UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE, SEDE DI BRESCIA

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea

Grado topologico per equazioni quasi lineari con crescita naturale

Relatore:
Ch.mo Prof. Marco Degiovanni
Correlatore:
Ch.mo Prof. Marco Marzocchi

Candidato:
Stefano Almi
Matricola n. **3903784**

Anno Accademico 2011-2012

Indice

Introduzione **ii**

1 Richiami sul grado topologico in dimensione finita **1**

1.1 Grado topologico negli spazi normati di dimensione finita 1

1.2 Un approccio alternativo alla dimensione finita 7

2 Grado topologico per applicazioni di classe S_+ **10**

2.1 Alcuni fatti generali 10

2.2 Applicazioni di classe S_+ 13

2.3 Il caso lineare 23

3 Equazioni quasi lineari con crescita controllata **30**

3.1 Quadro generale 30

3.2 Definizione del grado 39

4 Equazioni quasi lineari con crescita naturale **41**

4.1 Quadro generale 41

4.2 Definizione del grado 42

4.3 Proprietà del grado 53

5 Biforcazione globale per equazioni quasi lineari con crescita naturale **57**

5.1 Problemi di biforcazione globale 57

5.2 Biforcazione globale 60

Introduzione

I problemi ellittici quasi lineari della forma

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) + b(x,u,\nabla u) = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

sono stati oggetto di studi molto approfonditi, a partire dagli storici lavori di Leray e Lions (si veda ad esempio [6, 11]).

In particolare, è stato sviluppato un adattamento della teoria del grado topologico che consente di trattare tali problemi (vedi [6, 9, 11]), a patto che l'operatore non lineare

$$\big\{u \longmapsto -\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) + b(x,u,\nabla u)\big\}$$

sia ben definito da $W_0^{1,p}(\Omega)$ in $W^{-1,p'}(\Omega)$ per qualche $p \in]1,+\infty[$ e soddisfi una condizione di locale compattezza detta *condizione* S_+. Si parla in tal caso di "equazioni quasi lineari con crescita controllata".

In questo modo vengono però esclusi, ad esempio, i problemi della forma

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\big(A(x,u)\nabla u\big) + \frac{1}{2}\big(D_s A(x,u)\nabla u\big)\cdot\nabla u - g(x,u) = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

che si presentano come l'equazione di Eulero-Lagrange di funzionali definiti su $H_0^1(\Omega)$ della forma

$$f(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \big(A(x,u)\nabla u\big)\cdot\nabla u \; d\,x - \int_\Omega G(x,u)\; d\,x$$

con $G(x,s) = \int_0^s g(x,t)\; d\,t$. Infatti per tali equazioni è naturale attendersi che si abbia

$$\big(D_s A(x,u)\nabla u\big)\cdot\nabla u \in L^1(\Omega),$$

ma $L^1(\Omega) \nsubseteq H^{-1}(\Omega)$ se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$. Si parla in generale di "equazioni quasi lineari con crescita naturale" quando le ipotesi su $b(x,s,\xi)$ garantiscono che $b(x,u,\nabla u) \in L^1(\Omega)$ ma non $b(x,u,\nabla u) \in W^{-1,p'}(\Omega)$. Tuttavia per tali problemi sono stati ottenuti risultati di esistenza di soluzioni ad esempio in [1, 2, 3, 4].

Lo scopo di questa tesi è quello di proporre una teoria del grado topologico adeguata a tali problemi. Come applicazione, estendiamo a questo contesto un teorema di biforcazione globale di Rabinowitz ([7, 10]), ben noto nel caso con crescita controllata.

Capitolo 1

Richiami sul grado topologico in dimensione finita

Richiamiamo, in generale senza dimostrazioni, alcuni fatti basilari riguardanti il grado topologico in dimensione finita (vedi [7, 8, 9, 12]).

1.1 Grado topologico negli spazi normati di dimensione finita

In questa sezione X denoterà uno spazio normato su $\mathbb{R}$ di dimensione finita e Λ un aperto limitato in X.

Se $F : \Lambda \to X$ è di classe C^1, poniamo

$$S_F = \{x \in \Lambda : \ F'(x) \text{ non è biiettivo}\}$$

e, per ogni $x \in \Lambda$, $J_F(x) = \det F'(x)$.

Se $F \in C(\partial\Lambda; X)$ ed $y \in X \setminus F(\partial\Lambda)$, sappiamo che è possibile definire $\deg(F, \Lambda, y) \in \mathbb{Z}$ in modo che valgano le seguenti proprietà:

1.1.1 Stabilità. *Se* $\varepsilon > 0$ *è tale che* $\mathrm{B}(y, \varepsilon) \cap F(\partial\Lambda) = \emptyset$ *e se* $G \in C(\partial\Lambda; X)$ *e* $z \in X$ *sono tali che*

$$\|G - F\|_{\infty,\partial\Lambda} + \|z - y\| < \varepsilon,$$

si ha $z \notin G(\partial\Lambda)$ *e*

$$\deg(G, \Lambda, z) = \deg(F, \Lambda, y).$$

1.1.2 Calcolabilità. *Se* $F \in C(\overline{\Lambda}; X) \cap C^1(\Lambda; X)$ *ed* $y \in X \setminus (F(\partial\Lambda) \cup F(S_F))$*, risulta che* $F^{-1}(y)$ *è un insieme finito e*

$$\deg(F, \Lambda, y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in F^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(J_F(x)) & \text{se } F^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{se } F^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

1.1.3 Teorema (Approssimazione). *Se* K *è un compatto in* X*,* $F \in C(K; X)$*,* $y \in X$ *ed* $\varepsilon > 0$*, allora esiste* $G \in C^\infty(X; X)$ *tale che* $y \notin G(S_G)$ *e* $\|G - F\|_{\infty,K} < \varepsilon$*.*

Da questi tre fatti basilari è possibile dedurre tutte le proprietà del grado topologico.

Osservazione. In base alla definizione di grado topologico è facile verificare che

$$\deg(F, \Lambda, y) = \deg(F - y, \Lambda, 0).$$

1.1.4 Teorema. *Sia* $F \in C(\overline{\Lambda}; X)$ *della forma* $F(x) = Lx + y_0$ *con* $L : X \to X$ *lineare e biiettiva ed* $y_0 \in X$*.*
Allora per ogni $y \in X \setminus F(\partial\Lambda)$ *si ha:*

$$\deg(F, \Lambda, y) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\det L) & \text{se } y \in F(\Lambda), \\ 0 & \text{se } y \notin F(\overline{\Lambda}). \end{cases}$$

1.1.5 Corollario. *Sia* $0 \in \Lambda$ *e sia* $L : X \to X$ *un'applicazione lineare che non ammetta* 1 *come autovalore.*
Allora

$$\deg(\operatorname{Id} - L, \Lambda, 0) = (-1)^m,$$

dove m *denota la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di* L *maggiori di* 1 *(si conviene che* $m = 0$ *se non esistono autovalori maggiori di 1).*

1.1.6 Corollario. *Sia* $0 \in \Lambda$ *e sia* $L : X \to X$ *un'applicazione lineare e biiettiva. Allora*

$$\deg(L, \Lambda, 0) = (-1)^m,$$

dove m *denota la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di* L *minori di zero (si conviene che* $m = 0$ *se non esistono autovalori minori di* 0*).*

Dimostrazione. Possiamo scrivere

$$L = \operatorname{Id} - (\operatorname{Id} - L).$$

L'applicazione lineare $(\operatorname{Id} - L)$ non ha 1 tra i suoi autovalori e, detto λ un suo autovalore e $x \in X$ un relativo autovettore, risulta

$$(x - Lx) = \lambda x \Leftrightarrow Lx = (1 - \lambda)x \Leftrightarrow Lx = \mu x$$

con $\mu < 0$ se e solo se $\lambda > 1$, da cui la tesi. □

1.1.7 Teorema (Criterio di esistenza). *Siano* $F \in C(\partial\Lambda; X)$ *ed* $y \in X \setminus F(\partial\Lambda)$ *tali che* $\deg(F, \Lambda, y) \neq 0$.
Allora per ogni $\widehat{F} \in C(\overline{\Lambda}; X)$ *con* $\widehat{F}_{|\partial\Lambda} = F$ *si ha* $y \in \widehat{F}(\Lambda)$.

1.1.8 Teorema (Additività). *Sia* $F \in C(\partial\Lambda; X)$*, sia* $\{\Lambda_j : j \in J\}$ *una famiglia di aperti in* Λ *a due a due disgiunti che ricopre* Λ *e sia* $y \in X \setminus F(\partial\Lambda)$.
Allora $y \notin F(\partial\Lambda_j)$ *per ogni* $j \in J$, $\deg(F, \Lambda_j, y) \neq 0$ *solo per un numero finito di* $j \in J$ *e si ha*

$$\deg(F, \Lambda, y) = \sum_{j \in J} \deg(F, \Lambda_j, y).$$

1.1.9 Teorema (Excisione). *Siano* Γ *un aperto contenuto in* Λ, $F \in C(\overline{\Lambda} \setminus \Gamma; X)$ *ed* $y \in X \setminus F(\overline{\Lambda} \setminus \Gamma)$.
Allora $y \notin F(\partial\Lambda)$, $y \notin F(\partial\Gamma)$ *e si ha*

$$\deg(F, \Lambda, y) = \deg(F, \Gamma, y).$$

1.1.10 Teorema (Invarianza omotopica). *Sia* $\mathcal{H} : \partial\Lambda \times [0,1] \to X$ *un'applicazione continua e sia* $y \in X \setminus \mathcal{H}(\partial\Lambda \times [0,1])$.
Allora la funzione

$$\{t \mapsto \deg(\mathcal{H}(\cdot, t), \Lambda, y)\}$$

è costante su $[0,1]$.

1.1.11 Corollario. *Siano* $a, b \in \mathbb{R}$, Λ *un aperto limitato in* $X \times [a,b]$, $\mathcal{H} : \partial_{X \times [a,b]}\Lambda \to X$ *un'applicazione continua ed* $y \in X \setminus \mathcal{H}(\partial_{X \times [a,b]}\Lambda)$.
Allora, posto

$$\forall t \in [a,b] : \ \Lambda_t = \{x \in X : \ (x,t) \in \Lambda\},$$

si ha che la funzione

$$\{t \mapsto \deg(\mathcal{H}(\cdot, t), \Lambda_t, y)\}$$

è costante su $[a,b]$ *(con la convenzione che* $\deg(\mathcal{H}(\cdot,t), \emptyset, y) = 0$*).*

1.1.12 Proposizione. *Sia* $F \in C(\partial\Lambda; X)$*. Allora la funzione*

$$\{y \mapsto \deg(F, \Lambda, y)\}$$

è costante sulle componenti connesse di $X \setminus F(\partial\Lambda)$ *e nulla su quelle illimitate.*

1.1.13 Definizione. *Sia* $F \in C(\partial\Lambda, X)$ *e sia* $\Gamma \subseteq X \setminus F(\partial\Lambda)$ *un aperto connesso. Poniamo*

$$\deg(F, \Lambda, \Gamma) = \deg(F, \Lambda, y),$$

dove y *è un qualunque elemento di* Γ.

1.1.14 Teorema (**Proprietà moltiplicativa**). *Siano* $F \in C(\partial\Lambda; X)$, $G \in C(F(\partial\Lambda); X)$ *ed* $y \in X \setminus G(F(\partial\Lambda))$. *Sia* $\{\Gamma_j : j \in J\}$ *la famiglia delle componenti connesse limitate di* $X \setminus F(\partial\Lambda)$. *Allora*

$$\bigcup_{j \in J} \partial\Gamma_j \subseteq F(\partial\Lambda),$$

$\deg(G, \Gamma_j, y) \neq 0$ *solo per un numero finito di* $j \in J$ *e si ha*

$$\deg(G \circ F, \Lambda, y) = \sum_{j \in J} \deg(G, \Gamma_j, y) \deg(F, \Lambda, \Gamma_j).$$

1.1.15 Corollario. *Sia* $0 \in \Lambda$ *e sia* $F : \partial\Lambda \to X$ *continua. Supponiamo che esista un prodotto scalare su* X *tale che* $(F(x)|x) > 0$ *per ogni* $x \in \partial\Lambda$.
Allora $\deg(F, \Lambda, 0) = 1$.

Dimostrazione. Definiamo $\mathcal{H} : \partial\Lambda \times [0,1] \to X$ ponendo

$$\mathcal{H}(x,t) = (1-t)x + tF(x)$$

per ogni $(x,t) \in \partial\Lambda \times [0,1]$. Se fosse $\mathcal{H}(x,t) = 0$ per un $(x,t) \in \partial\Lambda \times [0,1]$, allora

$$0 = \big((1-t)x + tF(x)|x\big) = (1-t)\|x\|^2 + t(F(x)|x) > 0$$

da cui l'assurdo. Ne segue che $\mathcal{H}$ verifica le ipotesi del teorema di invarianza omotopica, quindi

$$\deg(F, \Lambda, 0) = \deg(\mathrm{Id}, \Lambda, 0) = 1.$$

□

1.1.16 Corollario. *Sia* $0 \in \Lambda$ *e siano* $L, K : X \to X$ *lineari. Supponiamo che* L *sia biiettiva e che esistano un prodotto scalare su* X, $\overline{\lambda} > 0$ *e* $\nu > 0$ *tali che*

$$\big((L + \overline{\lambda}K)x|x\big) \geq \nu\|x\|^2 \qquad \forall x \in X.$$

Allora

$$\deg(L, \Lambda, 0) = \deg\big((L + \overline{\lambda}K)^{-1} \circ L, \Lambda, 0\big) = \deg\big(\mathrm{Id} - (L + \overline{\lambda}K)^{-1} \circ (\overline{\lambda}K), \Lambda, 0\big) = (-1)^m,$$

dove $m \in \mathbb{N}$ *è la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di* $(L + \overline{\lambda}K)^{-1} \circ (\overline{\lambda}K)$ *maggiori di* 1 *(si conviene che* $m = 0$ *se non esistono autovalori maggiori di* 1*).*

In particolare, gli ultimi due gradi sono indipendenti da K *e da* $\overline{\lambda}$.

Dimostrazione. Poiché

$$(L + \overline{\lambda}K)^{-1} \circ L = \mathrm{Id} - (L + \overline{\lambda}K)^{-1} \circ (\overline{\lambda}K),$$

basta dimostrare la prima uguaglianza.

Per la proprietà moltiplicativa del grado risulta

$$\deg\big((L+\overline{\lambda}K)^{-1}\circ L,\Lambda,0\big)=\deg\big((L+\overline{\lambda}K)^{-1},L(\Lambda),0\big)\ \deg(L,\Lambda,0).$$

Se si definisce

$$\mathcal{H}:\partial\big((L+\overline{\lambda}K)^{-1}\circ L\big)(\Lambda)\times[0,1]\to X$$

ponendo $\mathcal{H}(x,t)=(1-t)(L+\overline{\lambda}K)x+t\nu x$, per ogni $(x,t)\in\partial\big((L+\overline{\lambda}K)^{-1}\circ L\big)(\Lambda)\times[0,1]$ si verifica che $\mathcal{H}(x,t)\neq 0$, infatti

$$(\mathcal{H}(x,t)|x)=(1-t)\big((L+\overline{\lambda}K)x|x\big)+t\nu\|x\|^2\geq\|x\|^2.$$

Ne segue che

$$\deg\big(L+\overline{\lambda}K,(L+\overline{\lambda}K)^{-1}(L(\Lambda)),0\big)=\deg(\nu\,\mathrm{Id},(L+\overline{\lambda}K)^{-1}(L(\Lambda)),0)=1.$$

Sempre per la proprietà moltiplicativa del grado si ha

$$\begin{aligned}1=\deg(\mathrm{Id},L(\Lambda),0)&=\deg\big((L+\overline{\lambda}K)\circ(L+\overline{\lambda}K)^{-1},L(\Lambda),0\big)=\\&=\deg\big(L+\overline{\lambda}K,(L+\overline{\lambda}K)^{-1}(L(\Lambda)),0\big)\ \deg\big((L+\overline{\lambda}K)^{-1},L(\Lambda),0\big),\end{aligned}$$

da cui

$$\deg\big((L+\overline{\lambda}K)^{-1},L(\Lambda),0\big)=1.$$

□

1.1.17 Teorema (Riduzione I). *Siano $F\in C(\partial\Lambda;X)$ ed $y\in X\setminus F(\partial\Lambda)$. Supponiamo che esista un sottospazio vettoriale Y di X tale che $y\in Y$ e $(\mathrm{Id}-F)(\partial\Lambda)\subseteq Y$.*
Allora $y\notin F(\partial_Y(\Lambda\cap Y))$ e

$$\deg(F,\Lambda,y)=\deg(F_{|\partial_Y(\Lambda\cap Y)},\Lambda\cap Y,y).$$

1.1.18 Teorema (Riduzione II). *Sia X uno spazio vettoriale di dimensione finita munito di prodotto scalare, $\Lambda\subseteq X$ un aperto limitato e $F:\partial\Lambda\to X$ continua. Sia Y un sottospazio di X tale che*

$$\{x\in\partial\Lambda:\ (F(x)|x)\leq 0\quad e\quad (F(x)|y)=0\quad\forall y\in Y\}=\emptyset.$$

Allora

$$\begin{aligned}&F(x)\neq 0\quad\forall x\in\partial\Lambda,\\&P_YF(x)\neq 0\quad\forall x\in\partial_Y(\Lambda\cap Y),\\&\deg(F,\Lambda,0)=\deg(P_YF,\Lambda\cap Y,0),\end{aligned}$$

dove $P_Y:X\to Y$ denota la proiezione ortogonale su Y.

Dimostrazione. Si può supporre che F sia estesa con continuità a tutto $\overline{\Lambda}$. È evidente che $F(x) \neq 0$ per ogni $x \in \partial\Lambda$. Poiché $\partial_Y(\Lambda \cap Y) \subseteq Y \cap \partial\Lambda$, è anche chiaro che $P_Y F(x) \neq 0$ per ogni $x \in \partial_Y(\Lambda \cap Y)$. Sia $Z = Y^{\perp}$ e sia ω un aperto in Y tale che $\overline{\omega} \subseteq \Lambda \cap Y$ e

$$P_Y F(x) \neq 0 \qquad \forall x \in \overline{\Lambda} \cap (Y \setminus \omega).$$

Per la proprietà di excisione, risulta

$$\deg(P_Y F, \Lambda \cap Y, 0) = \deg(P_Y F, \omega, 0).$$

Esiste $r > 0$ tale che

$$\overline{\omega} + (\overline{\mathrm{B}(0,r)} \cap Z) \subseteq \Lambda$$

e

$$P_Y F(x) \neq 0 \qquad \forall x \in \overline{\Lambda} \cap ((Y \setminus \omega) + \overline{\mathrm{B}(0,r)} \cap Z).$$

Sia $M > 0$ tale che

$$Mr > \sup_{\overline{\Lambda}} \|F\|$$

e sia

$$G : \overline{\omega} + (\overline{\mathrm{B}(0,r)} \cap Z) \to X$$

tale che $G(x) = P_Y F(x) + M P_Z x$. Per il teorema precedente si ha

$$\deg(G, \omega + (\mathrm{B}(0,r) \cap Z), 0) = \deg\left(\frac{1}{M} G, \omega + (\mathrm{B}(0,r) \cap Z), 0\right),$$

$$\deg(P_Y F, \omega, 0) = \deg\left(\frac{1}{M} P_Y F, \omega, 0\right).$$

Sia ora $x \in \partial(\omega + (\mathrm{B}(0,r) \cap Z))$, allora

$$x - \frac{1}{M} P_Y F(x) - x + P_Y F(x) \in Y.$$

Sia

$$G_t : \overline{\omega} + (\overline{\mathrm{B}(0,r)} \cap Z) \to X$$

definita da

$$G_t(x) = (1-t) P_Y F(x) + t F(x) + M P_Z x.$$

Se si avesse $x \in \partial(\omega + (\mathrm{B}(0,r) \cap Z))$ con $G_t(x) = 0$, allora da

$$P_Y F(x) + t(F(x) - P_Y F(x)) + M P_Z x = 0,$$

tenuto conto che $t(F(x) - P_Y F(x)) + M P_Z x \in Z$, si ha $P_Y F(x) = 0$, il che è assurdo.

Consideriamo ora

$$F_t : \overline{\Lambda} \to X$$

definita da

$$F_t(x) = F(x) + tMP_Z x.$$

Sia $x \in \overline{\Lambda} \setminus (\omega + (\mathrm{B}(0,r) \cap Z))$, da

$$F_1(X) = F(x) + MP_Z x = P_Y F(x) + (P_Z F(x) + MP_Z x)$$

segue che sia nel caso in cui $x \in \overline{\Lambda}$ con $\|P_Z x\| \geq r$, sia nel caso $x \in \overline{\Lambda}$ con $\|P_Z x\| < r$ e quindi $P_Y x \notin \omega$ siamo nelle condizioni di applicare la proprietà di excisione, dunque

$$\deg(F_1, \omega + (\mathrm{B}(0,r) \cap Z), 0) = \deg(F_1, \Lambda, 0).$$

Se si avesse $x \in \partial\Lambda$ con $F_t(x) = 0$, poiché

$$F_t(x) = F(x) + tMP_Z x = P_Y F(x) + (P_Z F(x) + tMP_Z x),$$

risulterebbe $P_Y F(x) = 0$, da cui $(F(x)|y) = 0$ per ogni $y \in Y$. Inoltre, siccome

$$0 = (F_t(x)|x) = (F(x)|x) + tM\|P_Z x\|^2,$$

allora $(F(x)|x) \leq 0$. Ne segue dunque che $F_t(x) \neq 0$ per ogni $x \in \partial\Lambda$ e per ogni $t \in [0,1]$. Per la proprietà di invarianza omotopica del grado si ha

$$\deg(F_1, \Lambda, 0) = \deg(F, \Lambda, 0),$$

da cui la tesi. □

Osservazione. Anche se F è definita solo su $\partial\Lambda$, l'indicazione dell'aperto Λ non può essere omessa nella definizione del grado. Si considerino ad esempio $F(x) = x$ e

$$\Lambda_1 =]-2,-1[\cup]-1,1[\cup]2,3[,$$
$$\Lambda_2 =]-2,-1[\cup]1,2[\cup]2,3[.$$

Allora $\partial\Lambda_1 = \partial\Lambda_2$ ma $\deg(F, \Lambda_1, 0) = 1$ e $\deg(F, \Lambda_2, 0) = 0$.

1.2 Un approccio alternativo alla dimensione finita

In questa sezione X denoterà uno spazio normato su $\mathbb{R}$ di dimensione finita e Λ un aperto limitato in X. La funzione

$$F : \partial\Lambda \to X'$$

verrà supposta continua e $\varphi \in X' \setminus F(\partial\Lambda)$.

1.2.1 Teorema. *Siano $(\cdot|\cdot)_1$ e $(\cdot|\cdot)_2$ due prodotti scalari su X.*
Allora

$$\deg(R_1^{-1} \circ F, \Lambda, R_1^{-1}(\varphi)) = \deg(R_2^{-1} \circ F, \Lambda, R_2^{-1}(\varphi)),$$

dove con R_1 e R_2 si indicano le due applicazioni da X a valori in X' individuate dal teorema di rappresentazione di Riesz.

1.2.2 Definizione. *Sia* $\varphi \in X' \setminus F(\partial\Lambda)$. *Poniamo*

$$\deg(F, \Lambda, \varphi) = \deg(R^{-1} \circ F, \Lambda, R^{-1}(\varphi)),$$

dove $R : X \to X'$ *è indotta da un qualsiasi prodotto scalare su* X.

Le proprietà seguenti si deducono facilmente dalle corrispondenti proprietà enunciate nella sezione precedente.

1.2.3 Teorema (**Stabilità**). *Se* $\varepsilon > 0$ *è tale che* $\mathrm{B}(\varphi, \varepsilon) \cap F(\partial\Lambda) = \emptyset$ *e se* $G \in C(\partial\Lambda; X')$ *e* $\psi \in X'$ *sono tali che*

$$\|G - F\|_{\infty,\partial\Lambda} + \|\psi - \varphi\| < \varepsilon,$$

si ha $\psi \notin G(\partial\Lambda)$ *e*

$$\deg(G, \Lambda, \psi) = \deg(F, \Lambda, \varphi).$$

1.2.4 Teorema (**Normalizzazione**). *Se* $0 \in \Lambda$, $F : \partial\Lambda \to X'$ *è continua e risulta che* $\langle F(x), x \rangle > 0$ *per ogni* $x \in \partial\Lambda$, *allora* $\deg(F, \Lambda, 0) = 1$.

1.2.5 Teorema (**Criterio di esistenza**). *Siano* $F \in C(\partial\Lambda; X')$ *e* $\varphi \in X' \setminus F(\partial\Lambda)$ *tali che* $\deg(F, \Lambda, \varphi) \neq 0$.
Allora per ogni $\widehat{F} \in C(\overline{\Lambda}, X')$ *con* $\widehat{F}_{|\partial\Lambda} = F$ *si ha* $\varphi \in \widehat{F}(\Lambda)$.

1.2.6 Teorema (**Additività**). *Sia* $F \in C(\partial\Lambda; X')$, *sia* $\{\Lambda_j : j \in J\}$ *una famiglia di aperti in* Λ *a due a due disgiunti che ricopre* Λ *e sia* $\varphi \in X' \setminus F(\partial\Lambda)$.
Allora $\varphi \notin F(\partial\Lambda_j)$ *per ogni* $j \in J$, $\deg(F, \Lambda_j, \varphi) \neq 0$ *solo per un numero finito di* $j \in J$ *e si ha*

$$\deg(F, \Lambda, \varphi) = \sum_{j \in J} \deg(F, \Lambda_j, \varphi).$$

1.2.7 Teorema (**Excisione**). *Siano* Γ *un aperto contenuto in* Λ, $F \in C(\overline{\Lambda} \setminus \Gamma; X')$ *e* $\varphi \in X' \setminus F(\overline{\Lambda} \setminus \Gamma)$.
Allora $\varphi \notin F(\partial\Lambda)$, $\varphi \notin F(\partial\Gamma)$ *e si ha*

$$\deg(F, \Lambda, \varphi) = \deg(F, \Gamma, \varphi).$$

1.2.8 Teorema (**Invarianza omotopica**). *Sia* $\mathcal{H} : \partial\Lambda \times [0,1] \to X'$ *un'applicazione continua e sia* $\varphi \in X' \setminus \mathcal{H}(\partial\Lambda \times [0,1])$.
Allora la funzione

$$\{t \mapsto \deg(\mathcal{H}(\cdot, t), \Lambda, \varphi)\}$$

è costante su $[0,1]$.

