Nombres d'Euler
et permutations alternantes

par D. Foata
University of Florida
et M.-P. Schützenberger
Université de Paris VII

DEPARTMENT
of
MATHEMATICS

UNIVERSITY OF FLORIDA

(Gainesville, Florida)

Nombres d'Euler
et permutations alternantes

par D. Foata
University of Florida
et M.-P. Schützenberger
Université de Paris VII

University of Florida, Gainesville
November 15, 1971.

Nombres d'Euler et permutations alternantes

par D. Foata
University of Florida

et M.-P. Schützenberger
Université de Paris VII

TABLE DES MATIÈRES

1. INTRODUCTION.

Les nombres d'Euler définis par le développement en série de tg u

$$\operatorname{tg} u = (u/1!)\ 1 + (u^3/3!)\ 2 + (u^5/5!)\ 16 + (u^7/7!)\ 272 + (u^9/9!)\ 7936 + \dots$$

et les nombres sécants définis par celui de $1/\cos u$

$$1/\cos u = 1 + (u^2/2!)\ 1 + (u^4/4!)\ 5 + (u^6/6!)\ 61 + (u^8/8!)\ 1385 + \dots$$

ont fait l'objet de très nombreuses recherches mathématiques dont un exposé d'ensemble a été donné par Niels Nielsen dans son "Traité élémentaire des nombres de Bernoulli" (1923).

En effet, le nombre d'Euler (noté ici D_{2n}) qui est le coefficient de $u^{2n-1}/(2n-1)!$ dans le développement de tg u est égal à $2^{2n-1}\ (2^{2n} - 1)\ n^{-1}\ B_n$ où

$$B_n = 2\ \zeta(2n)\ (2n)!\ /\ (2\pi)^{2n}$$

est le nombre de Bernoulli correspondant. D'autre part, les nombres sécants (dits aussi parfois nombres d'Euler et notés ici D_{2n+1}) sont reliés aux précédents par la formule remarquable

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{Exp} D = D'' = (1/2)\ (1 + D'^2)$$

où la fonction D de u, donnée par la série
$D = \sum_{1\leq n} (u^n/n!)\, D_n$ est définie par

$$D = \int_0^u (\mathrm{tg}\, u + 1/\cos u)\, du$$
$$= u + (u^2/2!) + (u^3/3!) + (u^4/4!)2 + (u^5/5!)5 + \ldots$$

et où $D' = (\partial/\partial u)\, D = (1 + \mathrm{tg}\, u/2\,)\,/\,(1 - \mathrm{tg}\, u/2\,)$,
$D'' = (\partial/\partial u)\, D'$.

Ainsi qu'on le verra plus loin, la formule (1) entraîne les identités

(2) $\quad \mathrm{Exp}\, D_{(2)} = D_{(1)}{}'$;

(3) $\quad D_{n+3} = \sum_{0\leq i\leq n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} D_{i+1}\, D_{n+2-i}$;

(4) $\quad 2\, D_{n+2} = \sum_{0\leq i\leq n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} D_{i+1}\, D_{n-i+1}$;

(5) $\quad D_{2n+1} = \sum_{0\leq i\leq n-1} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ 2i \end{bmatrix} D_{2i+1}\, D_{2n-2i}$;

où, dans la première, l'on a posé

$$D_{(2)} = \sum_{1\leq n} (u^{2n}/(2n)!)\, D_{2n} \quad \left(= \int_0^u \mathrm{tg}\, u\, du \right)$$

et

$$D_{(1)} = \sum_{0\leq n} (u^{2n+1}/(2n+1)!)\, D_{2n+1} = D - D_{(2)}\,.$$

A leur tour, ces identités fournissent les congruences élémentaires suivantes valables pour tout nombre premier impair p

(6) $\quad D_{p+3} \equiv D_{p+2} + D_{p+1}$;

(7) $\quad D_{p+2} \equiv D_{p+1} \equiv D_p + 1$.

Enfin, Désiré André (1879, 1881) a montré que D_{n+1} est le nombre des <u>permutations alternantes</u> sur $[n]$, c'est-à-dire des permutations $x_1 x_2 \dots x_n$ des éléments de $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ telles que x_{2j} soit à la fois inférieur à x_{2j-1} et à x_{2j+1} pour tout entier j tel que $0 < 2j < n$ et, en plus, si n est pair, telles que $x_n < x_{n-1}$.

Dans le présent travail, nous nous proposons de montrer que les formules précédentes restent vraies pour une famille $(D_n(s,t))_{n \geq 0}$ de polynômes à deux variables s , t et qui se réduisent aux entiers D_n pour $s = t = 1$. Comme le nom d'Euler n'a jusqu'ici été associé qu'à des problèmes autrement prestigieux (ceci dit, sans vouloir offenser la modestie de notre Maître Bose), nous appellerons les $D_n(s,t)$ <u>polynômes d'André</u>.

Dans le chapitre 2 suivant, nous établissons l'analogue des formules (1) à (7) pour les polynômes d'André $D_n(s,t)$ en variables <u>commutatives</u>. De plus, une formule explicite pour leur fonction génératrice exponentielle est donnée, ainsi qu'une relation entre ces polynômes et les polynômes eulériens. Ce chapitre est de nature analytique et ne contient aucune considération géométrique.

En revanche, dans les chapitres ultérieurs 3, 4 et 5, nous étudions une version non commutative des polynômes d'André et là, il est naturel de faire apparaître ces nouveaux polynômes, en les variables non commutatives s et t, comme des polynômes générateurs d'une certaine fonction U sur une famille de permutations. Ceci nous permet de donner une contre-partie purement ensembliste aux formules qui viennent d'être rappelées. Ce mémoire est destiné dans notre esprit à préparer une analyse des propriétés arithmétiques des nombres D_n.

Le contenu des trois derniers chapitres est le suivant. Le chapitre 3 contient la définition d'une classe de permutations, appelées permutations d'André. Lorsque f est une telle permutation, on lui associe un mot fU en les lettres (non commutatives) s et t. Ce mot fU, appelé variation réduite de f, sert à repérer la position des montées ($jf<(j+1)f$) et des descentes ($jf>(j+1)f$) de f. Soit A_n l'ensemble des permutations d'André sur $[n]$; le polynôme $A_nU = \sum \{fU : f \in A_n\}$ est précisément une version non commutative de $D_n(s,t)$ et est appelé n-ème polynôme d'André non commutatif. On établit enfin l'analogue de la formule (3) pour les polynômes A_nU .

Pour tout mot $w = u_1u_2 \dots u_k$ du monoïde $\{s,t\}^*$, on note $\tilde{w}$ le mot retourné $w = u_ku_{k-1} \dots u_1$. D'autre part, on désigne par $c_n(w)$ le nombre de permutations f dans A_n telles que $Uf = w$. Le polynôme d'André A_nU peut s'écrire

$$A_nU = \sum \{w\, c_n(w) \ : \ w \in \{s,t\}^*\} \quad .$$

On a alors la propriété de symétrie suivante

$$c_n(\tilde{w}) = c_n(w) \ .$$

En d'autres termes, si dans l'expression du polynôme A_nU on retourne tous les mots w , le polynôme A_nU ne change pas. De cette propriété remarquable, on déduit l'équivalent non commutatif de la formule (4) pour les polynômes A_nU . En fait, les permutations d'André se prêtent mal à la démonstration de cette propriété de symétrie. On est ainsi amené, dans ce chapitre 4 , à définir la notion de complexe d'André et à établir une bijection canonique entre deux complexes d'André. L'ensemble des permutations d'André est un tel complexe. Un autre exemple est fourni par l'ensemble des permutations d'André dites de seconde espèce définies dans la section 4.3 . Soit B_n la classe des permutations d'André de seconde espèce sur $[n]$ $(n \geq 0)$. Dans la section 4.4 , on établit une bijection ρ de B_n sur lui-même telle que si f est dans B_n, de variation réduite $fU = w$, alors $f\rho U = \tilde{w}$.

Le chapitre 5 contient deux autres exemples de complexes d'André, la classe des arborescences binaires décroissantes et enfin celle des permutations alternantes. La correspondance entre arborescences binaires décroissantes et les permutations d'André des deux espèces peut être obtenue par un argument géométrique simple. Enfin, quelques tables numériques terminent cet article.

Comme il est rare dans un tel domaine qu'un résultat soit radicalement nouveau, puisque toute formule peut et doit être vue comme cas particulier d'une autre plus générale, ou banale extension d'une autre déjà classique, nous ne prétendons à aucun mérite, sauf de cohérence. En fait, les polynômes d'André (commutatifs) ont été déjà rencontrés sous une forme un peu différente par Kermack et McKendrick (1938) comme nous l'a obligeamment signalé John Riordan. Le problème traité était celui de la distribution du nombre des creux ($(j-1)f > jf < (j+1)f$) et des pics ($(j-1)f < jf > (j+1)f$) pour une substitution f de l'ensemble $[n]$. Sous cet aspect, il figure dans l'ouvrage de David et Barton (1962). Il est clair que la plupart de nos énoncés pourraient aussi bien être présentés dans le langage statistique qui fut celui d'une grande partie de notre carrière. Notre choix d'une formulation moins spéciale est un hommage à notre Maître Bose dont l'oeuvre a tant illustré les enrichissements mutuels de la Mathématique et de ses applications.

2. LES POLYNÔMES D'ANDRÉ.

1. Définition et propriétés élémentaires.

Soit f une fonction réelle de la variable u, analytique à l'origine et satisfaisant l'équation différentielle

(2.1) $f'' = t \operatorname{Exp} f$

avec les conditions initiales

(2.2) $0 = f(0)$, $s = f'(0)$,

où s et t sont des constantes. En raison de $0 = f(0)$, la relation (2.1) est équivalente à

(2.3) $f''' = f'\, f''$.

Nous posons

$$f = \sum_{0 \leqslant n} (u^n/n!)\, f_n$$

où, d'après (2.2) $f_0 = 0$, $f_1 = s$, $f_2 = t$.

Considérant s et t comme des paramètres, les relations (2.1) et (2.3) déterminent de façon univoque par récurrence sur n les f_n comme polynômes en s et t . Ce sont eux que nous appellerons <u>polynômes d'André</u> et que nous désignerons, dans ce chapitre, par D_n $(n \geqslant 0)$. La liste des premiers d'entre eux est la suivante :

$D_0 = 0$; $D_1 = s$; $D_2 = t$; $D_3 = st$;

$D_4 = s^2t + t^2$; $D_5 = s^3t + 4\, st^2$;

$D_6 = s^4t + 11\, s^2t^2 + 4\, t^3$; $D_7 = s^5t + 26\, s^3t^2 + 34\, st^3$.

Les valeurs $D_n(1,1)$ sont entières et sont bien les coefficients de la fonction $D(u)$ présentée dans l'introduction puisque celle-ci était définie par l'équation différentielle

$$D'' = \operatorname{Exp} D$$

avec les valeurs initiales

$$D(0) = 0 \ , \ D'(0) = 1 \ (= s)$$

et que l'on avait donc

$$D''(0) = \operatorname{Exp} 0 = 1 \ (= t) \ .$$

Soit maintenant l'opérateur

$$\Delta = st \ (\partial/\partial t) + t \ (\partial/\partial s) \ .$$

On a

$$\Delta D_1 = t = D_2 \quad \text{et} \quad \Delta D_2 = st = D_3 \ .$$

Observant que (2.3) équivaut à l'identité binomiale

$$(2.4) \qquad D_{n+3} = \sum_{0\leq j\leq n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} D_{j+1} \ D_{n+2-j} \qquad (n\geq 0) \ ,$$

on en conclut que

$$(2.5) \qquad D_{n+1} = \Delta D_n \quad (n\geq 1) \ ,$$

soit encore, en tenant compte de la valeur initiale $D_1 = s$,

$$(2.6) \qquad s + \Delta D = (\partial/\partial u) \ D \ .$$

Ces relations montrent que les polynômes d'André ont les propriétés élémentaires suivantes.

PROPRIÉTÉ 2.1. <u>Les polynômes</u> D_n <u>sont homogènes de degré total</u> n <u>en les variables</u> s <u>et</u> $\sqrt{t}$. <u>Ils sont divisibles par</u> t <u>pour</u> $n \geqslant 2$ <u>et leurs coefficients sont des entiers positifs.</u>

Faisons maintenant le changement de variable $\bar{t} = ts^{-2}$, $\bar{u} = us$ et posons $\bar{D}_n = D(s,\bar{t})\, u^n$. L'opérateur Δ devient

$$s^2\bar{t}\ (\partial/\partial s) + s\bar{t}\ (1 - 2\bar{t})\ (\partial/\partial t) + stu\ (\partial/\partial \bar{u})$$

et $(\partial/\partial u) = s\ (\partial/\partial \bar{u})$. Comme $(\partial/\partial s)\ \bar{D}_n = 0$, par raison d'homogénéité la relation (2.5) mise sous la forme

$$(\partial/\partial u)\ (u^{n+1}/(n+1)!)\ D_{n+1} = \Delta(u^n/n!)\ D_n$$

devient après simplification

$$\bar{D}_{n+1} = \bar{u}\ (\ \bar{t}\ \bar{u}\ (\partial/\partial\bar{u}) + \bar{t}\ (1-2\bar{t})(\partial/\partial\bar{t})\ \bar{D}_n\ . \tag{2.7}$$

Introduction les coefficients $d_{n,k} \in \mathbb{N}$ par

$$D_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n/2} s^{n-2k}\ t^k\ d_{n,k} \qquad ,$$

la relation (2.5) donne les formules de récurrence indiqué dans la propriété suivante.

PROPRIÉTÉ 2.2. <u>Pour</u> $n \geqslant 2$, <u>on a</u> $d_{n,1} = 1$ <u>et pour</u> $k \geqslant 2$, $n \geqslant 2k$, <u>on a</u>

$$d_{n+1,k} = k\ d_{n,k} + (n+2-2k)\ d_{n,k-1}\ . \tag{2.8}$$

Tous les coefficients des D_n sont donc __positifs__ et D_n est divisible par s pour n __impair__.

2. __Une relation différentielle__.

Nous établissons maintenant la généralisation naturelle de la deuxième égalité dans la relation (1) .

