechnet wurden.

In [L-S-W] wurde die Frage, ob eine Generationentafel oder Periodentafel benutzt werden sollte, ausführlich diskutiert und - in Hinblick auf die bisher in Österreich geübte Praxis - eine Periodentafel erstellt.

Zu unserer Freude ist es seit Vorliegen der Arbeit [L-S-W] zu einem lebhaften Diskussionsprozeß unter den österreichischen Aktuaren zur Frage der Verwendung von Generationentafeln gekommen. Dem unzweifelhaften Nachteil einer etwas komplizierten Administrierbarkeit steht der ebenso unzweifelhafte Vorteil einer größeren aktuariellen Genauigkeit gegenüber. In diesem Abwägungsprozeß scheinen nun doch viele Aktuare zur Auffassung gekommen zu sein, daß die positiven Argumente für den Übergang zu einer Benutzung von Generationentafeln überwiegen.

Wie in ([L-S-W], Abschnitt 2.2) bereits festgehalten wurde, besteht der Nachteil einer Perioden-Tafel vor allem darin, daß sie sich nicht dem säkularen Sterblichkeitstrend anpassen kann, und daher zwangsläufig nach einiger Zeit (etwa 20 Jahre) geändert werden muß. Dagegen ergibt die in der vorliegenden Arbeit erstellte Generationentafel mit dem System der Altersverschiebungen versicherungstechnische Werte, die jedenfalls dann zutreffen, wenn die Entwicklung der Sterblichkeit dem extrapolierten Trend folgen sollte.

Selbstverständlich weiß niemand, wie sich die Sterbehäufigkeiten in der Zukunft tatsächlich entwickeln werden. Wir können nur aufgrund der Daten, die uns aus der Vergangenheit

vorliegen, nach bestem Wissen und Gewissen möglichst plausible Schätzungen für die Zukunft erarbeiten. Der Unterschied zwischen der Benutzung einer Generationen- und einer Periode-  
 tafeln besteht aber darin, daß der Fehler im ersten Fall nur so groß ist, wie der tatsächliche Sterblichkeitstrend vom prognostizierten abweicht und sich die Tafel im Zeitverlauf automatisch an den prognostizierten Sterblichkeitstrend anpaßt. Der Fehler, der mit einer starren Perioden-  
 tafeln gemacht wird, ist aber in der Größenordnung der Verbesserung der Sterblichkeit insgesamt, sodaß solche Tafeln mit Sicherheit nach einiger Zeit obsolet werden.

Insbesondere in Hinblick auf die Berechnung von Renten-Optionswerten, bei denen der Zeitpunkt des Beginns der Rente oft 30 oder mehr Jahre in der Zukunft liegt, scheint uns daher die Benutzung einer Generationentafeln bei weitem angebrachter.

Ein wesentlicher Grund, der für das im vorliegenden Artikel vorgeschlagene System spricht, scheint den Autoren auch darin zu liegen, daß in der Bundesrepublik Deutschland seit einigen Jahrzehnten ein gleichartiges System erfolgreich praktiziert wird und sich dort gezeigt hat, daß die administrativen Schwierigkeiten, die das System der generationen-  
 abhängigen Altersverschiebung mit sich bringt, nicht allzu schwerwiegend sind.

## 2. Die Konstruktion der Generationentafeln unter Berücksichtigung der Rentnerselektion

Die in ([L-S-W], Abschnitt 3.3 berechneten  $\lambda_x^{(1)}$  ermöglichen es, auf Basis der Sterbetafeln 1980/82 für Österreich (siehe [F-T]) Generationentafeln abzuleiten. Bedeutet  $q_x^T$  die einjährige Ablebenswahrscheinlichkeit einer im Jahre

$\tau$  geborenen,  $x$ -jährigen Person, dann gilt mit den Werten  $q_x(80/82)$

$$q_x^\tau = q_x(80/82) e^{-\lambda_x^{(1)}(x+\tau-1981)}.$$

(Die Ableitungen für die Frauensterblichkeit erfolgen in derselben Weise wie für Männer.)

Die Berücksichtigung der Rentnerselektion erfolgt durch Multiplikation der  $q_x^\tau$  mit den in ([L-S-W], Kap. 4) angegebenen Faktoren.