1.2.9 Corollario. *Siano* $a, b \in \mathbb{R}$, Λ *un aperto limitato in* $X \times [a,b]$, $\mathcal{H} : \partial_{X\times[a,b]}\Lambda \to X'$ *un'applicazione continua e* $\varphi \in X' \setminus \mathcal{H}(\partial_{X\times[a,b]}\Lambda)$.
Allora, posto

$$\forall t \in [a,b] : \ \Lambda_t = \{x \in X : \ (x,t) \in \Lambda\},$$

si ha che la funzione

$$\{t \mapsto \deg(\mathcal{H}(\cdot, t), \Lambda_t, \varphi)\}$$

è costante su $[a, b]$ *(con la convenzione che* $\deg(\mathcal{H}(\cdot, t), \emptyset, \varphi) = 0$*).*

1.2.10 Corollario. *Siano* $0 \in \Lambda$ *e* $L, K : X \to X'$ *lineari. Supponiamo che* L *sia biiettivo e che esistano* $\overline{\lambda} > 0$ *e* $\nu > 0$ *tali che*

$$\big\langle (L + \overline{\lambda} K)x, x \big\rangle \geq \nu \|x\|^2 \qquad \forall x \in X.$$

Allora

$$\deg(L, \Lambda, 0) = \deg\big((L + \overline{\lambda}K)^{-1} \circ L, \Lambda, 0\big) = \deg\big(\operatorname{Id} - (L + \overline{\lambda}K)^{-1} \circ (\overline{\lambda}K), \Lambda, 0\big) = (-1)^m,$$

dove $m \in \mathbb{N}$ *è la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di* $(L + \overline{\lambda}K)^{-1} \circ (\overline{\lambda}K)$ *maggiori di* 1 *(si conviene che* $m = 0$ *se non esistono autovalori maggiori di* 1*).*

In particolare, gli ultimi due gradi sono indipendenti da K *e da* $\overline{\lambda}$*.*

1.2.11 Teorema (Riduzione III). *Sia* Y *un sottospazio di* X *tale che*

$$\{x \in \partial\Lambda : \langle F(x), x \rangle \leq 0 \quad e \quad \langle F(x), y \rangle \quad \forall y \in Y\} = \emptyset$$

e sia

$$F_Y : \partial_Y(\Lambda \cap Y) \to Y'$$

definita da

$$F_Y(x) = (i' \circ F)(x),$$

dove $i : Y \to X$ *è l'immersione naturale e* $i' : X' \to Y'$ *è l'applicazione duale.*
Allora risulta

$$\begin{aligned} &F(x) \neq 0 \quad \forall x \in \partial\Lambda, \\ &(i' \circ F)(x) \neq 0 \quad \forall x \in \partial_Y(\Lambda \cap Y), \\ &\deg(F, \Lambda, 0) = \deg(F_Y, \Lambda \cap Y, 0). \end{aligned}$$

Capitolo 2

Grado topologico per applicazioni di classe S_+

In questo capitolo trattiamo l'estensione del grado alla dimensione infinita come in [6, 9, 11].

2.1 Alcuni fatti generali

2.1.1 Proposizione. *Siano X uno spazio normato, E un sottoinsieme limitato di X e $x \in X$ un punto aderente ad E rispetto alla topologia debole.*
Allora esiste un sottospazio vettoriale X_0 separabile e chiuso in X tale che $x \in X_0$ e tale che x sia aderente ad $E \cap X_0$ rispetto alla topologia debole di X_0.

Dimostrazione. Dati $m, n \geq 1$ e $\xi \in E$, si ha che

$$A_\xi^{m,n} = \left\{(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in (X')^n : |\langle \varphi_j, \xi - x\rangle| < \frac{1}{m} \quad \forall j = 1, \ldots, n\right\}$$

è un aperto in $(X')^n$ rispetto alla topologia debole*. Inoltre per ogni $m, n \geq 1$, risulta

$$(X')^n = \bigcup_{\xi \in E} A_\xi^{m,n}.$$

Per il teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki, esiste un insieme finito $F^{m,n} \subseteq E$ tale che

$$\{(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in (X')^n : \|\varphi_j\| \leq 1 \quad \forall j = 1, \ldots, n\} \subseteq \bigcup_{\xi \in F^{m,n}} A_\xi^{m,n}.$$

Sia X_0 il sottospazio vettoriale chiuso generato da

$$\left(\bigcup_{m \geq 1 \text{ e } n \geq 1} F^{m,n}\right) \cup \{x\}.$$

Dati $\psi_1, \ldots, \psi_n \in (X_0)'$ con $\|\psi_j\| \leq 1$ per ogni $j = 1, \ldots, n$ ed $\varepsilon > 0$, siano $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in X'$ con $\|\varphi_j\| \leq 1$ e $\varphi_{j|X_0} = \psi_j$. Sia poi $m \geq 1$ con $\frac{1}{m} \leq \varepsilon$ e sia $\xi \in F^{m,n} \subseteq E \cap X_0$ tale che $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in A_\xi^{m,n}$. Allora risulta

$$| \langle \psi_j, \xi - x \rangle | < \frac{1}{m} \leq \varepsilon \qquad \forall j = 1, \ldots, n$$

per cui x è aderente a $E \cap X_0$ rispetto alla topologia debole di X_0. □

2.1.2 Corollario. *Siano X uno spazio di Banach riflessivo, E un sottoinsieme limitato di X e $x \in X$ un punto aderente ad E rispetto alla topologia debole.*
Allora esiste una successione (ξ_n) in E debolmente convergente a x.

Dimostrazione. Sia X_0 un sottospazio vettoriale separabile e chiuso in X come nella proposizione precedente. Poiché la topologia debole di X_0 è metrizzabile sui limitati, esiste una successione (ξ_n) in $E \cap X_0$ debolmente convergente a x in X_0. Ovviamente (ξ_n) è debolmente convergente a x anche in X. □

2.1.3 Definizione. *Siano X, Y due spazi normati ed $E \subseteq X$. Un'applicazione $\Phi : E \to Y$ si dice* completamente continua *se*

(a) Φ è continua;

(b) per ogni successione limitata (x_h) in E, la successione $(\Phi(x_h))$ ammette una sottosuccessione fortemente convergente in Y.

2.1.4 Teorema. *Siano $E \subseteq X$, Y di Banach e (Φ_h) una successione di applicazioni da E in Y completamente continue uniformemente convergente sui limitati ad un'applicazione $\Phi : E \to Y$. Allora Φ è completamente continua.*

Dimostrazione. Ovviamente Φ è continua. Poiché Y è completo, basta dimostrare che $\Phi(B)$ è totalmente limitato per ogni $B \subseteq E$ con B limitato.

Dato $\varepsilon > 0$, sia $h \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sup_{x \in B} \|\Phi_h(x) - \Phi(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Essendo $\Phi_h(B)$ totalmente limitato, si ha

$$\Phi_h(B) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} B_j$$

con $\mathrm{diam}(B_j) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Posto

$$C_j = \Big\{ y \in Y : \, d(y, B_j) \leq \frac{\varepsilon}{3} \Big\},$$

risulta $\mathrm{diam}(C_j) \leq \varepsilon$ e

$$\Phi(B) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} C_j,$$

per cui $\Phi(B)$ è totalmente limitato. □

2.1.5 Definizione. *Sia $K : X \to X$ un operatore compatto. Per ogni autovalore $\lambda \neq 0$ esiste $n_\lambda \in \mathbb{N}$ tale che*

$$\mathcal{N}\big((K - \lambda\,\mathrm{Id})^n\big) = \mathcal{N}\big((K - \lambda\,\mathrm{Id})^{n_\lambda}\big) \qquad \forall n \geq n_\lambda.$$

Poniamo $\dim\big(\mathcal{N}\big((K - \lambda\,\mathrm{Id})^{n_\lambda}\big)\big)$ *la* molteplicità algebrica *dell'autovalore λ.*

Siano ora X uno spazio di Banach su $\mathbb{R}$ e $L, K : X \to X'$ due applicazioni lineari e continue. Supponiamo che K sia compatto e che esistano $\overline{\lambda} > 0$ e $\nu > 0$ tali che

$$\big\langle (L + \overline{\lambda} K)x, x \big\rangle \geq \nu \|x\|^2 \qquad \forall x \in X.$$

Osserviamo che

$$\big\langle (L + \overline{\lambda} K)x, y \big\rangle + \big\langle (L + \overline{\lambda} K)y, x \big\rangle$$

è un prodotto scalare su X che induce una norma equivalente a quella originaria.

2.1.6 Definizione. *Diciamo che $\lambda \in \mathbb{R}$ è un* autovalore *di (L, K) se esiste $x \in X \setminus \{0\}$ tale che $Lx = \lambda K x$.*

2.1.7 Proposizione. *Siano $\overline{\lambda} > 0$ e $\nu > 0$ come da ipotesi. Allora, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, valgono i seguenti fatti:*

(a) λ è un autovalore di (L, K) se e solo se $\lambda \neq -\overline{\lambda}$ e $\frac{\overline{\lambda}}{\overline{\lambda}+\lambda}$ è un autovalore dell'operatore compatto

$$(L + \overline{\lambda} K)^{-1} \circ (\overline{\lambda} K) : X \to X;$$

inoltre

$$\mathcal{N}(L - \lambda K) = \mathcal{N}\left((L + \overline{\lambda} K)^{-1} \circ (\overline{\lambda} K) - \frac{\overline{\lambda}}{\overline{\lambda} + \lambda}\,\mathrm{Id} \right);$$

(b) la molteplicità algebrica di $\frac{\overline{\lambda}}{\overline{\lambda}+\lambda}$ è indipendente da $\overline{\lambda}$.

Dimostrazione. (a) Dato $\lambda \in \mathbb{R}$ possiamo scrivere

$$L - \lambda K = (L + \overline{\lambda} K) - (\overline{\lambda} + \lambda) K = (L + \overline{\lambda} K) \left(\mathrm{Id} - \frac{(\overline{\lambda} + \lambda)}{\overline{\lambda}} (L + \overline{\lambda} K)^{-1} \circ (\overline{\lambda} K) \right),$$

da cui la tesi.

(b) Siano $\widehat{\lambda} > 0$ e $\widehat{\nu} > 0$ tali che

$$\Big\langle (L + \widehat{\lambda} K)x, x \Big\rangle \geq \widehat{\nu} \|x\|^2 \qquad \forall x \in X.$$

Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ risulta

$$\begin{aligned} L - \lambda K &= (L + \overline{\lambda} K) - (\overline{\lambda} + \lambda) K = (L + \overline{\lambda} K) \left(\mathrm{Id} - \frac{(\overline{\lambda} + \lambda)}{\overline{\lambda}} (L + \overline{\lambda} K)^{-1} \circ (\overline{\lambda} K) \right) = \\ &= (L + \widehat{\lambda} K) \left(\mathrm{Id} - \frac{(\widehat{\lambda} + \lambda)}{\widehat{\lambda}} (L + \widehat{\lambda} K)^{-1} \circ (\widehat{\lambda} K) \right), \end{aligned}$$

da cui segue che

$$\mathrm{Id} - \frac{\widehat{\lambda}+\lambda}{\widehat{\lambda}}(L+\widehat{\lambda}K)^{-1}\circ(\widehat{\lambda}K) = \Big((L+\widehat{\lambda}K)^{-1}\circ(L+\overline{\lambda}K)\Big)\Big(\mathrm{Id} - \frac{\overline{\lambda}+\lambda}{\overline{\lambda}}(L+\overline{\lambda}K)^{-1}\circ(\overline{\lambda}K)\Big). \quad (2.1)$$

Ponendo $\lambda = -\widehat{\lambda}$ si ottiene

$$\mathrm{Id} = \Big((L+\widehat{\lambda}K)^{-1}\circ(L+\overline{\lambda}K)\Big)\Big(\mathrm{Id} - \frac{\overline{\lambda}-\widehat{\lambda}}{\overline{\lambda}}(L+\overline{\lambda}K)^{-1}\circ(\overline{\lambda}K)\Big),$$

quindi

$$(L+\overline{\lambda}K)^{-1}\circ(L+\widehat{\lambda}K) = \mathrm{Id} - \frac{(\overline{\lambda}-\widehat{\lambda})}{\overline{\lambda}}(L+\overline{\lambda}K)^{-1}\circ(\overline{\lambda}K)$$

e infine

$$\frac{\overline{\lambda}-\widehat{\lambda}}{\overline{\lambda}}(L+\overline{\lambda}K)^{-1}\circ(\overline{\lambda}K) = \mathrm{Id} - (L+\overline{\lambda}K)^{-1}\circ(L+\widehat{\lambda}K).$$

Ne segue che $(L+\overline{\lambda}K)^{-1}\circ(\overline{\lambda}K)$ e $(L+\overline{\lambda}K)^{-1}\circ(L+\widehat{\lambda}K)$ commutano.

Tenendo conto dell'equazione (2.1), risulta che se $\frac{\overline{\lambda}}{\overline{\lambda}+\lambda}$ è autovalore dell'operatore $(L+\overline{\lambda}K)^{-1}\circ(\overline{\lambda}K)$, allora $\frac{\widehat{\lambda}}{\widehat{\lambda}+\lambda}$ è autovalore dell'operatore $(L+\widehat{\lambda}K)^{-1}\circ(\widehat{\lambda}K)$ e inoltre, per ogni $m\in\mathbb{N}$,

$$\mathcal{N}\left(\left(\mathrm{Id} - \frac{\widehat{\lambda}+\lambda}{\widehat{\lambda}}(L+\widehat{\lambda}K)^{-1}\circ(\widehat{\lambda}K)\right)^m\right) =$$
$$= \Big((L+\widehat{\lambda}K)^{-1}\circ(L+\overline{\lambda}K)\Big)^m \mathcal{N}\left(\left(\mathrm{Id} - \frac{\overline{\lambda}+\lambda}{\overline{\lambda}}(L+\overline{\lambda}K)^{-1}\circ(\overline{\lambda}K)\right)^m\right),$$

da cui segue che la molteplicità algebrica è la stessa. □

2.1.8 Definizione. *Sia $\lambda\in\mathbb{R}$ un autovalore di (L,K). Chiamiamo* molteplicità algebrica *di λ la molteplicità algebrica di $\frac{\overline{\lambda}}{\overline{\lambda}+\lambda}$ per l'operatore $(L+\overline{\lambda}K)^{-1}\circ(\overline{\lambda}K)$.*

2.2 Applicazioni di classe S_+

2.2.1 Definizione. *Siano X, Y due spazi normati, $E\subseteq Y$ e $F: E\to X'$. F si dice* demicontinua *se per ogni $y_h\to y$ in E ed ogni $x\in X$ si ha*

$$\langle F(y_h), x\rangle \to \langle F(y), x\rangle\,.$$

2.2.2 Definizione. *Siano X uno spazio normato su $\mathbb{R}$, $E\subseteq X$ e $F: E\to X'$. F si dice di* classe S_+ *se per ogni $x_h \rightharpoonup x$ in X con $x_h\in E$ e*

$$\limsup_h \langle F(x_h), x_h - x\rangle \le 0,$$

risulta $\|x_h - x\|\to 0$.

2.2.3 Proposizione. *Siano X spazio normato su $\mathbb{R}$, $E, E_1, E_2 \subseteq X$. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) se $F_1 : E_1 \to X'$ e $F_2 : E_2 \to X'$ sono di classe S_+, allora $(F_1 + F_2) : E_1 \cap E_2 \to X'$ è di classe S_+;

(b) se $F : E \to X'$ è di classe S_+ e $t > 0$, allora $tF : E \to X'$ è di classe S_+;

(c) se $F : E \to X'$ è di classe S_+ e $G : E \to X'$ è completamente continua, allora $(F + G)$ è di classe S_+;

(d) se $F : E \to X'$ è di classe S_+ e $\varphi \in X'$, allora $(F - \varphi) : E \to X'$ è di classe S_+.

Dimostrazione. (a) Sia $x_h \rightharpoonup x$ con

$$\limsup_h \langle F_1(x_h) + F_2(x_h), x_h - x\rangle \leq 0.$$

Per assurdo supponiamo che esista $\varepsilon > 0$ e una sottosuccessione (x_{h_k}) tale che $\|x_{h_k} - x\| \geq \varepsilon$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. A meno di ulteriori sottosuccessioni esistono

$$\lim_k \langle F_1(x_{h_k}), x_{h_k} - x\rangle \in \overline{\mathbb{R}},$$
$$\lim_k \langle F_2(x_{h_k}), x_{h_k} - x\rangle \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Necessariamente i due limiti devono essere strettamente positivi, da cui l'assurdo.

(b) Ovvio, basta raccogliere $t > 0$.

(c) Sia $x_h \rightharpoonup x$ con (x_h) in E e

$$\limsup_h \langle (F + G)(x_h), x_h - x\rangle \leq 0.$$

A meno di una sottosuccessione si ha $G(x_h)$ convergente a $G(x)$ in X', quindi

$$\lim_h \langle G(x_h), x_h - x\rangle = 0.$$

Ne segue

$$\limsup_h \langle F(x_h), x_h - x\rangle \leq 0,$$

per cui $\|x_h - x\| \to 0$.

(d) Segue dal punto (c) ponendo $G(x) = \varphi$ per ogni $x \in E$.

□

Nel seguito di questa sezione considereremo il caso in cui X sia uno spazio di Banach su $\mathbb{R}$ riflessivo e Λ un aperto limitato in X. Inoltre la funzione $F : \partial\Lambda \to X'$ verrà supposta demicontinua e di classe S_+.

2.2.4 Lemma. *Supponiamo $F(x) \neq 0$ per ogni $x \in \partial\Lambda$.*
Allora esiste un sottospazio $Y_0 \subseteq X$ di dimensione finita tale che

$$\{x \in \partial\Lambda : \langle F(x), x\rangle \leq 0 \quad e \quad \langle F(x), y\rangle = 0 \quad \forall y \in Y_0\} = \emptyset.$$

Dimostrazione. Per assurdo sia

$$\{x \in \partial\Lambda : \langle F(x), x\rangle \leq 0 \quad \text{e} \quad \langle F(x), y\rangle = 0 \quad \forall y \in Y\} \neq \emptyset$$

per ogni $Y \leq X$ di dimensione finita e sia C_Y la chiusura debole in X di tale insieme. Chiaramente C_Y è debolmente compatto e non vuoto. Inoltre, presi $Y_1, \ldots, Y_k$ sottospazi di X di dimensione finita, risulta

$$C_{Y_1} \cap \ldots \cap C_{Y_k} = C_{Y_1+\ldots+Y_k} \neq \emptyset.$$

Sia dunque

$$\overline{x} \in \bigcap_{\{Y:\dim Y<+\infty\}} C_Y \neq \emptyset,$$

e siano $z \in X$ e Y un sottospazio di X di dimensione finita con $\overline{x}, z \in Y$.

Esiste una successione $x_h \rightharpoonup \overline{x}$ con $x_h \in \partial\Lambda$, $\langle F(x_h), x_h\rangle \leq 0$ e $\langle F(x_h), y\rangle = 0$ per ogni $y \in Y$. In particolare si ha $\langle F(x_h), \overline{x}\rangle = 0$, quindi $\langle F(x_h), x_h - \overline{x}\rangle \leq 0$. Da ciò, ricordando che F è di classe S_+, si ha $\|x_h - \overline{x}\| \to 0$ e $\overline{x} \in \partial\Lambda$. Inoltre, per la demicontinuità della F, si ottiene

$$\langle F(x_h), z\rangle \to \langle F(\overline{x}), z\rangle\,,$$

da cui segue che $\langle F(\overline{x}), z\rangle = 0$ per ogni $z \in X$. Pertanto $F(\overline{x}) = 0$, da cui l'assurdo. □

2.2.5 Definizione. *Sia $Y \subseteq X$ di dimensione finita. Definiamo*

$$F_Y : \partial_Y(\Lambda \cap Y) \to Y'$$

come quella applicazione tale che per ogni $x \in \partial_Y(\Lambda \cap Y)$

$$F_Y(x) = (i' \circ F)(x),$$

dove $i : Y \to X$ è l'inclusione e $i' : X' \to Y'$ è l'applicazione duale.

2.2.6 Proposizione. *Sia Y_0 un sottospazio di dimensione finita tale che*

$$\{x \in \partial\Lambda : \langle F(x), x\rangle \leq 0 \quad e \quad \langle F(x), y\rangle = 0 \quad \forall y \in Y_0\} = \emptyset$$

e siano Y_1, Y_2 due sottospazi di dimensione finita tali che $Y_0 \subseteq Y_1$ e $Y_0 \subseteq Y_2$.
Allora

$$0 \notin F_{Y_1}(\partial_{Y_1}(\Lambda \cap Y_1)) \quad e \quad 0 \notin F_{Y_2}(\partial_{Y_2}(\Lambda \cap Y_2))$$

ed inoltre

$$\deg(F_{Y_1}, \Lambda \cap Y_1, 0) = \deg(F_{Y_2}, \Lambda \cap Y_2, 0).$$

Dimostrazione. Risulta

$$\{x \in \partial(\Lambda \cap Y_0) : \langle F_{Y_1}(x), x\rangle \leq 0 \quad \text{e} \quad \langle F_{Y_1}(x), y\rangle = 0 \quad \forall y \in Y_0\} = \emptyset.$$

Infatti $\partial(\Lambda \cap Y_0) \subseteq Y_0 \cap \partial\Lambda$ e, considerate le immersioni

$$\begin{aligned} i_{Y_1} &: Y_1 \to X, \\ i_{Y_2} &: Y_2 \to X, \\ i_{1,Y_0} &: Y_0 \to Y_1, \\ i_{2,Y_0} &: Y_0 \to Y_2, \end{aligned}$$

e le rispettive applicazioni duali, si ha che

$$\begin{aligned} \langle F_{Y_1}(x), x\rangle &= \left\langle i'_{Y_1} F(x), x\right\rangle = \langle F(x), x\rangle\,, \\ \langle F_{Y_1}(x), y\rangle &= \langle F(x), y\rangle \qquad \forall y \in Y_0. \end{aligned}$$

Per il teorema (1.2.11) risulta

$$\deg(F_{Y_1}, \Lambda \cap Y_1, 0) = \deg(i'_{1,Y_0} \circ i'_{Y_1} F, \Lambda \cap Y_0, 0),$$

e analogamente

$$\deg(F_{Y_2}, \Lambda \cap Y_2, 0) = \deg(i'_{2,Y_0} \circ i'_{Y_2} F, \Lambda \cap Y_0, 0).$$

Se $x \in \partial(\Lambda \cap Y_0)$ e $y \in Y_0$ si ottiene

$$\begin{aligned} \left\langle i'_{1,Y_0} \circ i'_{Y_1} F(x), y\right\rangle &= \langle F(x), y\rangle\,, \\ \left\langle i'_{2,Y_0} \circ i'_{Y_2} F(x), y\right\rangle &= \langle F(x), y\rangle\,, \end{aligned}$$

da cui la tesi. □

2.2.7 Definizione. *Sia $\varphi \in X' \setminus F(\partial\Lambda)$. Poniamo*

$$\deg(F, \Lambda, \varphi) = \deg((F - \varphi)_Y, \Lambda \cap Y, 0),$$

dove Y è un qualunque sottospazio vettoriale di X di dimensione finita tale che

$$\{x \in \partial\Lambda : \langle F(x) - \varphi, x\rangle \leq 0 \quad e \quad \langle F(x) - \varphi, y\rangle = 0 \quad \forall y \in Y\} = \emptyset.$$

Dal momento che, per definizione, il grado è un opportuno grado in dimensione finita, nelle applicazioni verranno tenute presenti le proprietà richiamate nella sezione (1.2).

2.2.8 Teorema (Criterio di esistenza). *Sia $\varphi \in X' \setminus F(\partial\Lambda)$ tale che* $\deg(F, \Lambda, \varphi) \neq 0$. *Allora per ogni $\widehat{F} \in C(\overline{\Lambda}; X')$ con $\widehat{F}_{|\partial\Lambda} = F$ si ha $y \in \widehat{F}(\Lambda)$.*

Dimostrazione. Sia $Y \leq X$ sottospazio vettoriale di dimensione finita tale che

$$\{x \in \partial\Lambda : \langle F(x) - \varphi, x\rangle \leq 0 \quad \text{e} \quad \langle F(x) - \varphi, y\rangle = 0 \quad \forall y \in Y\} = \emptyset.$$

Per definizione

$$\deg(F, \Lambda, \varphi) = \deg((F - \varphi)_Y, \Lambda \cap Y, 0) \neq 0.$$

Allora, per il criterio di esistenza in dimensione finita, per ogni $\widehat{F} \in C(\overline{\Lambda}; X')$ con $\widehat{F}_{|\partial\Lambda} = F$ si ha $\varphi \in \widehat{F}(\Lambda \cap Y)$, da cui la tesi. $\square$

2.2.9 Teorema (**Excisione**). *Siano $\varphi \in X'$, $\Gamma \subseteq \Lambda$ aperto limitato in X, $F : \overline{\Lambda} \setminus \Gamma \to X'$ demicontinua e di classe S_+ tali che $F(x) \neq \varphi$ per ogni $x \in \overline{\Lambda} \setminus \Gamma$.*
Allora

$$\deg(F, \Lambda, \varphi) = \deg(F, \Gamma, \varphi).$$

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che esiste $Y \leq X$ di dimensione finita tale che

$$\{x \in \overline{\Lambda} \setminus \Gamma : \langle F(x) - \varphi, x\rangle \leq 0 \quad \text{e} \quad \langle F(x) - \varphi, y\rangle = 0 \quad \forall y \in Y\} = \emptyset.$$

Per assurdo supponiamo che per ogni $Y \leq X$ di dimensione finita si abbia

$$\{x \in \overline{\Lambda} \setminus \Gamma : \langle F(x) - \varphi, x\rangle \leq 0 \quad \text{e} \quad \langle F(x) - \varphi, y\rangle = 0 \quad \forall y \in Y\} \neq \emptyset.$$

Indichiamo allora con C_Y la chiusura debole di questi insiemi in X. Chiaramente ogni C_Y è non vuoto e debolmente compatto. Inoltre, dati $Y_1, \ldots, Y_k$ sottospazi di X di dimensione finita, risulta

$$C_{Y_1} \cap \ldots \cap C_{Y_k} = C_{Y_1 + \ldots + Y_k} \neq \emptyset,$$

da cui segue che esiste $\overline{x} \in X$ tale che

$$\overline{x} \in \bigcap_{\{Y : \dim Y < +\infty\}} C_Y \neq \emptyset.$$

Dato $z \in X$, sia $Y \leq X$ di dimensione finita tale che $z, \overline{x} \in Y$. Esiste una successione (x_h) in $\overline{\Lambda} \setminus \Gamma$ debolmente convergente a $\overline{x}$ in X tale che $\langle F(x_h) - \varphi, x_h\rangle \leq 0$ e $\langle F(x_h) - \varphi, y\rangle = 0$ per ogni $y \in Y$. Risulta $\langle F(x_h) - \varphi, \overline{x}\rangle = 0$, perciò

$$\langle F(x_h) - \varphi, x_h - \overline{x}\rangle \leq 0,$$

da cui segue $\|x_h - \overline{x}\| \to 0$ e $\overline{x} \in \overline{\Lambda} \setminus \Gamma$. Per demicontinuità si ottiene

$$\langle F(x_h) - \varphi, z\rangle \to \langle F(\overline{x}) - \varphi, z\rangle,$$

dunque $\langle F(\overline{x}) - \varphi, z\rangle = 0$ per ogni $z \in X$, ossia $F(\overline{x}) = \varphi$ con $\overline{x} \in \overline{\Lambda} \setminus \Gamma$, da cui l'assurdo.

Sia $Y \leq X$ un sottospazio vettoriale di dimensione finita tale che

$$\{x \in \overline{\Lambda} \setminus \Gamma : \langle F(x) - \varphi, x\rangle \quad \text{e} \quad \langle F(x) - \varphi, y\rangle \quad \forall y \in Y\} = \emptyset.$$

Allora risulta

$$\deg(F, \Lambda, \varphi) = \deg((F - \varphi)_Y, \Lambda \cap Y, 0) = \deg((F - \varphi)_Y, \Gamma \cap Y, 0) = \deg(F, \Gamma, \varphi),$$

da cui la tesi. $\square$

2.2.10 Teorema (Additività). *Siano $\{\Lambda_j \,:\, j \in J\}$ una famiglia di aperti in Λ a due a due disgiunti che ricopre Λ e $\varphi \in X'$ tale che $F(x) \neq \varphi$ per ogni $x \in \partial\Lambda$. Allora risulta $F(x) \neq \varphi$ per ogni $x \in \partial\Lambda_j$ ed ogni $j \in J$, $\deg(F, \Lambda_j, \varphi) \neq 0$ solo per un numero finito di $j \in J$ e*

$$\deg(F, \Lambda, \varphi) = \sum_{j\in J} \deg(F, \Lambda_j, \varphi).$$

Dimostrazione. Poiché $\partial\Lambda_j \subseteq \partial\Lambda$, si ha $F(x) \neq \varphi$ per ogni $x \in \partial\Lambda_j$ e per ogni $j \in J$.