PROPRIÉTÉ 2.3. __On a l'identité__

(2.9) $$2\,D'' = 2t - s^2 + D'^2 \,.$$

PREUVE. D'après (2.4) et (2.5) , on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$D_{n+3} = \Delta D_{n+2} = \sum_{0\leq j\leq n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} (\Delta D_j)\, D_{n+2-j} \quad .$$

Tenant compte de la symétrie des indices et de $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix}$, ceci donne

$$2\,\Delta D_{n+2} = \sum_{0\leq j\leq n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \Delta(D_{j+1}\, D_{n+1-j})$$

d'où

(2.10) $$2\,D_{n+2} = \sum_{0\leq j\leq n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} D_{j+1}\, D_{n+1-j} + K_n$$

où K_n est une fonction de s et t telle que $\Delta K_n = 0$. Comme les D_j sont des polynômes, K_n est un polynôme. D'autre part, comme

$$\Delta(t^p s^q) = p\, t^p s^{q+1} + q\, t^{p+1} s^{q-1} \qquad (p\,,\, q \in \mathbb{N})\,,$$

on voit que le terme de plus bas degré de K_n en t ne peut s'annuler que si ce degré est zéro. Comme, d'après la propriété 2.1 on a $D_{n+2}(s,0) = 0$ pout tout $n \geq 0$, le polynôme K_n est nul pour $n \geqslant 1$. Enfin, on vérifie directement que $K_0 = 2t-s^2$. Ceci fait, la formule (2.9) s'obtient par sommation. ∎

On notera que pour $n+2 = 2m+1$ impair; l'expression (2.10) , avec $K_n = 0$, est symétrique et peut par conséquent s'écrire sous la forme (5) de l'introduction, soit de façon équivalente

$$D_{2m+1}/(2m-1)! = \sum_{0 \leq j \leq m-1} (D_{2j+1}/(2j)!)\ (D_{2m-2j}/(2m-2j-1)!)$$

c'est-à-dire

$$(2.11) \qquad D_{(1)}'' = D_{(1)}'\ D_{(2)}'$$

avec les notations déjà introduites dans le cas particulier de $s = t = 1$,

$$D_{(2)} = \sum_{0 \leq m} (u^{2m}/(2m)!)\ D_{2m}(s,t) \quad ,$$

$$D_{(1)} = D - D_{(2)} \quad .$$

Nous en déduisons la formule suivante qui est la contre-partie polynomiale de (2) .

PROPRIÉTÉ 2.4. <u>On a</u>

$$(2.12) \qquad D_{(1)}' = s \operatorname{Exp} D_{(2)} \quad .$$

PREUVE. La formule (2.11) peut s'écrire

$$(\partial/\partial u) \operatorname{Log} D_{(1)}' = (\partial/\partial u)\ D_{(2)}' \quad .$$

D'où

$$D_{(1)}' = K(s,t) \ \mathrm{Exp}\ D_{(2)}$$

où $K(s,t)$ est une fonction de s et t qui est déterminée en faisant $u = 0$ et en constatant que $D_2(u=0) = 0$ et $D_{(1)}'(u=0) = s$. $\blacksquare$

3. Fonction génératrice des polynômes d'André.

Nous donnons maintenant des formules explicites pour D , D' et D'' .

PROPRIÉTÉ 2.5. Posant $r = (s^2-2t)^{1/2}$, $w = (s-r)/(s+r)$ et $E = \mathrm{Exp}\ ru$, on a les formules

(2.13) $\quad D = ru + 2 \,\mathrm{Log}\, \left((1-w)/(1-wE) \right)$;

(2.14) $\quad D' = r\ (1+wE)/(1-wE)$;

(2.15) $\quad D'' = wr^2E/(1-wE)^2$.

PREUVE. L'équation (2.9) peut s'écrire

$$r = D'' \left((D'-r)^{-1} - (D'+r)^{-1} \right),$$

d'où par intégration

$$ru = \mathrm{Log}\, \left((D'-r)/(D'+r) \right) + K(s,t)$$

où la fonction $K(s,t)$ est déterminée en faisant $u = 0$ et se trouve par conséquent égale à $-\mathrm{Log}\ w$. Donc $(D'-r)/(D'+r) = w \ \mathrm{Exp}\ ru$, ce qui est équivalent à (2.14) . Maintenant le membre de droite de cette dernière équation peut s'écrire sous la forme

$r\,(\,1 + (2w \operatorname{Exp} ru)/(1-w \operatorname{Exp} ru)\,)$,

d'où par une nouvelle intégration

$D = ru - 2 \operatorname{Log}(1 - w \operatorname{Exp} ru) + K(s,t)$.

Faisant de nouveau $u = 0$, on trouve

$K(s,t) = 2 \operatorname{Log}(1-w)$.

On obtient ainsi la formule (2.13) . Enfin, la formule (2.15) s'obtient par simple dérivation. ∎

Désignons par $D_{(0)}'$ la valeur du membre de droite de (2.14) pour $s = 0$. Posant $v = \sqrt{2t}\,u$ et observant que $w = -1$ pour $s = 0$ on trouve

(2.16) $D_{(0)}' = \sqrt{2t}\,.\,\sqrt{-1}\ \ (1 - \operatorname{Exp} v\sqrt{-1})/(1 + \operatorname{Exp} v\sqrt{-1})$

soit

(2.16) $D_{(0)}' = \sqrt{2t}\ \ \operatorname{tg}(v/2)$.

Ce résultat a la conséquence très remarquable suivante.

PROPRIÉTÉ 2.6. <u>Pour tout</u> k <u>positif, les coefficients</u> $d_{2k-1,k-1}$ <u>et</u> $d_{2k,k}$ <u>sont égaux à</u> $2^{1-k}\left[D_{2k}\right]_{s=t=1}$, <u>c'est-à-dire à</u> 2^{1-k} <u>fois le</u> k-<u>ème nombre d'Euler</u>.

PREUVE. Prenant $n = 2k-1$, la récurrence (2.8) donne

$d_{2k,k} = k\ d_{n,k} + (2k-1+2-2k)\ d_{n,k-1} = d_{2k-1,k-1}$

puisque $d_{n,k} = 0$ en vertu de $n < 2k$. Les deux coefficients d mentionnés dans l'énoncé sont donc égaux.

Maintenant pour vérifier leur égalité avec le nombre $[D_{2k}]_{s=t=1}$, il suffit d'observer que pour $s = 0$, tous les polynômes D_{2k-1} sont nuls et chacun des polynômes D_{2k} se réduit à $d_{2k,k}\, t^k$. Par conséquent

$$D_{(0)}' = \sum_{1\leqslant k} (u^{2k-1}/(2k-1)!)\, d_{2k,k}\, t^k .$$

On peut alors appliquer la formule (2.16) qui s'écrit

$$D_{(0)}' = \sqrt{2t} \sum_{1\leqslant k} (u^{2k-1}/(2k-1)!)\, (t/2)^{(2k-1)/2}\, D_{2k}$$

soit

$$D_{(0)}' = \sum_{1\leqslant k} (u^{2k-1}/(2k-1)!)\, 2^{1-k}\, D_{2k}\, t^k .$$

Nous donnons enfin la formule binomiale

$$(2.17) \qquad 2\, d_{2n+2,n+1} = \sum_{0\leqslant i\leqslant n-1} \begin{bmatrix} 2n \\ 2i+1 \end{bmatrix} d_{2i+1,i+1}\, d_{2n-2i,n-i} \qquad (n \geqslant 1)$$

qui se déduit immédiatement de la formule (2.9) lorsqu'on y fait $s = 0$ et $t = 1$, grâce à la propriété 2.6 .

4. <u>Relations avec les polynômes eulériens.</u>

Nous terminons ce chapitre en établissant une relation entre les polynômes d'André et les polynômes eulériens. Pour la définition de ces derniers, nous renvoyons le lecteur à notre précédent mémoire (Foata, Schützenberger (1970)).

PROPRIÉTÉ 2.7. <u>Pour tout entier</u> $n > 0$ <u>le</u> n-<u>ème polynôme eulérien</u> $A_n(x)$ <u>est égal à</u>

$$\sum_{1 \leq k \leq (n+1)/2} d_{n+1,k}\ (2x)^{k-1}\ (1+x)^{n+1-2k}$$

<u>où les</u> $d_{n+1,k}$ <u>sont les coefficients du</u> $(n+1)$-<u>ème polynôme d'André</u>.

PREUVE. Faisons la substitution

$$s = 1 \quad , \quad t = 2x/(1+x)^2 \quad , \quad u = (1+x)v$$

dans l'expression de $(D'-s)/t$ donnée par (2.14) .
Notant que la substitution envoie r sur $(1-x)/(1+x)$ et w sur x , on trouve

$$(1+x)\ (\mathrm{Exp}((1-x)v) - 1)/(1 - x\ \mathrm{Exp}((1-x)v)\ ) .$$

Divisant par $(1+x)$ et ajoutant 1 on obtient

$$(\ (1-x)\ \mathrm{Exp}((1-x)v)\ )/(\ 1 - x\ \mathrm{Exp}((1-x)v)\ )$$

qui est l'expression classique de la fonction génératrice exponentielle des polynômes eulériens. Donc, pour $n \geq 0$, $A_n(x)$ est le polynôme obtenu en faisant la substitution $s = 1$, $t = 2x/(1+x)^2$ dans $(1+x)^{n-1}\ t^{-1}\ D_{n+1}$, ce qui est précisément le résultat annoncé. ∎

On pourra noter que la relation de symétrie $x^n A_n(x^{-1}) = A_n(x)$ correspond à l'invariance $t = 2x^{-1}/(1+x^{-1})^2$.

3. LES PERMUTATIONS D'ANDRÉ

1. Quelques notions générales.

Nous commençons par décrire en détail quelques notions de base.

Soit X un ensemble totalement ordonné ayant un nombre fini n d'éléments. Une permutation de X est une bijection $f : [n] \to X$ où $[n]$ désigne l'ensemble ordonné $\{1, 2, \ldots, n\}$ ($= \emptyset$ si $n = 0$). Nous l'identifierons au mot $1f . 2f. \ldots . nf$ en les lettres de X. Puisque f est une bijection, chaque élément de X figurera exactement une fois dans ce mot. Pour abréger, nous écrirons $f \in X^!$ pour indiquer que f est une permutation de X ou son mot associé.

Soient maintenant $n \geq 2$ et $f \in X^!$; la variation de f est le mot $fV = v_1 v_2 \ldots v_{n-1}$ de longueur $n-1$ en les symboles $v_j = (+)$ et $(-)$ qui est défini pour chaque $j \leq n-1$ par
$$v_j = + \text{ si } jf < (j+1)f$$
$$= - \text{ si } jf > (j+1)f \ .$$
Il est classique de dire que $[j, j+1]$ est une montée (resp. descente) ssi $v_j = +$ (resp. $= -$) .

Soit maintenant $1 < j < n$:

- $[j-1, j+1]$ est une double descente ssi $[j-1, j]$ et $[j, j+1]$ sont deux descentes;

- j est un creux ssi $[j-1, j]$ est une descente et $[j, j+1]$ une montée;

De façon analogue, la <u>variation circulaire</u> $f\overset{\circ}{V}$ est le mot de longueur n défini par $f\overset{\circ}{V} = fV.\, v_n$ où $v_n = +$ ou $-$ selon que $nf < 1f$ ou $nf > 1f$; autrement dit, v_n est défini pour $[n, 1]$ de la même manière que v_j était défini pour $[j, j+1]$.

D'une manière générale, une notion sera dite <u>circulaire</u> ssi dans sa définition il est convenu que "n+1" signifie "1" . Par exemple pour $X = [8]$ et $f : [8] \to X$ identifié à 5 8 1 6 9 2 3 4 7 on a $fV = +-++-+++$ $(\in \{+, -\}^8)$, 1 et 2 sont les deux creux et f n'a pas de double descente. Comme $7 > 5$ on a $v_n = -$ et $f\overset{\circ}{V} = +-++-+++-$ $(\in \{+, -\}^9)$; enfin comme $7 > 5$, mais $5 < 8$, la permutation f est sans <u>double descente circulaire,</u> donc aussi sans double descente.

Nous introduisons maintenant une notion plus spéciale et nous définissons la <u>variation réduite</u> de f comme le mot fU de longueur $\leqslant n-1$ en les symboles t et s qui est obtenu à partir de la variation fV en remplaçant d'abor toutes les paires $v_i\, v_{i+1}$ telles que $v_i = -$, $v_{i+1} = +$ par t , ensuite en remplaçant par s les v_i restants. Par construction $fU = s$ ssi $n = 2$. Dans notre exemple $fU = st\, st\, ss$ puisque $fV = +(-+)+(-+)++$.

Rappelons la notation standard $|f|_x$ pour désigner le nombre d'occurrences d'une lettre x dans un mot f .

PROPRIÉTÉ 3.1. <u>Le nombre des creux de</u> f <u>est</u> $|fU|_t$, <u>celui des montées est</u> $\leqslant |fU|_t + |fU|_s$ <u>avec égalité ssi</u> f <u>est sans double descente et se termine par une montée (c'est-à-dire</u> $v_{n-1} = +$) .

La preuve est immédiate.

On définit de la même manière la <u>variation réduite circulaire</u> $f\mathring{U}$ en convenant d'écrire la lettre t à la fin du mot fU quand n est un creux circulaire (c'est-à-dire quand $v_{n-1} = -$ et $v_n = +$) et au début quand 1 est un <u>creux circulaire</u> (c'est-à-dire quand $v_n = -$ et $v_1 = +$).

C'est ce second cas qui se produit dans notre exemple et l'on a donc

$$f\mathring{U} = t\ t\ s\ t\ s\ s$$

puisque $f\mathring{V} = +)\ (-+)\ +\ (-+)\ ++\ (-$.

On notera que si $n = 2$, $f\mathring{U}$ est toujours t .

On <u>conviendra</u> pour $n = 1$, $f\mathring{U} = s$ et $fU = e$ (c'est-à-dire le mot vide du monoide libre $\{s,\ t\}^*$).

2. <u>Définition des permutations d'André</u>.

Nous appellerons <u>permutation d'André</u> sur X ($0 \leq \mathrm{Card}\ X = n < \infty$) toute permutation $f : [n] \rightarrow X$ <u>sans double descente</u> satisfaisant la condition caractéristique suivante.

(A) Soient $j,\ j' \in [n]$ tels que $1 < j < j'$ et

$$(j-1)f = \mathrm{Max}\{(j-1)f\ ,\ jf\ ,\ (j'-1)f\ ,\ j'f\}$$

$$j'f = \mathrm{Min}\{(j-1)f\ ,\ jf\ ,\ (j'-1)f\ ,\ j'f\}\ .$$

Il existe un j'' tel que $j < j'' < j'$ et que $j''f < j'f$.

De façon intuitive, en tenant compte de ce que f n'a pas de double descente, la condition peut être reformulée ainsi.

Si j et $j' > j$ sont deux creux tels que $jf > j'f$ et $(j-1)f > (j'-1)f$, il existe un creux j'' entre j et j' ($j < j'' < j'$) tel que $j''f < j'f$ et la même condition vaut quand $j' = n$ et que $[j'-1, j']$ est une descente.

Il résulte immédiatement de la définition que toute permutation ayant 0 ou 1 descente est une permutation d'André, car elle n'a pas de double descente et la deuxième condition est trivialement vérifiée.

