

Translative Zerlegungsgleichheit von Kreis und Quadrat

Diplomarbeit

zur Erlangung des Magistergrades
an der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Salzburg

eingereicht von
Armin Rainer

betreut von
O.Univ.-Prof. Dr. Peter Gerl

Salzburg, am 5. Dezember 2001

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
2	Zerlegungsgleichheit und Diskrepanz: Motivation des Beweises	3
3	Der unendliche Heiratssatz	8
4	Eine Anwendung des unendlichen Heiratssatzes	12
5	Das System der dyadischen Würfel	16
6	Ein Mengensystem	20
7	Zwei Lemmata zu den dyadischen Würfeln	25
8	Ein kombinatorisches Resultat	38
9	Eine hinreichende Bedingung für Zerlegungsgleichheit	42
10	Ein wenig metrische Zahlentheorie	47
11	Abschätzungen bestimmter Summen	53
12	Eine obere Schranke für die Diskrepanz der Menge $s_N(u; x, y, z)$	59
13	Die isotrope Diskrepanz	64
14	Zerlegungsgleichheit beschränkter konvexer Mengen	73

1 Einführung

Im Jahre 1925 legte Alfred Tarski sein berühmtes Kreis-Quadratur Problem der Öffentlichkeit vor (siehe [13]). Hier folgt die präzise Formulierung:

Ist es möglich, einen Kreis (mit Innerem) so in endlich viele disjunkte Teilmengen zu zerlegen, daß diese neu angeordnet (mittels Isometrien) eine Partition eines Quadrates darstellen? Kurz: Ist ein Kreis zerlegungsgleich zu einem Quadrat?

Diese Fragestellung ist natürlich in dem Sinne weniger strikt im Vergleich zum klassischen Kreis-Quadratur Problem, daß hier nicht die Rede davon ist, nur Zirkel und Lineal zu gebrauchen. Andererseits ist es aber strenger in der Hinsicht, daß jeder einzelne Punkt in Betracht gezogen werden muß, und keine Überlappungen der Teile erlaubt sind (in klassischen Zerlegungen werden die Ränder ignoriert).

Tarski's Kreis-Quadratur Problem wurzelt in der Theorie zerlegungsgleicher Mengen, die zwischen 1914 und 1925 von F. Hausdorff, W. Sierpiński, S. Banach, A. Tarski, J. von Neumann und anderen entwickelt wurde. Die erste systematische Darstellung dieser Theorie wurde 1924 von Banach und Tarski in einer Arbeit gegeben, die auch das oft zitierte Banach-Tarski Paradox enthält. Viele Resultate dieser Theorie sind von paradoxer Natur, da sie unserer geometrischen Anschauung widersprechen. Dahinter verbirgt sich stets das „Paradox der Unendlichkeit“; das ist die Eigenschaft unendlicher Mengen, in zwei disjunkte Teilmengen zerlegbar zu sein, die beide zum Original äquivalent sind.

Das Banach-Tarski Paradox, das aussagt, daß je zwei beschränkte Mengen mit nicht leerem Innerem im \mathbb{R}^3 zerlegungsgleich sind, motiviert natürlich Tarski's Kreis-Quadratur. Da jedoch, wie Banach 1923 zeigte, das Lebesguemaß in der Ebene zu einem endlich-additiven und unter Isometrien invarianten Maß erweitert werden kann, das auf allen Teilmengen des \mathbb{R}^2 definiert ist, müssen ein Kreis und sein zerlegungsgleiches Quadrat gleiche Fläche besitzen. Zunächst wurden in Zusammenhang mit Tarski's Fragestellung (unter gewissen Restriktionen) eine Reihe negativer Resultate bewiesen. L. Dubins, M. H. Hirsch, und J. Karush zeigten beispielsweise im Jahre 1963, daß der Kreis nicht „Scheren-konguent“ zu einem Quadrat ist; d.h. Kreis und Quadrat sind nicht zerlegungsgleich, wenn die Teile, in welche zerlegt wird, Jordan-Domänen (topologische Kreisscheiben) sind; Ränder werden dabei ignoriert. Aus einer Arbeit von R. J. Gardner (1985) geht hervor, daß die Kreis-Quadratur im Sinne von Tarski unmöglich ist, wenn die Teile durch Isometrien bewegt werden, von denen jeweils endlich viele eine diskrete Gruppe erzeugen.