Dimostriamo che esiste $Y \leq X$ sottospazio vettoriale di dimensione finita tale che

$$\bigcup_{j\in J} \{x \in \partial\Lambda_j : \langle F(x) - \varphi, x\rangle \leq 0 \quad \text{e} \quad \langle F(x) - \varphi, y\rangle = 0 \quad \forall y \in Y\} = \emptyset.$$

Per assurdo, supponiamo che per ogni $Y \leq X$ di dimensione finita si abbia

$$\bigcup_{j\in J} \{x \in \partial\Lambda_j : \langle F(x) - \varphi, x\rangle \leq 0 \quad \text{e} \quad \langle F(x) - \varphi, y\rangle = 0 \quad \forall y \in Y\} \neq \emptyset.$$

Indichiamo allora con C_Y la chiusura debole di questi insiemi in X. Chiaramente ogni C_Y è non vuoto e debolmente compatto. Inoltre, dati $Y_1, \ldots, Y_k$ sottospazi di X di dimensione finita, risulta

$$C_{Y_1} \cap \ldots \cap C_{Y_k} = C_{Y_1+\ldots+Y_k} \neq \emptyset,$$

da cui segue che esiste $\overline{x} \in X$ tale che

$$\overline{x} \in \bigcap_{\{Y:\dim Y<+\infty\}} C_Y \neq \emptyset.$$

Dato $z \in X$, sia $Y \leq X$ di dimensione finita tale che $z, \overline{x} \in Y$. Esiste una successione (x_h) in $\partial\Lambda$ debolmente convergente a $\overline{x}$ in X tale che

$$\langle F(x_h) - \varphi, x_h\rangle \leq 0, \qquad \langle F(x_h) - \varphi, y\rangle = 0$$

per ogni $y \in Y$. Inoltre si ha $\langle F(x_h) - \varphi, \overline{x}\rangle = 0$, perciò

$$\langle F(x_h) - \varphi, x_h - \overline{x}\rangle \leq 0,$$

da cui segue $\|x_h - \overline{x}\| \to 0$ e $\overline{x} \in \partial\Lambda$. Per demicontinuità si ottiene

$$\langle F(x_h) - \varphi, z\rangle \to \langle F(\overline{x}) - \varphi, z\rangle\,,$$

dunque $\langle F(\overline{x}) - \varphi, z\rangle = 0$ per ogni $z \in X$, ossia $F(\overline{x}) = \varphi$ con $\overline{x} \in \partial\Lambda$, da cui l'assurdo.

Sia dunque $Y \leq X$ sottospazio di dimensione finita tale che

$$\bigcup_{j\in J} \{x \in \partial\Lambda_j : \langle F(x) - \varphi, x\rangle \leq 0 \quad \text{e} \quad \langle F(x) - \varphi, y\rangle = 0 \quad \forall y \in Y\} = \emptyset,$$

allora, per la proprietà di additività del grado in dimensione finita, risulta

$$\deg(F, \Lambda_j, \varphi) = \deg((F - \varphi)_Y, \Lambda_j \cap Y, 0) \neq 0$$

solo per un numero finito di $j \in J$ e

$$\deg(F, \Lambda, \varphi) = \deg((F - \varphi)_Y, \Lambda \cap Y, 0) = \sum_{j \in J} \deg((F - \varphi)_Y, \Lambda_j \cap Y, 0) = \sum_{j \in J} \deg(F, \Lambda_j, \varphi).$$

□

2.2.11 Definizione. *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$, $E \subseteq X$ e $A : E \times I \to X'$. Diciamo che A è di classe S_+ se per ogni $t_h \to t$ in I e per ogni $x_h \rightharpoonup x$ in E con*

$$\limsup_h \langle A(x_h, t_h), x_h - x \rangle \leq 0$$

risulta $\|x_h - x\| \to 0$.

2.2.12 Teorema. *Siano Λ aperto limitato in X, I intervallo in $\mathbb{R}$, $A : \partial\Lambda \times I \to X'$ demicontinuo e di classe S_+ e $\varphi \in X'$ tale che $A(x, t) \neq \varphi$ per ogni $t \in I$ e per ogni $x \in \partial\Lambda$.*
Allora la funzione

$$\{t \longmapsto \deg(A(\cdot, t), \Lambda, \varphi)\}$$

è costante in I.

Dimostrazione. Per ogni $\alpha, \beta \in I$ con $\alpha \leq \beta$ dimostriamo la tesi sull'intervallo $[\alpha, \beta]$.

Dimostriamo innanzitutto che esiste $Y \leq X$ sottospazio di dimensione finita tale che

$$\bigcup_{t \in [\alpha, \beta]} \{x \in \partial\Lambda : \langle A(x, t) - \varphi, x \rangle \leq 0 \text{ e } \langle A(x, t) - \varphi, y \rangle = 0 \quad \forall y \in Y\} = \emptyset.$$

Per assurdo, supponiamo che per ogni $Y \leq X$ sottospazio di dimensione finita si abbia

$$\bigcup_{t \in [\alpha, \beta]} \{x \in \partial\Lambda : \langle A(x, t) - \varphi, x \rangle \leq 0 \text{ e } \langle A(x, t) - \varphi, y \rangle = 0 \quad \forall y \in Y\} \neq \emptyset.$$

Indichiamo allora con C_Y la chiusura debole di questi insiemi in X. Chiaramente ogni C_Y è non vuoto e debolmente compatto. Inoltre, dati $Y_1, \ldots, Y_k$ sottospazi di X di dimensione finita, risulta

$$C_{Y_1} \cap \ldots \cap C_{Y_k} = C_{Y_1 + \ldots + Y_k} \neq \emptyset,$$

da cui segue che esiste $\overline{x} \in X$ tale che

$$\overline{x} \in \bigcap_{\{Y : \dim Y < +\infty\}} C_Y \neq \emptyset.$$

Dato $z \in X$, sia $Y \leq X$ di dimensione finita tale che $z, \overline{x} \in Y$. Allora, esistono una successione (x_h) in $\partial\Lambda$ debolmente convergente a $\overline{x}$ e una successione (t_h) in $[\alpha, \beta]$ tali che

$$\langle A(x_h, t_h) - \varphi, x_h \rangle \leq 0, \qquad \langle A(x_h, t_h) - \varphi, y \rangle = 0$$

per ogni $y \in Y$. A meno di sottosuccessione, $t_h \to t$ in $[\alpha, \beta]$. Inoltre si ha $\langle A(x_h, t_h) - \varphi, \overline{x} \rangle = 0$, da cui segue

$$\langle A(x_h, t_h) - \varphi, x_h - \overline{x} \rangle \leq 0,$$

perciò $x_h \to \overline{x}$ in X e $\overline{x} \in \partial\Lambda$. Per la demicontinuità si ha

$$\langle A(x_h, t_h) - \varphi, z \rangle \to \langle A(\overline{x}, t) - \varphi, z \rangle \,,$$

dunque $\langle A(\overline{x}, t), z \rangle = \langle \varphi, z \rangle$ per ogni $z \in X$, ossia $A(\overline{x}, t) = \varphi$ con $\overline{x} \in \partial\Lambda$, da cui l'assurdo.

Sia ora $Y \leq X$ tale che

$$\bigcup_{t \in [\alpha,\beta]} \{x \in \partial\Lambda : \langle A(x,t) - \varphi, x \rangle \leq 0 \ \text{ e } \ \langle A(x,t) - \varphi, y \rangle = 0 \quad \forall y \in Y\} = \emptyset,$$

definiamo la funzione

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \partial_Y(\Lambda \cap Y) \times [\alpha, \beta] &\longrightarrow Y' \\ (x,t) &\longmapsto (A(x,t) - \varphi)_Y. \end{aligned}$$

Per ogni $(x,t) \in \partial_Y(\Lambda \cap Y) \times [\alpha, \beta]$ si ha $\mathcal{H}(x,t) \neq 0$. Dimostriamo che $\mathcal{H}$ è continua. Sia $(x_h, t_h) \to (x,t)$ in $\partial_Y(\Lambda \cap Y) \times [\alpha, \beta]$. Per ipotesi

$$\langle A(x_h, t_h) - \varphi, y \rangle \to \langle A(x,t) - \varphi, y \rangle \qquad \forall y \in Y.$$

Poiché $\dim Y < +\infty$, allora $A(x_h, t_h) \to A(x,t)$ in Y', perciò $\mathcal{H}$ è continua. Per invarianza omotopica del grado in dimensione finita la funzione

$$\{t \longmapsto \deg(A(\cdot, t) - \varphi)_Y, \Lambda \cap Y, 0)\}$$

è costante sull'intervallo $[\alpha, \beta]$, da cui la tesi. □

2.2.13 Teorema. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, Λ un aperto limitato in $X \times [a,b]$, $A : \partial_{X \times [a,b]}\Lambda \to X'$ demicontinuo e di classe S_+ e $\varphi \in X'$ tale che $A(x, \rho) \neq \varphi$ per ogni $(x, \rho) \in \partial_{X \times [a,b]}\Lambda$.*
Allora, posto

$$\forall \rho \in [a,b] : \ \Lambda_\rho = \{x \in X : \ (x, \rho) \in \Lambda\},$$

la funzione

$$\{\rho \longmapsto \deg(A(\cdot, \rho), \Lambda_\rho, \varphi)\}$$

è costante su $[a,b]$.

Dimostrazione. Dimostriamo che esiste $Y \leq X$ di dimensione finita tale che

$$\bigcup_{\rho \in [a,b]} \{x \in \partial\Lambda_\rho : \langle A(x,\rho) - \varphi, x \rangle \leq 0 \quad \text{e} \quad \langle A(x,\rho) - \varphi, y \rangle = 0 \quad \forall y \in Y\} = \emptyset.$$

Per assurdo supponiamo che per ogni Y sottospazio di X di dimensione finita si abbia

$$\bigcup_{\rho \in [a,b]} \{x \in \partial\Lambda_\rho : \langle A(x,\rho) - \varphi, x \rangle \leq 0 \quad \text{e} \quad \langle A(x,\rho) - \varphi, y \rangle = 0 \quad \forall y \in Y\} \neq \emptyset.$$

Poniamo C_Y la chiusura debole di questi insiemi in X. Chiaramente ogni C_Y è non vuoto e debolmente compatto. Inoltre, dati $Y_1, \ldots, Y_k$ sottospazi di X di dimensione finita, risulta

$$C_{Y_1} \cap \ldots \cap C_{Y_k} = C_{Y_1 + \ldots + Y_k} \neq \emptyset,$$

da cui segue che esiste $\overline{x} \in X$ tale che

$$\overline{x} \in \bigcap_{Y:\dim Y < +\infty} C_Y \neq \emptyset.$$

Dato $z \in X$, sia Y un sottospazio vettoriale di X di dimensione finita tale che $z, \overline{x} \in Y$. Allora esistono una successione (ρ_h) in $[a,b]$, (x_h) debolmente convergente a $\overline{x}$ tali che per ogni $h \in \mathbb{N}$ si abbia $x_h \in \partial\Lambda_{\rho_h}$ e $\langle A(x_h, \rho_h) - \varphi, x_h \rangle \leq 0$ e $\langle A(x_h, \rho_h) - \varphi, y \rangle = 0$ per ogni $y \in Y$. A meno di sottosuccessione $\rho_h \to \rho$ in $[a,b]$. Inoltre risulta

$$\langle A(x_h, \rho_h) - \varphi, \overline{x} \rangle = 0,$$

quindi

$$\langle A(x_h, \rho_h) - \varphi, x_h - \overline{x} \rangle \leq 0,$$

perciò $x_h \to \overline{x}$ in X e $(\overline{x}, \rho) \in \partial_{X \times [a,b]}\Lambda$. Per la demicontinuità si ha

$$\langle A(x_h, \rho_h) - \varphi, z \rangle \to \langle A(\overline{x}, \rho) - \varphi, z \rangle,$$

dunque $\langle A(\overline{x}, \rho), z \rangle = \langle \varphi, z \rangle$ per ogni $z \in X$, ossia $A(\overline{x}, \rho) = \varphi$ con $(\overline{x}, \rho) \in \partial_{X \times [a,b]}\Lambda$, da cui l'assurdo.

Sia dunque $Y \leq X$ di dimensione finita tale che

$$\bigcup_{\rho \in [a,b]} \{x \in \partial\Lambda_\rho : \langle A(x, \rho) - \varphi, x \rangle \leq 0 \quad \text{e} \quad \langle A(x, \rho) - \varphi, y \rangle = 0 \quad \forall y \in Y\} = \emptyset.$$

Dalla definizione di grado si deduce

$$\deg(A(\cdot, \rho), \Lambda_\rho, \varphi) = \deg((A(\cdot, \rho) - \varphi)_Y, \Lambda_\rho \cap Y, 0)$$

per ogni $\rho \in [a,b]$. Per il corollario (1.1.11) si ha

$$\{\rho \longmapsto \deg((A(\cdot, \rho) - \varphi)_Y, \Lambda_\rho \cap Y, 0)\}$$

è costante su $[a,b]$, da cui la tesi. □

Vediamo infine un paragone con il grado di Leray-Schauder.

2.2.14 Teorema. *Siano Λ un aperto limitato in X con $0 \in \Lambda$, $J : X \to X'$ lineare e continua e $K : \partial\Lambda \to X$ completamente continua. Supponiamo inoltre che $0 \notin (\mathrm{Id} - K)(\partial\Lambda)$ e che esista $\nu > 0$ tale che per ogni $x \in X$*

$$\langle Jx, x \rangle \geq \nu \|x\|^2.$$

Allora $0 \in X' \setminus (J(\mathrm{Id} - K))(\partial\Lambda)$ *e*

$$\deg(J \circ (\mathrm{Id} - K), \Lambda, 0) = \deg_{LS}(\mathrm{Id} - K, \Lambda, 0),$$

dove $\deg_{LS}$ *denota il grado di Leray-Schauder.*

Dimostrazione. Anzitutto J è di classe S_+ per la proposizione (2.3.3), dunque è di classe S_+ anche $J \circ (\mathrm{Id} - K) = J - J \circ K$. Poiché J è lineare e biiettiva, allora $0 \in X' \setminus (J(\mathrm{Id} - K))(\partial\Lambda)$. L'applicazione $\mathrm{Id} - K$ è di classe S_+, quindi esiste $Y_1 \leq X$ di dimensione finita tale che

$$\{x \in \partial\Lambda : ((\mathrm{Id} - K)x|x) \leq 0 \quad \text{e} \quad ((\mathrm{Id} - K)x|y) = 0 \quad \forall y \in Y_1\} = \emptyset.$$

Siccome $0 \notin \partial\Lambda$, allora per ogni $x \in \partial\Lambda$ si ha

$$\langle Jx, x\rangle \geq \nu \|x\|^2 > 0,$$

da cui segue

$$\{x \in \partial\Lambda : \langle Jx, x\rangle \leq 0 \quad \text{e} \quad \langle Jx, y\rangle = 0 \quad \forall y \in Y_1\} = \emptyset.$$

Anche $J \circ (\mathrm{Id} - K)$ è di classe S_+, quindi esiste $Y_2 \leq X$ di dimensione finita tale che

$$\{x \in \partial\Lambda : \langle J(\mathrm{Id} - K)x, x\rangle \leq 0 \quad \text{e} \quad \langle J(\mathrm{Id} - K)x, y\rangle = 0 \quad \forall y \in Y_2\} = \emptyset.$$

Sia $Y = Y_1 + Y_2$, allora Y è un sottospazio vettoriale di X di dimensione finita e gli insiemi precedentemente considerati sono ancora vuoti se si sostituiscono Y_1 e Y_2 con Y.

Osserviamo che

$$\langle Jx, y\rangle + \langle Jy, x\rangle$$

definisce un prodotto scalare su X che induce una norma equivalente a quella originale. Possiamo quindi definire $R_X : X \to X'$ l'isomorfismo di Riesz. Risulta allora

$$\begin{aligned}\deg(J \circ (\mathrm{Id} - K), \Lambda, 0) &= \deg\big((J \circ (\mathrm{Id} - K))_Y, \Lambda \cap Y, 0\big) = \\ &= \deg((P_Y \circ R_X^{-1} \circ J) \circ (\mathrm{Id} - K), \Lambda \cap Y, 0).\end{aligned}$$

Siccome K è limitato sui limitati, esiste $r > 0$ tale che $(\mathrm{Id} - K)(\Lambda \cap Y) \subseteq \mathrm{B}(0, r)$. Per la proprietà moltiplicativa del grado in dimensione finita si ha

$$\deg((P_Y \circ R_X^{-1} \circ J) \circ (\mathrm{Id} - K), \Lambda \cap Y, 0) = \deg(P_Y \circ R_X^{-1} \circ J, \mathrm{B}(0, r), 0)\ \deg_{LS}(\mathrm{Id} - K, \Lambda, 0).$$

Dimostriamo che $\deg(P_Y \circ R_X^{-1} \circ J, \mathrm{B}(0, r), 0) = 1$. Definiamo l'applicazione

$$\mathcal{H} : \partial\mathrm{B}(0, r) \times [0, 1] \to X'$$

ponendo

$$\mathcal{H}(x, t) = \nu t x + (1 - t)P_Y(R_X^{-1}(Jx)).$$

Per ogni $(x,t) \in \partial\Lambda \times [0,1]$ risulta

$$\big(\nu t x + (1-t) P_Y(R_X^{-1}(Jx)) | x\big) = \nu t \|x\|^2 + (1-t)\big(P_Y(R_X^{-1}(Jx))|x\big) \geq \|x\|^2,$$

quindi $\mathcal{H}(x,t) \neq 0$ per ogni $(x,t) \in \partial \mathrm{B}(0,r) \times [0,1]$. Per invarianza omotopica si ha

$$\deg(P_Y \circ R_X^{-1} \circ J, \mathrm{B}(0,r), 0) = \deg(\nu\,\mathrm{Id}, \mathrm{B}(0,r), 0) = 1,$$

da cui la tesi. □

2.3 Il caso lineare

In questa sezione consideriamo X spazio di Banach su $\mathbb{R}$ riflessivo, $L : X \to X'$ un'applicazione lineare e continua, $L' : X'' \to X'$ l'operatore duale e $J : X \to X''$ l'isometria canonica definita da

$$\langle Jx, \varphi\rangle = \langle \varphi, x\rangle \qquad \forall x \in X,\, \forall \varphi \in X'.$$

Definiamo

$$L^* = L' \circ J : X \to X'$$

lineare e continua. Per ogni $x, y \in X$ risulta

$$\langle Lx, y\rangle = \langle L^* y, x\rangle\,.$$

2.3.1 Proposizione. *Sia $L : X \to X'$ lineare e continua. Sono fatti equivalenti:*

(a) per ogni aperto limitato e non vuoto Λ in X, $L_{|\partial\Lambda}$ è di classe S_+;

(b) esiste un aperto limitato e non vuoto Λ in X tale che $L_{|\partial\Lambda}$ sia di classe S_+;

(c) $L : X \to X'$ è di classe S_+.

Dimostrazione.

$(a) \Rightarrow (b)$ Ovvio.

$(b) \Rightarrow (c)$ Sia Λ aperto limitato in X tale che $L_{|\partial\Lambda}$ sia di classe S_+. Siano $\overline{x} \in \Lambda$, $R > 0$ con $\Lambda \subseteq \mathrm{B}(0,R)$ e $x_h \rightharpoonup x$ con

$$\limsup_h \langle Lx_h, x_h - x\rangle \leq 0.$$

Supponiamo per assurdo che non si abbia $\|x_h - x\| \to 0$. Allora, a meno di una sottosuccessione, esiste $r > 0$ tale che $\mathrm{B}(\overline{x}, r) \subseteq \Lambda$ e $x_h \notin \mathrm{B}(\overline{x}, r)$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Sia $\rho_h > 0$ tale che

$$\xi_h = \overline{x} + \rho_h(x_h - \overline{x}) \in \partial\Lambda.$$

A meno di un'ulteriore sottosuccessione si ha $\rho_h \to \rho > 0$, quindi

$$\xi_h \rightharpoonup \xi = \overline{x} + \rho(x - \overline{x}).$$

Risulta inoltre

$$\limsup_h \langle L\xi_h, \xi_h - \xi \rangle \leq 0,$$

infatti

$$\lim_h \langle L\overline{x}, \xi_h - \xi \rangle = 0,$$
$$\lim_h \rho_h \langle L\overline{x}, \xi_h - \xi \rangle = 0,$$
$$\lim_h \rho_h(\rho - \rho_h) \langle Lx_h, \overline{x} \rangle = 0,$$
$$\lim_h \rho_h \langle Lx_h, \rho_h x_h - \rho x \rangle \leq 0.$$

Allora $\|\xi_h - \xi\| \to 0$, da cui l'assurdo.

$(c) \Rightarrow (a)$ Ovvio. □

2.3.2 Proposizione. *Sia $L : X \to X'$ lineare e continua. Sono fatti equivalenti:*

(a) L è di classe S_+;

(b) L^* è di classe S_+;

(c) $\frac{1}{2}(L + L^*)$ è di classe S_+;

(d) se $x_h \rightharpoonup 0$ e

$$\limsup_h \langle Lx_h, x_h \rangle \leq 0,$$

allora $\|x_h\| \to 0$.

Dimostrazione.

$(a) \Rightarrow (d)$ Ovvio.

$(d) \Rightarrow (a)$ Sia $x_h \rightharpoonup x$ con

$$\limsup_h \langle Lx_h, x_h - x \rangle \leq 0,$$

allora $(x_h - x) \rightharpoonup 0$ e

$$\limsup_h \langle Lx_x - Lx, x_h - x \rangle \leq 0,$$

quindi $\|x_h - x\| \to 0$.

Poiché per ogni $x \in X$ risulta

$$\langle Lx, x \rangle = \langle L^* x, x \rangle = \frac{1}{2} \langle (L + L^*)x, x \rangle ,$$

tutte le altre equivalenze seguono da quanto appena dimostrato. □

2.3.3 Proposizione. *Siano $J, K : X \to X'$ lineari e continue tali che*

(a) esista $\nu > 0$ tale che

$$\langle Jx, x \rangle \geq \nu \|x\|^2 \qquad \forall x \in X;$$

(b) K sia compatto.

Allora $L = J - K$ è di classe S_+.

Dimostrazione. Sia $x_h \rightharpoonup 0$ in X con

$$\limsup_h \langle Jx_h, x_h \rangle \leq 0.$$

Per ipotesi si ha

$$\langle Jx_h, x_h \rangle \geq \nu \|x_h\|^2,$$

quindi $x_h \to 0$ in X e J è di classe S_+ per la proposizione precedente. Essendo K un operatore compatto, $L = J - K$ è di classe S_+. □

Dimostriamo nel seguente teorema che vale anche il viceversa.

2.3.4 Teorema. *Sia $L : X \to X'$ lineare, continua e di classe S_+. Allora esistono $J, K : X \to X'$ lineari e continue tali che*

(a) esiste $\nu > 0$ tale che $\langle Jx, x \rangle \geq \nu \|x\|^2$ per ogni $x \in X$;

(b) K è compatto con $K = K^*$;

(c) $L = J - K$;

(d) ponendo

$$(x|y) = \frac{1}{2} \langle Jx, y \rangle + \frac{1}{2} \langle Jy, x \rangle$$

si definisce un prodotto scalare su X che induce una norma equivalente.

In particolare, J è biiettiva e L è di Fredholm di indice 0.

Dimostrazione. Poniamo

$$M = \frac{1}{2}(L + L^*).$$

Per quanto visto M è di classe S_+. Sia (x_h) limitata in $\mathcal{N}(M)$, a meno di sottosuccessione $x_h \rightharpoonup x$ con $\langle Mx_h, x_h - x \rangle = 0$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Allora $\|x_h - x\| \to 0$ e $x \in \mathcal{N}(M)$, da cui segue che $\mathcal{N}(M)$ ha dimensione finita. Se esiste $x \in X$ tale che $\langle Mx, x \rangle < 0$, consideriamo $e_1 \in X$ con $\langle Me_1, e_1 \rangle = -1$ e definiamo

$$Y_1 = \{x \in X : \langle Mx, e_1 \rangle = 0\}.$$

Per ogni $x \in X$ risulta

$$x = -\langle Mx, e_1 \rangle e_1 + \big(x + \langle Mx, e_1 \rangle e_1\big)$$

dove $\big(x + \langle Mx, e_1 \rangle e_1\big) \in Y_1$, quindi $X = (\mathbb{R}e_1) \oplus Y_1$. Sia ora $e_2 \in Y_1$, se esiste, tale che $\langle Me_2, e_2 \rangle = -1$ e poniamo

$$Y_2 = \{x \in X : \langle Mx, e_1 \rangle = \langle Mx, e_2 \rangle = 0\}.$$

Come prima risulta $X = (\mathbb{R}e_1) \oplus (\mathbb{R}e_2) \oplus Y_2$. Dimostriamo che questo processo termina in un numero finito di passi. Per assurdo supponiamo che esista una successione (e_h) in X tale che per ogni $h, k \in \mathbb{N}$

$$\langle Me_h, e_k \rangle = -\delta_{h,k}.$$

L'insieme $\{e_h : h \in \mathbb{N}\}$ è linearmente indipendente, infatti, dati $\lambda_{h_1}, \dots, \lambda_{h_k} \in \mathbb{R}$ tali che

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_{h_j} e_{h_j} = 0,$$

si ha

$$0 = \left\langle M\Big(\sum_{j=1}^{k} \lambda_{h_j} e_{h_j}\Big), e_{h_l} \right\rangle = -\lambda_{h_l} \qquad \forall l = 1, \dots, k.$$

Sia Y sottospazio di X generato da $\{e_h : h \in \mathbb{N}\}$, $\dim Y = \infty$. Esiste una successione (y_h) in Y con $\|y_h\| = 1$ e $y_h \rightharpoonup 0$ (vedi [5]). Poiché

$$\langle My_h, y_h \rangle < 0 \qquad \forall h \in \mathbb{N},$$

allora $\|y_h\| \to 0$, da cui l'assurdo.

Denotiamo con X_- il sottospazio vettoriale di X generato dagli e_h determinati al passo precedente, allora $\dim X_- < \infty$. Poniamo

$$Y = \{y \in X : \langle My, x \rangle = 0 \quad \forall x \in X_-\}.$$

Chiaramente $X = X_- \oplus Y$ e $\langle My, y \rangle \geq 0$ per ogni $y \in Y$. Inoltre, essendo $\dim \mathcal{N}(M) < \infty$, esiste un sottospazio vettoriale chiuso X_+ di Y tale che $Y = \mathcal{N}(M) \oplus X_+$. Quindi X_+ è chiuso anche in X e

$$X = X_- \oplus \mathcal{N}(M) \oplus X_+.$$

Siccome $\dim(X_- \oplus \mathcal{N}(M)) < \infty$, allora è possibile definire su questo sottospazio un prodotto scalare $(\cdot|\cdot)_-$ e determinarne una base ortonormale. Indicata con $P : X \to X_- \oplus \mathcal{N}(M)$ la proiezione associata alla decomposizione diretta, poniamo per ogni $x, y \in X$

$$(x|y) = \langle Mx, y \rangle + \alpha(Px|Py)_-$$

dove $\alpha > 0$ è tale che per ogni $x \in X_-$ si abbia

$$\alpha(x|x) \geq \|x\|^2.$$

Chiaramente l'espressione è bilineare e simmetrica.