Une permutation f ayant exactement deux descentes $[j,j+1]$ et $[j',j'+1]$ $(j<j')$ est une permutation d'André ssi les deux conditions suivantes sont réalisées

(i) $j+1$ et $j'+1$ sont des creux ou bien $j+1$ est un creux et $[j',j'+1]$ est une descente finale ;

(ii) l'on a $jf<j'f$ ou bien $jf>j'f$ et $(j-1)f<(j'-1)$

Pour avoir une idée concrète de cette condition, le lecteur pourra vérifier que parmi les six permutations de $[6]$ qui sont de la forme $x\ 2\ y\ 3\ z\ 1$ $(\{x, y, z\} = \{4, 5, 6\})$ et qui sont donc sans double descente puisqu'alternées, les permutations d'André sont les deux pour lesquelles $z = 6$.

En effet, puisque $2 = 2f<3 = 4f$, la condition caractéristique ne s'applique qu'aux paires de creux $j = 2$ ou 4 et $j' = 6>j$. Comme $jf = 2$ ou $4 > j'f = 1$ et comme il n'existe aucun creux j'' entre j et j' tel que $j''f<jf$ (puisque $4f = 3>6f = 1$), on doit avoir $(j-1)f<(j'-1)f$, c'est-à-dire $x<z$ et $y<z$.

Nous noterons D_n $(0\leq n)$ l'ensemble des permutations d'André sur $[n]$ et $D^* = \bigcup_{0\leq n} D_n^*$, en faisant comme d'usage la convention naturelle que pour $n = 0$, D_0^* est un singleton. Voici une table des D_n^* pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

$D_0^* = \{e\}$; $D_1^* = \{1\}$; $D_2^* = \{12\ ,\ 21\}$;
$D_3^* = \{123\ ,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312\}$;
$D_4^* = \{1234,\ 1243,\ 1324,\ 1342,\ 1423,$
$2134,\ 2143,\ 2314,\ 2341,\ 2413,$
$3124,\ 3142,\ 3241,\ 3412,$
$4123,\ 4132\}$.

On notera que $1 = \mathrm{Card}\ D_0^* = \mathrm{Card}\ D_1^*$; $2 = \mathrm{Card}\ D_2^*$; $5 = \mathrm{Card}\ D_3^*$; $16 = \mathrm{Card}\ D_4^*$.

Par abus de notation, si $I = \{n'+1,\ \dots,\ n'+m\}$ est un intervalle de $[n]$ et $f : [n] \to X$ une permutation, nous identifierons la restriction $f|I$ à la permutation $f' : [m] \to If$ ($If \subset X$) telle que $jf' = (n'+j)f$ identiquement.

LEMME 3.2. <u>Soit</u> $f : [n] \to X$ <u>une permutation d'André. Pour tout intervalle</u> I <u>de</u> $[n]$, <u>la restriction</u> $f' = f|I$ <u>de</u> f <u>à</u> I <u>est une permutation d'André</u>.

PREUVE. Ceci découle de la structure des conditions "être sans double descente" et (A) qui ne font intervenir que les éléments d'un intervalle. ∎

Nous introduisons maintenant deux familles spéciales de permutations d'André que nous appellerons respectivement (par abus de langage) <u>circulaires</u> et <u>augmentées</u>. Soit X un ensemble fini de cardinal n $(n \geq 0)$; une permutation d'André f sur X

est dite <u>circulaire</u> (resp. <u>augmentée</u>) ssi son dernier élément nf est égal à $\mathrm{Min}\, f$ (resp. $\mathrm{Max}\, X$) . On note D (resp. A) l'ensemble des permutations d'André appartenant à D qui sont circulaires (resp. augmentées) ; on pose $D_n = D \cap D_n^*$ et $A_n = A \cap D_n^*$ $(n > 0)$ et l'on convient que D_0 est vide et que $A_0 = D_0 = \{e\}$. On voit sur la liste ci-dessus que $\mathrm{Card}\, D_j = \mathrm{Card}\, A_j = 1$ pour $j = 1,2$; $\mathrm{Card}\, D_3 = 1$; $\mathrm{Card}\, A_3 = 2$; $\mathrm{Card}\, D_4 = 2$; $\mathrm{Card}\, A_4 = 5$.

PROPRIÉTÉ 3.3. <u>Soient</u> $n \in \mathbb{N}$ <u>et</u> $f : [n+2] \to X$ <u>une permutation quelconque telle que</u>

(i) $(n+2)f = \mathrm{Min}\, X$.

<u>Les trois conditions suivantes sont équivalentes</u>

(1) <u>La permutation</u> f <u>est une permutation d'André (qui est nécessairement circulaire)</u> ;

(2) <u>La restriction</u> $f' = f \big| [n+1]$ <u>est une permutation d'André augmentée</u> ;

(3) <u>La restriction</u> $f'' = f \big| [n] = f' \big| [n]$ <u>est une permutation d'André et</u>

(ii) $j \in [n] \Rightarrow jf'' < (n+1)f'$.

PREUVE. Le lemme 3.2 donne immédiatement les implications

$$f \in D^* \Rightarrow f' \in D^* \Rightarrow f'' \in D^* .$$

Supposons (1) et prenons $j' = n+2$. D'après (1), d'une part $[j'-1, j']$ est une descente, d'autre part on ne peut pas avoir $j''f < j'f$ pour $j'' < j'$. Donc d'après (A) on aura $(j-1)f < (j'-1)f$ pour tout $j < j'$ tel que $[(j-1), j]$ soit une descente.

Considérons $\bar{j}$ tel que $(\bar{j}-1)f = \text{Max } X$; le couple $[\bar{j}-1 , \bar{j}]$ est une descente et par conséquent $\bar{j} = j'$, c'est-à-dire $(n+1)f = \text{Max } X$. La condition (1) implique donc (2).

Réciproquement supposons (3) , c'est-à-dire que la restriction $f|[n]$ est une permutation d'André et que l'on a $(n+1)f = \text{Max } X$, $(n+2)f = \text{Min } X$.
Il est clair que f n'a pas de double descente.
D'autre part, prenant encore $j' = n+2$, la condition (A) est toujours satisfaite caf il ne peut pas exister de creux $j < j'$ pour lequel $(j-1)f > (j'-1)f$.
Donc (3) $\Rightarrow$ (1) et comme (2) $\Rightarrow$ (3) trivialement d'après $f' \in D^* \Rightarrow f'' \in D^*$, le résultat est établi. ∎

COROLLAIRE 3.4. <u>Pour tout</u> $n \geq 0$ <u>les ensembles</u> D_{n+2} , A_{n+1} <u>et</u> D_n^* <u>ont même cardinalité</u>.

3. Polynômes d'André en variables non commutatives.

Pour simplifier, on appellera polynômes d'André non commutatifs les polynômes

$$A_nU = \sum \{fU : f \in A_n\} \qquad \text{et}$$
$$D_n\mathring{U} = \sum \{f\mathring{U} : f \in D_n\} \qquad (n \geq 0)$$

en les variables non commutatives s et t. Dans la propriété 3.10 ci-après, on trouvera deux relations de récurrence sur ces polynômes. Enfin, la liste des polynômes pour les premières valeurs de n est donnée à la fin de ce chapitre.

LEMME 3.5. Soit $f : [n+1] \to X$ une permutation d'André. Il existe exactement une valeur $m \leq n$ telle que

(i) $f\big|[m] \in D$;

(ii) $m' \geq m$, $f\big|[m'] \in D \Longrightarrow m' = m$.

PREUVE. Il suffit de prendre $m = (\mathrm{Min}\ X)f^{-1}$ et d'observer que $m = (\mathrm{Min}([m']f))f^{-1}$ pour tout $m' \geq m$. ∎

On notera $f^{(1)}$ la restriction $f\big|[m]$ $(m = (\mathrm{Min}\ X)f^{-1})$ et on appellera $f^{(1)}$ le premier facteur de f . La restriction $f\big|[n]\setminus[m]$ sera le cofacteur de $f^{(1)}$ dans f et on utilisera souvent pour abréger la notation $f^{(1)-1}$ pour désigner $[m]$. L'importance de ce lemme est dans sa réciproque.

PROPRIÉTÉ 3.6. Une permutation $f : [n+1] \to X$ est une permutation d'André ssi posant $m = (\mathrm{Min}\ X)f^{-1}$, les deux restrictions $f^{(1)} = f \mid [m]$ et $f' = f \mid [n] \setminus [m]$ sont des permutations d'André. Si ces hypothèses sont vérifiées et $n \geqslant 1$, f est augmentée si et seulement s'il en est de même de f'.

PREUVE. La partie directe résulte des lemmes 3.5 et 3.2 Supposons donc $f^{(1)}, f' \in D^*$ et sans perte de généralité $m < n$. Comme $mf = \mathrm{Min}\ X$, $[m, m+1]$ est une montée. Donc f n'a pas de double descente puisque ni $f^{(1)}$ ni f' n'en ont.

Soit maintenant j et j' deux valeurs justiciables de la condition (A). Si $j, j' \in [m]$ ou $\in [n] \setminus [m]$, la condition (A) est satisfaite par f d'après l'hypothèse $f^{(1)}, f' \in D^*$. Si au contraire $j > m > j'$, la condition (A) est satisfaite par l'existence du creux $j'' = m$ entre j et j'. ∎

LEMME 3.7. Soit $f : [n+1] \to X$ une permutation d'André circulaire. Si $n = 0$, $f\mathring{U} = s$ et si $n > 0$, $f\mathring{U} = (f'U)t$ où $f' = f \mid [n]$. Par conséquent,

$$D_{n+1}\mathring{U} = (A_n U)t \quad \text{pour} \quad n > 0 .$$

PREUVE. Le cas de $n = 0$ résulte de la définition même de $\mathring{U}$. Si $n \geqslant 1$, la variation de f se termine par une descente puisque $nf = \mathrm{Max}\ X$, $(n+1)f = \mathrm{Min}\ X$. Comme $(n+1)f < 1f$, la formule est encore une conséquence de la définition de $\mathring{U}$. ∎

LEMME 3.8. <u>Soit</u> $f : [n+3] \to X$ <u>une permutation d'André circulaire. On a</u>

$$f\mathring{U} = g^{(1)}\mathring{U} \, . \, \bar{f}\mathring{U}$$

<u>où</u> $g^{(1)}$ <u>est le premier facteur de</u> $g = f \big| [n+1]$ <u>et</u> $\bar{f}$ <u>le cofacteur de</u> $g^{(1)}$ <u>dans</u> f .

PREUVE. Le facteur $g^{(1)}$ est la restriction de f à $[m']$ où $m'f$ est le minimum de X privé de $\mathrm{Min}\ X = (n+3)$ et de $\mathrm{Max}\ X = (n+2)f$. Donc $[m,m+1]$ est toujours une montée de f .

Distinguons maintenant deux cas

(i) $m' = 1$. On a $fV = +\bar{f}V$. Comme $\bar{f}\mathring{U}$ se termine par t puisque $n+3-m' \geq 2$, on a donc $f\mathring{U} = s.\bar{f}\mathring{U}$ et le résultat est établi.

(ii) $m' > 1$. Comme $g^{(1)} \in D$, $g^{(1)}$ se termine par la descente $[m-1,m]$. Donc $fU = (g^{(1)}U)'\ t\ (\bar{f}U)$ où $(g^{(1)}U)'$ désigne le mot obtenu en supprimant le dernier s de $g^{(1)}U$. De façon équivalente $fU = g^{(1)}\mathring{U}.\bar{f}U$, d'où encore $f\mathring{U} = g^{(1)}\mathring{U}.\bar{f}\mathring{U}$. ∎

COROLLAIRE 3.9. <u>Soit</u> $f : [n+2] \to X$ <u>une permutation d'André augmentée. On a</u>

$$fU = f^{(1)}\mathring{U} \, . \, f'U$$

<u>où</u> $f^{(1)}$ <u>est le premier facteur de</u> f <u>et</u> f' <u>son cofacteur</u>.

PREUVE. Définissons la permutation $g : [n+3] \to X'$ par $g\big|[n+2] = f$ et $(n+3)g = \operatorname{Min} X'$. Il est clair que g est une permutation d'André circulaire. Soient $g^{(1)}$ le premier facteur de $g\big|[n+1]$ et $\bar{g}$ le cofacteur de $g^{(1)}$ dans g. On a $g\mathring{U} = (fU)t$ (d'après le lemme 3.7), $f^{(1)}=g^{(1)}$ et enfin $\bar{g}\mathring{U} =(f'U)t$. Le lemme précédent donne d'autre part l'identité

$$g\mathring{U} = g^{(1)}\mathring{U} \, . \, \bar{g}\mathring{U}$$

c'est-à-dire

$$(fU)t = f^{(1)}\mathring{U} \, . \, (f'U)t \, .$$

Le corollaire est donc établi en supprimant la dernière lettre t de l'identité précédente. ∎

PROPRIÉTÉ 3.10. <u>Pour tout</u> $n \geq 0$ <u>on a les identités</u>

(3.1) $$A_{n+2}U = \sum \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} D_{j+1}\mathring{U} \, . \, A_{n+1-j}U$$

(3.2) $$D_{n+3}\dot{U} = \sum \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} D_{j+1}\mathring{U} \, . \, D_{n+2-j}\mathring{U} \quad .$$

PREUVE. La propriété 3.6 donne une bijection entre A_{n+2} et les triplés $(X' \cup X'' , f^{(1)} , f')$ où $X' \cup X''$ est une partition de $X \setminus \{\mathrm{Min}\ X , \mathrm{Max}\ X\}$, $f^{(1)}$ une permutation circulaire d'André sur $X' \cup \{\mathrm{Min}\ X\}$ et f' une permutation augmentée sur $X'' \cup \{\mathrm{Max}\ X\}$. La permière formule découle alors du corollaire 3.9 et la deuxième de la première et du lemme 3.7 . ∎

REMARQUE 3.11. On a $D_1 \overset{o}{U} = s$ et $D_2 \overset{o}{U} = t$. D'autre part, la formule de récurrence (3.2) a la même structure formelle que la relation binomiale sur les polynômes <u>commutatifs</u> D_n qui s'écrivait en effet (voir formule (2.4))

$$(3.3) \qquad D_{n+3} = \sum \left[{n \atop j} \right] D_{j+1} \; D_{n+2-j} \qquad (n \geq 0) .$$

Ceci montre que les polynômes $D_n \overset{o}{U}$ constituent bien une <u>version non commutative</u> des polynômes d'André $D_n(s,t)$.

REMARQUE 3.12. Lorsque les variables s et t commutent, on a aussi la <u>formule exponentielle</u>

$$(3.4) \qquad \sum_{0 \leq n} (u^n/n!) \; D_{n+2} = t \; \mathrm{Exp} \left[\sum_{0 \leq n} (u^n/n!) \; D_n \right]$$

(voir formule (2.1)). En fait, les formules (3.3) et (3.4) sont <u>équivalentes</u>. On peut s'en convaincre par l'argument suivant. La série formelle égale à t fois l'exponentielle de $\sum_{0 \leq n} (u^n/n!) \; D_n$ est unique. Ceci résulte du fait que l'exponentielle est une bijection de l'ensemble des série formelles sans terme constant sur l'ensemble des séries formelles de terme constant égal à 1 . Or par dérivation de (3.4) par rapport à u , et identification des termes de même puissance en u , on obtient justement les formules (3.3) .