Vergleicht man die generationenabhängige Sterblichkeit bzw. die generationenabhängigen Leibrentenbarwerte der auf diese Weise erhaltenen Generationentafeln EROM/FG $\tau$  (für  $\tau = 1950$  sind dies die Tafeln EROM G 1950 bzw. EROF G 1950) mit den entsprechenden Werten der Tafeln EROM 85 und EROF 85 (siehe [L-S-W]), dann zeigt sich bei den für die Rentenversicherungen maßgeblichen Eintrittsaltern eine relativ gute Übereinstimmung der Rentenbarwerte dieser extrapolierten Periodentafeln für das Jahr 2020 und den Tafeln der Generationen um 1950.

Bei festem Eintrittsalter liegen die Leibrentenbarwerte für Generationen vor 1950 z. T. deutlich unter den entsprechenden Werten der Tafeln EROM 85 bzw. EROF 85, für Generationen nach 1950 hingegen darüber (siehe Tabelle 1a,b bzw. 2a,b).

Dieser Umstand zeigt zwei wesentliche Nachteile auf, die bei Verwendung von auf zukünftigen Periodensterblichkeiten fußenden Werten zur Kalkulation von Rententariifen auftreten. Einerseits kommt es speziell bei sofort beginnenden Leibrenten, im konkreten Fall für Generationen vor 1950, zu deutlichen Überteuierungen und andererseits zu einer vergleichsweise starken Einengung der Gültigkeitsdauer solcher Rententariife, weil die Beiträge für spätere Generationen,

im konkreten Fall für Generationen nach 1950, auf Dauer zu nieder angesetzt wären. Diese Nachteile könnte man durch gewisse Ausgleichswirkungen zwar als relativiert ansehen, da sie jedoch unbestritten bestehen, erscheint zur Kalkulation von Rententarifen die Verwendung von Generationen- bzw. doppelt abgestuften Tafeln vor allem im Hinblick auf den Gleichbehandlungsgrundsatz angebracht.

### 3. Zur Berechnung der Altersverschiebung $\Delta\tau$

Da der direkte Einsatz von doppelt abgestuften Tafeln zu einem sehr hohen Aufwand in der Verwaltung führt und auch in der akquisitorischen Praxis nur äußerst schwierig zu gestalten ist, wurde auf die angenäherte Ableitung von Generationentafeln durch eine Altersverschiebung aus einer Basistafel zurückgegriffen, für die in Anlehnung an die Grundkonzeption die Generationentafeln EROM/FG 1950 geeignet erschienen.

Die vom Geburtsjahrgang  $\tau$  abhängigen, näherungsweise (in vollen Jahren) berechneten Altersverschiebungen  $\Delta\tau$  geben an, um wieviele Jahre eine im Jahr  $\tau$  geborene Person im Vergleich zu einer im Jahr 1950 geborenen Person als älter ( $\Delta\tau$  positiv) oder jünger ( $\Delta\tau$  negativ) angesehen werden muß, um eine für die maßgeblichen Rentenbeginnalter im Mittel möglichst gute Übereinstimmung der Leibrentenbarwerte zu erhalten. Ist daher  $x$  das tatsächliche Alter, so werden zur Kalkulation der Tarife die Werte der Tafeln EROM/FG 1950 für das technische Alter  $x_\tau = x + \Delta\tau$  herangezogen.

Aus den auf Grund der doppelt abgestuften Generationentafeln gewonnenen  $a_x^\tau$  für  $1920 \leq \tau \leq 1970$  wurden die durchschnittlichen Altersverschiebungen nach folgender Formel berechnet:

$$(1) \quad \Delta\tau = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 \Delta\tau_{h+5k}$$

mit

$$\Delta\tau_{h+5k} = \frac{(a_{h+5k}^{\tau} - a_x^{1950})}{(a_{x+1}^{1950} - a_x^{1950})} + (x - (h+5k))$$

wobei

$$a_x^{1950} \geq a_{h+5k}^{\tau} > a_{x+1}^{1950}$$

und

$$h = \begin{array}{ll} 55 & \text{für } 1930 \leq \tau \leq 1970 \\ 60 & \text{für } 1925 \leq \tau \leq 1929 \\ 65 & \text{für } 1920 \leq \tau \leq 1924 \end{array}$$

(vergleiche Tabelle 3a und 4a).