Mostriamo innanzitutto che esiste $\nu > 0$ tale che $\|Mx\| \geq \nu\|x\|$ per ogni $x \in X_+$. Per assurdo supponiamo che esista una successione (x_h) in X_+ tale che per ogni $h \in \mathbb{N}$ si abbia $\|x_h\| = 1$ e

$$\|Mx_h\| < \frac{1}{h+1}.$$

A meno di sottosuccessione risulta $x_h \rightharpoonup x$ in X e

$$\limsup_h \langle Mx_h, x_h - x\rangle \leq 0,$$

quindi $\|x_h - x\| \to 0$, da cui segue che $\|x\| = 1$ con $Mx = 0$, da cui l'assurdo perché $M_{|X_+}$ è iniettiva.

Dimostriamo che esiste $c > 0$ tale che per ogni $x \in X_+$ risulti $(x|x) \geq c\|x\|^2$. Per assurdo supponiamo che

$$\inf \left\{ \frac{\langle Mx, x\rangle}{\|x\|^2} : x \in X_+ \setminus \{0\} \right\} = 0.$$

Per ogni $x, y \in X_+$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ risulta

$$0 \leq \langle M(x + \lambda y), x + \lambda y\rangle = \lambda^2 \langle My, y\rangle + 2\lambda \langle Mx, y\rangle + \langle Mx, x\rangle,$$

quindi deve essere

$$(\langle Mx, y\rangle)^2 - \langle My, y\rangle \langle Mx, x\rangle \leq 0,$$

da cui si ottiene

$$|\langle Mx, y\rangle| \leq \sqrt{\langle Mx, x\rangle}\sqrt{\langle My, y\rangle} \qquad \forall x, y \in X_+.$$

Siano ora $x, y \in X_+$ con $\|y\| \leq 1$, allora

$$|\langle Mx, y\rangle| \leq \sqrt{\langle Mx, x\rangle}\sqrt{\langle My, y\rangle} \leq \sqrt{\|My\|}\sqrt{\langle Mx, x\rangle} \leq \sqrt{\|M\|}\sqrt{\langle Mx, x\rangle},$$

dunque

$$\|Mx\| \leq \sqrt{\|M\|}\sqrt{\langle Mx, x\rangle} \qquad \forall x \in X_+.$$

Sia (x_h) una successione in $X_+ \setminus \{0\}$ tale che

$$\frac{\langle Mx_h, x_h\rangle}{\|x_h\|^2} < \frac{1}{(h+1)^2} \qquad \forall h \in \mathbb{N}.$$

Allora risulta

$$\frac{\|Mx_h\|}{\|x_h\|} \leq \sqrt{\|M\|}\sqrt{\frac{\langle Mx_h, x_h\rangle}{\|x_h\|^2}} \leq \frac{\sqrt{\|M\|}}{h+1},$$

da cui l'assurdo.

Per quanto dimostrato esiste $c > 0$ tale che per ogni $x \in X$ si abbia $(x|x) \geq c\|x\|^2$, quindi $(\cdot|\cdot)$ è un prodotto scalare che induce una norma equivalente, quindi rende X di Hilbert. Inoltre, per come è definito il prodotto scalare, si ha che per ogni $x, y \in X$

$$\langle Mx, y\rangle = (x|y) - \alpha(Px|Py)_-,$$

da cui segue che M è una perturbazione compatta dell'isomorfismo di Riesz.

A questo punto possiamo considerare X di Hilbert su $\mathbb{R}$ con $M + K = R_X$ con $K : X \to X'$ lineare, continua e compatta. Poniamo $J = L + K$ e definiamo

$$\begin{array}{ll} \widehat{L} = R_X^{-1} \circ L : X \to X & \widehat{K} = R_X^{-1} \circ K : X \to X \\ \widehat{J} = R_X^{-1} \circ J : X \to X & \widehat{M} = R_X^{-1} \circ M : X \to X \end{array}$$

dove $\widehat{M}^* = \widehat{M}$ e $\widehat{K}$ è lineare, continuo e compatto. Risulta allora

$$\widehat{M} = \frac{1}{2}(\widehat{L} + \widehat{L}^*) = \mathrm{Id} - \widehat{K},$$

da cui segue che $\widehat{K} = \widehat{K}^*$ e

$$\frac{1}{2}(\widehat{L} + \widehat{K}) + \frac{1}{2}(\widehat{L} + \widehat{K})^* = \mathrm{Id}\,.$$

Risulta infine

$$\langle Jx, x\rangle = \left(\frac{1}{2}(\widehat{J} + \widehat{J}^*)x\middle| x\right) = \left(\frac{1}{2}(\widehat{L} + \widehat{K} + (\widehat{L} + \widehat{K})^*)x\middle| x\right) = (x|x) \geq \nu\|x\|^2$$

per un opportuno $\nu > 0$, quindi J è biiettiva per il teorema di Lax-Milgram. □

2.3.5 Teorema. *Siano $L : X \to X'$ un'applicazione lineare, continua, biiettiva e di classe S_+, $J, K : X \to X'$ come da teorema* (2.3.4).
Allora

$$\deg(L, \mathrm{B}(0,1), 0) = (-1)^m$$

dove $m \in \mathbb{N}$ è la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di $J^{-1} \circ K$ maggiori di 1 *(si conviene che $m = 0$ se non esistono autovalori maggiori di* 1*).*

Dimostrazione. Possiamo scrivere

$$L = J - K = J \circ (\mathrm{Id} - J^{-1} \circ K)$$

con $J^{-1} \circ K$ operatore compatto. Allora, per il teorema (2.2.14),

$$\deg(L, \mathrm{B}(0,1), 0) = \deg(J(\mathrm{Id} - J^{-1} \circ K), \mathrm{B}(0,1), 0) = \deg_{LS}(\mathrm{Id} - J^{-1} \circ K, \mathrm{B}(0,1), 0).$$

Dato $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, consideriamo

$$J - \frac{1}{\mu}K = J \circ \left(\mathrm{Id} - \frac{1}{\mu}J^{-1} \circ K\right).$$

Si ha che $(\mathrm{Id} - 1/\mu J^{-1} \circ K)$ è iniettivo se e solo se $(J - 1/\mu K)$ è iniettivo, quindi $\mu = 1$ non è un autovalore per $J^{-1} \circ K$, quindi risulta

$$\deg(\mathrm{Id} - J^{-1} \circ K, \mathrm{B}(0,1), 0) = (-1)^m$$

dove m è la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di $J^{-1} \circ K$ maggiori di 1. □

2.3.6 Teorema. *Siano Λ un aperto limitato in X con $0 \in \Lambda$ e $L, K : X \to X'$ lineari e continue. Supponiamo che*

(a) L sia biiettiva;

(b) K sia compatta;

(c) esistano $\overline{\lambda} > 0$ *e* $\nu > 0$ *tali che*

$$\big\langle (L + \overline{\lambda} K)x, x \big\rangle \geq \nu \|x\|^2 \qquad \forall x \in X.$$

Allora L *è di classe* S_+ *e*

$$\deg(L, \Lambda, 0) = (-1)^m$$

dove $m \in \mathbb{N}$ *è la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori* λ *di* (L, K) *con* $-\overline{\lambda} < \lambda < 0$ *(si conviene che* $m = 0$ *se non esistono autovalori di questo tipo).*

Dimostrazione. Chiaramente L è di classe S_+ per la proposizione (2.2.3). Esiste quindi Y_1 sottospazio vettoriale di X di dimensione finita tale che

$$\{x \in \partial\Lambda : \ \langle Lx, x \rangle \leq 0 \quad \text{e} \quad \langle Lx, y \rangle = 0 \quad \forall y \in Y_1\} = \emptyset.$$

Anche l'applicazione $\mathrm{Id} - (L + \overline{\lambda} K)^{-1} \circ (\overline{\lambda} K)$ è di classe S_+, quindi esiste Y_2 sottospazio vettoriale di X di dimensione finita tale che

$$\{x \in \partial\Lambda : \ \big\langle (\mathrm{Id} - (L + \overline{\lambda} K)^{-1} \circ (\overline{\lambda} K))x, x \big\rangle \leq 0 \text{ e } \big\langle (\mathrm{Id} - (L + \overline{\lambda} K)^{-1} \circ (\overline{\lambda} K))x, y \big\rangle = 0 \ \forall y \in Y_2\} = \emptyset.$$

Posto $Y = Y_1 + Y_2$, per il corollario (1.2.10) risulta

$$\begin{aligned} \deg(L, \Lambda, 0) &= \deg(L_Y, \Lambda \cap Y, 0) = \deg\big((\mathrm{Id} - (L + \overline{\lambda} K)^{-1} \circ (\overline{\lambda} K))_Y, \Lambda \cap Y, 0\big) = \\ &= \deg_{LS}\big(\mathrm{Id} - (L + \overline{\lambda} K)^{-1} \circ (\overline{\lambda} K), \Lambda, 0\big) = (-1)^m. \end{aligned}$$

dove $m \in \mathbb{N}$ è la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di $(L + \overline{\lambda} K)^{-1} \circ (\overline{\lambda} K)$ maggiori di 1. Questi ultimi si scrivono anche nella forma

$$\frac{\overline{\lambda}}{\overline{\lambda} + \lambda}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalore di (L, K), da cui la tesi. $\square$

Capitolo 3

Equazioni quasi lineari con crescita controllata

3.1 Quadro generale

In questa sezione consideriamo Ω aperto limitato in $\mathbb{R}^n$, $1 < p < n$, $a : \Omega \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ e $b : \Omega \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ funzioni di Carathéodory per cui esistono $\alpha_0 \in L^{(p^*)'}(\Omega)$, $\alpha_1 \in L^{p'}(\Omega)$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{aligned} |a(x, s, \xi)| &\le \alpha_1(x) + \beta |s|^{\frac{p^*}{p'}} + \beta |\xi|^{p-1}, \\ |b(x, s, \xi)| &\le \alpha_0(x) + \beta |s|^{p^*-1} + \beta |\xi|^{\frac{p}{(p^*)'}} \end{aligned} \tag{3.1}$$

per $\mathcal{L}^n$–q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Diciamo che $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ è soluzione debole dell'equazione

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(a(x, u, \nabla u)\right) + b(x, u, \nabla u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

se

$$\int_\Omega \big(a(x, u, \nabla u) \cdot \nabla v + b(x, u, \nabla u) v\big) \, d\,\mathcal{L}^n(x) = 0$$

per ogni $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

3.1.1 Teorema. *Per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si ha $a(x, u, \nabla u) \in L^{p'}(\Omega)$ e $b(x, u, \nabla u) \in L^{(p^*)'}(\Omega)$, per cui è definita l'applicazione*

$$\begin{aligned} A : W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega) \\ u &\longmapsto -\operatorname{div}(a(x, u, \nabla u)) + b(x, u, \nabla u) \end{aligned}$$

che risulta essere continua.

Dimostrazione. Per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ risulta

$$|a(x,u,\nabla u)| \leq \alpha_1(x) + \beta |u|^{\frac{p^*}{p'}} + \beta |\nabla u|^{p-1},$$
$$|b(x,u,\nabla u)| \leq \alpha_0(x) + \beta |u|^{p^*-1} + \beta |\nabla u|^{\frac{p}{(p^*)'}}$$

da cui segue che $a(x,u,\nabla u) \in L^{p'}(\Omega)$ e $b(x,u,\nabla u) \in L^{(p^*)'}$.

Possiamo vedere A come somma di due funzioni continue. Consideriamo

$$\begin{aligned} W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow L^{p*}(\Omega) \times (L^p(\Omega))^n \\ u &\longmapsto (u, \nabla u) \end{aligned}$$

ovviamente lineare e continua,

$$\begin{aligned} L^{p^*}(\Omega) \times (L^p(\Omega))^n &\longrightarrow L^{p'}(\Omega) \\ (u, v_1, \dots, v_n) &\longmapsto a(x,u,v_1,\dots,v_n) \end{aligned}$$

continua per le proprietà dell'operatore di Nemytskij, e infine

$$\begin{aligned} L^{p'}(\Omega) &\longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega) \\ a(x,u,v_1,\dots,v_n) &\longmapsto D_j a(x,u,v_1,\dots,v_n) \end{aligned}$$

è lineare e continua. Per composizione si ottiene la continuità dell'applicazione

$$\begin{aligned} W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega) \\ u &\longmapsto -\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)). \end{aligned}$$

Infine si ha che le applicazioni

$$\begin{aligned} L^{p^*}(\Omega) \times (L^p(\Omega))^n &\longrightarrow L^{(p^*)'}(\Omega) \\ (u, v_1, \dots, v_n) &\longmapsto b(x,u,v_1,\dots,v_n) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} L^{(p^*)'}(\Omega) &\longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega) \\ b(x,u,v_1,\dots,v_n) &\longmapsto b(x,u,v_1,\dots,v_n) \end{aligned}$$

sono continue, da cui la tesi. □

3.1.2 Lemma. *Siano (u_h) una successione limitata in $L^p(\Omega)$ e $u \in L^p(\Omega)$ tali che $u_h \to u$ $\mathcal{L}^n$–q.o. in Ω.*
Allora $u_h \rightharpoonup u$ in $L^p(\Omega)$.

Dimostrazione. Per ogni $f \in L^{p'}(\Omega)$ definiamo $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ponendo

$$g(x,s) = f(x)s.$$

Ovviamente g è di Carathéodory e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\alpha_\varepsilon \in L^1(\Omega)$ tale che

$$|g(x,s)| \leq \alpha_\varepsilon(x) + \varepsilon |s|^p.$$

Poiché si ha

$$|g(x,u_h)-g(x,u)| \le 2|\alpha_\varepsilon(x)| + \varepsilon|u_h|^p + \varepsilon|u|^p,$$

allora

$$2|\alpha_\varepsilon(x)| + \varepsilon|u_h|^p + \varepsilon|u|^p - |g(x,u_h)-g(x,u)| \ge 0,$$

per cui, per il lemma di Fatou,

$$\int_\Omega 2\big(|\alpha_\varepsilon(x)| + \varepsilon|u|^p\big)\, d\,\mathcal{L}^n(x) \le \int_\Omega \big(2|\alpha_\varepsilon(x)| + \varepsilon|u|^p\big)\, d\,\mathcal{L}^n(x) +$$

$$+ \liminf_h \int_\Omega \varepsilon|u_h|^p\, d\,\mathcal{L}^n(x) - \limsup_h \int_\Omega |g(x,u_h)-g(x,u)|\, d\,\mathcal{L}^n(x).$$

Da ciò si ottiene

$$\int_\Omega |g(x,u_h)-g(x,u)|\, d\,\mathcal{L}^n(x) \le \varepsilon \sup_h \|u_h\|_p^p,$$

e passando al limite per $\varepsilon \to 0^+$ si ha $\|g(x,u_h)-g(x,u)\|_1 \to 0$. In particolare

$$\lim_h \int_\Omega \big(f(x)u_h(x) - f(x)u(x)\big)\, d\,\mathcal{L}^n(x) = 0$$

per ogni $f \in L^{p'}(\Omega)$. □

Per ogni $h \in \mathbb{N}$ definiamo le funzioni

$$T_h(s) = \min\{\max\{s,-h\},h\} \qquad R_h(s) = s - T_h(s)$$

per ogni $s \in \mathbb{R}$. Ovviamente si ha $s = T_h(s) + R_h(s)$.

3.1.3 Lemma. *Supponiamo che*

$$\big(a(x,s,\xi) - a(x,s,\eta)\big)\cdot(\xi-\eta) \ge 0 \tag{3.2}$$

per $\mathcal{L}^n$–q.o. $x \in \Omega$, per ogni $s \in \mathbb{R}$ e ogni $\xi,\eta \in \mathbb{R}^n$. Sia $u_k \rightharpoonup u$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ con

$$\limsup_k \langle A(u_k), u_k - u\rangle \le 0.$$

Allora

$$\limsup_h \left(\limsup_k \int_{\{|u_k|\ge h\}} \big(a(x,u_k,\nabla u_k)\cdot\nabla u_k + b(x,u_k,\nabla u_k)u_k\big)\, d\,\mathcal{L}^n(x)\right) \le 0.$$

Dimostrazione. Esiste una successione (σ_k) in $\mathbb{R}$ con $\sigma_k \to 0$ tale che

$$\int_\Omega \big(a(x,u_k,\nabla u_k)\cdot\nabla(u_k-u) + b(x,u_k,\nabla u_k)(u_k-u)\big)\, d\,\mathcal{L}^n(x) \le \sigma_k.$$

Allora risulta

$$\begin{aligned}
&\int_{\{|u_k|\geq h\}} \big(a(x,u_k,\nabla u_k)\cdot\nabla u_k + b(x,u_k,\nabla u_k)u_k\big)\ d\,\mathcal{L}^n(x) \leq \sigma_k + \\
&\quad + \int_{\{|u_k|\geq h\}} a(x,u_k,\nabla u_k)\cdot\nabla u\ d\,\mathcal{L}^n(x) - \int_{\{|u_k|<h\}} a(x,u_k,\nabla u_k)\cdot\nabla(u_k-u)\ d\,\mathcal{L}^n(x) + \\
&\quad + \int_{\{|u_k|\geq h\}} b(x,u_k,\nabla u_k)u\ d\,\mathcal{L}^n(x) - \int_{\{|u_k|<h\}} b(x,u_k,\nabla u_k)(u_k-u)\ d\,\mathcal{L}^n(x).
\end{aligned}$$

Poiché la successione (u_k) è limitata in $W_0^{1,p}(\Omega)$, allora $(a(x,u_k,\nabla u_k))$ e $(b(x,u_k,\nabla u_k))$ sono limitate in $L^{p'}(\Omega)$ e in $L^{(p^*)'}(\Omega)$ rispettivamente. Tenuto conto della (3.2) si ottiene

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \big(a(x,u_k,\nabla u_k)\cdot\nabla u_k + b(x,u_k,\nabla u_k)u_k\big)\ d\,\mathcal{L}^n(x) \leq \sigma_k + \\
&\quad + \Big(\sup_k \|a(x,u_k,\nabla u_k\|_{p'}\Big)\|\chi_{\{|u_k|\geq h\}}\nabla u\|_p - \int_{\{|u_k|<h\}} a(x,u_k,\nabla u)\cdot\nabla(u_k-u)\ d\,\mathcal{L}^n(x) + \\
&\quad + \Big(\sup_k \|b(x,u_k,\nabla u_k\|_{(p^*)'}\Big)\|\chi_{\{|u_k|\geq h\}}u\|_{p^*} - \int_{\{|u_k|<h\}} b(x,u_k,\nabla u_k)(u_k-u)\ d\,\mathcal{L}^n(x) = \\
&\quad = \sigma_k + \Big(\sup_k \|a(x,u_k,\nabla u_k\|_{p'}\Big)\|\chi_{\{|u_k|\geq h\}}\nabla u\|_p + \\
&\qquad - \int_\Omega a(x,T_h(u_k),\nabla u)\cdot(\nabla T_h(u_k) - \chi_{\{|u_k|<h\}}\nabla u)\ d\,\mathcal{L}^n(x) + \\
&\qquad + \Big(\sup_k \|b(x,u_k,\nabla u_k\|_{(p^*)'}\Big)\|\chi_{\{|u_k|\geq h\}}u\|_{p^*} - \int_\Omega b(x,u_k,\nabla u_k)\chi_{\{|u_k|<h\}}(u_k-u)\ d\,\mathcal{L}^n(x).
\end{aligned}$$

Si ha che $\chi_{\{|u_k|\geq h\}}\nabla u \to \chi_{\{|u|\geq h\}}\nabla u$ in $L^p(\Omega)$, $a(x,T_h(u_k),\nabla u)\to a(x,T_h(u),\nabla u)$ in $L^{p'}(\Omega)$, $\nabla T_h(u_k) \rightharpoonup \nabla T_h(u)$ in $L^p(\Omega)$ e $\chi_{\{|u_k|<h\}}\nabla u \to \nabla T_h(u)$ in $L^p(\Omega)$, quindi

$$\lim_k \int_\Omega a(x,T_h(u_k),\nabla u)\cdot(\nabla T_h(u_k) - \chi_{\{|u_k|<h\}}\nabla u)\ d\,\mathcal{L}^n(x) = 0.$$

Per il lemma di Fatou risulta

$$\limsup_k \|\chi_{\{|u_k|\geq h\}}u\|_{p^*} \leq \|\chi_{\{|u|\geq h\}}u\|_{p^*}.$$

Infine $\chi_{\{|u_k|<h\}}(u_k-u)\to 0$ in $L^{p^*}(\Omega)$ e $b(x,u_k,\nabla u_k)$ è limitato in $L^{(p^*)'}(\Omega)$, quindi

$$\lim_k \int_\Omega b(x,u_k,\nabla u_k)\chi_{\{|u_k|<h\}}(u_k-u)\ d\,\mathcal{L}^n(x) = 0.$$

Da questo segue

$$\begin{aligned}
&\limsup_k \int_\Omega \big(a(x,u_k,\nabla u_k)\cdot\nabla u_k + b(x,u_k,\nabla u_k)u_k\big)\ d\,\mathcal{L}^n(x) \leq \\
&\quad \leq \Big(\sup_k \|a(x,u_k,\nabla u_k)\|_{p'}\Big)\|\chi_{\{|u|\geq h\}}\nabla u\|_p + \Big(\sup_k \|b(x,u_k,\nabla u_k)\|_{(p^*)'}\Big)\|\chi_{\{|u|\geq h\}}u\|_{p^*}.
\end{aligned}$$

Infine, per $h\to+\infty$ si ha $\chi_{\{|u|\geq h\}}\nabla u \to 0$ in $L^p(\Omega)$ e $\chi_{\{|u|\geq h\}}u \to 0$ in $L^{p^*}(\Omega)$, da cui la tesi. □

Supponiamo ora che esistano $\nu > 0$ e, per ogni $\varepsilon > 0$, $a_\varepsilon \in L^1(\Omega)$ tali che

$$a(x, s, \xi) \cdot \xi + b(x, s, \xi)s \geq \nu|\xi|^p - a_\varepsilon(x) - \varepsilon|s|^{p^*} \tag{3.3}$$

per $\mathcal{L}^n$–q.o. $x \in \Omega$, per ogni $s \in \mathbb{R}$ e per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$.

3.1.4 Lemma. *Nelle stesse ipotesi del lemma* (3.1.3) *si ha*

$$\lim_h \Big(\limsup_k \|\nabla R_h(u_k)\|_p \Big) = 0,$$
$$\lim_k \|u_k - u\|_{p^*} = 0,$$
$$\lim_k \int_\Omega a(x, u_k, \nabla u) \cdot \nabla(u_k - u) \; d\,\mathcal{L}^n(x) = 0,$$
$$\lim_k \int_\Omega b(x, u_k, \nabla u_k)(u_k - u) \; d\,\mathcal{L}^n(x) = 0$$

ed esiste una sottosuccessione (u_{k_j}) *tale che*

$$\lim_j \big(a(x, u_{k_j}, \nabla u_{k_j}) - a(x, u_{k_j}, \nabla u)\big) \cdot \nabla(u_{k_j} - u) = 0$$

per $\mathcal{L}^n$*–q.o.* $x \in \Omega$.

Dimostrazione. Per ipotesi si ha

$$\int_{\{|u_k| \geq h\}} \big(a(x, u_k, \nabla u_k) \cdot \nabla u_k + b(x, u_k, \nabla u_k)u_k\big) \; d\,\mathcal{L}^n(x) \geq \nu \int_\Omega |\nabla R_h(u_k)|^p \; d\,\mathcal{L}^n(x) +$$
$$- \int_\Omega \chi_{\{|u_k| \geq h\}} a_\varepsilon(x) \, d\,\mathcal{L}^n(x) - \varepsilon \int_\Omega |u_k|^{p^*} \; d\,\mathcal{L}^n(x).$$

Poiché $\chi_{\{|u_k| \geq h\}}|a_\varepsilon| \leq |a_\varepsilon| \in L^1(\Omega)$, per il lemma di Fatou risulta

$$\limsup_k \int_\Omega \chi_{\{|u_k| \geq h\}} |a_\varepsilon| \; d\,\mathcal{L}^n(x) \leq \int_\Omega \chi_{\{|u| \geq h\}} |a_\varepsilon| \; d\,\mathcal{L}^n(x),$$

quindi

$$\limsup_k \int_{\{|u_k| \geq h\}} \big(a(x, u_k, \nabla u_k) \cdot \nabla u_k + b(x, u_k, \nabla u_k)u_k\big) \; d\,\mathcal{L}^n(x) \geq$$
$$\geq \nu \limsup_k \int_\Omega |\nabla R_h(u_k)|^p \; d\,\mathcal{L}^n(x) - \int_\Omega \chi_{\{|u| \geq h\}} |a_\varepsilon| \; d\,\mathcal{L}^n(x) - \varepsilon \sup_k \|u_k\|_{p^*}^{p^*}.$$

Passando al limite per $h \to +\infty$ si ottiene

$$0 \geq \nu \limsup_h \Big(\limsup_k \|\nabla R_h(u_k)\|_p^p \Big) - \varepsilon \sup_k \|u_k\|_{p^*}^{p^*},$$

e infine, per $\varepsilon \to 0^+$ risulta

$$\lim_h \Big(\limsup_k \|\nabla R_h(u_k)\|_p^p \Big) = 0.$$

Ne segue

$$\|u_k - u\|_{p^*} \leq \|T_h(u_k) - T_h(u)\|_{p^*} + \|R_h(u_k)\|_{p^*} + \|R_h(u)\|_{p^*}.$$

Dal momento che
$$\lim_k \|T_h(u_k) - T_h(u)\|_{p^*} = 0,$$
risulta
$$\limsup_k \|u_k - u\|_{p^*} \leq \limsup_k \|R_h(u_k)\|_{p^*} + \|R_h(u)\|_{p^*}.$$
Passando al limite per $h \to +\infty$ si deduce
$$\lim_k \|u_k - u\|_{p^*} = 0.$$
Dimostriamo ora che
$$\lim_k \int_\Omega a(x, u_k, \nabla u) \cdot \nabla(u_k - u)\ d\,\mathcal{L}^n(x) = 0.$$
Risulta infatti
$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega a(x, u_k, \nabla u) \cdot \nabla(u_k - u)\ d\,\mathcal{L}^n(x)\right| \leq \\ &\quad\leq \left|\int_\Omega \big(a(x, T_h(u_k), \nabla u) \cdot \nabla T_h(u_k) - a(x, u_k, \nabla u) \cdot \nabla u\big)\ d\,\mathcal{L}^n(x)\right| + \\ &\quad\quad + \left|\int_\Omega a(x, u_k, \nabla u) \cdot \nabla R_h(u_k)\ d\,\mathcal{L}^n(x)\right|,\end{aligned}$$
da cui
$$\begin{aligned}&\limsup_k \left|\int_\Omega a(x, u_k, \nabla u) \cdot \nabla(u_k - u)\ d\,\mathcal{L}^n(x)\right| \leq \\ &\leq \left|\int_\Omega a(x, u, \nabla u) \cdot \nabla(T_h(u) - u)\ d\,\mathcal{L}^n(x)\right| + \Big(\sup_k \|a(x, u_k, \nabla u)\|_{p'}\Big) \limsup_k \|\nabla R_h(u_k)\|_p.\end{aligned}$$
Si ha che $\nabla T_h(u) \to \nabla u$ in $L^p(\Omega)$, quindi
$$\lim_h \int_\Omega a(x, u, \nabla u) \cdot \nabla(T_h(u) - u)\ d\,\mathcal{L}^n(x) = 0.$$
Per quanto dimostrato al passo precedente risulta
$$\lim_k \int_\Omega a(x, u_k, \nabla u) \cdot \nabla(u_k - u)\ d\,\mathcal{L}^n(x) = 0.$$
Dimostriamo ora che
$$\lim_k \int_\Omega b(x, u_k, \nabla u_k)(u_k - u)\ d\,\mathcal{L}^n(x) = 0.$$
Infatti risulta
$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega b(x, u_k, \nabla u_k)(u_k - u)\ d\,\mathcal{L}^n(x)\right| \leq \\ &\quad\leq \left|\int_\Omega b(x, u_k, \nabla u_k)(T_h(u_k) - u)\ d\,\mathcal{L}^n(x)\right| + \left|\int_\Omega b(x, u_k, \nabla u_k) R_h(u_k)\ d\,\mathcal{L}^n(x)\right|.\end{aligned}$$

La successione $(b(x, u_k, \nabla u_k))$ è limitata in $L^{(p^*)'}(\Omega)$, quindi, a meno di sottosuccessione, si ha $b(x, u_k, \nabla u_k) \rightharpoonup \gamma$ in $L^{(p^*)'}(\Omega)$. Inoltre $T_h(u_k) \to T_h(u)$ in $L^{p^*}(\Omega)$ per il teorema della convergenza dominata, dunque si ottiene

$$\limsup_k \left| \int_\Omega b(x, u_k, \nabla u_k)(u_k - u) \; d\,\mathcal{L}^n(x) \right| \leq$$
$$\leq \left| \int_\Omega \gamma(T_h(u) - u) \; d\,\mathcal{L}^n(x) \right| + \Big(\sup_k \|b(x, u_k, \nabla u_k)\|_{(p^*)'} \Big) \limsup_k \|R_h(u_k)\|_{p^*}.$$

Passando al limite per $h \to +\infty$, poiché $T_h(u) \to u$ in $L^p(\Omega)$ e $\|R_h(u_k)\|_{p^*} \leq C\|\nabla R_h(u_k)\|_p$, risulta

$$\lim_k \int_\Omega b(x, u_k, \nabla u_k)(u_k - u) \; d\,\mathcal{L}^n(x) = 0.$$

Per ipotesi si ha

$$\limsup_k \langle A(u_k), u_k - u \rangle \leq 0,$$

quindi, per quanto dimostrato,

$$\limsup_k \int_\Omega \big(a(x, u_k, \nabla u_k) - a(x, u_k, \nabla u)\big) \cdot \nabla(u_k - u) \; d\,\mathcal{L}^n(x) \leq 0.$$

Siccome per ipotesi

$$\big(a(x, u_k, \nabla u_k) - a(x, u_k, \nabla u)\big) \cdot \nabla(u_k - u) \geq 0$$

per $\mathcal{L}^n$– q.o. $x \in \Omega$, allora

$$\big(a(x, u_k, \nabla u_k) - a(x, u_k, \nabla u) \cdot \nabla(u_k - u)\big) \to 0 \qquad \text{in } L^1(\Omega),$$

quindi su una sottosuccessione si ha la convergenza puntuale quasi ovunque a zero. □

Supponiamo ora che

$$\big(a(x, s, \xi) - a(x, s, \eta)\big) \cdot (\xi - \eta) > 0 \tag{3.4}$$

per $\mathcal{L}^n$– q.o. $x \in \Omega$, per ogni $s \in \mathbb{R}$ e ogni $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ con $\xi \neq \eta$.