Cette équivalence n'est plus valable lorsqu'on suppose s et t non commutatifs. Plus exactement, on n'a pas de formule exponentielle ayant même structure formelle que (3.4) avec les polynômes $D_n\mathring{U}$. Seule subsiste la formule (3.2) , qui doit donc être regardée comme la généralisation non commutative de la formule exponentielle.

REMARQUE 3.13. Une autre façon d'établir directement la formule exponentielle (3.4) sans recourir aux arguments analytiques du chapitre 2 est de faire appel aux techniques purement combinatoires du composé partitionnel, développées dans notre précédent mémoire (Foata, Schützenberger (1970)). L'ensemble D^* est, en effet, le composé partitionnel de l'ensemble D des permutations d'André circulaires. Indiquons rapidement comment on peut le démontrer. Soit $f = 1f \cdot 2f \cdot \ldots \cdot nf$ $(n>0)$ une permutation d'André. Elle admet une factorisation unique $(g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots, g^{(k)})$ telle que

(1) le produit de juxtaposition $g^{(1)}\ g^{(2)}\ \dots\ g^{(k)}$ soit égal à f ;

(2) chaque $g^{(j)}$ est une permutation d'André circulaire

(3) la suite formée par les dernières lettres des mots $g^{(j)}$ est croissante.

Par exemple, la factorisation de

$$f = 8\ 6\ 9\ 7\ 12\ 13\ 1\ 2\ 4\ 11\ 14\ 15\ 3\ 10\ 5$$

est donnée par

$$(\ 8\ 6\ 9\ 7\ 12\ 13\ 1\ ,\ 2\ ,\ 4\ 11\ 14\ 15\ 3\ ,\ 10\ 5\ )\ .$$

L'existence et l'unicité de cette factorisation peuvent être démontrées en utilisant le lemme 3.8 . Supposant s et t commutatifs, on pose pour tout $f \in D_n^{*}$ $(n > 0)$

$$f\mu .\ t = (f.\overline{n+1}.0)\mathring{U}\ .$$

Là encore, à l'aide du lemme 3.8 , on peut vérifier que μ est multiplicative. D'après la proposition 3.12 de la référence citée plus haut, on en déduit l'identité

$$1 + \sum_{0<n} (u^n/n!)\ D_n^{*}\mu = \operatorname{Exp}\left[\sum_{0<n} (u^n/n!)\ A_n\mu\right] .$$

L'identité (3.4) en résulte en observant que

$$D_n^{*}\mu .t = D_{n+2}(s,t) \quad \text{et} \quad A_n\mu = D_n(s,t) \quad \text{pour} \quad n > 0\ .$$

TABLES 3.13. Pour terminer ce chapitre, nous donnons la liste des polynômes A_nU et $D_n\mathring{U}$ pour les premières valeurs de n . Ces polynômes peuvent être évidemment calculés à partir des formules de récurrence (3.1) et (3.2

$A_1U = 1$

$A_2U = s$

$A_3U = s^2 + t$

$A_4U = s^3 + 2\ st + 2\ ts$

$A_5U = s^4 + 3\ s^2t + 5\ sts + 3\ ts^2 + 4\ t^2$

$A_6U = s^5 + 4\ s^3t + 9\ s^2ts + 9\ sts^2 + 4\ ts^3 + 12\ st^2 + 10\ tst$
$\quad + 12\ t^2s$.

$D_1\mathring{U} = s$

et pour $n > 0$, on a $D_{n+1}\mathring{U} = (A_nU)t$.

4. COMPLEXES D'ANDRÉ ET FORMULES DE SYMÉTRIE.

L'objet de ce chapitre est de trouver un équivalent non commutatif à l'identité (2.9) qui s'écrivait

$$2\,D'' = 2\,t - s^2 + D'^2 ,$$

c'est-à-dire un équivalent non commutatif à l'ensemble des identités

$$D_1 = s \ , \quad D_2 = t \ , \quad 2\,D_{n+2} = \sum_{0\le i\le n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} D_{i+1}\,D_{n-i+1} \quad (n > 0)$$

Les permutations d'André définies dans le précédent chapitre se prêtent mal à une telle extension. Nous allons donc leur faire correspondre, de façon bijective, d'autres permutations dites permutations d'André de seconde espèce, qui, elles, permettent cette extension. Pour définir cette correspondance, il semble plus aisé de considérer un modèle abstrait, appelé <u>complexe d'André</u>, de construire ensuite la bijection naturelle entre deux complexes d'André (section 4.1), enfin, de montrer que les permutations d'André et celles de seconde espèce sont deux complexes d'André particuliers (sections 4.2 et 4.3). Nous aurons en fait encore besoin de cette bijection dans le chapitre 5 . Enfin, la formule non commutative qui généralise la formule (2.9) est donnée dans la section 4.4 . Elle apparaît comme une simple application de la propriété de symétrie qui veut que dans l'ensemble A_n des permutations d'André augmentées, il y a autant de permutations f telles que $fU = w$ que de permutations g telles que $gU = \tilde{w}$, le symbole $\tilde{w}$ désignant le mot retourné déduit de w .

1. <u>Définition des complexes d'André</u>.

Supposons donné pour tout $n \geq 0$ un ensemble Y_n d'applications de $[n]$ dans $[n]$. Pour $n = 0$, on suppose que Y_n est un singleton $\{e\}$ et l'on pose $Y = \bigcup_{n \geq 0} Y_n$.

DÉFINITION 4.1. On appelle <u>composé bipartitionnel de Y de degré</u> n $(n \geq 1)$, l'ensemble, noté $Y_n^{(2)}$, de toutes les <u>paires</u> $\{(f_1, X_1) , (f_2, X_2)\}$ satisfaisant aux deux conditions suivantes

(1) X_1 et X_2 sont deux ensembles disjoints de réunion $[n] \setminus \{1\}$;

(2) $f_j \in Y_{n_j}$ avec $n_j = \mathrm{Card}\, X_j$ pour $j = 1,2$.

On pose $Y_0^{(2)} = Y_0 = \{e\}$ et l'ensemble $Y^{(2)} = \bigcup_{n \geq 0} Y_n^{(2)}$ est appelé <u>composé bipartitionnel</u> de Y .

Dans la définition qui suit, nous conservons les mêmes notations.

DÉFINITION 4.2. Si pour tout $n \geq 0$, les ensembles Y_n et $Y_n^{(2)}$ ont même cardinal, on dit que l'ensemble Y a la <u>propriété d'André</u>. Si, de plus, φ est une bijection de Y

sur $Y^{(2)}$ qui envoie Y_n sur $Y_n^{(2)}$ pour tout $n \geqslant 0$, on dit alors que le couple (Y,φ) est un complexe d'André.

Notons que le composé bipartitionnel de degré 1 est réduit à l'élément $\{(e,\emptyset),(e,\emptyset)\}$. Si donc Y a la propriété d'André, on a nécessairement $\mathrm{Card}\, Y_1 = 1$.

NOTATION 4.3.. Soit (Y,φ) un complexe d'André. Si $\{(f_1,X_1)\ ,\ (f_2,X_2)\}$ est l'image par φ d'un élément f de Y_n $(n \geqslant 2)$, il sera commode de noter

$f\varphi_1$ le couple (ordonné) (f_1,f_2) si l'on a $2 \in X_2$ et

$f\varphi_2$ le couple (ordonné) (f_1,f_2) si l'on a $n \in X_2$.

Dans la définition qui suit, on trouvera l'équivalent abstrait de la notion de variation réduite, comme nous le verrons dans la section 4.2 .

DÉFINITION 4.4. Soit $\{s,t\}^*$ le monoïde libre engendré par les deux variables s et t . Etant donné un complexe d'André (Y,φ) , on définit par récurrence deux applications W_1 et W_2 de Y dans $\{s,t\}^*$ de la façon suivante :

d'abord $fW_1 = fW_2 = 1$ (élément neutre de $\{s,t\}^*$) si f appartient à $Y_0 \cup Y_1$; ensuite, si f est dans Y_n $(n \geqslant 2)$ et si $f\varphi_j = (f_1,\ f_2)$ $(j = 1,2)$, on pose

$$fW_j = s.f_2W_j \quad \text{si } X_1 = \emptyset \quad (\text{i.e. si } f_1 \in Y_0)$$
$$= f_1W_j.t.f_2W_j \quad \text{si } X_1 \neq \emptyset \quad (\text{i.e. si } f_1 \notin Y_0)$$

pour $j = 1,2$.

En fait, il y a deux bijections naturelles θ et θ' à construire entre deux complexes d'André (Y,φ) et (Z,ψ). La première vérifie $\theta W_j = W_j$ pour $j = 1,2$ et la deuxième $\theta' W_1 = W_2$. Leur construction se fait de la façon suivante :

d'abord θ et θ' envoient l'élément unique de Y_0 (resp. Y_1) sur l'élément unique de Z_0 (resp. Z_1) ;

ensuite, pour $f \in Y_n$ $(n \geqslant 2)$, on construit par récurrence les suites

$$(4.1)\quad f \xrightarrow{\varphi} \{(f_1,X_1),(f_2,X_2)\} \to \{(f_1\theta,X_1),(f_2\theta,X_2)\} \xrightarrow{\psi^{-1}} g$$

$$(4.2)\quad f \xrightarrow{\varphi} \{(f_1,X_1),(f_2,X_2)\} \to \{(f_1\theta',X_1'),(f_2\theta',X_2')\} \xrightarrow{\psi^{-1}} g'$$

où $X_1' = X_1$ et $X_2' = X_2$ si l'un des deux ensembles X_1, X_2 contient à la fois 2 et n et où

$$X_j' = X_j \setminus \{2\} \cup \{n\} \quad \text{et} \quad X_k' = ([n] \setminus \{1\}) \setminus X_j'$$

$(j,k = 1,2 \ ; \ j \neq k)$ si X_j contient 2 mais pas n.

Dans les deux suites (4.1) et (4.2), on pose $g = f\theta$ et $g' = f\theta'$. Les deux applications θ et θ' sont bien définie par récurrence sur n, car si f appartient à Y_n et si l'on a $f\varphi = \{(f_1,X_1),(f_2,X_2)\}$, les deux fonctions f_1 et f_2 appartiennent à des ensembles Y_j tels que $0 \leqslant j < n$.

THÉORÈME 4.5. <u>Les deux applications</u> $\theta : f \to g$ <u>et</u> $\theta' : f \to g'$ <u>définies par récurrence en</u> (4.1) et (4.2) <u>sont des bijections de</u> Y <u>sur</u> Z, <u>envoyant</u> Y_n <u>sur</u> Z_n <u>pour tout</u> $n \geqslant 0$ <u>et satisfaisant à</u>

$$fW_1 = gW_1 \quad , \quad fW_2 = gW_2 \ \underline{\text{et}} \ fW_1 = g'W_2 \ .$$

PREUVE. Par récurrence les applications

$$\{(f_1,X_1),(f_2,X_2)\} \to \{(f_1\theta,X_1),(f_2\theta,X_2)\}$$

et $\{(f_1,X_1),(f_2,X_2)\} \to \{(f_1\theta,X_1'),(f_2\theta,X_2')\}$

sont des bijection de $Y_n^{(2)}$ sur $Z_n^{(2)}$. Par conséquent, en appliquant φ et ψ^{-1} aux deux bouts de la chaîne d'applications en (4.1) et (4.2) , on obtient bien des bijections de Y_n sur Z_n .

On a, d'autre part, $fW_1 = gW_1$ (resp. $fW_2 = gW_2$) car la définition de W_1 et W_2 ne dépend que du caractère vide ou non vide de l'ensemble qui ne contient pas l'élément 2 (resp. n) .

Reste à vérifier $fW_1 = g'W_2$. Supposons $2 \in X_2$. Si X_2 contient aussi n , on a $X_1' = X_1$ et $X_2' = X_2$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} fW_1 &= s.f_2W_1 = s.f_2\theta W_2 = g'W_2 \quad \text{si} \quad X_1 = \emptyset \\ &= f_1W_1.t.f_2W_1 = f_1\theta W_2.t.f_2\theta W_2 = g'W_2 \quad \text{si} \quad X_1 \neq \emptyset \ . \end{aligned}$$

Si au contraire X_2 contient 2 mais pas n , on a

$$X_2' = X_2 \setminus \{2\} \cup \{n\} \quad \text{et} \quad X_1' = X_1 \cup \{2\} \setminus \{n\} \ .$$

De là, X_1 n'est pas vide et l'on a

$$fW_1 = f_1W_1.t.f_2W_1 = f_1\theta W_2.t.f_2\theta W_2 = g'W_2 \ . \ \blacksquare$$

On pose $Y_nW_j = \sum \{fW_j : f \in Y_n\}$ pour $n \geq 0$ et $j = 1,2$.

Les polynômes $(Y_n W_j)_{n\geqslant 0}$ satisfont une identité binomiale ($j = 1,2$) décrite dans la próposition suivante.

PROPOSITION 4.6. Soit (Y,φ) un complexe d'André. On a $Y_1 W_j = 1$ $(j = 1,2)$ et pour $n \geqslant 0$ et $j = 1,2$, on a l'identité

$$(4.3) \qquad Y_{n+2}W_j = s.Y_{n+1}W_j + \sum_{1\leq i\leq n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} Y_i W_j \,.\, t \,.\, Y_{n+1-i}W_j \,.$$

PREUVE. Soit (f_1,f_2) un couple d'applications telles que $f_1 \in Y_{n_1}$, $f_2 \in Y_{n_2}$ et $n_1 + n_2 = n+2$. Utilisant la notation 4.3, on voit que le nombre d'applications f appartenant à Y_{n+2} telles que $f\varphi_1 = (f_1,f_2)$ est égal au nombre de couples (X_1,X_2) de parties de $\underset{\sim}{N}$ satisfaisant à $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $2 \in X_2$, $X_1 \cup X_2 = [n+2]\setminus\{1\}$. Ce nombre est égal au coefficient binomial $\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}$ avec $i = \mathrm{Card}\, X_1$. On a par conséquent

$$\begin{aligned} Y_{n+2}W_1 &= \sum \{fW_1 \,:\, f \in Y_{n+2}\} \\ &= \sum \{s.f_2W_1 \,:\, f \in Y_{n+2}\,,\ f\varphi_1 = (f_1,f_2)\,,\ f_1 = e\} \\ &\quad + \sum_{1\leq i\leq n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \sum \{f_1W_1.t.f_2W_1 \,:\, f \in Y_{n+2}\,,\ f\varphi_1 = (f_1,f_2), \ f_1 \in Y_i\}\,. \end{aligned}$$

Soit
$$\begin{aligned} Y_{n+2}W_1 &= s.Y_{n+1}W_1 + \sum_{1\leq i\leq n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \sum \{f_1W_1.t.f_2W_1 \,:\, f_1 \in Y_i, \ f_2 \in Y_{n+1-i}\} \\ &= s.Y_{n+1}W_1 + \sum_{1\leq i\leq n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} Y_iW_1.t.Y_{n+1-i}W_1 \,. \end{aligned}$$

La relation binomiale pour W_2 se démontre de la même façon en échangeant les rôles des éléments 2 et $n+2$. ∎

REMARQUE 4.7. On a vu dans la propriété 3.10 la formule

$$A_{n+2}U = \sum \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} D_{j+1}\mathring{U} \cdot A_{n+1-j}U \ .$$

Comme $D_1\mathring{U} = s$ et $D_{j+1}\mathring{U} \equiv A_jU.t$ pour $j > 0$, cette formule peut encore s'écrire

$$A_{n+2}U = s.A_{n+1}U + \sum_{1 \leq j \leq n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} A_jU \cdot t \cdot A_{n+1-j}U \ .$$

D'autre part, comme on a $A_1U = Y_1W_j = 1$, on voit que les familles des polynômes $(A_nU)_{n>0}$ et $(Y_nW_j)_{n>0}$ sont identiques ($j = 1,2$). Dans la section suivante, nous allons justement vérifier que les permutations d'André augmentées forment un complexe d'André et que la fonction W_2 associée est précisément la variation réduite U .