Die entsprechenden Werte, die für Männer und Frauen getrennt ermittelt wurden, sind in Tabelle 5 angegeben.

Die verschiedenen Werte für  $h$  erklären sich daraus, daß etwa für die Geburtsjahrgänge  $\tau$   $1920 \leq \tau \leq 1924$  nurmehr noch mit Renteneintrittsaltern von mindestens 63 Jahren zu rechnen ist.

Im Übrigen wurde versucht, über diejenigen Werte  $a_x$  zu mitteln, die den in der Praxis häufigsten Renteneintrittsaltern entsprechen. Die Berechnungen über  $a_x$  entsprechen einer Mittelung, wie sie sich aufgrund der Altersverschiebungen auf der Basis der  $q_x^{\tau}$  ergibt, wobei die Gewichte, die den jeweiligen  $q_x^{\tau}$  zugeordnet werden, dem Gewicht entsprechen, mit dem sie in die Berechnung der  $a_x^{\tau}$  eingehen.

Die Autoren haben auch die Möglichkeit untersucht, die Rentenbarwerte für Frauen auf der Basis der Männer-Tafeln EROM G 1950 mit Hilfe einer Altersverschiebung zu ermitteln (siehe Tabelle 5 bzw. 6). Dies führt jedoch zu keinen Lösungen, die vom aktuariellen Standpunkt als akzeptabel bezeichnet werden könnten: Die auftretenden Altersverschiebungen

erreichen nämlich Größenordnungen (bis zu 8 Jahren!), welche die Grundlage des Ansatzes der Altersverschiebung in nicht mehr tolerierbaren Ausmaß verletzen. Diese Grundlage besteht darin, daß die Kurve der  $q_x^\tau$  - zumindest in dem für die Rentenversicherung relevanten Bereich  $50 \leq x \leq \omega$  - der Generationentafel EROF  $G\tau$  mit der um die entsprechende Altersverschiebung verschobenen Kurve der Basistafel (hier: EROM G 1950) relativ gut übereinstimmt. Dies ist bei einer Altersverschiebung dieser Größenordnung nicht mehr der Fall, wodurch sich Diskrepanzen zwischen den  $a_{y+\Delta\tau}^{\text{EROM G 1950}}$  und  $a_y^{\text{EROF } G\tau}$  in einem unvertretbaren Ausmaß ergeben (Tabelle 9).

Daraus ergibt sich die Notwendigkeit, daß für Frauen unbedingt die Tafel EROF G 1950 verwendet werden muß.

Für die Generationen vor 1920 und nach 1970 sind Extrapolationen für  $\Delta\tau$  erforderlich.

Für die Generationen vor 1920 errechnet sich  $\Delta\tau$  nach

$$\Delta\tau = \Delta 1920 + (1920 - \tau) \cdot \begin{cases} 0,045 \text{ für Männer} \\ 0,080 \text{ für Frauen} \end{cases}$$

für die Generationen nach 1970

$$\Delta\tau = (1950 - \tau) \cdot \begin{cases} 0,0500 \text{ für Männer} \\ 0,0854 \text{ für Frauen} \end{cases}$$

Die angegebenen Faktoren entsprechen jeweils dem arithmetischen Mittel

$$\frac{1}{4} \sum_{\tau=1920}^{1923} (\Delta\tau - \Delta(\tau+1)) = \frac{1}{4} (\Delta 1920 - \Delta 1924)$$

bzw.

$$\frac{1}{20} \sum_{1950}^{1969} (\Delta\tau - \Delta(\tau+1)) = \frac{1}{20} (\Delta 1950 - \Delta 1970) = - \frac{\Delta 1970}{20}.$$

Für die Generationen  $\tau < 1920$  wurde der Verlauf der  $\Delta\tau$  im Bereich  $1920 \leq \tau \leq 1924$  extrapoliert, da für diesen Bereich bei der Berechnung der Altersverschiebung besondere Gewichtungen verwendet wurden (siehe oben).