3.1.5 Lemma. *Supponiamo che*

$$\lim_k \big(a(x, u_k, \nabla u_k) - a(x, u, \nabla u)\big) \cdot \nabla(u_k - u) = 0$$

$\mathcal{L}^n$–q.o. in Ω.
Allora $\nabla u_k \to \nabla u$ $\mathcal{L}^n$–q.o. in Ω.

Dimostrazione. Sia $x \in \Omega$ tale che $a(x, s, \xi)$ sia continua in (s, ξ), $u_k(x) \to u(x)$ e

$$\big(a(x, u_k, \nabla u_k) - a(x, u, \nabla u)\big) \cdot \nabla(u_k - u) \to 0. \tag{3.5}$$

Poniamo per semplicità

$$s_k = u_k(x), \quad s = u(x), \quad \xi_k = \nabla u_k(x), \quad \xi = \nabla u(x).$$

Supponiamo per assurdo che $\xi_k \nrightarrow \xi$, allora esiste $\delta > 0$ tale che, a meno di sottosuccessione, si abbia $|\xi_k - \xi| \geq \delta$. Poniamo ora

$$\eta_k = \xi + \frac{\delta}{2|\xi_k - \xi|}(\xi_k - \xi).$$

Poiché $|\eta_k - \xi| = \delta/2$, la successione (η_k) è limitata in $\mathbb{R}^n$, quindi ammette una sottosuccessione convergente a $\eta \in \mathbb{R}^n$, con $\eta \neq \xi$.

Definiamo ora

$$t_k = \frac{\delta}{2|\xi_k - \xi|},$$

dunque $0 < t_k \leq 1/2$. Siccome per ipotesi si ha

$$(1 - t_k)\big(a(x, s_k, \xi_k + (1 - t_k)(\xi - \xi_k)) - a(x, s_k, \xi_k)\big) \cdot (\xi - \xi_k) \geq 0$$

e quindi

$$\big(a(x, s_k, \eta_k) - a(x, s_k, \xi_k)\big) \cdot (\xi_k - \xi) \leq 0,$$

allora

$$\begin{aligned}
&\big(a(x, s_k, \eta_k) - a(x, s_k, \xi)\big) \cdot (\eta_k - \xi) = \\
&\quad = t_k\big(a(x, s_k, \xi + t_k(\xi_k - \xi)) - a(x, s_k, \xi)\big) \cdot (\xi_k - \xi) = \\
&\quad = t_k\big(a(x, s_k, \eta_k) - a(x, s_k, \xi_k) + a(x, s_k, \xi_k) - a(x, s_k, \xi)\big) \cdot (\xi_k - \xi) = \\
&\quad = t_k\big(a(x, s_k, \eta_k) - a(x, s_k, \xi_k)\big) \cdot (\xi_k - \xi) + \\
&\quad + t_k\big(a(x, s_k, \xi_k) - a(x, s_k, \xi)\big) \cdot (\xi_k - \xi) \leq \big(a(x, s_k, \xi_k) - a(x, s_k, \xi)\big) \cdot (\xi_k - \xi) \to 0
\end{aligned}$$

per la (3.5), da cui segue l'assurdo perché

$$\lim_k \big(a(x, s_k, \eta_k) - a(x, s_k, \xi)\big) \cdot (\eta_k - \xi) > 0.$$

$\square$

Supponiamo che valgano le disuguaglianze (3.1), (3.3) e (3.4). Allora vale il seguente

3.1.6 Teorema. *L'applicazione*

$$\begin{aligned}
A : W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega) \\
u &\longmapsto -\operatorname{div}(a(x, u, \nabla u)) + b(x, u, \nabla u)
\end{aligned}$$

è di classe S_+.

Dimostrazione. Sia $u_k \rightharpoonup u$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ con

$$\limsup_k \langle A(u_k), u_k - u\rangle \leq 0.$$

Per quanto visto, su una sottosuccessione si ha $\nabla u_k \to \nabla u$ per $\mathcal{L}^n$– q.o. $x \in \Omega$, quindi si ha

$$\begin{aligned}
a(x, u_k, \nabla u_k) &\rightharpoonup a(x, u, \nabla u) \qquad \text{in } L^{p'}(\Omega), \\
b(x, u_k, \nabla u_k) &\rightharpoonup b(x, u, \nabla u) \qquad \text{in } L^{(p^*)'}(\Omega),
\end{aligned}$$

da cui segue che

$$\lim_k \int_\Omega a(x,u_k,\nabla u_k)\cdot\nabla u \ d\,\mathcal{L}^n(x) = \int_\Omega a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u \ d\,\mathcal{L}^n(x),$$

$$\lim_k \int_\Omega b(x,u_k,\nabla u_k)u \ d\,\mathcal{L}^n(x) = \int_\Omega b(x,u,\nabla u)u \ d\,\mathcal{L}^n(x).$$

Risulta dunque

$$\begin{aligned}\limsup_k \int_\Omega \big(a(x,u_k,\nabla u_k)\cdot\nabla u_k + b(x,u_k,\nabla u_k)u_k\big) \ d\,\mathcal{L}^n(x) \le \\ \le \int_\Omega \big(a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u + b(x,u,\nabla u)u\big) \ d\,\mathcal{L}^n(x).\end{aligned}$$

Per ipotesi si ha

$$a(x,u_k,\nabla u_k)\cdot\nabla u_k + b(x,u_k,\nabla u_k)u_k - \nu|\nabla u_k|^p + a_\varepsilon + \varepsilon|u_k|^{p^*} \ge 0,$$

quindi, applicando il lemma di Fatou, si ottiene

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \big(a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u + b(x,u,\nabla u)u\big) \ d\,\mathcal{L}^n(x) - \nu\int_\Omega |\nabla u|^p \ d\,\mathcal{L}^n(x) + \int_\Omega a_\varepsilon(x) \ d\,\mathcal{L}^n(x) + \\ &\quad + \varepsilon\int_\Omega |u|^{p^*} \ d\,\mathcal{L}^n(x) \le \liminf_k \int_\Omega \big(a(x,u_k,\nabla u_k)\cdot\nabla u_k + b(x,u_k,\nabla u_k)u_k\big) \ d\,\mathcal{L}^n(x) + \\ &\quad - \nu\limsup_k \int_\Omega |\nabla u_k|^p \ d\,\mathcal{L}^n(x) + \int_\Omega a_\varepsilon(x) \ d\,\mathcal{L}^n(x) + \varepsilon\sup_k \|u_k\|_{p^*}^{p^*} \le \\ &\quad \le \int_\Omega \big(a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u + b(x,u,\nabla u)u\big) \ d\,\mathcal{L}^n(x) - \nu\limsup_k \int_\Omega |\nabla u_k|^p \ d\,\mathcal{L}^n(x) + \\ &\quad + \int_\Omega a_\varepsilon(x) \ d\,\mathcal{L}^n(x) + \varepsilon\sup_k \|u_k\|_{p^*}^{p^*},\end{aligned}$$

da cui segue

$$\nu\limsup_k \int_\Omega |\nabla u_k|^p \ d\,\mathcal{L}^n(x) \le \nu\int_\Omega |\nabla u|^p \ d\,\mathcal{L}^n(x) - \varepsilon\|u\|_{p^*}^{p^*} + \varepsilon\sup_k \|u_k\|_{p^*}^{p^*}$$

e, per $\varepsilon \to 0^+$,

$$\limsup_k \int_\Omega |\nabla u_k|^p \ d\,\mathcal{L}^n(x) \le \int_\Omega |\nabla u|^p \ d\,\mathcal{L}^n(x),$$

da cui discende la tesi per uniforme convessità. □

Siano ora

$$\begin{aligned} a : \Omega\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times[0,1]) &\to \mathbb{R}^n \\ (x,s,\xi,\rho) &\mapsto a_\rho(x,s,\xi)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} b : \Omega\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times[0,1]) &\to \mathbb{R} \\ (x,s,\xi,\rho) &\mapsto b_\rho(x,s,\xi)\end{aligned}$$

di Carathéodory. Supponiamo che esistano $\alpha_0 \in L^{(p^*)'}(\Omega)$, $\alpha_1 \in L^{p'}(\Omega)$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$|a_\rho(x,s,\xi)| \le \alpha_1(x) + \beta|s|^{\frac{p^*}{p'}} + \beta|\xi|^{p-1},$$
$$|b_\rho(x,s,\xi)| \le \alpha_0(x) + \beta|s|^{p^*-1} + \beta|\xi|^{\frac{p}{(p^*)'}}$$

per $\mathcal{L}^n$–q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $(s,\xi,\rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times [0,1]$. Supponiamo inoltre che esistano $\nu > 0$ e, per ogni $\varepsilon > 0$, $a_\varepsilon \in L^1(\Omega)$ tali che

$$a_\rho(x,s,\xi)\cdot\xi + b_\rho(x,s,\xi)s \ge \nu|\xi|^p - a_\varepsilon(x) - \varepsilon|s|^{p^*}$$

per $\mathcal{L}^n$–q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $(s,\xi,\rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times [0,1]$. Infine sia

$$\big(a_\rho(x,s,\xi) - a_\rho(x,s,\eta)\big)\cdot(\xi-\eta) > 0$$

per $\mathcal{L}^n$–q.o. $x \in \Omega$, per ogni $(s,\rho) \in \mathbb{R} \times [0,1]$ e per ogni $\xi,\eta \in \mathbb{R}^n$ con $\xi \ne \eta$.

Poniamo per ogni $\rho \in [0,1]$ e ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$A_\rho u = -\operatorname{div}(a_\rho(x,u,\nabla u) + b_\rho(x,u,\nabla u).$$

3.1.7 Teorema. *L'applicazione*

$$\begin{aligned} W_0^{1,p}(\Omega) \times [0,1] &\to W^{-1,p'}(\Omega)\\ (u,\rho) &\mapsto A_\rho u \end{aligned}$$

è continua e di classe S_+.

Dimostrazione. Si ragiona come nelle dimostrazioni del lemma (3.1.1) e del teorema (3.1.6). □

3.2 Definizione del grado

In questa sezione consideriamo Ω aperto limitato in $\mathbb{R}^n$, $a : \Omega \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ e $b : \Omega \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ funzioni di Carathéodory per cui valgano le disuguaglianze (3.1), (3.3) e (3.4). Consideriamo inoltre $F : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ un'applicazione completamente continua.

Per quanto dimostrato nella sezione precedente si ha che l'applicazione

$$\begin{aligned} A : W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)\\ u &\longmapsto -\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) + b(x,u,\nabla u) - F(u) \end{aligned}$$

è continua e di classe S_+.

3.2.1 Definizione. *Siano Λ aperto limitato in $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $w \in W^{-1,p'}(\Omega)$ tali che l'equazione $Au = w$ non ammetta soluzione $u \in \partial\Lambda$. Definiamo allora*

$$\deg(A,\Lambda,w)$$

come abbiamo fatto nel capitolo precedente per le applicazioni demicontinue e di classe S_+.

Poiché si tratta di una definizione di grado topologico per un particolare operatore demicontinuo e di classe S_+, valgono allora le seguenti propietà

3.2.2 Teorema (Criterio di esistenza). *Se $Au = w$ non ha soluzioni in $\overline{\Lambda}$, allora*

$$\deg(A, \Lambda, w) = 0.$$

3.2.3 Teorema (Excisione). *Siano $w \in W^{-1,p'}(\Omega)$, $\Gamma \subseteq \Lambda$ aperto limitato in $W_0^{1,p}(\Omega)$ tali che $Au \neq w$ per ogni $u \in \overline{\Lambda} \setminus \Gamma$.*
Allora

$$\deg(A, \Lambda, w) = \deg(A, \Gamma, w).$$

3.2.4 Teorema (Additività). *Siano $\{\Lambda_j : j \in J\}$ una famiglia di aperti in Λ a due a due disgiunti che ricopre Λ e $w \in W^{-1,p'}(\Omega)$ tale che $Au \neq w$ per ogni $u \in \partial\Lambda$. Allora risulta $Au \neq w$ per ogni $u \in \partial\Lambda_j$ e per ogni $j \in J$, $\deg(A, \Lambda_j, w) \neq 0$ solo per un numero finito di $j \in J$ e*

$$\deg(A, \Lambda, w) = \sum_{j \in J} \deg(A, \Lambda_j, w).$$

3.2.5 Teorema (Invarianza omotopica). *Siano $w \in W^{-1,p'}(\Omega)$ e Λ aperto limitato in $W_0^{1,p}(\Omega)$ tali che per ogni $u \in \partial\Lambda$ e per ogni $\rho \in [0,1]$ si abbia $A_\rho u \neq w$.*
Allora la funzione

$$\{\rho \longmapsto \deg(A_\rho, \Lambda, w)\}$$

è costante su $[0,1]$.

3.2.6 Teorema. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, Λ un aperto limitato in $W_0^{1,p}(\Omega) \times [a,b]$ e $w \in W^{-1,p'}(\Omega)$ tali che $A_\rho u \neq w$ per ogni $(\rho, u) \in \partial_{W_0^{1,p}(\Omega)\times[a,b]}\Lambda$.*
Allora, posto

$$\forall \rho \in [a,b] : \ \Lambda_\rho = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : (u, \rho) \in \Lambda\},$$

la funzione

$$\{\rho \longmapsto \deg(A_\rho, \Lambda_\rho, w)\}$$

è costante su $[a,b]$,

Capitolo 4

Equazioni quasi lineari con crescita naturale

4.1 Quadro generale

In questo capitolo consideriamo $1 < p < n$, Ω aperto limitato in $\mathbb{R}^n$, due applicazioni

$$\begin{aligned} a : \Omega \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times [0,1]) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, s, \xi, \rho) &\longmapsto a_\rho(x, s, \xi) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} b : \Omega \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times [0,1]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, s, \xi, \rho) &\longmapsto b_\rho(x, s, \xi) \end{aligned}$$

di Carathéodory tali che esistano $\alpha_0 \in L^1(\Omega)$, $\alpha_1 \in L^{p'}(\Omega)$, e $\beta \geq 0$ tali che

$$\begin{aligned} |a_\rho(x, s, \xi)| &\leq \alpha_1(x) + \beta |s|^{\frac{p^*}{p'}} + \beta |\xi|^{p-1}, \\ |b_\rho(x, s, \xi)| &\leq \alpha_0(x) + \beta |s|^{p^*} + \beta |\xi|^p, \end{aligned} \tag{4.1}$$

per $\mathcal{L}^n$–q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $(s, \xi, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times [0,1]$. Supponiamo che esistano $\nu > 0$, $R \geq 0$ e, per ogni $\varepsilon > 0$, $a_\varepsilon \in L^1(\Omega)$ tali che

$$\begin{aligned} &a_\rho(x, s, \xi) \cdot \xi \geq \nu |\xi|^p - a_\varepsilon(x) - \varepsilon |s|^{p^*}, \\ &|s| \geq R \Rightarrow b_\rho(x, s, \xi) s \geq -a_\varepsilon(x) - \varepsilon |s|^{p^*} - \varepsilon |\xi|^p \end{aligned} \tag{4.2}$$

per $\mathcal{L}^n$–q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $(s, \xi, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times [0,1]$. Supponiamo inoltre che

$$\big(a_\rho(x, s, \xi) - a_\rho(x, s, \eta)\big) \cdot (\xi - \eta) > 0 \tag{4.3}$$

per $\mathcal{L}^n$–q.o. $x \in \Omega$, per ogni $(s, \rho) \in \mathbb{R} \times [0,1]$ ed ogni $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ con $\xi \neq \eta$. Infine consideriamo

$$\begin{aligned} F : W_0^{1,p}(\Omega) \times [0,1] &\longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega) \\ (u, \rho) &\longmapsto F_\rho(u) \end{aligned}$$

completamente continua. Per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ poniamo

$$A_\rho u = -\operatorname{div} a_\rho(x,u,\nabla u) + b_\rho(x,u,\nabla u) - F_\rho(u) \ \in W^{-1,p'}(\Omega) + L^1(\Omega) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega).$$

4.1.1 Definizione. *Sia $w \in W^{-1,p'}(\Omega)$. Diciamo che $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ è soluzione debole dell'equazione*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a_\rho(x,u,\nabla u)) + b_\rho(x,u,\nabla u) - F_\rho(u) = w & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.4}$$

se

$$\int_\Omega \big(a_\rho(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v + b_\rho(x,u,\nabla u)v\big)\ d\,\mathcal{L}^n(x) - \langle F_\rho(u), v\rangle = \langle w, v\rangle$$

per ogni $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Scriviamo anche $A_\rho u = w$.

4.2 Definizione del grado

4.2.1 Teorema. *Siano $\rho \in [0,1]$, $w \in W^{-1,p'}(\Omega)$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ una soluzione di $A_\rho u = w$. Sia $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tale che*

$$\Big[b_\rho(x,u,\nabla u)v\Big]^- \in L^1(\Omega).$$

Allora $b_\rho(x,u,\nabla u)v \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega \big(a_\rho(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v + b_\rho(x,u,\nabla u)v\big)\ d\,\mathcal{L}^n(x) - \langle F_\rho(u), v\rangle = \langle w, v\rangle\,.$$

Dimostrazione. Sia $\vartheta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che $\vartheta(s)s \geq 0$ e $|\vartheta(s)| \leq |s|$ per ogni $s \in \mathbb{R}$, $\vartheta(s) = s$ per $s \in [-1,1]$ e $|\vartheta(s)| = 3/2$ se $|s| \geq 2$. Poniamo per ogni $h \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $\vartheta_h(s) = h\vartheta(s/h)$ e definiamo $v_h = \vartheta_h(v)$. Poiché $v_h \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, si ha

$$\int_\Omega \big(\vartheta_h'(v)a_\rho(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v + b_\rho(x,u,\nabla u)\vartheta_h(v)\big)\ d\,\mathcal{L}^n(x) = \langle F_\rho(u) + w, \vartheta_h(v)\rangle\,.$$

Per il teorema di convergenza dominata risulta $\vartheta_h(v) \to v$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega \vartheta_h'(v)a_\rho(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v\ d\,\mathcal{L}^n(x) \to \int_\Omega a_\rho(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v\ d\,\mathcal{L}^n(x)$$

e, per continuità,

$$\lim_h \langle F_\rho(u), \vartheta_h(v)\rangle = \langle F_\rho(u), v\rangle\,,$$
$$\lim_h \langle w, \vartheta_h(v)\rangle = \langle w, v\rangle\,.$$

Siccome $\vartheta_h(v)$ mantiene il segno di v e $|\vartheta_h(v)| \leq |v|$, risulta

$$b_\rho(x,u,\nabla u)\vartheta_h(v) \geq -\Big[b_\rho(x,u,\nabla u)v\Big]^- \in L^1(\Omega),$$

da cui, per il lemma di Fatou,

$$\int_\Omega a_\rho(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v\ d\,\mathcal{L}^n(x) + \int_\Omega b_\rho(x,u,\nabla u)v\ d\,\mathcal{L}^n(x) \leq \langle F_\rho(u) + w, v\rangle\,,$$

quindi necessariamente $b_\rho(x, u, \nabla u)v \in L^1(\Omega)$.
Siccome

$$|b_\rho(x, u, \nabla u)\vartheta_h(v)| \le |b_\rho(x, u, \nabla u)v| \in L^1(\Omega),$$

dal teorema di convergenza dominata si ottiene

$$\int_\Omega \big(a_\rho(x, u, \nabla u) \cdot \nabla v + b_\rho(x, u, \nabla u)v\big)\, d\,\mathcal{L}^n(x) - \langle F_\rho(u), v\rangle = \langle w, v\rangle\,.$$

□

Siano ora $w \in W^{-1,p'}(\Omega)$, Λ un sottonsieme di $W_0^{1,p}(\Omega)$ aperto e limitato tale che l'equazione $A_\rho u = w$ non abbia soluzione $u \in \partial\Lambda$ per ogni $\rho \in [0, 1]$ e $\vartheta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che $\vartheta(s)s \ge 0$ e $|\vartheta(s)| \le |s|$ per ogni $s \in \mathbb{R}$, $\vartheta(s) = s$ per $s \in [-1, 1]$ e $|\vartheta(s)| = 3/2$ se $|s| \ge 2$. Per ogni $t \in [0, 1]$ poniamo

$$\vartheta_t(s) = \begin{cases} \frac{1}{t}\vartheta(ts) & \text{se } 0 < t \le 1, \\ s & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

e definiamo

$$b_{\rho,t}(x, s, \xi) = \vartheta_t(b_\rho(x, s, \xi)).$$

La funzione $b_{\rho,t}$ è limitata per ogni $t \in]0, 1]$, perciò saranno verificate le condizioni di crescita controllata considerate nel capitolo precedente. Inoltre risulta

$$|s| \ge R \Rightarrow b_{\rho,t}(x, s, \xi)s \ge -a_\varepsilon(x) - \varepsilon|s|^{p^*} - \varepsilon|\xi|^p$$

per $\mathcal{L}^n$–q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $(s, \xi, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times [0, 1]$.

4.2.2 Teorema. *Esiste $\bar{t} \in]0, 1]$ tale che per ogni $t \in]0, \bar{t}]$ l'equazione*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a_\rho(x, u, \nabla u)) + b_{\rho,t}(x, u, \nabla u) - F_\rho(u) = w & \textit{in } \Omega \\ u = 0 & \textit{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.5}$$

non abbia soluzioni $u \in \partial\Lambda$ per ogni $\rho \in [0, 1]$.