2. <u>Le complexe des permutations d'André</u>.

Les permutations d'André ont été définies dans la section 3.2 . Soit X un ensemble de cardinal n ; on désigne par $\omega_X : X \to [n]$ l'unique application strictement croissante de X sur $[n]$. Soit $f : [n] \to X$ une permutation d'André augmentée sur X . Comme la définition des permutations d'André ne fait intervenir que l'ordre mutuel des éléments de X , l'applications $f\omega_X$ est aussi une permutation d'André augmentée, mais sur l'ensemble $[n]$.

Considérons maintenant l'ensemble $A = \bigcup_{n \geq 0} A_n$ où A_n

désigne toujours ensemble des permutations d'André augmentées sur $[n]$ $(n \geq 0)$ et formons le composé bipartitionnel $A^{(2)}$ de A. Pour f dans A_n $(n > 0)$, on pose $m = (1)f^{-1}$, puis $g_1 = f \big| [m-1]$, $g_2 = f \big| [n] \setminus [m]$, $X_1 = [m-1]f$, $X_2 = ([n] \setminus [m])f$ et enfin $f_1 = g_1 \omega_{X_1}$, $f_2 = g_2 \omega_{X_2}$.

PROPRIÉTÉ 4.8. <u>L'application</u>

$$\psi : f \rightarrow \{(f_1, X_1), (f_2, X_2)\}$$

<u>est une bijection de</u> A_n <u>sur</u> $A_n^{(2)}$ <u>pour tout</u> $n > 0$.

PREUVE. D'après la propriété 3.6, les applications g_1 et g_2 sont des permutations d'André ssi f est une permutation d'André. D'autre part, g_2 est augmentée ssi f l'est. Il résulte donc de la propriété 3.3 que f est une permutation augmentée ssi g_1 et g_2 le sont aussi. D'autre part, $f_1 = g_1 \omega_{X_1}$ et $f_2 = g_2 \omega_{X_2}$ sont aussi des permutations d'André augmentées respectivement sur $[\mathrm{Card}\ X_1]$ et $[\mathrm{Card}\ X_2]$ Il est enfin clair que les couples (f_1, X_1) et (f_2, X_2) caractérisent complètement les fonctions g_1 et g_2.

COROLLAIRE 4.9. <u>Le couple</u> (A, ψ) <u>où</u> ψ <u>est défini dans la précédente propriété est un complexe d'André</u>.

L'application U défini dans la section 3.1 servait à repérer les descentes et les montées des permutations d'André. Elle est en fait égale à l'application W_2 (Cf. définition 4.4) .

PROPOSITION 4.10. <u>Sur l'ensemble</u> A , <u>les deux applications</u> U <u>et</u> W_2 <u>sont identiques</u>.

PREUVE. D'abord $fU = fW_2 = 1$ pour $f \in A_0 \cup A_1$. Soit $f \in A_n$ ($n \geq 2$) et $f\psi_2 = (f_1, f_2)$. Si l'on a $f_1 \in Y_0$, alors $fW_2 = s.fW_2$, soit $fW_2 = s.fU$ par récurrence. D'autre part, la première lettre de f étant 1 , le mot f débute par une montée. On a donc $fU = s.f_2U$, d'où $fW_2 = fU$. Si l'on a $f_1 \notin Y_0$, par récurrence, il vient $fW_2 = f_1U.t.f_2U$.

D'autre part, on a $fU = f_1U.t.f_2U$ d'après le corollaire 3.9 et le lemme 3.7 . La proposition 4.10 en découle. ∎

3. <u>Les permutations d'André de seconde espèce</u>.

Nous introduisons dans cette section une deuxième classe de permutations appelées <u>permutations d'André de seconde espèce</u>. L'ensemble de ces permutations sur $[n]$ sera noté B_n $(n \geqslant 0)$. Soit $f : [n] \rightarrow X$ une permutation. On note $x_1, x_2, \dots, x_n$ la suite <u>croissante</u> des éléments de l'ensemble totalement ordonné X . Pour $n > 0$ on désigne par fT la permutation déduite de f par suppression du plus grand élément x_n de la suite $1f . 2f . \dots . nf$. En d'autres termes, si l'on a $mf = x_n$ pour un certain $m \in [n]$, alors

$fT = 1f \cdot 2f \cdot \ldots \cdot (m-1)f \cdot (m+1)f \cdot \ldots \cdot nf$. Notons que si $n = 1$, fT est le mot vide noté e .

DÉFINITION 4.11. On dit qu'une permutation $f : [n] \to X$ a la propriété (Δ) si elle n'a pas de double descente et ne finit pas par une descente, c'est-à-dire s'il n'existe pas d'entier j tel que $1 \leq j < n-1$ et $jf > (j+1)f > (j+2)f$ et si d'autre part on a toujours $(n-1)f < nf$ lorsque $n > 1$.

DÉFINITION 4.12. Une permutation $f : [n] \to X$ $(n > 0)$ est une permutation d'André de seconde espèce si les $(n+1)$ permutations f , fT , ... , fT^n ($= e$) ont la propriété (Δ) .

Par exemple, la permutation $f = 3\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5$ est une permutation d'André de seconde espèce, car elle-même, ainsi que les permutations déduites de f par suppression successive de 6 , 5 , ..., 1 , à savoir

$fT = 3\ 1\ 2\ 4\ 5$, $fT^2 = 3\ 1\ 2\ 4$, $fT^3 = 3\ 1\ 2$,

$fT^4 = 1\ 2$, $fT^5 = 1$, $fT^6 = e$

ont toutes la propriété (Δ) .

PROPRIÉTÉ 4.13. Une permutation $f : [n] \to X$ est une permutation d'André de seconde espèce ssi posant $m = (\mathrm{Min}\ X)f^{-1}$, les deux restrictions $g_1 = f \,|\, [m-1]$ et $g_2 = f \,|\, [n] \setminus [m]$ sont des permutations d'André de seconde espèce. Si ces hypothèses sont vérifiées et si $n \geq 2$, on a $kf = x_2 = \mathrm{Min}\{X \setminus \mathrm{Min}\ X\}$ pour un indice k tel que $1 \leq m < k \leq n$.

PREUVE. D'abord, si $n = 1$, on a $g_1 = g_2 = e$ et il n'y a rien à démontrer. Supposons $n > 1$. Par définition de T, on a toujours pour $1 \leq i < n-1$

$$fT^i = g_1 T^{i_1} \cdot x_1 \cdot g_2 T^{i_2}$$

pour $i_1 \geqslant 0$, $i_2 \geqslant 0$ et $i_1 + i_2 = i$. Supposons $g_1 T^{i_1}$ de longueur $(m_1 - 1)$, c'est-à-dire $(m_1)(fT^i) = x_1$. Ssi $g_1 T^{i_1}$ finit par une descente, la permutation fT^i a une double descente $[m_1 - 2, m_1]$. D'autre part, du fait que $x_1 = \operatorname{Min} X$, la permutation fT^i ne peut avoir de descente en $[m_1, m_1 + 1]$. Il en résulte que fT^i a la propriété (Δ) si et seulement s'il en est de même pour $g_1 T^{i_1}$ et $g_2 T^{i_2}$. Par conséquent, f est une permutation d'André de seconde espèce ssi il en est de même pour g_1 et g_2.

Supposons enfin que f soit une permutation d'André de seconde espèce. La permutation fT^{n-2} ne contient que les éléments x_1 et x_2 ; comme, d'autre part, elle a la propriété (Δ), on a $fT^{n-2} = x_1 x_2$. L'élément x_2 est donc toujours après x_1 dans une permutation d'André de seconde espèce.

Comme précédemment, si X est un ensemble totalement ordonné de cardinal n, on note ω_X l'unique application strictement croissante de X sur $[n]$. Soit f une

permutation d'André de seconde espèce sur $[n]$ ($n > 0$) .
On pose $m = (1)f^{-1}$, $g_1 = f \mid [m-1]$, $g_2 = f \mid [n] \setminus [m]$,
$X_1 = ([m-1])f$, $X_2 = ([n] \setminus [m])f$ et enfin $f_1 = g_1 \omega_{X_1}$, $f_2 = g_2 \omega_{X_2}$.

PROPRIÉTÉ 4.14. (1) <u>L'application</u>

$$\varphi : f \to \{(f_1, X_1), (f_2, X_2)\}$$

<u>est une bijection de</u> B_n <u>sur</u> $B_n^{(2)}$ <u>pour tout</u> $n > 0$.

(2) <u>Le couple</u> (B, φ) <u>est un complexe d'André</u>.

(3) <u>Sur l'ensemble</u> B <u>les deux applications</u> U <u>et</u> W_1 <u>sont identiques</u>.

PREUVE. (1) Si $n = 1$ la propriété est triviale. Supposons $n > 1$; il résulte de la propriété 4.13 que φ envoie B_n dans $B_n^{(2)}$. Considérons un couple de parties (X_1, X_2) de $[n]$ telles que $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $X_1 \cup X_2 = [n] \setminus \{1\}$, $2 \in X_2$ et $\mathrm{Card}\, X_1 = m-1$. Il est clair que φ envoie, de façon bijective, les permutations $f \in B_n$ telles que $mf = 1$ et $[m-1]f = X_1$ sur les paires $\{(f_1, X_1'), (f_2, X_2')\}$ de $B_n^{(2)}$ telles que $X_1' = X_1$, $X_2' = X_2$. D'autre part, si pour f , f' dans B_n , on a $1f = m$, $1f' = m'$ et $[m]f \neq [m']f'$, les deux images $f\varphi$ et $f'\varphi$ sont distinctes. Enfin, on obtient tout B_n et tout $B_n^{(2)}$ en faisant varier X_1 dans l'ensemble des parties de $[n] \setminus [2]$.

La partie (2) résulte immédiatement de (1) .

(3) Soit $f \in B_n$ et $f\varphi_1 = (f_1, f_2)$. Lorsque f est

dans $B_0 \cup B_1$, ou lorsque $f_1 = e$, il suffit de reprendre la preuve de la propriété 4.10 pour montrer que l'on a $fU = fW_1$. Reste à considérer le cas $f_1 \neq e$. Par définition de f_1 (voir notation 4.3) et par récurrence, on a $fW_1 = f_1U.t.f_2U$. Posons $1f = m$; on a $m > 1$. Comme f_1 ne finit pas par une descente et que le couple $[m,m+1]$ ne peut être une descente pour f, on a aussi $fU = f_1U.t.f_2U$. D'où encore $fW_1 = fU$. ∎

PROPOSITION 4.15. <u>Posons</u> $Y = B$ <u>et</u> $Z = A$. <u>Alors l'application</u> θ' <u>définie en</u> (4.2) <u>est une bijection de l'ensemble</u> B <u>des permutations d'André de seconde espèce sur l'ensemble</u> A <u>des permutations d'André, satisfaisant à</u>

$$fU = f\theta'U$$

<u>pour tout</u> f <u>dans</u> B.

PREUVE. D'après le corollaire 4.9 et la propriété 4.14 , les couples (A,ψ) et (B,φ) sont des complexes d'André. Comme, d'autre part, la fonction U est égale à W_1 sur B et à W_2 sur A, la proposition découle du théorème 4.5 . ∎

EXEMPLE 4.17. On vérifie d'abord que la bijection $\theta' : B \to A$ envoie les permutations 1 , 12 et 123 sur elles-mêmes.

De (4.2) , nous obtenons

$$312 \xrightarrow{\varphi} \{(1,\{3\}),(1,\{2\})\} \to \{(1,\{2\}),(1,\{3\})\} \xrightarrow{\psi^{-1}} 213$$

et $(312)U = (213)U = t$. De même,

$$45123 \xrightarrow{\varphi} \{(12,\{4,5\}),(12,\{2,3\})\} \to \{(12,\{2,4\}),(12,\{3,5\})\} \xrightarrow{\psi^{-1}} 24135$$

et $(45123)U = (24135)U = sts$.

A la fin du chapitre 5 , on trouvera la table de correspondance $\theta': B_n \longrightarrow A_n$ pour $1 \leq n \leq 5$.

4. <u>Propriétés de symétrie.</u>

Soit $w = u_1 u_2 \ldots u_k$ $(k > 0)$ un mot du monoïde $\{s,t\}^*$;
Le mot <u>retourné</u> $\tilde{w}$ est défini par

$$\tilde{w} = u_k u_{k-1} \ldots u_1 .$$

D'autre part, pour un entier i de l'intervalle $[k+1]$, on définit

$$\begin{aligned} w\Gamma_i &= u_1 \ldots u_{i-1}\; t\; u_{i+1} \ldots u_k \quad \text{si } 1 \leq i \leq k \;,\; u_i = s \\ &= u_1 \ldots u_{i-1}\; s\; t\; u_{i+1} \ldots u_k \quad \text{si } 1 \leq i \leq k \;,\; u_i = t \\ &= w\, s \quad \text{si } i = k+1 . \end{aligned}$$

Posant $w' = w\Gamma_i$, le lemme suivant a pour but de déterminer la transformation Γ_j qu'il faut appliquer au mot retourné $\tilde{w}$ pour retrouver le mot retourné $\tilde{w}'$.