Die zunächst dezimal errechneten Werte für  $\Delta\tau$  wurden auf ganze Zahlen gerundet. In Abhängigkeit vom Geburtsjahr  $\tau$  ergeben sich folgende gerundete Werte für  $\Delta\tau$ :

Altersverschiebung  $\Delta\tau$  für Männer auf EROM G 1950

<u>Geburtsjahrgang <math>\tau</math></u>	<u><math>\Delta\tau</math></u>
- 1915 .....	2
1916 - 1940 .....	1
1941 - 1959 .....	0
1960 - 1979 .....	-1
1980 - 1999 .....	-2
2000 - 2019 .....	-3

Altersverschiebung  $\Delta\tau$  für Frauen auf EROF G 1950

<u>Geburtsjahrgang <math>\tau</math></u>	<u><math>\Delta\tau</math></u>
- 1917 .....	3
1918 - 1934 .....	2
1935 - 1944 .....	1
1945 - 1955 .....	0
1956 - 1967 .....	-1
1968 - 1979 .....	-2
1980 - 1990 .....	-3
1991 - 2002 .....	-4
2003 - 2014 .....	-5

Ein Vergleich der Werte  $a_x^{\text{EROM/FGT}}$  mit den Werten  $a_{x+\Delta\tau}^{\text{EROM G 1950}}$  bzw.  $a_{y+\Delta\tau}^{\text{EROF G 1950}}$  zeigt eine für praktische Zwecke hinreichend gute Approximation (vgl. Tabelle 7 und 8).

#### 4. Bemerkungen zur Ermittlung von $\Delta\tau$

Die Berechnung der Werte  $\Delta\tau$  lehnt sich an eine Vorgangsweise an, wie sie in [A] beschrieben ist. Allerdings erfolgt dort die Ermittlung der  $\Delta\tau$  über die Ablebenswahrscheinlichkeiten  $q_{60+5k}^T$ ,  $0 \leq k \leq 6$ . Eine vollkommen analoge Bestimmung der  $\Delta\tau$  würde bei Männern gegenüber der im 3. Kapitel beschriebenen Methode keine wesentlichen Veränderungen zeigen (siehe Tabelle 10), bei Frauen jedoch wegen der sehr starken Streuung der  $\Delta\tau_{60+5k}$  (siehe Tabelle 11) zu keinen befriedigenden Ergebnissen hinsichtlich eines konformen Verlaufs der  $a_y^T$  und  $a_{y+\Delta\tau}^{1950}$  (siehe Tabelle 12). Die gewählte Vorgangsweise hingegen trägt einerseits der Forderung nach einer Gewichtung der maßgeblichen Rentenbeginnalter Rechnung und führt wegen der wesentlich günstigeren Streuung der Werte  $\Delta\tau_{h+5k}$  (siehe Tabelle 3 und 4) zu weitaus besseren Ergebnissen.

Abschließend sei auf die Gegenüberstellung von Werten für  $a_x$  nach EROM/F 85, EROM/FG 1950, RR 67, nach den Sterbetafeln 1980/82 für Österreich und nach [A] in Tabelle 13 verwiesen.

#### Literaturverzeichnis

- [A] Abschlußbericht über die Arbeit der Kommission "Tarifgestaltung in der Rentenversicherung" an neuen Sterblichkeitsgrundlagen in den Jahren 1984 und 1985, Verband der Lebensversicherungsunternehmen E.V., BRD, mit statistischem Anhang.  
Über die neuen Rechnungsgrundlagen in der Rentenversicherung wird auch in dem Artikel "Neue Sterbetafeln für die Rentenversicherung" von Klaus-Heinrich Lühr in den Blättern der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band XVII, Oktober 1986 berichtet.
- [F-T] P. Findl, H. Trimmel: Sterbetafeln 1980/82 für Österreich, 76 Statistische Nachrichten, 40. Jahrgang 1985 (neue Folge), Heft 2.
- [L-S-W] F.G. Liebmann, W. Schachermayer, M. Willomitzer: Zur Erstellung von Sterbetafeln EROM 85 und EROF 85, Mitteilungen der Aktuarvereinigung Österreichs No. 4, (1986).