Dimostrazione. Per assurdo siano $t_k \to 0$, (ρ_k) in $[0, 1]$ e (u_k) in $\partial\Lambda$ una successione di soluzioni dell'equazione (4.5). A meno di sottosuccessione si ha $\rho_k \to \rho$ in $[0, 1]$. Poiché (u_k) è limitata in $W_0^{1,p}(\Omega)$, esiste $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tale che, a meno di sottosuccessione, $u_k \rightharpoonup u$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$, $u_k \to u$ in $L^p(\Omega)$ e $\mathcal{L}^n$–q.o. in Ω e $F_{\rho_k}(u_k) \to \gamma$ in $W^{-1,p'}(\Omega)$. Per ogni $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si ha

$$\int_\Omega \big(a_{\rho_k}(x, u_k, \nabla u_k) \cdot \nabla v + b_{\rho_k,t_k}(x, u_k, \nabla u_k)v\big)\, d\,\mathcal{L}^n(x) - \langle F_{\rho_k}(u_k), v\rangle = \langle w, v\rangle\,.$$

Mostriamo innanzitutto che

$$\lim_h \Big(\limsup_k \|\nabla R_h(u_k)\|_p\Big) = 0. \tag{4.6}$$

Fissato $h \geq R$ si ha $R_h(u_k) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, quindi

$$\begin{aligned}
\langle F_{\rho_k}(u_k) + w, R_h(u_k)\rangle &= \int_\Omega \big(a_{\rho_k}(x,u_k,\nabla u_k)\cdot \nabla R_h(u_k) + b_{\rho_k,t_k}(x,u_k,\nabla u_k)R_h(u_k)\big)\ d\,\mathcal{L}^n(x) \geq \\
&\geq \nu \int_{\{|u_k|\geq h\}} |\nabla u_k|^p\ d\,\mathcal{L}^n(x) - \int_{\{|u_k|\geq h\}} a_\varepsilon(x)\ d\,\mathcal{L}^n(x) - \varepsilon \sup_k \|u_k\|_{p^*}^{p^*} + \\
&\quad - \int_{\{|u_k|\geq h\}} \frac{R_h(u_k)}{u_k} a_\varepsilon(x)\ d\,\mathcal{L}^n(x) - \varepsilon \int_{\{|u_k|\geq h\}} \frac{R_h(u_k)}{u_k}|u_k|^{p^*}\ d\,\mathcal{L}^n(x) + \\
&\quad - \varepsilon \int_{\{|u_k|\geq h\}} \frac{R_h(u_k)}{u_k}|\nabla u_k|^p\ d\,\mathcal{L}^n(x) \geq \\
&\geq (\nu-\varepsilon)\int_{\{|u_k|\geq h\}} |\nabla R_h(u_k)|^p\ d\,\mathcal{L}^n(x) - 2\int_{\{|u_k|\geq h\}} a_\varepsilon(x)\ d\,\mathcal{L}^n(x) - 2\varepsilon \sup_k \|u_k\|_{p^*}^{p^*}
\end{aligned}$$

Per il lemma di Fatou si ha

$$\limsup_k \int_\Omega \chi_{\{|u_k|\geq h\}}|a_\varepsilon(x)|\ d\,\mathcal{L}^n(x) \leq \int_\Omega \chi_{\{|u|\geq h\}}|a_\varepsilon(x)|\ d\,\mathcal{L}^n(x),$$

quindi

$$\begin{aligned}
\langle \gamma + w, R_h(u)\rangle \geq (\nu-\varepsilon)\limsup_k \int_{\{|u_k|\geq h\}} |\nabla R_h(u_k)|^p\ d\,\mathcal{L}^n(x) - 2\int_\Omega \chi_{\{|u|\geq h\}}|a_\varepsilon(x)|\ d\,\mathcal{L}^n(x) + \\
- 2\varepsilon \sup_k \|u_k\|_{p^*}^{p^*}.
\end{aligned}$$

Poiché, per $h \to +\infty$, si ha $\chi_{\{|u|\geq h\}}|a_\varepsilon| \to 0$ in $L^1(\Omega)$ e $R_h(u) \to 0$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$, allora

$$0 \geq (\nu-\varepsilon)\limsup_h \Big(\limsup_k \|\nabla R_h(u_k)\|_p^p\Big) - 2\varepsilon \sup_k \|u_k\|_{p^*}^{p^*}$$

e, per $\varepsilon \to 0^+$ risulta

$$\lim_h \Big(\limsup_k \|\nabla R_h(u_k)\|_p\Big) = 0.$$

Dimostriamo ora che $T_h(u_k) \to T_h(u)$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ per ogni $h \geq R$. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la soluzione massimale di

$$\begin{cases} \varphi'(s) = 1 + \frac{\beta}{\nu}|\varphi(s)| \\ \varphi(0) = 0. \end{cases}$$

Chiaramente φ è definita su tutto $\mathbb{R}$ e $\varphi(s)s > 0$ per ogni $s \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Poniamo

$$v_{h,k} = T_h(u_k) - T_h(u),$$

allora $\varphi(v_{h,k}) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, dunque risulta

$$\int_\Omega \big(\varphi'(v_{h,k})a_{\rho_k}(x,u_k,\nabla u_k)\cdot\nabla v_{h,k} + b_{\rho_k,t_k}(x,u_k,\nabla u_k)\varphi(v_{h,k})\big)\ d\,\mathcal{L}^n(x) = \langle F_{\rho_k}(u_k) + w, \varphi(v_{h,k})\rangle.$$

Si ha che

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \varphi'(v_{h,k}) a_{\rho_k}(x,u_k,\nabla u_k)\cdot\nabla v_{h,k}\ d\,\mathcal{L}^n(x) = \\
&\quad = \int_\Omega \varphi'(v_{h,k}) a_{\rho_k}(x,T_h(u_k),\nabla T_h(u_k))\cdot(\nabla T_h(u_k)-\nabla T_h(u))\ d\,\mathcal{L}^n(x)+ \\
&\quad - \int_\Omega \varphi'(v_{h,k})\big(a_{\rho_k}(x,u_k,\nabla u_k)-a_{\rho_k}(x,T_h(u_k),\nabla T_h(u_k))\big)\cdot\nabla T_h(u)\ d\,\mathcal{L}^n(x) = \\
&\quad = \int_\Omega a_{\rho_k}(x,T_h(u_k),\nabla T_h(u_k))\cdot(\nabla T_h(u_k)-\nabla T_h(u))\ d\,\mathcal{L}^n(x)+ \\
&\quad - \int_\Omega \chi_{\{|u|<h\}}\big(a_{\rho_k}(x,u_k,\nabla u_k)-a_{\rho_k}(x,T_h(u_k),\nabla T_h(u_k))\big)\cdot(\varphi'(v_{h,k})\nabla T_h(u))\ d\,\mathcal{L}^n(x)+ \\
&\quad - \frac{\beta}{\nu}\int_\Omega a_{\rho_k}(x,T_h(u_k),\nabla T_h(u_k))\cdot(|\varphi(v_{h,k})|\nabla T_h(u))\ d\,\mathcal{L}^n(x)+ \\
&\quad + \frac{\beta}{\nu}\int_{\{|u_k|<h\}} |\varphi(v_{h,k})| a_{\rho_k}(x,u_k,\nabla u_k)\cdot\nabla u_k\ d\,\mathcal{L}^n(x).
\end{aligned}$$

Nell'ultima espressione osserviamo che

$$\lim_k \chi_{\{|u|<h\}}\big(a_{\rho_k}(x,u_k,\nabla u_k)-a_{\rho_k}(x,T_h(u_k),\nabla T_h(u_k))\big)=0$$

per $\mathcal{L}^n$–q.o. $x\in\Omega$, quindi, essendo limitata in $L^{p'}(\Omega)$,

$$\chi_{\{|u|<h\}}\big(a_{\rho_k}(x,u_k,\nabla u_k)-a_{\rho_k}(x,T_h(u_k),\nabla T_h(u_k))\big)\rightharpoonup 0$$

in $L^{p'}(\Omega)$. La successione $(a_{\rho_k}(x,T_h(u_k),\nabla T_h(u_k)))$ è limitata in $L^{p'}(\Omega)$ mentre, per il teorema di convergenza dominata, si ha

$$\begin{aligned}
&\lim_k \varphi'(v_{h,k})\nabla T_h(u) = \varphi'(0)\nabla T_h(u) && \text{in } L^p(\Omega), \\
&\lim_k |\varphi(v_{h,k})|\nabla T_h(u) = 0 && \text{in } L^p(\Omega),
\end{aligned}$$

quindi

$$\lim_k \int_\Omega \chi_{\{|u|<h\}}\big(a_{\rho_k}(x,u_k,\nabla u_k)-a_{\rho_k}(x,T_h(u_k),\nabla T_h(u_k))\big)\cdot(\varphi'(v_{h,k})\nabla T_h(u))\ d\,\mathcal{L}^n(x)=0 \tag{4.7}$$

$$\lim_k \int_\Omega a_{\rho_k}(x,T_h(u_k),\nabla T_h(u_k))\cdot(|\varphi(v_{h,k})|\nabla T_h(u))\ d\,\mathcal{L}^n(x)=0. \tag{4.8}$$

Consideriamo ora

$$\begin{aligned}
\int_\Omega b_{\rho_k,t_k}(x,u_k,\nabla u_k)\varphi(v_{h,k})\ d\,\mathcal{L}^n(x) = &\int_{\{|u_k|<h\}} b_{\rho_k,t_k}(x,u_k,\nabla u_k)\varphi(v_{h,k})\ d\,\mathcal{L}^n(x)+ \\
&+\int_{\{|u_k|\geq h\}} b_{\rho_k,t_k}(x,u_k,\nabla u_k)\varphi(v_{h,k})\ d\,\mathcal{L}^n(x).
\end{aligned}$$

Se $|u_k|\geq h$, allora

$$\frac{\varphi(v_{h,k})}{u_k}\geq 0,$$

quindi

$$\begin{aligned} & b_{\rho_k,t_k}(x,u_k,\nabla u_k)\varphi(v_{h,k}) = \frac{\varphi(v_{h,k})}{u_k} b_{\rho_k,t_k}(x,u_k,\nabla u_k)u_k \geq \\ & \quad \geq \frac{\varphi(v_{h,k})}{u_k}\big(-a_\varepsilon(x) - \varepsilon|u_k|^{p^*} - \varepsilon|\nabla u_k|^p\big) \geq -\frac{|\varphi(v_{h,k})|}{h}a_\varepsilon(x) - \frac{\varphi(2h)}{h}\varepsilon|u_k|^{p^*} - \frac{\varphi(2h)}{h}\varepsilon|\nabla u_k|^p. \end{aligned}$$

Per il teorema di convergenza dominata risulta

$$\lim_k \frac{|\varphi(v_{h,k})|}{h} a_\varepsilon(x) = 0 \qquad \text{in } L^1(\Omega),$$

quindi

$$\liminf_k \int_{\{|u_k|\geq h\}} b_{\rho_k,t_k}(x,u_k,\nabla u_k)\varphi(v_{h,k}) \; d\,\mathcal{L}^n(x) \geq -\varepsilon\frac{\varphi(2h)}{h}\sup_k \|u_k\|_{p^*}^{p^*} - \varepsilon\frac{\varphi(2h)}{h}\sup_k \|\nabla u_k\|_p^p$$

e, per $\varepsilon \to 0^+$,

$$\liminf_k \int_\Omega b_{\rho_k,t_k}(x,u_k,\nabla u_k)\varphi(v_{h,k}) \; d\,\mathcal{L}^n(x) \geq 0. \tag{4.9}$$

Inoltre per $k \to +\infty$ $\varphi(v_{h,k}) \rightharpoonup 0$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$, per cui

$$\lim_k \langle F_{\rho_k}(u_k) + w, \varphi(v_{h,k})\rangle = 0.$$

Combinando (4.7), (4.8) e (4.9) risulta

$$\begin{aligned} & \limsup_k \int_\Omega a_{\rho_k}(x,T_h(u_k),\nabla T_h(u_k))\cdot(\nabla T_h(u_k) - \nabla T_h(u)) \; d\,\mathcal{L}^n(x) \leq \\ & \quad \leq -\liminf_k \int_{\{|u_k|<h\}} \left(\frac{\beta}{\nu}|\varphi(v_{h,k})|a_{\rho_k}(x,u_k,\nabla u_k)\cdot\nabla u_k + b_{\rho_k,t_k}(x,u_k,\nabla u_k)\varphi(v_{h,k})\right) \; d\,\mathcal{L}^n(x) \end{aligned}$$

Se $|u_k| < h$ si ha

$$\begin{aligned} & \frac{\beta}{\nu}|\varphi(v_{h,k})|a_{\rho_k}(x,u_k,\nabla u_k)\cdot\nabla u_k + b_{\rho_k,t_k}(x,u_k,\nabla u_k)\varphi(v_{h,k}) \geq \\ & \quad \geq |\varphi(v_{h,k})|\left(\frac{\beta}{\nu}a_{\rho_k}(x,u_k,\nabla u_k)\cdot\nabla u_k - |b_{\rho_k,t_k}(x,u_k,\nabla u_k)|\right) \geq \\ & \quad \geq |\varphi(v_{h,k})|\left(\beta|\nabla u_k|^p - \frac{\beta}{\nu}a_\varepsilon - \frac{\varepsilon\beta}{\nu}|u_k|^{p^*} - \alpha_0 - \beta|u_k|^{p^*} - \beta|\nabla u_k|^p\right) \geq \\ & \quad \geq -|\varphi(v_{h,k})|\left(\frac{\beta}{\nu}a_\varepsilon + \left(\frac{\varepsilon\beta}{\nu} + \beta\right)h^{p^*} + \alpha_0\right) \end{aligned}$$

Per il teorema di convergenza dominata si ha

$$\lim_k |\varphi(v_{h,k})|\left(\frac{\beta}{\nu}a_\varepsilon + \left(\frac{\varepsilon\beta}{\nu} + \beta\right)h^{p^*} + \alpha_0\right) = 0 \qquad \text{in } L^1(\Omega),$$

da cui segue

$$\limsup_k \int_\Omega a_{\rho_k}(x,T_h(u_k),\nabla T_h(u_k))\cdot(\nabla T_h(u_k) - \nabla T_h(u)) \; d\,\mathcal{L}^n(x) \leq 0.$$

Siccome valgono le ipotesi di crescita controllata per a, allora $T_h(u_k) \to T_h(u)$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ per il teorema (3.1.6). Risulta dunque

$$\|\nabla u_k - \nabla u\|_p \leq \|\nabla T_h(u_k) - \nabla T_h(u)\|_p + \|\nabla R_h(u)\|_p + \|\nabla R_h(u_k)\|_p,$$

quindi

$$\limsup_k \|\nabla u_k - \nabla u\|_p \leq \|\nabla R_h(u)\|_p + \limsup_k \|\nabla R_h(u_k)\|_p$$

e infine, per $h \to +\infty$, si ha

$$\lim_k \|\nabla u_k - \nabla u\|_p = 0$$

per (4.6). Ne segue che $u \in \partial\Lambda$ e, siccome

$$\lim_k b_{\rho_k,t_k}(x, u_k, \nabla u_k) = b_\rho(x, u, \nabla u) \qquad \text{in } L^1(\Omega),$$

passando al limite nell'equazione iniziale risulta

$$\int_\Omega \big(a_\rho(x, u, \nabla u) \cdot \nabla v + b_\rho(x, u, \nabla u)v\big)\ d\,\mathcal{L}^n(x) - \langle F_\rho(u), v\rangle = \langle w, v\rangle$$

per ogni $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, da cui l'assurdo. □

Lavoriamo ora con ρ fissato nell'intervallo $[0, 1]$, omettendone la dipendenza. Poniamo per semplicità di notazione

$$\begin{aligned} Au &= -\operatorname{div}\,(a(x, u, \nabla u) + b(x, u, \nabla u) - F(u) \\ A_t u &= -\operatorname{div}\,(a(x, u, \nabla u)) + b_t(x, u, \nabla u) - F(u) \end{aligned}$$

per $t \in]0, 1]$.

4.2.3 Lemma. *L'applicazione*

$$\begin{aligned} A : W_0^{1,p}(\Omega)\times]0, 1] &\to W^{-1,p'}(\Omega) \\ (u, t) &\mapsto A_t u \end{aligned}$$

è continua e di classe S_+*.*

Dimostrazione. Sia (u_h, t_h) una successione convergente a (u, t) in $W_0^{1,p}(\Omega)\times]0, 1]$. L'applicazione

$$\begin{aligned} W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega) \\ u &\longmapsto -\operatorname{div}(a(x, u, \nabla u)) - F(u) \end{aligned}$$

è continua. Per quanto riguarda il secondo termine di A_{t_h}, si ha che per ogni $h \in \mathbb{N}$ esiste $c_h > 0$ tale che

$$|\vartheta_{t_h}(b(x, u_h, \nabla u_h))| \leq c_h \leq \sup_h c_h < +\infty.$$

Poiché la successione $(\vartheta_{t_h}(b(x, u_h, \nabla u_h)))$ converge a $\vartheta_t(b(x, u, \nabla u))$ $\mathcal{L}^n$–q.o. in Ω, per il teorema di convergenza dominata risulta

$$\lim_h b_{t_h}(x, u_h, \nabla u_h) = b_t(x, u, \nabla u) \qquad \text{in } L^{(p^*)'}(\Omega),$$

quindi A è continua.

Siano ora $t_h \to t$ in $]0,1]$ e $u_h \rightharpoonup u$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ tali che

$$\limsup_h \left(\int_\Omega a(x,u_h,\nabla u_h)\cdot\nabla(u_h-u)\ d\,\mathcal{L}^n(x) + \right.$$
$$\left. + \int_\Omega b_{t_h}(x,u_h,\nabla u_h)(u_h-u)\ d\,\mathcal{L}^n(x) - \langle F(u_h),u_h-u\rangle \right) \le 0.$$

A meno di sottosuccessione $F(u_h)\to\gamma$ in $W^{-1,p'}(\Omega)$, quindi

$$\lim_h \langle F(u_h),u_h-u\rangle = 0.$$

A meno di sottosuccessione $u_h \to u$ in $L^p(\Omega)$, dunque risulta

$$\left| \int_\Omega \big(b_{t_h}(x,u_h,\nabla u_h) - b_t(x,u_h,\nabla u_h)\big)(u_h-u)\ d\,\mathcal{L}^n(x)\right| \le$$
$$\le \int_\Omega |b_{t_h}(x,u_h,\nabla u_h) - b_t(x,u_h,\nabla u_h)||u_h-u|\ d\,\mathcal{L}^n(x) \le \|\vartheta_{t_h}-\vartheta_t\|_\infty \int_\Omega |u_h-u|\ d\,\mathcal{L}^n(x),$$

da cui segue

$$\lim_h \int_\Omega \big(b_{t_h}(x,u_h,\nabla u_h) - b_t(x,u_h,\nabla u_h)\big)(u_h-u)\ d\,\mathcal{L}^n(x) = 0.$$

Risulta allora

$$0 \ge \limsup_h \left(\int_\Omega a(x,u_h,\nabla u_h)\cdot\nabla(u_h-u)\ d\,\mathcal{L}^n(x) + \right.$$
$$\left. + \int_\Omega b_{t_h}(x,u_h,\nabla u_h)(u_h-u)\ d\,\mathcal{L}^n(x) - \langle F(u_h),u_h-u\rangle \right) =$$
$$= \limsup_h \left(\int_\Omega \big(a(x,u_h,\nabla u_h)\cdot\nabla(u_h-u) + b_t(x,u_h,\nabla u_h)(u_h-u)\big)\ d\,\mathcal{L}^n(x)\right),$$

quindi A è di classe S_+ per il teorema (3.1.6). □

A questo punto siamo pronti per dare la seguente

4.2.4 Definizione. *Siano $a:\Omega\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^n$ e $b:\Omega\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ funzioni di Carathéodory verificanti le disuguaglianze* (4.1), (4.2) *e* (4.3)*, $F: W_0^{1,p}(\Omega)\to W^{-1,p'}(\Omega)$ completamente continua, Λ un aperto limitato in $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $w\in W^{-1,p'}(\Omega)$ tali che $Au\ne w$ per ogni $u\in\partial\Lambda$. Poniamo*

$$\deg(A,\Lambda,w) = \deg(A_{\bar t},\Lambda,w)$$

dove $\bar t\in]0,1]$ è tale che $A_t u\ne w$ per ogni $t\in]0,\bar t]$ ed ogni $u\in\partial\Lambda$.

Per il teorema (2.2.12), la definizione è ben posta.

Ovviamente tutto questo percorso può essere ripetuto considerando una qualsiasi funzione $\vartheta\in C_b(\mathbb{R})$ tale che $\vartheta(s)=s$ in un intorno di 0. Dimostriamo allora il seguente

4.2.5 Teorema. *Sia*

$$\Theta = \{\vartheta \in C_b(\mathbb{R}) : \vartheta(s) = s \text{ in un intorno di } 0,\ \vartheta(s)s \geq 0 \text{ e } |\vartheta(s)| \leq |s| \quad \forall s \in \mathbb{R}\}.$$

Allora la definizione del grado non dipende dalla scelta di $\vartheta \in \Theta$.

Dimostrazione. Siano $\vartheta, \eta \in \Theta$, per ogni $t \in]0,1]$ poniamo

$$A_{\vartheta_t} u = -\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) + \vartheta_t(b(x,u,\nabla u)) - F(u),$$
$$A_{\eta_t} u = -\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) + \eta_t(b(x,u,\nabla u)) - F(u).$$

Per ogni $\rho \in [0,1]$ poniamo anche

$$A_{\rho,t} = \rho A_{\vartheta_t} + (1-\rho) A_{\eta_t}.$$

Dimostriamo che esiste $\bar{t} \in]0,1]$ tale che $A_{\rho,t} u \neq w$ per ogni $t \in]0,\bar{t}]$, $\rho \in [0,1]$ e $u \in \partial\Lambda$.

Per assurdo, sia $t_k \to 0$, (u_k) in $\partial\Lambda$ e (ρ_k) in $[0,1]$ tali che $A_{\rho_k,t_k} u_k = w$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. A meno di sottosuccessione si ha $\rho_k \to \rho$ in $[0,1]$, $u_k \to u$ in $L^p(\Omega)$, $u_k \rightharpoonup u$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$, $u_k \to u$ per $\mathcal{L}^n$–q.o. $x \in \Omega$ e $F(u_k) \to \gamma$ in $W^{-1,p'}(\Omega)$. Per ogni $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si ha

$$\rho_k \int_\Omega \big(a(x,u_k,\nabla u_k) \cdot \nabla v + \vartheta_{t_k}(b(x,u_k,\nabla u_k))v\big)\ d\,\mathcal{L}^n(x) +$$
$$+ (1-\rho_k) \int_\Omega \big(a(x,u_k,\nabla u_k) \cdot \nabla v + \eta_{t_k}(b(x,u_k,\nabla u_k))v\big)\ d\,\mathcal{L}^n(x) - \langle F(u_k), v\rangle = \langle w, v\rangle\,.$$

Mostriamo innanzitutto che

$$\lim_h \Big(\limsup_k \|\nabla R_h(u_k)\|_p\Big) = 0. \tag{4.10}$$

Fissato $h \geq R$ si ha $R_h(u_k) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, quindi

$$\langle F(u_k) + w, R_h(u_k)\rangle = \rho_k \int_\Omega \big(a(x,u_k,\nabla u_k) \cdot \nabla R_h(u_k) + \vartheta_{t_k}(b(x,u_k,\nabla u_k))R_h(u_k)\big)\ d\,\mathcal{L}^n(x) +$$
$$+ (1-\rho_k) \int_\Omega \big(a(x,u_k,\nabla u_k) \cdot \nabla R_h(u_k) + \eta_{t_k}(b(x,u_k,\nabla u_k))R_h(u_k)\big)\ d\,\mathcal{L}^n(x) \geq$$
$$\geq \rho_k \Bigg(\nu \int_{\{|u_k|\geq h\}} |\nabla u_k|^p\ d\,\mathcal{L}^n(x) - \int_{\{|u_k|\geq h\}} a_\varepsilon(x)\ d\,\mathcal{L}^n(x) - \varepsilon \sup_k \|u_k\|_{p^*}^{p^*} +$$
$$- \int_{\{|u_k|\geq h\}} \frac{R_h(u_k)}{u_k} a_\varepsilon(x)\ d\,\mathcal{L}^n(x) - \varepsilon \int_{\{|u_k|\geq h\}} \frac{R_h(u_k)}{u_k} |u_k|^{p^*}\ d\,\mathcal{L}^n(x) +$$
$$- \varepsilon \int_{\{|u_k|\geq h\}} \frac{R_h(u_k)}{u_k} |\nabla u_k|^p\ d\,\mathcal{L}^n(x)\Bigg) + (1-\rho_k)\Bigg(\nu \int_{\{|u_k|\geq h\}} |\nabla u_k|^p\ d\,\mathcal{L}^n(x) +$$
$$- \int_{\{|u_k|\geq h\}} a_\varepsilon(x)\ d\,\mathcal{L}^n(x) - \varepsilon \sup_k \|u_k\|_{p^*}^{p^*} - \int_{\{|u_k|\geq h\}} \frac{R_h(u_k)}{u_k} a_\varepsilon(x)\ d\,\mathcal{L}^n(x) +$$
$$- \varepsilon \int_{\{|u_k|\geq h\}} \frac{R_h(u_k)}{u_k} |u_k|^{p^*}\ d\,\mathcal{L}^n(x) - \varepsilon \int_{\{|u_k|\geq h\}} \frac{R_h(u_k)}{u_k} |\nabla u_k|^p\ d\,\mathcal{L}^n(x)\Bigg) \geq$$
$$\geq (\nu - \varepsilon) \int_{\{|u_k|\geq h\}} |\nabla R_h(u_k)|^p\ d\,\mathcal{L}^n(x) - 2 \int_{\{|u_k|\geq h\}} a_\varepsilon(x)\ d\,\mathcal{L}^n(x) - 2\varepsilon \sup_k \|u_k\|_{p^*}^{p^*}$$

Per il lemma di Fatou si ha

$$\limsup_k \int_\Omega \chi_{\{|u_k|\geq h\}} |a_\varepsilon(x)| \; d\,\mathcal{L}^n(x) \leq \int_\Omega \chi_{\{|u|\geq h\}} |a_\varepsilon(x)| \; d\,\mathcal{L}^n(x),$$

quindi

$$\begin{aligned}\langle \gamma + w, R_h(u)\rangle \geq (\nu-\varepsilon) \limsup_k \int_{\{|u_k|\geq h\}} |\nabla R_h(u_k)|^p \; d\,\mathcal{L}^n(x) - 2\int_\Omega \chi_{\{|u|\geq h\}} |a_\varepsilon(x)| \; d\,\mathcal{L}^n(x) + \\ - 2\varepsilon \sup_k \|u_k\|_{p^*}^{p^*}.\end{aligned}$$

Poiché, per $h \to +\infty$, si ha $\chi_{\{|u|\geq h\}}|a_\varepsilon| \to 0$ in $L^1(\Omega)$) e $R_h(u) \to 0$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$, allora

$$0 \geq (\nu-\varepsilon) \limsup_h \Big(\limsup_k \|\nabla R_h(u_k)\|_p^p \Big) - 2\varepsilon \sup_k \|u_k\|_{p^*}^{p^*}$$

e, per $\varepsilon \to 0^+$ risulta

$$\lim_h \Big(\limsup_k \|\nabla R_h(u_k)\|_p \Big) = 0.$$

Dimostriamo ora che $T_h(u_k) \to T_h(u)$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ per ogni $h \geq R$. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la soluzione massimale di

$$\begin{cases} \varphi'(s) = 1 + \frac{\beta}{\nu}|\varphi(s)| \\ \varphi(0) = 0. \end{cases}$$

Chiaramente φ è definita su tutto $\mathbb{R}$ e $\varphi(s)s > 0$ per ogni $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Poniamo

$$v_{h,k} = T_h(u_k) - T_h(u),$$

allora $\varphi(v_{h,k}) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, dunque risulta

$$\begin{aligned}&\rho_k \int_\Omega \big(\varphi'(v_{h,k}) a(x,u_k,\nabla u_k)\cdot \nabla v_{h,k} + \vartheta_{t_k}(b(x,u_k,\nabla u_k))\varphi(v_{h,k})\big) \; d\,\mathcal{L}^n(x) + \\ &\quad + (1-\rho_k) \int_\Omega \big(\varphi'(v_{h,k}) a(x,u_k,\nabla u_k)\cdot \nabla v_{h,k} + \eta_{t_k}(b(x,u_k,\nabla u_k))\varphi(v_{h,k})\big) \; d\,\mathcal{L}^n(x) = \\ &\quad = \langle F(u_k) + w, \varphi(v_{h,k})\rangle .\end{aligned}$$

Si ha che

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \varphi'(v_{h,k}) a(x,u_k,\nabla u_k)\cdot \nabla v_{h,k} \; d\,\mathcal{L}^n(x) = \\ &\quad = \int_\Omega \varphi'(v_{h,k}) a(x,T_h(u_k),\nabla T_h(u_k))\cdot (\nabla T_h(u_k) - \nabla T_h(u)) \; d\,\mathcal{L}^n(x) + \\ &\quad - \int_\Omega \varphi'(v_{h,k}) \big(a(x,u_k,\nabla u_k) - a(x,T_h(u_k),\nabla T_h(u_k))\big)\cdot \nabla T_h(u) \; d\,\mathcal{L}^n(x) = \\ &\quad = \int_\Omega a(x,T_h(u_k),\nabla T_h(u_k))\cdot (\nabla T_h(u_k) - \nabla T_h(u)) \; d\,\mathcal{L}^n(x) + \\ &\quad - \int_\Omega \chi_{\{|u|<h\}} \big(a(x,u_k,\nabla u_k) - a(x,T_h(u_k),\nabla T_h(u_k))\big)\cdot (\varphi'(v_{h,k})\nabla T_h(u)) \; d\,\mathcal{L}^n(x) + \\ &\quad - \frac{\beta}{\nu} \int_\Omega a(x,T_h(u_k),\nabla T_h(u_k))\cdot (|\varphi(v_{h,k})|\nabla T_h(u)) \; d\,\mathcal{L}^n(x) + \\ &\quad + \frac{\beta}{\nu} \int_{\{|u_k|<h\}} |\varphi(v_{h,k})| a(x,u_k,\nabla u_k)\cdot \nabla u_k \; d\,\mathcal{L}^n(x).\end{aligned}$$