LEMME 4.18. <u>Soit</u> $w = u_1 u_2 \ldots u_k$ <u>un mot de longueur</u> k $(k > 0)$ <u>du monoïde</u> $\{s,t\}^*$. <u>A tout entier</u> i <u>de l'intervalle</u> $[k+1]$ <u>on associe l'indice</u> j <u>défini par</u>

(1) $j = k-i+1$ <u>si</u> $1 \leq i \leq k$, $u_i = s$;

(2) $j = k-\ell+2$ <u>si</u> $1 \leq i \leq k$, $u_i = t$, <u>où</u> ℓ <u>est le plus petit entier satisfaisant à</u> $1 \leq \ell \leq i$ <u>et</u>

$$u_\ell u_{\ell+1} \ldots u_i = s^{i-\ell}\, t \;;$$

(3) $j = k-\ell+2$ <u>si</u> $i = k+1$, <u>où</u> ℓ <u>est, cette fois, le plus petit entier satisfaisant à</u> $1 \leq \ell \leq k+1$ <u>et</u>

$$u_1 \dots u_{\ell-1}\, s^{k-\ell+1} = u_1 u_2 \dots u_k \,.$$

Alors l'application $i \to j$ *est une bijection de* $[k+1]$ *sur lui-même satisfaisant à*

$$\widetilde{w\Gamma_i} = \tilde{w}\Gamma_j \,.$$

PREUVE. Posons $w' = w\Gamma_i$. Dans le cas (1) , on a

$$\tilde{w} = u_k \dots u_{i+1}\, s\, u_{i-1} \dots u_1 \quad \text{et}$$
$$\tilde{w}' = u_k \dots u_{i+1}\, t\, u_{i-1} \dots u_1 \,.$$

Il est clair que l'entier $j = k-i+1$ est le seul entier de $[k+1]$ pour lequel on ait $\tilde{w}\Gamma_j = \tilde{w}'$. Dans le cas (2) , on a

$$\tilde{w} = u_k \dots u_{i+1}\, t\, u_{i-1} \dots u_1 \quad \text{et}$$
$$\tilde{w}' = u_k \dots u_{i+1}\, t\, s\, u_{i-1} \dots u_1 \;;$$

soit encore, par définition de ℓ

$$\tilde{w} = u_k \dots u_{i+1}\, t\, s^{i-\ell}\, u_{\ell-1} \dots u_1 \quad \text{et}$$
$$\tilde{w}' = u_k \dots u_{i+1}\, t\, s^{i-\ell+1}\, u_{\ell-1} \dots u_1$$

avec $\ell = 1$ ou $\ell > 1$ et $u_{\ell-1} = t$. On voit donc que pour passer de $\tilde{w}$ à $\tilde{w}'$ il faut ajouter une lettre s à la séquence $s^{i-\ell}$. La seule façon d'obtenir ce rajout en appliquant une transformation Γ_j est de faire opérer $\Gamma_{k-\ell+2}$. En effet, si $\ell = 1$, on a $\tilde{w}\Gamma_{k-\ell+2} = \tilde{w}\Gamma_{k+1} = \tilde{w}\, s = \tilde{w}'$. Si $\ell > 1$, la lettre $u_{\ell-1}$ dans $\tilde{w}$ est transformée en st et l'on a encore $\tilde{w}\Gamma_{k-\ell+2} = \tilde{w}'$. Enfin, dans le cas (3) , on a

$$\tilde{w} = s^{k-\ell+1}\, u_{\ell-1} \dots u_1 \quad \text{et}$$
$$\tilde{w}' = s^{k-\ell+2}\, u_{\ell-1} \dots u_1 \,.$$

Là encore, on a $\tilde{w}\Gamma_j = \tilde{w}'$ pour le seul $j = k-\ell+2$.
Le caractère bijectif de $i \to j$ provient du fait que pour tout i dans $[k+1]$, il n'y a chaque fois qu'un seul entier j qui vérifie la propriété $\widetilde{w\Gamma_i} = \tilde{w}\Gamma_j$. ∎

Soit maintenant f une permutation d'André de deuxième espèce sur $[n]$ ($n \geqslant 2$) . Comme f n'a pas de double descente, sa variation (voir section 3.1) fV n'a jamais deux signes $-$ consécutifs. Donc lorsqu'on remplace dans fV toutes les paires successives $-+$ par t , il ne reste plus dans le mot fV que des signes $+$, que l'on remplace alors par des lettres s pour obtenir la variation réduite fU . Les lettres égales à t du mot fU correspondent donc aux descentes de f et les lettres s aux montées non précédées de descentes.
Appelons distingués (pour f) les entiers m de $[n+1]$ pour lesquels l'une des conditions suivantes est satisfaite

$$(4.4)\quad \begin{cases} (1) & m = 1 \ , \ mf < (m+1)f \ ; \\ (1') & 1 < m \leqslant n-1 \ , \ (m-1)f < mf < (m+1)f \ ; \\ (2) & 1 < m < n-1 \ , \ (m-1)f > mf \ ; \\ (3) & m = n+1 \ . \end{cases}$$

Les entiers définis en (1) et (1') sont les entiers qui correspondent aux montées non précédées de descentes ; ceux définis en (2) correspondent aux descentes de f . On a l'inégalité stricte $1 < m < n-1$ en (2) car f ne peut se terminer par une descente.

Si m est le i-ème élément distingué pour f, c'est-à-dire si l'intervalle $[m]$ contient exactement i indices distingués pour f, on pose $m\tau = i$.
La variation réduite fU de f sera notée $fU = u_1u_2 \ldots u_k$, de longueur k ($k > 0$). L'application τ est ainsi une bijection de l'ensemble des éléments distingués pour f sur l'intervalle $[k+1]$. On a en particulier $(n+1)\tau = k+1$.
L'application inverse de τ est notée τ^{-1}. Pour $n \geqslant 2$, on désigne par $\bar{B}_n$ l'ensemble des couples (f,i) où f appartient à B_n et où, lorsque la variation réduite de f est de longueur k, l'entier i varie de 1 à $k+1$.

PROPOSITION 4.19. *L'application*

$$\sigma : (f,i) \rightarrow g$$

définie par $m = i\tau^{-1}$ *et*

$$g = 1f \,.\, \ldots \,.\, (m-1)f \,.\, n+1 \,.\, mf \,.\, \ldots \,.\, nf$$

est une bijection de $\bar{B}_n$ *sur* B_{n+1} *satisfaisant à*

$$gU = fU\Gamma_i \,.$$

PREUVE. Soit f un élément de B_n ($n \geqslant 2$), de variation réduite $fU = u_1u_2 \ldots u_k$ ($k > 0$). On obtient un élément de B_{n+1} ssi l'on intercale $(n+1)$ dans le mot $1f.2f. \ldots .nf$ sans engendrer de double descente et sans créer de descente finale. L'examen des conditions (4.4) nous montre que l'intercalement de $(n+1)$ entre les lettres de $(m-1)f$ et mf donne un élément g de B_{n+1} ssi l'entier m est distingué pour f.

De plus, l'application $(f,i) \to g$ est évidemment injective. Pour démontrer la surjectivité, on considère un élément g de B_{n+1} et l'on note m l'entier défini par $mg = n+1$. Par définition des permutations d'André de seconde espèce, la permutation $f = gT$ déduite de g par suppression de $(n+1)$ appartient à B_n. Il nous suffit donc de vérifier que l'entier m est distingué pour f.

Trois cas sont à considérer

(1) $m = 1$ ou $1 < m < n$ et $(m-1)g < (m+1)g$;

(2) $1 < m < n$ et $(m-1)g > (m+1)g$;

(3) $m = n+1$.

Dans les cas (1) et (2), *on a forcément* $(m+1)g < (m+2)g$, car autrement $[m,m+2]$ serait une double descente dans g. On voit encore que les trois précédentes conditions sur g impliquent les conditions (4.4) sur f, c'est-à-dire que m est distingué pour f.

Reste à comparer les variations réduites de f et g dans la correspondance $(f,i) \to g$. Dans le cas (1), on a

$$gU = u_1 \ldots u_{i-1}\, t\, u_{i+1} \ldots u_k$$

Dans le cas (2), on a $gU = u_1 \ldots u_{i-1}\, st\, u_{i+1} \ldots u_k$ et dans le cas (3) $gU = u_1 \ldots u_{k+1}\, s$. Dans les trois cas, on a bien $gU = fU\Gamma_i$ par définition de Γ_i. ∎

REMARQUE 4.20. L'application inverse $g \to (f,i)$ de B_{n+1} sur $\overline{B}_n$ est évidemment donnée par

$f = gT$ (permutation déduite de g par suppression de $n+1$) et l'entier i est le nombre d'éléments distingués pour f dans l'intervalle $[m]$ où $mg = n+1$.

Nous avons désormais tous les éléments pour définir la bijection ρ de B_n sur lui-même satisfaisant à

(4.5) $\qquad \widetilde{gU} = g\rho U$ pour tout $g \in B_n$.

Pour $n = 1$, il n'y a rien à démontrer. Pour $n = 2$, l'ensemble B_n est réduit à la permutation 12 , de variation réduite s et ρ est trivialement défini comme l'application identique de B_n . Supposons $n+1 \geqslant 3$ et soit g un élément de B_{n+1} . Si le mot gU est symétrique, c'est-à-dire si $\widetilde{gU} = gU$, on pose

(4.6) $\qquad g' = g\rho = g$.

Si le mot gU n'est pas symétrique, on considère la suite des applications

(4.7) $$\underset{B_{n+1}}{g} \xrightarrow{\sigma^{-1}} \underset{\overline{B}_{n+1}}{(i,f)} \longrightarrow \underset{\overline{B}_n}{(j,f')} \xrightarrow{\sigma} \underset{B_{n+1}}{g'}$$

dans laquelle

(1) σ^{-1} est l'inverse de la bijection définie dans la proposition 4.19 ;

(2) $i \to j$ est la bijection définie dans le lemme 4.18 ;

(3) $f \to f'$ est la bijection ρ de B_n sur lui-même qu'on suppose définie par récurrence jusqu'à l'ordre n ;

(4) σ est la bijection définie dans la proposition 4.19 .

Par récurrence, on $\widetilde{fU} = f'U$ et $f \to f'$ est une bijection de B_n sur lui-même. Les deux mots fU et $f'U$ ont en particulier même longueur et l'application $(i,f) \to (j,f)$ est donc bien une bijection de $\overline{B}_n$ sur lui-même. Le produit de composition défini par la suite (4.7) est donc bien une bijection de B_{n+1} sur B_{n+1} , qu'on notera $\rho : g \to g'$.

D'autre part, on a successivement

$gU = fU\Gamma_i$ d'après la proposition 4.19 ; puis posant $w = fU$ et $w' = w\Gamma_i$, on a, d'après le lemme 4.18 , $\widetilde{w'} = \widetilde{w}\Gamma_j$, d'où par récurrence $f'U = \widetilde{w}$ et $\widetilde{gU} = \widetilde{w'} = \widetilde{w}\Gamma_j = f'U\Gamma_j$

Enfin, d'après la proposition 4.19 de nouveau

$\widetilde{gU} = g'U$.

Rassemblons ces résultats dans un théorème.

THÉORÈME 4.20. <u>L'application</u> ρ <u>de</u> B <u>dans</u> B <u>qui envoie sur eux-mêmes les éléments de</u> $B_0 \cup B_1 \cup B_2$ <u>et qui, lorsque</u> g <u>est dans</u> B_{n+1} $(n+1 \geqslant 3)$ <u>est définie par</u> $g\rho = g'$ <u>selon les relations</u> (4.6) <u>et</u> (4.7), <u>est une bijection de</u> B <u>sur lui-même ayant la propriété suivante</u> :

<u>si</u> g <u>est dans</u> B_n <u>et si</u> $gU = w$, <u>alors</u> $g\rho$ <u>est dans</u> B_n <u>et</u> $g\rho U = \widetilde{w}$.

EXEMPLE 4.21. Supposons $g = 12534$, appartenant à B_5 , de variation réduite $gU = sst$. Déterminons $g' = g\rho$ définie en (4.7) . D'abord $f = gT = 1234$ et $m = 3$. Comme 3 est le troisième élément distingué pour f , on a $i = 3$. Par suite $g\sigma^{-1} = (3,1234)$. La variation réduite de f est $u_1u_2u_3 = sss$, de longueur $k = 3$ et symétrique. On a ainsi $f' = f = 1234$, d'après (4.6) . Comme $u_i = u_3 = s$, l'entier j (d'après le lemme 4.18) est défini par

$$j = k-i+1 = 3-3+1 = 1 .$$

Par conséquent $g' = (1,f')\sigma = 5.1f'.2f'.3f'.4f' = 51234$ et l'on a bien $g'U = tss$. *Une table de correspondance* pour la bijection ρ est reproduite à la fin du chapitre 5 .

D'après la propriété 3.1 , si f est dans B_n ($n>0$), de variation réduite $fU = w$, on a

$$2|w|_t + |w|_s = n-1 .$$

Il en résulte que si l'on considère un mot quelconque w de $\{s,t\}^*$ il existe un et un seul entier $n \geq 0$ pour lequel l'ensemble $B_n \cap wU^{-1}$ n'est pas vide. Une des conséquences du théorème 4.20 est donc que l'on a

$$\text{(4.8)} \qquad \text{Card } wU^{-1} = \text{Card } \tilde{w}U^{-1}$$

pour tout $w \in \{s,t\}^*$, c'est-à-dire que dans tout B_n il y a autant de permutations f telles que $fU = w$ que de permutations g telles que $gU = \tilde{w}$.

D'autre part, pour $n \geqslant 0$, on peut écrire

$$(4.9) \qquad B_{n+2}U = \sum \{ w \text{ Card } wU^{-1} : w \in \{s,t\}^*, \ 2|w|_t + |w|_s = n+1 \}$$

et d'après (4.8), ce polynôme ne change pas si l'on transforme dans son expression (4.9) tous les mots w en $\tilde{w}$. Prenant alors un complexe d'André (Y,φ) arbitraire, on voit que le polynôme $Y_{n+2}W_j$ (voir proposition 4.6) a la même propriété ($j = 1,2$). Or on a d'après (4.3)

$$(4.10) \qquad Y_{n+2}W_j = s.Y_{n+1}W_j + \sum_{1 \leq i \leq n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} Y_iW_j.t.Y_{n+1-i}W_j$$

($j = 1,2$). Si l'on retourne dans (4.10) tous les mots w, on obtient donc l'identité

$$(4.11) \qquad Y_{n+2}W_j = Y_{n+1}W_j.s + \sum_{1 \leq i \leq n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} Y_{n+1-i}W_j.t.Y_iW_j$$

soit

$$(4.12) \qquad Y_{n+2}W_j = \sum_{1 \leq i \leq n} \begin{bmatrix} n \\ i-1 \end{bmatrix} Y_iW_j.t.Y_{n+1-i}W_j + Y_{n+1}W_j.s \ ,$$

qui est en fait une <u>nouvelle identité</u> sur les polynômes $(Y_nW_j)_{n \geqslant 0}$. Par addition des identités (4.10) et (4.12) on obtient

$$(4.13) \qquad 2\,Y_{n+2}W_j = s.Y_{n+1}W_j + \sum_{1 \leq i \leq n} \begin{bmatrix} n+1 \\ i \end{bmatrix} Y_iW_j.t.Y_{n+1-i}W_j + Y_{n+1}W_j.s$$

pour $j = 1,2$ et $n \geqslant 0$.

L'identité (4.13) est un équivalent non commutatif en les variables s et t de l'identité (4) de l'introduction. En effet, lorsqu'on prend le complexe d'André (A,ψ) et $W_2 = U$, cette identité s'écrit

$$2\, A_{n+2}U = s.A_{n+1}U + \sum_{1\leq i\leq n} \begin{bmatrix} n+1 \\ i \end{bmatrix} A_i U.t.A_{n+1-i}U + A_{n+1}U.s \;.$$

Multipliant cette identité à droite par t, on obtient, d'après le lemme 3.7

$$2\, D_{n+3}\mathring{U} = s.D_{n+2}\mathring{U} + \sum_{1\leq i\leq n} \begin{bmatrix} n+1 \\ i \end{bmatrix} D_i \mathring{U}.D_{n+2-i}\mathring{U} + D_{n+2}\mathring{U}.t^{-1}st \;,$$

où t^{-1} a une interprétation évidente. D'après la remarque 3.11 on sait que l'image abélienne des polynômes $D_n\mathring{U}$ donne précisément les polynômes $D_n = D_n(s,t)$ considérés dans le second chapitre. L'image abélienne de la précédente identité donne donc

$$2\, D_{n+3} = D_1.D_{n+2} + \sum_{1\leq i\leq n} \begin{bmatrix} n+1 \\ i \end{bmatrix} D_i.D_{n+2-i} + D_{n+2}.D_1 \;,$$

soit précisément l'identité (4) ou l'identité (2.10) écrite pour $n+1$ au lieu de n.

5. AUTRES COMPLEXES D'ANDRÉ.

1. Les arborescences binaires décroissantes.

Soit x_1 , x_2 , ... , x_n la suite croissante des éléments d'un ensemble fini X , totalement ordonné et de cardinal $n > 0$.

DÉFINITION 4.1. On dit qu'une application f de X dans X est une arborescence binaire décroissante sur X si f satisfait aux trois propriétés suivantes

(1) $xf < x$ pour tout $x \in X \setminus \{x_1\}$;

(2) $x_1 f = x_1$;

(3) $\mathrm{Card}\,[xf^{-1} \setminus \{x\}] \leq 2$ pour tout $x \in X$.

Les deux premières conditions impliquent que f est une arborescence (au sens usuel du terme) décroissante. Enfin, pour mentionner la troisième condition, à savoir que tout point x n'est l'image que d'au plus deux autres points, on dit que f est binaire. Si $n \geq 2$, on a toujours

$$x_2 f = x_1 .$$

Pour $n > 0$ on note S_n l'ensemble des arborescences binaires décroissantes sur $[n]$. On convient, de plus, que pour $n = 0$ l'ensemble S_n est un singleton $\{e\}$. On pose enfin $S = \bigcup_{n \geq 0} S_n$.

Il est coutumier d'associer à toute arborescence f sur X son graphe orienté. Les sommets du graphe sont les éléments de X et l'on joint x à y par un arc ssi l'on a $x \neq y$ et $f(x) = y$. Enfin, une boucle entoure tout sommet fixé par f. Nous reproduisons dans la figure 1 les graphes des applications appartenant à S_n pour $1 \leq n \leq 4$.

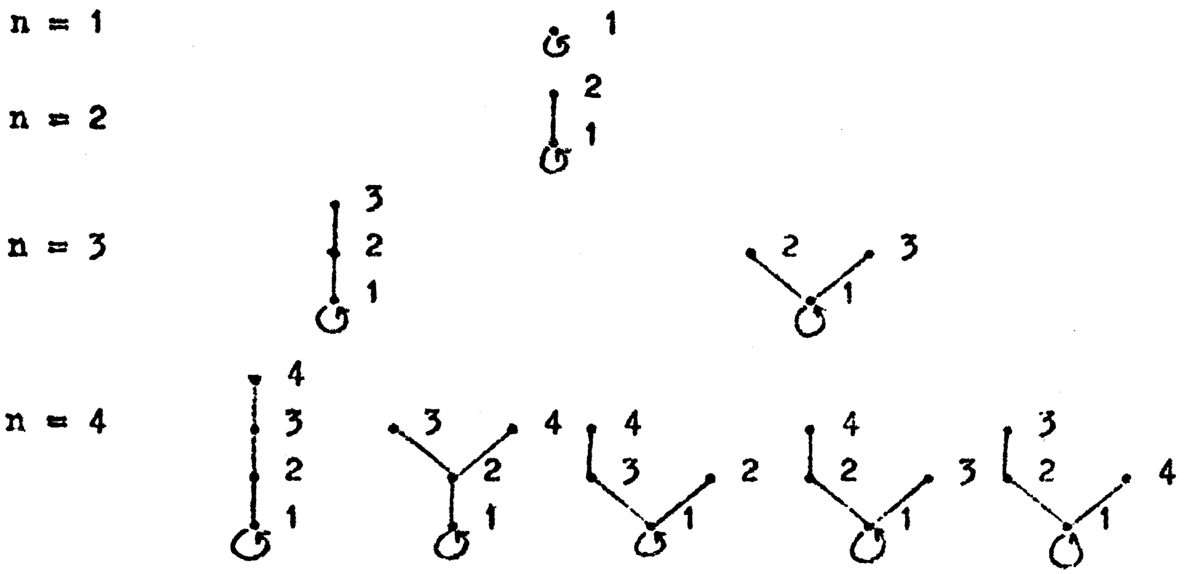


Figure 1.

Pour $n = 5$, on trouverait exactement 16 graphes.

Comme précédemment, l'application strictement croissante d'un ensemble fini totalement ordonné X sur l'intervalle $[\mathrm{Card}\ X]$ est noté ω_X. Considérons maintenant un élément f de S_n $(n \geqslant 2)$. L'ensemble $1f^{-1}$ contient, par définition un ou deux éléments distincts de 1. Si $\mathrm{Card}\,[1f^{-1} \setminus \{1\}] =$ on a forcément $1f^{-1} \setminus \{1\} = \{2\}$. L'application g_2 définie par

$$xg_2 = xf \quad \text{si} \quad x \in [n] \setminus \{2\}$$
$$= x \quad \text{si} \quad x = 2$$

est trivialement une arborescence binaire décroissante sur l'intervalle $\{2,3, \ldots, n\}$. On pose dans ce cas

$$X_1 = \emptyset \ , \quad f_1 = e \ , \quad X_2 = [n]\setminus\{1\} \quad \text{et} \quad f_2 = \omega_{X_2}^{-1} g_2 \, \omega_{X_2} \ .$$

Lorsque $\operatorname{Card}[\, 1f^{-1} \setminus \{1\}] = 2$, on a $1f^{-1} \setminus \{1\} = \{2,y\}$ avec $2 < y \leq n$. On pose alors

$$X_1 = \{x \in [n] \ : \ xf^k = 2 \ , \ k \geq 0\}$$
$$X_2 = \{x \in [n] \ : \ xf^k = y \ , \ k \geq 0\}$$

puis l'on définit deux applications respectivement sur X_1 et X_2 par

$$xg_1 = xf \quad \text{si} \quad x \in X_1 \setminus \{2\}$$
$$= x \quad \text{si} \quad x = 2 \ ;$$
$$xg_2 = xf \quad \text{si} \quad x \in X_2 \setminus \{y\}$$
$$= x \quad \text{si} \quad x = y \ .$$

Enfin, on pose $f_1 = \omega_{X_1}^{-1} g_1 \, \omega_{X_1}$ et $f_2 = \omega_{X_2}^{-1} g_2 \, \omega_{X_2}$.
Lorsque f est dans S_1 , on pose $f_1 = f_2 = e$ et $X_1 = X_2 = \emptyset$.
PROPRIÉTÉ 5.2. <u>L'application</u>

$$\gamma \ : \ f \longrightarrow \{(f_1,X_1),(f_2,X_2)\}$$

<u>est une bijection de</u> S_n <u>sur le composé bipartitionnel</u> $S_n^{(2)}$ $(n \geq 1)$.

PREUVE. D'abord X_1 et X_2 sont bien deux sous-ensembles de $[n]$ satisfaisant à

(5.1) $\quad X_1 \cap X_2 = \emptyset \quad , \quad X_1 \cup X_2 = [n] \setminus \{1\}$.

Identifions les arborescences avec leurs graphes. Si l'on "enracine" les sommets adjacents à 1 et l'on supprime le sommet 1 , on obtient bien deux arborescences (disjointes) binaires et décroissantes g_1 et g_2 . Réciproquement, si g_1 et g_2 sont deux arborescences binaires décroissantes ayant pour ensembles de sommets respectivement X_1 et X_2 satisfaisant à (5.1) , la seule façon d'obtenir une arborescence binaire décroissante sur $[n]$, qui contienne tous les arcs de g_1 et g_2 à l'exception des boucles, est de joindre les "racines" de g_1 et g_2 au nouveau sommet 1 qu'on prend pour racine. Enfin, les couples (f_1,X_1) et (f_2,X_2) caractérisent complètement g_1 et g_2 , puisque f_1 et f_2 se déduisent de g_1 et g_2 par une renumérotation canonique des sommets, qui conserve l'ordre mutuel de ceux-ci. ∎

COROLLAIRE 5.3. <u>Le couple</u> (S,γ) <u>est un complexe d'André</u>.

Les applications W_1 et W_2 (voir définition 4.4) n'ont pas d'interprétation intéressante lorsqu'on les définit sur S . On peut cependant introduire la notion de <u>point double</u>. Soit $f \in S_n$ et $x \in [n]$; on dit que x est un <u>point double</u> pour f si x est l'image par f de deux <u>autres</u> points. Si on reprend les définitions de W_1 et W_2 , on voit que l'on fait apparaître une lettre égale à t dans les mots fW_1 et fW_2 chaque fois que l'on rencontre un point double, et une lettre s dans le cas contraire. Par conséquent, le nombre d'occurences de la lettre t dans les mots fW_1 et fW_2 est égal au nombre de points doubles de f. D'autre part, comme tout point est l'image par f d'au plus deux autres points, le nombre de points doubles est encore égal au nombre de <u>bouts pendants</u> dans f, c'est-à-dire de points qui ne sont l'image d'aucun autre point. On en déduit donc la propriété suivante.

PROPRIÉTÉ 5.4. <u>Soit</u> $P_n(t)$ <u>le polynôme générateur du nombre des points doubles (ou des bouts pendants) sur</u> S_n $(n>0)$. <u>On a alors</u> $t.P_n(t) = D_{n+1}(s=1,t)$.

Pour terminer cette section, nous indiquons l'argument géométrique qu'on peut utiliser pour définir les bijections $\theta : S \to B$ et $\theta' : S \to A$, au lieu de recourir aux chaînes d'applications (4.1) et (4.2) . Considérons dans le plan xy l'ensemble H contenant l'origine, les points de coordonnées $(i/2^k, k)$ où k parcourt l'ensemble des entiers (strictement) positifs et où, pour k fixé, l'entier i parcourt l'ensemble des entiers <u>impairs</u> compris entre $-(2^k-1)$ et (2^k-1) . Soit f une arborescence binaire décroissante sur $[n]$ $(n>0)$. Les sommets du graphe de f vont être "placés" sur les points de H . D'abord, le sommet 1 est placé à l'origine. Supposons que tous les sommets de hauteur

h ($h \geqslant 0$) , c'est-à-dire des sommets x pour lesquels on a $xf^h = 1$ et $xf^{h-1} \neq 1$ si $h > 0$, aient été placés. Soit x un tel sommet. Il a été placé, disons, au point ($i/2^h$, h) (avec $i = 0$ dans le seul cas où $h = 0$).

Trois cas sont à considérer :

(1) $xf^{-1} \setminus \{x\} = \emptyset$; alors ou bien $f \in S_1$ et le graphe entier (!) de f a été placé, ou bien x est un bout pendant de f ;

(2) $xf^{-1} \setminus \{x\} = \{y\}$; on place alors le sommet y au point ($(2i+1)/2^{h+1}$, $h+1$) ;

(3) $xf^{-1} \setminus \{x\} = \{y,z\}$; on pose alors

$$X(y) = \{ v \in [n] : vf^k = y \, , \, k \geqslant 0 \}$$

$$X(z) = \{ v \in [n] : vf^k = z \, , \, k \geqslant 0 \} .$$

Les deux ensembles $X(y)$ et $X(z)$ ne sont pas vides, puisqu'ils contiennent y et z . On a alors deux critères de "placement":

le sommet y va en ($(2i-1)/2^{h+1}$, $h+1$) et z va en ($(2i+1)/2^{h+1}$, $h+1$) suivant que

(3a) $\max X(y) < \max X(z)$

ou que

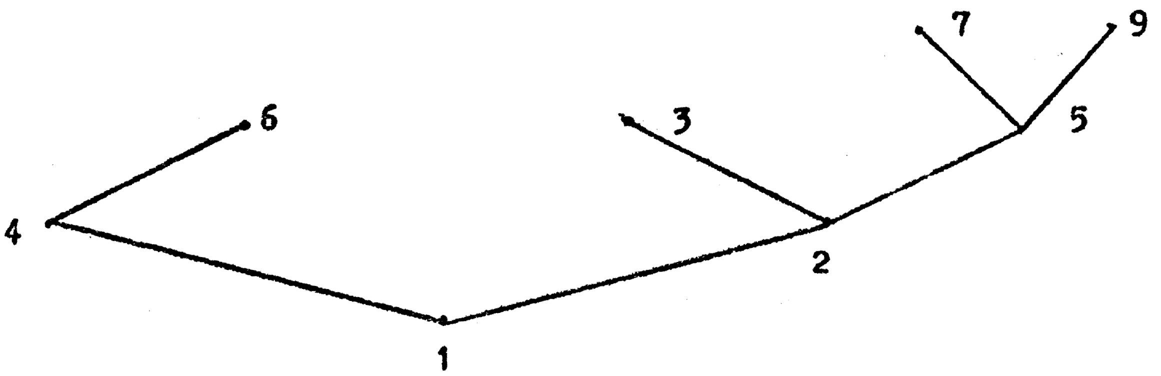
(3b) $y = \min X(y) < \min X(z) = z$.