Nell'ultima espressione osserviamo che

$$\lim_k \chi_{\{|u|<h\}} \big(a(x, u_k, \nabla u_k) - a(x, T_h(u_k), \nabla T_h(u_k))\big) = 0$$

per $\mathcal{L}^n$–q.o. $x \in \Omega$, quindi, essendo limitata in $L^{p'}(\Omega)$,

$$\chi_{\{|u|<h\}} \big(a(x, u_k, \nabla u_k) - a(x, T_h(u_k), \nabla T_h(u_k))\big) \rightharpoonup 0$$

in $L^{p'}(\Omega)$. La successione $(a(x, T_h(u_k), \nabla T_h(u_k)))$ è limitata in $L^{p'}(\Omega)$ mentre, per il teorema di convergenza dominata, si ha

$$\begin{aligned} &\lim_k \varphi'(v_{h,k}) \nabla T_h(u) = \varphi'(0) \nabla T_h(u) && \text{in } L^p(\Omega), \\ &\lim_k |\varphi(v_{h,k})| \nabla T_h(u) = 0 && \text{in } L^p(\Omega), \end{aligned}$$

quindi

$$\lim_k \int_\Omega \chi_{\{|u|<h\}} \big(a(x, u_k, \nabla u_k) - a(x, T_h(u_k), \nabla T_h(u_k))\big) \cdot (\varphi'(v_{h,k}) \nabla T_h(u)) \; d\,\mathcal{L}^n(x) = 0 \quad (4.11)$$

$$\lim_k \int_\Omega a(x, T_h(u_k), \nabla T_h(u_k)) \cdot (|\varphi(v_{h,k})| \nabla T_h(u)) \; d\,\mathcal{L}^n(x) = 0. \quad (4.12)$$

Consideriamo ora

$$\begin{aligned} \int_\Omega \vartheta_{t_k}(b(x, u_k, \nabla u_k)) \varphi(v_{h,k}) \; d\,\mathcal{L}^n(x) = &\int_{\{|u_k|<h\}} \vartheta_{t_k}(b(x, u_k, \nabla u_k)) \varphi(v_{h,k}) \; d\,\mathcal{L}^n(x) + \\ &+ \int_{\{|u_k| \geq h\}} \vartheta_{t_k}(b(x, u_k, \nabla u_k)) \varphi(v_{h,k}) \; d\,\mathcal{L}^n(x). \end{aligned}$$

Se $|u_k| \geq h$, allora

$$\frac{\varphi(v_{h,k})}{u_k} \geq 0,$$

quindi

$$\begin{aligned} &\vartheta_{t_k}(b(x, u_k, \nabla u_k)) \varphi(v_{h,k}) = \frac{\varphi(v_{h,k})}{u_k} \vartheta_{t_k}(b(x, u_k, \nabla u_k)) u_k \geq \\ &\quad \geq \frac{\varphi(v_{h,k})}{u_k} \big(- a_\varepsilon(x) - \varepsilon |u_k|^{p^*} - \varepsilon |\nabla u_k|^p \big) \geq -\frac{|\varphi(v_{h,k})|}{h} a_\varepsilon(x) - \frac{\varphi(2h)}{h} \varepsilon |u_k|^{p^*} - \frac{\varphi(2h)}{h} \varepsilon |\nabla u_k|^p. \end{aligned}$$

Per il teorema di convergenza dominata risulta

$$\lim_k \frac{|\varphi(v_{h,k})|}{h} a_\varepsilon(x) = 0 \qquad \text{in } L^1(\Omega),$$

quindi

$$\liminf_k \int_{\{|u_k| \geq h\}} \vartheta_{t_k}(b(x, u_k, \nabla u_k)) \varphi(v_{h,k}) \; d\,\mathcal{L}^n(x) \geq -\varepsilon \frac{\varphi(2h)}{h} \sup_k \|u_k\|_{p^*}^{p^*} - \varepsilon \frac{\varphi(2h)}{h} \sup_k \|\nabla u_k\|_p^p$$

e, per $\varepsilon \to 0^+$,

$$\liminf_k \int_\Omega \vartheta_{t_k}(b(x, u_k, \nabla u_k)) \varphi(v_{h,k}) \; d\,\mathcal{L}^n(x) \geq 0. \quad (4.13)$$

Allo stesso modo

$$\liminf_k \int_\Omega \eta_{t_k}(b(x,u_k,\nabla u_k))\varphi(v_{h,k})\ d\,\mathcal{L}^n(x) \geq 0. \tag{4.14}$$

Inoltre $\varphi(v_{h,k}) \rightharpoonup 0$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$, per cui

$$\lim_k \langle F(u_k)+w, \varphi(v_{h,k})\rangle = 0.$$

Combinando (4.11), (4.12), (4.13) e (4.14) risulta

$$\begin{aligned}
&\limsup_k \int_\Omega a(x,T_h(u_k),\nabla T_h(u_k))\cdot(\nabla T_h(u_k)-\nabla T_h(u))\ d\,\mathcal{L}^n(x) \leq \\
&\leq -\liminf_k \int_{\{|u_k|<h\}} \Big(\frac{\beta}{\nu}|\varphi(v_{h,k})|a(x,u_k,\nabla u_k)\cdot\nabla u_k + \rho_k\vartheta_{t_k}(b(x,u_k,\nabla u_k))\varphi(v_{h,k}) + \\
&\qquad + (1-\rho_k)\eta_{t_k}(b(x,u_k,\nabla u_k))\varphi(v_{h,k})\Big)\ d\,\mathcal{L}^n(x)
\end{aligned}$$

Se $|u_k|<h$ si ha

$$\begin{aligned}
&\frac{\beta}{\nu}|\varphi(v_{h,k})|(x,u_k,\nabla u_k)\cdot\nabla u_k + \rho_k\vartheta_{t_k}(b(x,u_k,\nabla u_k))\varphi(v_{h,k}) + \\
&\quad + (1-\rho_k)\eta_{t_k}(b(x,u_k,\nabla u_k))\varphi(v_{h,k}) \geq \\
&\geq |\varphi(v_{h,k})|\Big(\frac{\beta}{\nu}a_{\lambda_k}(x,u_k,\nabla u_k)\cdot\nabla u_k - |b_{\lambda_k,t_k}(x,u_k,\nabla u_k)|\Big) \geq \\
&\geq |\varphi(v_{h,k})|\Big(\beta|\nabla u_k|^p - \frac{\beta}{\nu}a_\varepsilon - \frac{\varepsilon\beta}{\nu}|u_k|^{p^*} - \alpha_0 - \beta|u_k|^{p^*} - \beta|\nabla u_k|^p\Big) \geq \\
&\geq -|\varphi(v_{h,k})|\Big(\frac{\beta}{\nu}a_\varepsilon + \Big(\frac{\varepsilon\beta}{\nu}+\beta\Big)h^{p^*} + \alpha_0\Big)
\end{aligned}$$

Per il teorema di convergenza dominata si ha

$$\lim_k |\varphi(v_{h,k})|\Big(\frac{\beta}{\nu}a_\varepsilon + \Big(\frac{\varepsilon\beta}{\nu}+\beta\Big)h^{p^*} + \alpha_0\Big) = 0 \qquad \text{in } L^1(\Omega),$$

da cui segue

$$\limsup_k \int_\Omega a(x,T_h(u_k),\nabla T_h(u_k))\cdot(\nabla T_h(u_k)-\nabla T_h(u))\ d\,\mathcal{L}^n(x) \leq 0.$$

Siccome valgono le ipotesi di crescita controllata per a, allora $T_h(u_k)\to T_h(u)$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ per il teorema (3.1.6). Risulta dunque

$$\|\nabla u_k - \nabla u\|_p \leq \|\nabla T_h(u_k)-\nabla T_h(u)\|_p + \|\nabla R_h(u)\|_p + \|\nabla R_h(u_k)\|_p,$$

quindi

$$\limsup_k \|\nabla u_k - \nabla u\|_p \leq \|\nabla R_h(u)\|_p + \limsup_k \|\nabla R_h(u_k)\|_p$$

e infine, per $h\to+\infty$, si ha

$$\lim_k \|\nabla u_k - \nabla u\|_p = 0$$

per (4.10). Ne segue che $u \in \partial\Lambda$ e, passando al limite nell'equazione iniziale,

$$\int_\Omega \big(a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v + b(x,u,\nabla u)v\big)\, d\,\mathcal{L}^n(x) - \langle F(u), v\rangle = \langle w, v\rangle$$

per ogni $v \in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, da cui l'assurdo.

Sia ora $\bar{t} \geq 1$ tale che $A_{\rho,t}u \neq w$ per ogni $t \geq \bar{t}$, $\rho \in [0,1]$ e $u \in \partial\Lambda$. Poiché

$$\begin{aligned}&|\rho\vartheta_{\bar{t}}(b(x,u,\nabla u)) + (1-\rho)\eta_{\bar{t}}(b(x,u,\nabla u))| \leq \\ &\quad \leq \rho|\vartheta_{\bar{t}}(b(x,u,\nabla u))| + (1-\rho)|\eta_{\bar{t}}(b(x,u,\nabla u))| \leq C < +\infty,\end{aligned}$$

allora $A_{\rho,\bar{t}}$ è demicontinua e di classe S_+ per ogni $\rho \in [0,1]$. Allora, per invarianza omotopica del grado, si ha

$$\deg(A_{\eta_{\bar{t}}}, \Lambda, w) = \deg(A_{\vartheta_{\bar{t}}}, \Lambda, w),$$

da cui la tesi. □

4.3 Proprietà del grado

Date $a : \Omega\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ e $b : \Omega\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ funzioni di Carathéodory verificanti le disuguaglianze (4.1), (4.2) e (4.3) e $F : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ completamente continua, per ogni Λ aperto limitato in $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $w \in W^{-1,p'}(\Omega)$ tali che l'equazione

$$-\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) + b(x,u,\nabla u) - F(u) = w$$

non ha soluzioni deboli $u \in \partial\Lambda$ è definito $\deg(A,\Lambda,w) \in \mathbb{Z}$ per cui valgono le seguenti proprietà:

4.3.1 Teorema (Consistenza). *Siano $a : \Omega\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ e $b : \Omega\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ funzioni di Carathéodory verificanti le disuguaglianze* (3.1)*,* (4.2) *e* (4.3) *e tali che $Au = w$ non ammetta soluzioni deboli in $\partial\Lambda$.*
Allora $\deg(A,\Lambda,w)$ *coincide con il grado in quanto applicazione di classe S_+.*

Dimostrazione. Utilizzando la disuguaglianza di Young si dimostra che esistono $\nu > 0$ e, per ogni $\varepsilon > 0$, $a_\varepsilon \in L^1(\Omega)$ tali che

$$a(x,s,\xi)\cdot\xi + b(x,s,\xi)s \geq \nu|\xi|^p - a_\varepsilon(x) - \varepsilon|s|^{p^*}$$

per $\mathcal{L}^n$–q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $(s,\xi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Chiaramente questa disuguaglianza è verificata anche se sostituiamo $b(x,s,\xi)$ con $b_t(x,s,\xi)$.

Definiamo l'applicazione

$$\begin{aligned}W_0^{1,p}(\Omega)\times[0,1] &\to W^{-1,p'}(\Omega)\\ (u,t) &\mapsto A_t u.\end{aligned}$$

Questa applicazione è di classe S_+ per il teorema (3.1.6) e continua per $t \in]0,1]$ per il lemma (4.2.3). La continuità in $t=0$ segue da

$$\lim_{t\to 0} \|b_t(x,u,\nabla u) - b(x,u,\nabla u)\|_{(p^*)'} = 0$$

per il teorema di convergenza dominata.

Dato Λ aperto limitato in $W_0^{1,p}(\Omega)$, supponiamo che $Au \neq w$ per ogni $u \in \partial\Lambda$. Esiste $\bar{t} \in]0,1]$ tale che per ogni $t \in [0,\bar{t}]$ si ha $A_t u \neq w$ per ogni $u \in \partial\Lambda$. Per il teorema (2.2.12) risulta

$$\deg(A_t,\Lambda,w) = \deg(A_0,\Lambda,w) = \deg(A,\Lambda,w),$$

da cui la tesi. □

4.3.2 Teorema (Criterio di esistenza). *Se $Au = w$ non ha soluzioni in $\overline{\Lambda}$, allora*

$$\deg(A,\Lambda,w) = 0.$$

Dimostrazione. Sia per assurdo

$$\deg(A,\Lambda,w) \neq 0,$$

allora esiste $\bar{t} \in]0,1]$ tale che per ogni $t \in]0,\bar{t}]$ risulti

$$\deg(A_t,\Lambda,w) \neq 0,$$

da cui segue che per ogni $t \in]0,\bar{t}]$ esiste $u_t \in \overline{\Lambda}$ tale che $A_t u_t = w$, il che è assurdo per il teorema (4.2.2). □

4.3.3 Teorema (Excisione). *Siano $w \in W^{-1,p'}(\Omega)$, $\Gamma \subseteq \Lambda$ aperto limitato in $W_0^{1,p}(\Omega)$ tali che $Au \neq w$ per ogni $u \in \overline{\Lambda} \setminus \Gamma$.*
Allora

$$\deg(A,\Lambda,w) = \deg(A,\Gamma,w).$$

Dimostrazione. Esiste $\bar{t} \in]0,1]$ tale che per ogni $t \in]0,\bar{t}]$ e per ogni $u \in \overline{\Lambda} \setminus \Gamma$ si abbia $A_t u \neq w$. Per il teorema (3.2.3) si ha

$$\deg(A_{\bar{t}},\Lambda,w) = \deg(A_{\bar{t}},\Gamma,w),$$

da cui la tesi. □

4.3.4 Teorema (Additività). *Siano $\{\Lambda_j : j \in J\}$ una famiglia di aperti in Λ a due a due disgiunti che ricopre Λ e $w \in W^{-1,p'}(\Omega)$ tale che $au \neq w$ per ogni $u \in \partial\Lambda$. Allora risulta $Au \neq w$ per ogni $u \in \partial\Lambda_j$ e per ogni $j \in J$, $\deg(A,\Lambda_j,w) \neq 0$ solo per un numero finito di $j \in J$ e*

$$\deg(A,\Lambda,w) = \sum_{j\in J} \deg(A,\Lambda_j,w).$$

Dimostrazione. Poiché $\partial\Lambda_j \subseteq \partial\Lambda$, si ha $Au \neq w$ per ogni $u \in \partial\Lambda_j$ e per ogni $j \in J$.

Esiste $\bar{t} \in]0,1]$ tale che per ogni $t \in]0,\bar{t}]$ si abbia $A_t u \neq w$ per ogni $u \in \partial\Lambda$, quindi anche per ogni $u \in \partial\Lambda_j$ e per ogni $j \in J$. Per il teorema (3.2.4) si ha $\deg(A_{\bar{t}}, \Lambda_j, w) \neq 0$ solo per un numero finito di $j \in J$ e

$$\deg(A_{\bar{t}}, \Lambda, w) = \sum_{j\in J} \deg(A_{\bar{t}}, \Lambda_j, w),$$

da cui la tesi. □

Introduciamo di nuovo la dipendenza dal parametro $\rho \in [0,1]$ e poniamo, per ogni $(u,\rho,t) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times [0,1] \times]0,1]$,

$$A_{\rho,t}u = -\operatorname{div}(a_\rho(x,u,\nabla u)) + b_{\rho,t}(x,u,\nabla u) - F_\rho(u).$$

4.3.5 Lemma. *L'applicazione*

$$\begin{aligned} A:\ W_0^{1,p}(\Omega) \times [0,1] \times]0,1] &\to W^{-1,p'}(\Omega) \\ (u,\rho,t) &\mapsto A_{\rho,t}u \end{aligned}$$

è continua e di classe S_+ uniformemente per $\rho \in [0,1]$.

Dimostrazione. Per la dimostrazione si procede come nel lemma (4.2.3). □

4.3.6 Teorema (Invarianza omotopica). *Siano $w \in W^{-1,p'}(\Omega)$ e Λ aperto limitato in $W_0^{1,p}(\Omega)$ tali che per ogni $u \in \partial\Lambda$ e per ogni $\rho \in [0,1]$ si abbia $A_\rho u \neq w$.*
Allora la funzione

$$\{\rho \longmapsto \deg(A_\rho, \Lambda, w)\}$$

è costante su $[0,1]$.

Dimostrazione. Esiste $\bar{t} \in]0,1]$ tale che $A_{\rho,t}u \neq w$ per ogni $(u,\rho) \in \partial\Lambda \times [0,1]$ ed ogni $t \in]0,\bar{t}]$. Per il teorema (3.2.5) si ha che

$$\{\rho \longmapsto \deg(A_{\rho,\bar{t}}, \Lambda, w)\}$$

è costante nell'intervallo $[0,1]$, da cui la tesi. □

4.3.7 Teorema. *Siano $a,b \in \mathbb{R}$, Λ un aperto limitato in $W_0^{1,p}(\Omega) \times [a,b]$ e $w \in W^{-1,p'}(\Omega)$ tale che $A_\rho u \neq w$ per ogni $(u,\rho) \in \partial_{W_0^{1,p}(\Omega)\times[a,b]}\Lambda$.*
Allora, posto

$$\forall \rho \in [a,b]:\ \Lambda_\rho = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega):\ (u,\rho) \in \Lambda\},$$

la funzione

$$\{\rho \longmapsto \deg(A_\rho, \Lambda_\rho, w)\}$$

è costante su $[a,b]$,

Dimostrazione. Esiste $\bar{t} \in]0,1]$ tale che $A_{\rho,t}u \neq w$ per ogni $t \in]0,\bar{t}]$ e $(u,\rho) \in \partial_{W_0^{1,p}(\Omega)\times[a,b]}\Lambda$. Per il teorema (3.2.6) si ha che l'applicazione

$$\{\rho \longmapsto \deg(A_{\rho,\bar{t}}, \Lambda_\rho, w)\}$$

è costante su $[a,b]$, da cui la tesi. $\square$

Capitolo 5

Biforcazione globale per equazioni quasi lineari con crescita naturale

5.1 Problemi di biforcazione globale

Consideriamo Ω aperto limitato in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$, $p = 2$ e le applicazioni

$$a : \Omega \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$$
$$b : \Omega \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$$

tali che per ogni $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ $a(\cdot, s, \xi)$ e $b(\cdot, s, \xi)$ siano $\mathcal{L}^n$–misurabili e per $\mathcal{L}^n$–q.o. $x \in \Omega$ $a(x, \cdot, \cdot)$ e $b(x, \cdot, \cdot)$ siano di classe C^1. Supponiamo che esistano $\alpha_2 \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$, $\alpha_3 \in L^2(\Omega)$, $\alpha_4 \in L^n(\Omega)$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$|a(x, s, \xi)| \leq \alpha_4(x)|s| + \beta|s|^{\frac{n}{n-2}} + \beta|\xi|,$$
$$|b(x, s, \xi)| \leq \alpha_2(x)|s| + \alpha_3(x)|\xi| + \beta|s|^{\frac{2n}{n-2}} + \beta|\xi|^2,$$

per $\mathcal{L}^n$–q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. In particolare, osserviamo che $a(x, 0, 0) = 0$ e $b(x, 0, 0) = 0$. Supponiamo inoltre che si abbia

$$\nabla_\xi b(x, 0, 0) = 0, \qquad \nabla_s b(x, 0, 0) = 0$$

per $\mathcal{L}^n$–q.o. $x \in \Omega$,

$$\big(a(x, s, \xi) - a(x, s, \eta)\big) \cdot (\xi - \eta) > 0$$

per $\mathcal{L}^n$–q.o. $x \in \Omega$, per ogni $s \in \mathbb{R}$ e per ogni $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ con $\xi \neq \eta$ e che esistano $\nu > 0$ e, per ogni $\varepsilon > 0$, $\alpha_\varepsilon \in L^{\frac{n}{2}}(\Omega)$ tali che

$$a(x, s, \xi) \cdot \xi \geq \nu|\xi|^2 - \alpha_\varepsilon(x)s^2 - \varepsilon|s|^{\frac{2n}{n-2}},$$
$$b(x, s, \xi)s \geq -\alpha_\varepsilon(x)s^2 - \varepsilon|s|^{\frac{2n}{n-2}} - \varepsilon|\xi|^2$$

per $\mathcal{L}^n$–q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $(s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Per $\rho \in]0,1]$ definiamo

$$a_\rho(x,s,\xi) = \frac{1}{\rho} a(x,\rho s,\rho\xi),$$

$$b_\rho(x,s,\xi) = \frac{1}{\rho}(x,\rho s,\rho\xi),$$

$$\begin{aligned} a_0(x,s,\xi) &= D_\xi a(x,0,0)\xi + s\, D_s a(x,0,0), \\ b_0(x,s,\xi) &= \nabla_\xi b(x,0,0)\cdot\xi + D_s b(x,0,0)s = 0. \end{aligned}$$

In questo modo le applicazioni a_ρ e b_ρ sono definite per $\rho \in [0,1]$.

Per ogni $\rho \in]0,1]$ si ha

$$\begin{aligned} |a_\rho(x,s,\xi)| &\le \alpha_4(x)|s| + \beta|\xi| + \beta\rho^{\frac{2}{n-2}}|s|^{\frac{n}{n-2}} \le \alpha_4(x)|s| + \beta|\xi| + \beta|s|^{\frac{n}{n-2}} \le \\ &\le \frac{2}{n}\alpha_4(x)^{\frac{n}{2}} + \beta|\xi| + \Big(\beta + \frac{n-2}{n}\Big)|s|^{\frac{n}{n-2}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |b_\rho(x,s,\xi)| &\le \alpha_2(x)|s| + \alpha_3(x)|\xi| + \beta\rho^{\frac{n+2}{n-2}}|s|^{\frac{2n}{n-2}} + \beta\rho|\xi|^2 \\ &\le \alpha_2(x)|s| + \alpha_3(x)|\xi| + \beta|s|^{\frac{2n}{n-2}} + \beta|\xi|^2 \le \\ &\le \frac{n+2}{2n}\alpha_2(x)^{\frac{2n}{n+2}} + \frac{1}{2}\alpha_3(x)^2 + \Big(\beta + \frac{n-2}{2n}\Big)|s|^{\frac{2n}{n-2}} + \Big(\beta + \frac{1}{2}\Big)|\xi|^2. \end{aligned}$$

Banalmente è verificata la disuguaglianza

$$\big(a_\rho(x,s,\xi) - a_\rho(x,s,\eta)\big)\cdot(\xi - \eta) > 0$$

per ogni $\xi,\eta \in \mathbb{R}^n$ con $\xi \ne \eta$. Infine si ha

$$\begin{aligned} a_\rho(x,s,\xi)\cdot\xi &\ge \nu|\xi|^2 - \alpha_\varepsilon(x)s^2 - \varepsilon\rho^{\frac{4}{n-2}}|s|^{\frac{2n}{n-2}} \ge \nu|\xi|^2 - \alpha_\varepsilon(x)s^2 - \varepsilon|s|^{\frac{2n}{n-2}} \ge \\ &\ge \nu|\xi|^2 - \frac{2}{n}\frac{\alpha_\varepsilon(x)^{\frac{n}{2}}}{\varepsilon^{\frac{n}{2}}} - \Big(\varepsilon + \frac{n-2}{n}\varepsilon^{\frac{n}{n-2}}\Big)|s|^{\frac{2n}{n-2}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} b_\rho(x,s,\xi)s &\ge -\alpha_\varepsilon(x)s^2 - \varepsilon|\xi|^2 - \varepsilon\rho^{\frac{4}{n-2}}|s|^{\frac{2n}{n-2}} \ge -\alpha_\varepsilon(x)s^2 - \varepsilon|\xi|^2 - \varepsilon|s|^{\frac{2n}{n-2}} \ge \\ &\ge -\frac{2}{n}\frac{\alpha_\varepsilon(x)^{\frac{n}{2}}}{\varepsilon^{\frac{n}{2}}} - \varepsilon|\xi|^2 - \Big(\varepsilon + \frac{n-2}{n}\varepsilon^{\frac{n}{n-2}}\Big)|s|^{\frac{2n}{n-2}}. \end{aligned}$$

Passando al limite per $\rho \to 0$, si ottiene che tutte queste disuguaglianze sono verificate uniformemente per $\rho \in [0,1]$. Sono quindi verificate le ipotesi di crescita naturale definite nel capitolo precedente. Poniamo, per $\rho \in]0,1]$,

$$A_\rho u = -\operatorname{div}(a_\rho(x,u,\nabla u)) + b_\rho(x,u,\nabla u)$$

e definiamo

$$L:\ H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$$

ponendo $Lu = -\operatorname{div}\big((a_0(x,u,\nabla u)\big)$ e

$$K : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$$

come $Ku = u$. L'operatore K è quindi compatto.

5.1.1 Proposizione. *Esiste $\overline{\lambda} > 0$ tale che $L + \lambda K$ sia coercitiva per ogni $\lambda \geq \overline{\lambda}$.*

Dimostrazione. Siccome $C_c(\Omega)$ è denso in $L^n(\Omega)$, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $B_{\varepsilon,1} \in L^n(\Omega;\mathbb{R}^n)$ e $B_{\varepsilon,2} \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)$ tali che

$$D_s a(x,0,0) = B_{\varepsilon,1} + B_{\varepsilon,2}$$

con $\|B_{\varepsilon,1}\|_n \leq \varepsilon$.

Sia $\varepsilon > 0$ tale che

$$\varepsilon\frac{2(n-1)}{n-2} \leq \frac{\nu}{3} \qquad \frac{1}{2}\varepsilon^2 \leq \frac{\nu}{3},$$

risulta

$$\begin{aligned}
\big\langle (L+\overline{\lambda}K)u,u\big\rangle &\geq \nu\|\nabla u\|_2^2 - \|B_{\varepsilon,1}\|_n\|\nabla u\|_2\|u\|_{\frac{2n}{n-2}} - \|B_{\varepsilon,2}\|_\infty\|\nabla u\|_2\|u\|_2 + \overline{\lambda}\|u\|_2^2 \geq \\
&\geq \nu\|\nabla u\|_2^2 - \varepsilon\Big(\frac{2(n-1)}{n-2}\Big)^2\|\nabla u\|_2^2 - \|B_{\varepsilon,2}\|_\infty\|u\|_2\|\nabla u\|_2 + \overline{\lambda}\|u\|_2^2 \geq \\
&\geq \frac{2\nu}{3}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{2\varepsilon^2}\|B_{\varepsilon,2}\|_\infty^2\|u\|_2^2 + \overline{\lambda}\|u\|_2^2 \geq \\
&\geq \frac{\nu}{3}\|\nabla u\|_2^2
\end{aligned}$$

scegliendo

$$\overline{\lambda} \geq \frac{1}{2\varepsilon^2}\|B_{\varepsilon,2}\|_\infty^2.$$

Poiché $\langle Ku,u\rangle \geq 0$, ne segue la tesi. □

Consideriamo il problema non lineare agli autovalori

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) + b(x,u,\nabla u) = \lambda u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

scriviamo anche $A_1 u = \lambda u$, e introduciamo l'equazione linearizzata

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a_0(x,u,\nabla u)) = \lambda u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.2}$$

che possiamo riscrivere in forma debole come $Lu = \lambda Ku$, che quindi diventa anche

$$(L+\overline{\lambda}K)u = \frac{\lambda+\overline{\lambda}}{\overline{\lambda}}\overline{\lambda}Ku,$$

dove $\overline{\lambda}$ è fornito dalla proposizione (5.1.1). Dal momento che $L+\overline{\lambda}K$ è biiettivo, ogni autovalore λ verifica $\lambda \neq -\overline{\lambda}$.

5.2 Biforcazione globale

Denotiamo con S la chiusura in $H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ dell'insieme

$$\{(u, \lambda) \in H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R} : \ A_1 u = \lambda u, \ u \neq 0\}.$$

5.2.1 Definizione. *Diciamo che $\lambda \in \mathbb{R}$ è un valore di biforcazione per* (5.1) *se* $(0, \lambda) \in S$.

Il prossimo teorema estende alle equazioni con crescita naturale un classico risultato di Krasnoselskii.

5.2.2 Teorema. *Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore di (L, K) di molteplicità algebrica dispari. Allora λ è di biforcazione per* (5.1).

Dimostrazione. Sia $\overline{\lambda}$ come da proposizione (5.1.1) con $\lambda + \overline{\lambda} > 0$. Per assurdo supponiamo che λ non sia valore di biforcazione per (5.1). Allora esiste $\delta \in]0, \lambda + \overline{\lambda}[$ tale che

$$\forall \gamma \in [\lambda - \delta, \lambda + \delta], \forall u \in \overline{\mathrm{B}(0, \delta)} \setminus \{0\} : \ A_1 u \neq \gamma u$$

e tale che

$$[\lambda - \delta, \lambda + \delta] \setminus \{\lambda\}$$

sia contenuto nel risolvente del linearizzato.

Per il teorema (2.3.6) risulta

$$\deg(L - (\lambda - \delta)K, \mathrm{B}(0, \delta), 0) = (-1)^{m_-},$$
$$\deg(L - (\lambda + \delta)K, \mathrm{B}(0, \delta), 0) = (-1)^{m_+},$$

dove m_- denota la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori μ di $\big(L - (\lambda - \delta)K, K\big)$ tali che $-((\lambda - \delta) + \overline{\lambda}) < \mu < 0$ e m_+ la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori μ di $\big(L - (\lambda + \delta)K, K\big)$ tali che $-((\lambda + \delta) + \overline{\lambda}) < \mu < 0$. Equivalentemente, m_- è la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori μ di (L, K) tali che $-\overline{\lambda} < \mu < \lambda - \delta$ e m_+ è la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori μ di (L, K) tali che $-\overline{\lambda} < \mu < \lambda + \delta$. Ne segue che $m_+ - m_-$ è la molteplicità algebrica di λ, per cui

$$\deg(L - (\lambda - \delta)K, \mathrm{B}(0, \delta), 0) \neq \deg(L - (\lambda + \delta)K, \mathrm{B}(0, \delta), 0).$$

Consideriamo ora l'operatore A_ρ per $\rho \in [0, 1]$. Risulta

$$\forall \gamma \in [\lambda - \delta, \lambda + \delta] \setminus \{\lambda\}, \forall u \in \overline{\mathrm{B}(0, \delta)} \setminus \{0\}, \forall \rho \in [0, 1] : \ A_\rho u \neq \gamma u,$$

mentre, se $\gamma = \lambda$, si ha

$$\forall u \in \overline{\mathrm{B}(0, \delta)} \setminus \{0\}, \forall \rho \in]0, 1] : \ A_\rho u \neq \lambda u.$$

Allora per le proprietà di invarianza omotopica e di excisione si ottiene

$$\deg(L - (\lambda - \delta)K, \mathrm{B}(0, \delta), 0) = \deg(A_1 - (\lambda - \delta)K, \mathrm{B}(0, \delta), 0) =$$
$$= \deg(A_1 - (\lambda + \delta)K, \mathrm{B}(0, \delta), 0) = \deg(L - (\lambda + \delta)K, \mathrm{B}(0, \delta), 0),$$

da cui l'assurdo. □

5.2.3 Lemma. *Sia C un sottoinsieme chiuso e limitato di S, allora C è compatto.*

Dimostrazione. Procediamo come nel teorema (4.2.2). Sia (u_k, λ_k) una successione in C, allora, a meno di sottosuccessione, si ha $\lambda_k \to \lambda$ in $\mathbb{R}$ e $u_k \rightharpoonup u$ in $H_0^1(\Omega)$ e $u_k \to u$ in $L^2(\Omega)$ e $\mathcal{L}^n$–q.o. in Ω. Per ogni $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ si ha

$$\int_\Omega \big(a(x, u_k, \nabla u_k) \cdot \nabla v + b(x, u_k, \nabla u_k)v\big)\ d\,\mathcal{L}^n(x) = \lambda_k \int_\Omega u_k v\ d\,\mathcal{L}^n(x).$$

Mostriamo innanzitutto che

$$\lim_h \Big(\limsup_k \|\nabla R_h(u_k)\|_2\Big) = 0.$$

Fissato $h \geq R$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha che $R_h(u_k) \in H_0^1(\Omega)$ e verifica le ipotesi del teorema (4.2.1), quindi

$$\begin{aligned}
&\lambda_k \int_\Omega u_k R_h(u_k)\ d\,\mathcal{L}^n(x) = \\
&\quad = \int_\Omega \big(a(x, u_k, \nabla u_k) \cdot \nabla(R_h(u_k))\ d\,\mathcal{L}^n(x) + b(x, u_k, \nabla u_k) R_h(u_k)\big)\ d\,\mathcal{L}^n(x) \geq \\
&\quad \geq \nu \int_{\{|u_k| \geq h|\}} |\nabla u_k|^2\ d\,\mathcal{L}^n(x) - \int_{\{|u_k| \geq h\}} \alpha_\varepsilon(x)\ d\,\mathcal{L}^n(x) - \varepsilon \sup_k \|u_k\|_{2^*}^{2^*} + \\
&\qquad - \int_{\{|u_k| \geq h\}} \frac{R_h(u_k)}{u_k} \alpha_\varepsilon(x)\ d\,\mathcal{L}^n(x) - \varepsilon \int_{\{|u_k| \geq h\}} \frac{R_h(u_k)}{u_k} |u_k|^{2^*}\ d\,\mathcal{L}^n(x) + \\
&\qquad - \varepsilon \int_{\{|u_k| \geq h\}} \frac{R_h(u_k)}{u_k} |\nabla u_k|^2\ d\,\mathcal{L}^n(x) \geq \\
&\quad \geq (\nu - \varepsilon) \int_{\{|u_k| \geq h\}} |\nabla R_h(u_k)|^2\ d\,\mathcal{L}^n(x) - 2 \int_{\{|u_k| \geq h\}} \alpha_\varepsilon(x)\ d\,\mathcal{L}^n(x) - 2\varepsilon \sup_k \|u_k\|_{2^*}^{2^*}.
\end{aligned}$$

Per il lemma di Fatou si ha

$$\limsup_k \int_\Omega \chi_{\{|u_k| \geq h\}} |\alpha_\varepsilon|\ d\,\mathcal{L}^n(x) \leq \int_\Omega \chi_{\{|u| \geq h\}} |\alpha_\varepsilon|\ d\,\mathcal{L}^n(x),$$

quindi

$$\begin{aligned}
\lambda \int_\Omega u R_h(u)\ d\,\mathcal{L}^n(x) \geq (\nu - \varepsilon) \limsup_k \int_{\{|u_k| \geq h\}} |\nabla R_h(u_k)|^2\ d\,\mathcal{L}^n(x) + \\
- 2 \int_\Omega \chi_{\{|u| \geq h\}} |\alpha_\varepsilon(x)|\ d\,\mathcal{L}^n(x) - 2\varepsilon \sup_k \|u_k\|_{2^*}^{2^*}.
\end{aligned}$$

Poiché, per $h \to +\infty$, si ha $\chi_{\{|u| \geq h\}} |\alpha_\varepsilon| \to 0$ in $L^1(\Omega)$ e $R_h(u) \to 0$ in $H_0^1(\Omega)$, allora

$$0 \geq (\nu - \varepsilon) \limsup_h \Big(\limsup_k \|\nabla R_h(u_k)\|_2^2\Big) - 2\varepsilon \sup_k \|u_k\|_{2^*}^{2^*}$$

e per $\varepsilon \to 0^+$ risulta

$$\lim_h \Big(\limsup_k \|\nabla R_h(u_k)\|_2\Big) = 0.$$

Dimostriamo ora che $T_h(u_k) \to T_h(u)$ in $H^1_0(\Omega)$. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soluzione massimale di

$$\begin{cases} \varphi'(s) = 1 + \frac{\beta}{\nu}|\varphi(s)| \\ \varphi(0) = 0. \end{cases}$$

Chiaramente φ è definita su tutto $\mathbb{R}$ e $\varphi(s)s > 0$ per ogni $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Poniamo

$$v_{h,k} = T_h(u_k) - T_h(u),$$

allora $\varphi(v_{h,k}) \in H^1_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, dunque risulta

$$\int_\Omega \big(\varphi'(v_{h,k}) a(x, u_k, \nabla u_k) \cdot \nabla v_{h,k} + b(x, u_k, \nabla u_k)\varphi(v_{h,k})\big) \, d\,\mathcal{L}^n(x) = \lambda_k \int_\Omega u_k \varphi(v_{h,k}) \, d\,\mathcal{L}^n(x).$$

Si ha che

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \varphi'(v_{h,k}) a(x, u_k, \nabla u_k) \cdot \nabla v_{h,k} \, d\,\mathcal{L}^n(x) = \\
&\quad = \int_\Omega \varphi'(v_{h,k}) a(x, T_h(u_k), \nabla T_h(u_k)) \cdot \nabla(T_h(u_k) - T_h(u)) \, d\,\mathcal{L}^n(x) + \\
&\qquad - \int_\Omega \varphi'(v_{h,k}) \big(a(x, u_k, \nabla u_k) - a(x, T_h(u_k), \nabla T_h(u_k))\big) \cdot \nabla T_h(u) \, d\,\mathcal{L}^n(x) = \\
&\quad = \int_\Omega a(x, T_h(u_k), \nabla T_h(u_k)) \cdot \nabla(T_h(u_k) - T_h(u)) \, d\,\mathcal{L}^n(x) + \\
&\qquad - \int_\Omega \chi_{\{|u|<h\}} \varphi'(v_{h,k}) \big(a(x, u_k, \nabla u_k) - a(x, T_h(u_k), \nabla T_h(u_k))\big) \cdot \nabla T_h(u) \, d\,\mathcal{L}^n(x) + \\
&\qquad - \frac{\beta}{\nu} \int_\Omega |\varphi(v_{h,k})| a(x, T_h(u_k), \nabla T_h(u_k)) \cdot \nabla T_h(u) \, d\,\mathcal{L}^n(x) + \\
&\qquad + \frac{\beta}{\nu} \int_\Omega |\varphi(v_{h,k})| a(x, T_h(u_k), \nabla T_h(u_k)) \cdot \nabla T_h(u_k) \, d\,\mathcal{L}^n(x).
\end{aligned}$$

Nell'ultima espressione osserviamo che

$$\lim_k \chi_{\{|u|<h\}} \big(a(x, u_k, \nabla u_k) - a(x, T_h(u_k), \nabla T_h(u_k))\big) = 0$$

per $\mathcal{L}^n$–q.o. $x \in \Omega$, quindi, essendo limitata in $L^2(\Omega)$,

$$\chi_{\{|u|<h\}} \big(a(x, u_k, \nabla u_k) - a(x, T_h(u_k), \nabla T_h(u_k))\big) \rightharpoonup 0$$

in $L^2(\Omega)$. La successione $\big(a(x, T_h(u_k), \nabla T_h(u_k))\big)_{k \in \mathbb{N}}$ è limitata in $L^2(\Omega)$, mentre, per il teorema di convergenza dominata, si ha

$$\begin{aligned}
&\lim_k \varphi'(v_{h,k}) \nabla T_h(u) = \varphi'(0) \nabla T_h(u) && \text{in } L^2(\Omega), \\
&\lim_k |\varphi(v_{h,k})| \nabla T_h(u) = 0 && \text{in } L^2(\Omega).
\end{aligned}$$

Ne segue

$$\lim_k \int_\Omega \chi_{\{|u|<h\}} \varphi'(v_{h,k}) \big(a(x, u_k, \nabla u_k) - a(x, T_h(u_k), \nabla T_h(u_k))\big) \cdot \nabla T_h(u) \, d\,\mathcal{L}^n(x) = 0,$$

$$\lim_k \int_\Omega |\varphi(v_{h,k})| a(x, T_h(u_k), \nabla T_h(u_k)) \cdot \nabla T_h(u) \; d\,\mathcal{L}^n(x) = 0.$$

Consideriamo ora

$$\int_\Omega b(x, u_k, \nabla u_k)\varphi(v_{h,k}) \; d\,\mathcal{L}^n(x) =$$
$$= \int_{\{|u_k|<h\}} b(x, u_k, \nabla u_k)\varphi(v_{h,k}) \; d\,\mathcal{L}^n(x) + \int_{\{|u_k \geq h\}} b(x, u_k, \nabla u_k)\varphi(v_{h,k}) \; d\,\mathcal{L}^n(x).$$

Se $|u_k| \geq h$, allora

$$\frac{\varphi(v_{h,k})}{u_k} \geq 0,$$

quindi

$$b(x, u_k, \nabla u_k)\varphi(v_{h,k}) = \frac{\varphi(v_{h,k})}{u_k} b(x, u_k, \nabla u_k) u_k \geq$$
$$\geq \frac{\varphi(v_{h,k})}{u_k}\big(-\alpha_\varepsilon(x) - \varepsilon|u_k|^{2^*} - \varepsilon|\nabla u_k|^2\big) \geq -\frac{|\varphi(v_{h,k})|}{h}\alpha_\varepsilon(x) - \frac{\varphi(2h)}{h}\varepsilon|u_k|^{2^*} - \frac{\varphi(2h)}{h}\varepsilon|\nabla u_k|^2.$$

Per il teorema di convergenza dominata risulta

$$\lim_k \frac{|\varphi(v_{h,k})|}{h}\alpha_\varepsilon(x) = 0 \qquad \text{in } L^1(\Omega),$$

quindi

$$\liminf_k \int_{\{|u_k \geq h\}} b(x, u_k, \nabla u_k)\varphi(v_{h,k}) \; d\,\mathcal{L}^n(x) \geq -\varepsilon\frac{\varphi(2h)}{h} \sup_k \|u_k\|_{2^*}^{2^*} - \varepsilon\frac{\varphi(2h)}{h} \sup_k \|\nabla u_k\|_2^2$$

e, per $\varepsilon \to 0^+$,

$$\liminf_k \int_{\{|u_k \geq h\}} b(x, u_k, \nabla u_k)\varphi(v_{h,k}) \; d\,\mathcal{L}^n(x) \geq 0.$$

Inoltre

$$\lim_k \lambda_k \int_\Omega u_k \varphi(v_{h,k}) \, \mathcal{L}^n(x) = 0.$$

Per quanto dimostrato finora risulta

$$\limsup_k \int_\Omega a(x, T_h(u_k), \nabla T_h(u_k)) \cdot \nabla(T_h(u_k) - T_h(u)) \; d\,\mathcal{L}^n(x) \leq$$
$$\leq -\liminf_k \int_{\{|u_k|<h\}} \left(\frac{\beta}{\nu}|\varphi(v_{h,k})| a(x, u_k, \nabla u_k) \cdot \nabla u_k + b(x, u_k, \nabla u_k)\varphi(v_{h,k})\right) \; d\,\mathcal{L}^n(x).$$

Se $|u_k| < h$

$$\frac{\beta}{\nu}|\varphi(v_{h,k})| a(x, u_k, \nabla u_k) \cdot \nabla u_k + b(x, u_k, \nabla u_k)\varphi(v_{h,k}) \geq$$
$$\geq |\varphi(v_{h,k})|\left(\frac{\beta}{\nu} a(x, u_k, \nabla u_k) \cdot \nabla u_k - \Big|b(x, u_k, \nabla u_k)\Big|\right) \geq$$
$$\geq |\varphi(v_{h,k})|\left(\beta|\nabla u_k|^2 - \frac{\beta}{\nu}\alpha_\varepsilon - \frac{\varepsilon\beta}{\nu}|u_k|^{2^*} - \beta|\nabla u_k|^2\right) \geq -|\varphi(v_{h,k})|\left(\frac{\beta}{\nu}\alpha_\varepsilon + \frac{\varepsilon C}{\nu} h^{2^*}\right).$$

Per il teorema di convergenza dominata

$$\lim_k |\varphi(v_{h,k})| \left(\frac{\beta}{\nu} \alpha_\varepsilon + \frac{\varepsilon C}{\nu} h^{2^*} \right) = 0 \qquad \text{in } L^1(\Omega),$$

da cui segue

$$\limsup_k \int_\Omega a(x, T_h(u_k), \nabla T_h(u_k)) \cdot \nabla(T_h(u_k) - T_h(u)) \; d\,\mathcal{L}^n(x) \leq 0.$$

Si ottiene quindi $T_h(u_k) \to T_h(u)$ in $H_0^1(\Omega)$ e

$$\|\nabla u_k - \nabla u\|_2 \leq \|\nabla T_h(u_k) - \nabla T_h(u)\|_2 + \|\nabla R_h(u_k)\|_p + \|\nabla R_h(u)\|_2,$$

dunque

$$\limsup_k \|\nabla u_k - \nabla u\|_2 \leq \limsup_k \|\nabla R_h(u_k)\|_2 + \|\nabla R_h(u)\|_2$$

e infine, per $h \to +\infty$,

$$\lim_k \|\nabla u_k - \nabla u\|_2 = 0.$$

Abbiamo quindi trovato una sottosuccessione (u_k, λ_k) convergente a (u, λ) in C con $Au = \lambda u$. $\square$

5.2.4 Lemma. *Sia Y uno spazio metrico compatto e siano C_0 e C_1 due chiusi in Y. Allora si verifica uno ed uno solo dei seguenti fatti:*

(a) esiste un chiuso connesso D in Y tale che $D \cap C_0 \neq \emptyset$ e $D \cap C_1 \neq \emptyset$;

(b) esistono due chiusi disgiunti D_0 e D_1 in Y tali che $C_0 \subseteq D_0$, $C_1 \subseteq D_1$ e $D_0 \cup D_1 = Y$.

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ ed $y \in C_0$ denotiamo con $A_{\varepsilon,y}$ l'insieme degli $z \in Y$ per cui esiste un insieme finito

$$B = \{y_0, \ldots, y_k\} \subseteq Y$$

tale che $y_0 = y$, $y_k = z$ e $d(y_j, y_{j-1}) < \varepsilon$ per ogni $j = 1, \ldots, k$. Poniamo inoltre

$$A_\varepsilon = \bigcup_{y \in C_0} A_{\varepsilon,y}.$$

Per ogni $z \in Y$ con $\mathrm{B}(z, \varepsilon) \cap A_{\varepsilon,y} \neq \emptyset$ si ha $z \in A_{\varepsilon,y}$. Pertanto $A_{\varepsilon,y}$ è aperto e chiuso in Y. In modo analogo si dimostra che anche A_ε è aperto e chiuso in Y. Se esiste $\varepsilon > 0$ tale che $A_\varepsilon \cap C_1 = \emptyset$, allora $D_0 = A_\varepsilon$ e $D_1 = Y \setminus A_\varepsilon$ sono conformi alla *(b)*.

Altrimenti, per ogni $h \geq 1$ sia

$$B_h = \left\{ y_0^{(h)}, \ldots, y_{h_h}^{(h)} \right\} \subseteq Y$$

con $y_0^{(h)} \in C_0$, $y_{k_h}^{(h)} \in C_1$ e $d(y_j^{(h)}, y_{j-1}^{(h)}) < 1/h$ per ogni $j = 1, \ldots, k_h$. A meno di una sottosuccessione, possiamo supporre che $(y_0^{(h)})$ sia convergente ad $\underline{y}$ in C_0 e che $(y_{k_h}^{(h)})$ sia convergente ad $\overline{y}$ in C_1. Sia

$$D = \bigcap_{\varepsilon > 0} A_{\varepsilon,\underline{y}}.$$

Evidentemente D è un chiuso in Y con $\underline{y}, \overline{y} \in D$, quindi $D \cap C_0 \neq \emptyset$. Inoltre, essendo compatto, D è anche connesso. Infatti, se si avesse $D = E_0 \cup E_1$ con E_0, E_1 chiusi, non vuoti e disgiunti, risulterebbe

$$\inf\{d(y,z) : y \in E_0,\, z \in E_1\} > 0.$$

Questo è assurdo, perchè per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $z \in D$ esistono $y_0, \ldots, y_k$ con $y_0 = \underline{y}$, $y_k = \overline{y}$ e $d(y_j, y_{j-1}) < \varepsilon$ per ogni $j = 1, \ldots, k$.

La *(a)* è quindi dimostrata. □

Il prossimo teorema estende alle equazioni con crescita naturale un classico risultato di Rabinowitz.

5.2.5 Teorema. *Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore di (L, K) di molteplicità algebrica dispari. Allora, denotata con $C(\lambda)$ la componente connessa di S contenente $(0, \lambda)$, si verifica uno ed uno solo dei seguenti fatti:*

(a) $C(\lambda)$ è illimitata;

(b) $C(\lambda)$ è compatta e contiene un altro punto della forma $(0, \widetilde{\lambda})$ con $\widetilde{\lambda} \neq \lambda$.

Dimostrazione. Supponiamo che $C(\lambda)$ sia limitata. Dal lemma (5.2.3) si deduce che $C(\lambda)$ è compatta.

Supponiamo per assurdo che

$$C(\lambda) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = \{(0, \lambda)\}.$$

Sia $\overline{\lambda}$ come da proposizione (5.1.1) tale che $\lambda + \overline{\lambda} > 0$ e sia $\delta \in]0, \lambda + \overline{\lambda}[$ tale che

$$[\lambda - \delta, \lambda + \delta] \setminus \{\lambda\}$$

sia contenuto nel risolvente del linearizzato e l'intervallo $[\lambda - \delta, \lambda + \delta]$ non contenga valori di biforcazione.

Essendo $C(\lambda)$ e $(\{0\} \times \mathbb{R} \setminus]\lambda - \delta, \lambda + \delta[)$ un compatto e un chiuso disgiunti, esiste un aperto limitato Λ_1 in $H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ tale che

$$C(\lambda) \subseteq \Lambda_1, \qquad \overline{\Lambda_1} \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) \subseteq \{0\} \times]\lambda - \delta, \lambda + \delta[.$$

Dal lemma (5.2.3) si deduce che $S \cap \overline{\Lambda_1}$ è compatto. Inoltre $C(\lambda)$ e $S \cap \partial\Lambda_1$ sono due chiusi in $S \cap \overline{\Lambda_1}$, per cui possiamo applicare il lemma (5.2.4). Poiché $C(\lambda)$ è una componente connessa di S, esistono due chiusi disgiunti D_0 e D_1 in $S \cap \overline{\Lambda_1}$ tali che $C(\lambda) \subseteq D_0$, $S \cap \partial\Lambda_1 \subseteq D_1$ e $D_0 \cup D_1 = S \cap \overline{\Lambda_1}$. In particolare risulta $D_0 \subseteq \Lambda_1 \setminus D_1$, per cui esiste un aperto Λ in $H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ tale che

$$D_0 \subseteq \Lambda \subseteq \overline{\Lambda} \subseteq \Lambda_1 \setminus D_1.$$

Allora Λ è un aperto limitato in $H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ tale che

$$C(\lambda) \subseteq \Lambda, \qquad S \cap \partial\Lambda = \emptyset, \qquad \overline{\Lambda} \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) \subseteq \{0\}\times]\lambda - \delta, \lambda + \delta[.$$

Siano $a \in]\lambda - \delta, \lambda[$,$b \in]\lambda, \lambda + \delta[$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$(0, a) \in \Lambda, \qquad (0, b) \in \Lambda, \qquad \Lambda \subseteq H_0^1(\Omega)\times]\alpha, \beta[.$$

Dal momento che $[\lambda - \delta, a]$ e $[b, \lambda + \delta]$ non contengono valori di biforcazione, esiste $r > 0$ tale che

$$\begin{gathered}\overline{\mathrm{B}(0,r)} \times \{a\} \subseteq \Lambda, \qquad \overline{\mathrm{B}(0,r)} \times \{b\} \subseteq \Lambda,\\ \forall (u,\gamma) \in \Lambda \cap \left(\overline{\mathrm{B}(0,r)} \times [\alpha, a]\right): \quad A_1 u = \gamma u \Rightarrow u = 0,\\ \forall (u,\gamma) \in \Lambda \cap \left(\overline{\mathrm{B}(0,r)} \times [b, \beta]\right): \quad A_1 u = \gamma u \Rightarrow u = 0.\end{gathered}$$

Come nel teorema (5.2.2) risulta

$$\deg(L - aK, \mathrm{B}(0, r), 0) \neq \deg(L - bK, \mathrm{B}(0, r), 0).$$

Consideriamo ora $\Lambda \cap (H_0^1(\Omega) \times [a, b])$ come aperto limitato in $H_0^1(\Omega) \times [a, b]$. Dal teorema (4.3.7) si deduce che

$$\deg(A_1 - aK, \Lambda_a, 0) = \deg(A_1 - bK, \Lambda_b, 0).$$

D'altronde, per le proprietà di excisione e di additività, risulta

$$\deg(A_1 - bK, \Lambda_b, 0) = \deg(A_1 - bK, \mathrm{B}(0, r), 0) + \deg(A_1 - bK, \Lambda_b \setminus \overline{\mathrm{B}(0, r)}, 0).$$

Analogamente risulta

$$\deg(A_1 - aK, \Lambda_a, 0) = \deg(A_1 - aK, \mathrm{B}(0, r), 0) + \deg(A_1 - aK, \Lambda_a \setminus \overline{\mathrm{B}(0, r)}, 0).$$

Considerando

$$\Lambda \cap \left(\left(H_0^1(\Omega) \setminus \overline{\mathrm{B}(0,r)}\right) \times [b, \beta]\right)$$

come aperto limitato in $H_0^1(\Omega) \times [b, \beta]$, si deduce che

$$\deg(A_1 - bK, \Lambda_b \setminus \overline{\mathrm{B}(0, r)}, 0) = \deg(A_1 - \beta K, \Lambda_\beta \setminus \overline{\mathrm{B}(0, r)}, 0) = 0.$$

Analogamente risulta

$$\deg(A_1 - aK, \Lambda_a \setminus \overline{\mathrm{B}(0, r)}, 0) = \deg(A_1 - \alpha K, \Lambda_\alpha \setminus \overline{\mathrm{B}(0, r)}, 0) = 0.$$

Quindi, come nel teorema (5.2.2) si ottiene

$$\begin{aligned}\deg(L - aK, \mathrm{B}(0, r), 0) = \deg(A_1 - aK, \mathrm{B}(0, r), 0) = \deg(A_1 - bK, \mathrm{B}(0, r), 0) =\\ = \deg(L - bK, \mathrm{B}(0, r), 0),\end{aligned}$$

da cui l'assurdo. □

Bibliografia

[1] Boccardo, L., Gallouët, T., and Murat, F. A unified presentation of two existence results for problems with natural growth. In *Progress in partial differential equations: the Metz surveys, 2 (1992)*, vol. 296 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.* Longman Sci. Tech., Harlow, 1993, pp. 127–137.

[2] Boccardo, L., Murat, F., and Puel, J.-P. Existence de solutions non bornées pour certaines équations quasi-linéaires. *Portugal. Math. 41*, 1-4 (1982), 507–534 (1984).

[3] Boccardo, L., Murat, F., and Puel, J.-P. Résultats d'existence pour certains problèmes elliptiques quasilinéaires. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 11*, 2 (1984), 213–235.

[4] Boccardo, L., Murat, F., and Puel, J.-P. Existence of bounded solutions for nonlinear elliptic unilateral problems. *Ann. Mat. Pura Appl. (4) 152* (1988), 183–196.

[5] Brezis, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext. Springer, New York, 2011.

[6] Browder, F. E. Fixed point theory and nonlinear problems. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 9*, 1 (1983), 1–39.

[7] Deimling, K. *Nonlinear functional analysis.* Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[8] Dugundji, J., and Granas, A. *Fixed point theory.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2003.

[9] O'Regan, D., Cho, Y. J., and Chen, Y.-Q. *Topological degree theory and applications*, vol. 10 of *Series in Mathematical Analysis and Applications.* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006.

[10] Rabinowitz, P. H. Some global results for nonlinear eigenvalue problems. *J. Functional Analysis 7* (1971), 487–513.

[11] Skrypnik, I. V. *Methods for analysis of nonlinear elliptic boundary value problems*, vol. 139 of *Translations of Mathematical Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1994. Translated from the 1990 Russian original by Dan D. Pascali.

[12] Zeidler, E. *Nonlinear functional analysis and its applications. II/B.* Springer-Verlag, New York, 1990. Nonlinear monotone operators, Translated from the German by the author and Leo F. Boron.