Quelque soit le critère (3a) ou (3b) utilisé, les n sommets du graphe de f ont des abscisses différentes. Soient x , y deux sommets distincts du graphe. On pose $x \underset{a}{<} y$

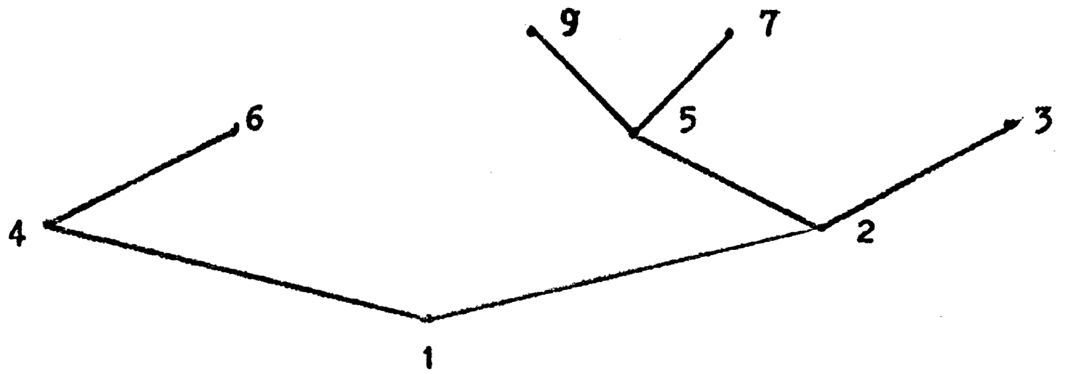
(resp. $x \underset{b}{<} y$) ssi l'abscisse de x dans H est inférieure à l'abscisse de y dans H, lorsque le critère (3a) (resp. (3b)) est utilisé. On désigne alors par fH_a (resp. fH_b) la suite croissante (par rapport à l'ordre total $\underset{a}{<}$ (resp. $\underset{b}{<}$)) formée par les n sommets de f. De façon géométrique, les suites fH_a et fH_b sont obtenues en projetant verticalement les n sommets du graphe sur l'axe des x. Le lecteur pourra alors vérifier le résultat suivant.

PROPRIÉTÉ 5.5. Les images de $f \in S_n$ ($n > 0$) par les bijections $\theta : S \to B$ et $\theta' : S \to A$ sont respectivement données par $f\theta = fH_b$ et $f\theta' = fH_a$.

Nous illustrons seulement ce résultat par un exemple. Les deux graphes de la figure 2 sont les graphes d'une même fonction $f \in S_9$. C'est le critère (3a) qui a été utilisé pour placer les sommets dans le premier, et le critère (3b) dans le second. Lorsqu'on projette les sommets sur l'axe des x dans le premier (resp. le second), on obtient la permutation d'André $f\theta'$ (resp. la permutation d'André de seconde espèce $f\theta$) .



$\theta' = 4 \quad 6 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 7 \quad 5 \quad 9$



$f\theta = 4 \quad 6 \quad 1 \quad 9 \quad 5 \quad 7 \quad 2 \quad 3$

Figure 2.

2. Les permutations alternantes.

C'est André (1879, 1881) lui-même qui a introduit la notion de permutation alternante et qui a montré que le coefficient de $u^n/n!$ dans le développement de $\operatorname{tg} u + \sec u$ était précisément égal au nombre de permutations alternantes sur $[n]$.

En fait, comme nous allons le montrer ici, l'ensemble des permutations alternantes est un exemple de complexe d'André. Utilisant tous les résultats du chapitre 4 , on peut donc mettre ces permutations en correspondance biunivoque avec les permutations d'André des deux espèces, ainsi qu'avec les arborescences binaires décroissantes.

L'ensemble X étant toujours un ensemble fini totalement ordonné de cardinal $n>0$, on dit qu'une permutation $f : [n] \to X$ est alternante (resp. alternante montante) sur X ssi l'on a $(2j)f<(2j-1)f$, $(2j+1)f$ (resp. $(2j)f>(2j-1)f$, $(2j+1)f$) pour tout j tel que $0<2j<n$ et $(n-1)f>nf$ (resp. $(n-1)f<nf$) si, de plus, n est pair. On note $\omega_X : X \to [n]$ l'application strictement croissante de X sur $[n]$. Si f est une permutation alternante sur X , on pose pour tout $i\in[n]$

(5.2) $$i\overline{f} = (n+1-if\omega_X)\omega_X^{-1} .$$

Par exemple, si $X=[n]$, on a $i\overline{f}=n+1-if$. Il est clair que l'application $f \to \overline{f}$ est une bijection de l'ensemble des permutations alternantes sur l'ensemble des permutations alternantes montantes. Pour tout $n>0$, on note E_n

l'ensemble des permutations alternantes

sur $[n]$. On suppose que E_0 est un singleton $\{e\}$

et l'on pose $E = \bigcup_{n \geq 0} E_n$.

Soit $f \in E_n$ ($n > 1$) . Deux cas sont à considérer :
(1) $1f^{-1} < nf^{-1}$; (2) $nf^{-1} > 1f^{-1}$. Dans le cas (1), on pose $m = 1f^{-1}$, puis $g_1 = f|[m-1]$, $g_2 = f|([n] \setminus [m])$.
Dans le cas (2) , on pose $m = nf^{-1}$, puis $g_1 = f|[m-1]$.
La permutation

$$g = mf \,.\, (m+1)f \,.\, \ldots \,.\, nf$$

est alors une permutation alternante sur un ensemble X' qui contient 1 . De plus, la permutation g débute par n .
D'après (5.2) , la permutation $\bar{g}$ est alternante montante.
Elle débute, de plus, par 1 . On peut donc écrire

$$(5.3) \qquad \bar{g} = 1 \,.\, (m+1)g_2 \,.\, (m+2)g_2 \,.\, \ldots \,.\, (n)g_2$$

et la permutation g_2 définie par

$$g_2 = (m+1)g_2 \,.\, (m+2)g_2 \,.\, \ldots \,.\, (n)g_2$$

est une permutation alternante sur l'ensemble $([n] \setminus [m-1])f \cup \{1\}$
Dans les deux cas, on pose, en outre,

$$X_1 = ([m-1])f \quad , \quad X_2 = [n] \setminus (X_1 \cup \{1\}) \text{ , puis}$$

$$f_1 = g_1 \omega_{X_1} \quad \text{et} \quad f_2 = g_2 \omega_{X_2} .$$

PROPRIÉTÉ 5.6. <u>L'application</u> $\mathcal{E}$ <u>qui envoie l'élément</u> f <u>de</u> E_1 <u>sur la paire</u> $\{(e,\emptyset),(e,\emptyset)\}$ <u>et tout élément</u> f <u>de</u> E_n ($n > 1$) <u>sur la paire</u> $\{(f_1,X_1),(f_2,X_2)\}$ <u>est une bijection de</u> E_n <u>sur le composé bipartitionnel</u> $E_n^{(2)}$.

PREUVE. Le caractère injectif est évident. Revenons aux deux cas condisérés pour la définition de g_1 et de g_2 à partir de $f \in E_n$. Comme f est alternante, dans le cas (1), l'entier $m = 1f^{-1}$ est pair et dans le cas (2), l'entier $m = nf^{-1}$ est impair. Considérons donc un élément $\{(f_1,X_1),(f_2,X_2)\}$ de $E_n^{(2)}$ ($n > 1$). On peut d'abord supposer que la numérotation a été faite de sorte que n est dans X_2. On pose $g_1 = f_1\omega_{X_1}^{-1}$, $g_2 = f_2\omega_{X_2}^{-1}$. Posons $m-1 = \text{Card } X_1$. Si m est pair, on définit f par

$$f = (1)g_1 \,.\, \ldots \,.\, (m-1)g_1 \,.\, 1 \,.\, (1)g_2 \,.\, \ldots \,.\, (n-m)g_2 \,.$$

Si m est impair, on transforme d'abord la permutation alternante montante

$$\bar{g} = 1 \,.\, (1)g_2 \,.\, \ldots \,.\, (n-m)g_2$$

en une permutation alternante, en prenant l'inverse de la bijection définie en (5.2). On obtient

$$g = (1)g \,.\, (2)g \,.\, \ldots \,.\, (n-m+1)g$$

qui débute par n puisque n est dans X_2. On pose alors

$$f = (1)g_1 \,.\, \ldots \,.\, (m-1)g_1 . (1)g \,.\, (2)g \,.\, \ldots \,.\, (n-m+1)g \,.$$

On a bien là une permutation alternante, car g_1 finit par une descente, puisque $m-1$ est pair. Dans les deux cas, on retrouve $f\mathcal{E} = \{(f_1,X_1),(f_2,X_2)\}$. ∎

Il résulte donc de la propriété 5.6 que le couple $(E,\mathcal{E})$ est un <u>complexe d'André</u>. En revanche, les applications W_1 et

W_2 n'ont pas sur E d'interprétation évidente.

Donnons une dernière application de l'identité (4.3) de la proposition 4.6 qui comporte un comptage d'une sous-famille de permutations alternantes. Soit w un mot de $\{s,t\}^*$ de la forme $w = t^p$ ($p \geq 0$) et soit (Y,φ) un complexe d'André. On pose $c(t^p) = \mathrm{Card}\ (t^p)W_1^{-1} = \mathrm{Card}\ (t^p)W_2^{-1}$.
On sait que le seul entier $n+2$ pour lequel $Y_{n+2} \cap wW_j^{-1}$ n'est pas vide est donné par $2p = n+2-1$, soit $n = 2p-1$.
La formule donne alors immédiatement

$$(5.4) \qquad c(t^p) = \sum_{1 \leq i \leq p} \begin{bmatrix} 2p-1 \\ 2i-1 \end{bmatrix} c(t^{i-1})\, c(t^{p-i}) .$$

Maintenant, les seules permutations f appartenant à $A \cup B$, pour lesquelles on a $fU = t^p$ ($p \geq 0$) sont des permutations alternantes. On a donc

$$c(t^p) = \mathrm{Card}\ A_{2p+1} \cap E_{2p+1} = \mathrm{Card}\ B_{2p+1} \cap E_{2p+1} \quad (p \geq 0) .$$

La formule (5.4) est donc une formule de récurrence pour le nombre de permutations d'André (resp. d'André de seconde espèce) qui sont aussi alternantes.

3. Tables.

La première table illustre la construction des bijections θ définies en (4.1) et (4.2) dans la section 4.1 .

(1) La première colonne contient la liste des permutations d'André de seconde espèce (voir section 4.3) appartenant aux ensembles B_n pour $1 \leqslant n \leqslant 5$.

(2) Dans la deuxième colonne, on trouve la liste des permutations d'André (voir section 3.2) qui correspondent aux éléments de la première colonne par la bijection $\theta' : B \to A$.

(3) La liste des permutations alternantes en correspondance biunivoque avec les permutations d'André (de la seconde colonne) par la bijection $\theta : A \to E$ est reproduite dans la colonne 3 .

(4) Soient respectivement f , g et h les éléments génériques des éléments des colonnes 1 , 2 et 3 . Comme $f\theta' = g$, on a $fU = fW_1 = gW_2 = gU$. Enfin, puisque $g\theta = h$, il vient $gU = gW_2 = hW_2$. D'où $fU = gU = hW_2$. La quatrième colonne contient donc la valeur commune de ces mots. On rappelle que fU et gU sont les variations réduites (voir section 3.1) des permutations f et g .

La seconde table illustre la construction de la bijection ρ définie en (4.7) (section 4.4) . Les différentes colonnes de la table donnent la valeur des différents paramètres qui interviennent dans la chaîne d'applications (4.7) . La correspondance n'a été établie que pour les permutations d'André de seconde espèce g appartenant à B_n pour $1 \leqslant n \leqslant 6$, pour lesquelles la variation réduite gU n'est pas symétrique.

	B_n	A_n	E_n	
	f	g	h	$fU = gU = hW_2$
n = 1	1	1	1	1
n = 2	12	12	21	s
n = 3	123	123	312	ss
	312	213	213	t
n = 4	1234	1234	4132	sss
	1423	1324	4231	st
	3412	2314	3241	st
	4123	2134	2143	ts
	3124	3124	3142	ts
n = 5	12345	12345	51423	ssss
	12534	12435	51324	sst
	14523	13425	52314	sst
	34512	23415	42315	sst
	15234	13245	53412	sts
	14235	14235	52413	sts
	34125	34125	43512	sts
	45123	24135	42513	sts
	35124	23145	32514	sts
	51234	21345	21534	tss
	41235	41235	41523	tss
	31245	31245	31524	tss
	51423	21435	21435	tt
	53412	32415	32415	tt
	41523	41325	41325	tt
	31524	31425	31425	tt

Table 1.

	gU	g	f	fU	i	j	f'	g'	g'U
ı = 4	st	1423	123	ss	2	1	123	4123	ts
	st	3412	312	t	1	2	312	3124	ts
ı = 5	sst	12534	1234	sss	3	1	1234	51234	tss
	sst	14523	1423	st	2	3	4213	42135	tss
	sst	34512	3412	st	2	3	3124	31245	tss
ı = 6	ssst	123645	12345	ssss	4	1	12345	612345	tsss
	ssst	125634	12534	sst	3	4	51234	512346	tsss
	ssst	145623	14523	sst	3	4	42135	421356	tsss
	ssst	345612	34512	sst	3	4	31245	312456	tsss
	ssts	126345	12345	ssss	3	2	12345	162345	stss
	ssts	125346	12534	sst	4	1	51234	561234	stss
	ssts	145236	14523	sst	4	1	42135	462135	stss
	ssts	345126	34512	sst	4	1	31245	351245	stss
	ssts	156234	15234	sts	2	4	15234	152346	stss
	ssts	146235	14235	sts	2	4	14235	142356	stss
	ssts	346125	34125	sts	2	4	34125	341256	stss
	ssts	456123	45123	sts	2	4	45123	451236	stss
	ssts	356124	35124	sts	2	4	35124	351246	stss
	stt	162534	12534	sst	2	2	51234	516234	tts
	stt	164523	14523	sst	2	2	42135	426135	tts
	stt	364512	34512	sst	2	2	31245	316245	tts
	stt	152634	15234	sts	3	1	15234	615234	tts
	stt	142635	14235	sts	3	1	14235	614235	tts
	stt	341625	34125	sts	3	1	34125	634125	tts
	stt	451623	45123	sts	3	1	45123	645123	tts
	stt	351624	35124	sts	3	1	35124	635124	tts
	stt	561423	51423	tt	1	3	51423	514236	tts
	stt	563412	53412	tt	1	3	53412	534126	tts
	stt	461523	41523	tt	1	3	41523	415236	tts
	stt	361524	31524	tt	1	3	31524	315246	tts

Table 2.

RÉFÉRENCES

D. ANDRÉ (1879), Développements de sec x et de tang x, C.R. Acad. Sc. Paris, 88, pp. 965 - 967.

D. ANDRÉ (1881), Sur les permutations alternées, J. Math. Pures Appl., 7, pp. 167-184.

T.J. BUCKHOLTZ & D.E. KNUTH (1967), Computation of tangent, Euler and Bernoulli numbers, Math. Comp. 21, pp. 663-688.

F.N. DAVID & D.E. BARTON (1962), Combinatorial Chance, Griffin, London.

D. FOATA & M.-P. SCHÜTZENBERGER (1970), Théorie géométrique des polynômes eulériens, Springer-Verlag, Berlin.

W.O. KERMACK & A.G. McKENDRICK (1938), Some properties of points arranged on a Möbius surface, The Math. Gazette, 22, pp. 66-72.

N. NIELSEN (1923), Traité élémentaire des nombres de Bernoulli, Gauthier-Villars, Paris.