Im Jahre 1988 gelang es dem polnischen Mathematiker Miklós Laczkovich nichtsdestotrotz zu zeigen, daß der Kreis tatsächlich zerlegungsgleich zum Quadrat ist, und erstaunlicherweise werden nur Translationen zur Neuordnung der Teile verwendet.

Hier soll nun der Beweis dieses überraschenden Ergebnisses nachvollzogen werden. Ich stütze mich allerdings nicht ausschließlich auf die Vorgangsweise Laczkovich's in seiner bahnbrechenden Arbeit [9], sondern auch einige weitere, später erschienene Arbeiten von ihm ([8], [10], [11]) werden zu Rate gezogen. Obwohl die Überlegungen im folgenden nur auf den \mathbb{R}^2 bzw. den \mathbb{R}^3 beschränkt sind, lassen sich alle Argumente unter geringem Aufwand auch im \mathbb{R}^n durchführen.

Literaturverweise: [4], [9], [10], [13], [14]

2 Zerlegungsgleichheit und Diskrepanz: Motivation des Beweises

Zunächst definieren wir die (mengentheoretische) Zerlegungsgleichheit zweier beliebiger Teilmengen der Ebene:

Definition 2.1 Die Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ heißen zerlegungsgleich, wenn es disjunkte Zerlegungen $A = \bigcup_{i=1}^m A_i, B = \bigcup_{i=1}^m B_i$ und Isometrien Φ_1, \dots, Φ_m gibt, sodaß $B_i = \Phi_i(A_i)$ für alle $i = 1, \dots, m$ gilt.

Bezeichnung: $A \sim B$

Sind in dieser Definition alle Isometrien Φ_i Translationen, dann heißen A und B translativ zerlegungsgleich.

Bezeichnung: $A \overset{tr}{\sim} B$

Der Beweis der Zerlegungsgleichheit von Kreis und Quadrat, der hier vorgeführt werden soll, basiert auf einer hinreichenden Bedingung für die translative Zerlegungsgleichheit zweier beschränkter meßbarer Mengen A und B mit gleichem positiven Lebesguemaß. Die grundlegende Idee dahinter ist folgende:

Wir suchen eine bijektive Funktion $f : A \rightarrow B$ der Gestalt

$$f(w) = w + d_i \quad \forall w \in A$$

mit endlich vielen, festen Vektoren $d_i \in \mathbb{R}^2$ ($i = 1, \dots, m$). Können wir eine derartige Funktion f finden, dann setzen wir für alle $i = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} A_i &:= \{w \in A : f(w) = w + d_i\} \quad \text{und} \\ B_i &:= A_i + d_i. \end{aligned}$$

Dann sind $\bigcup_{i=1}^m A_i$ und $\bigcup_{i=1}^m B_i$ disjunkte Zerlegungen von A und B . Und für alle $i = 1, \dots, m$ ist B_i das Bild von A_i unter der Translation $f|_{A_i}$ mit dem Translationsvektor d_i . Eine Vorstellung davon soll uns die Abbildung 1 vermitteln.

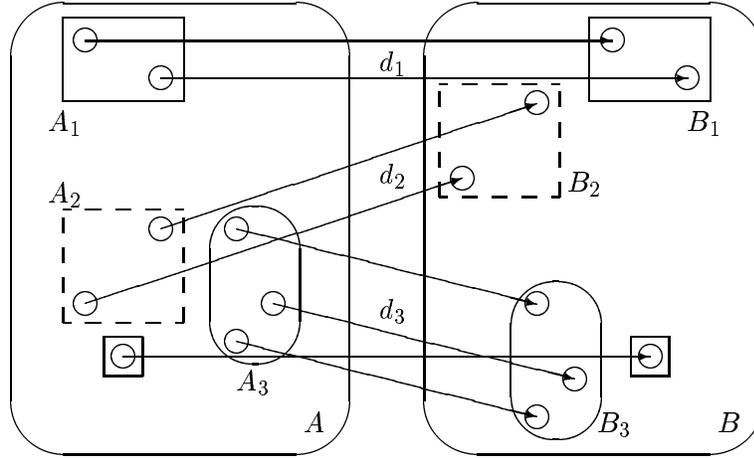


Abbildung 1: Translative Zerlegungsgleichheit von A und B .

Das Auffinden einer Funktion f mit der beschriebenen Eigenschaft ist erwartungsgemäß nicht ganz einfach.

O.B.d.A. können wir annehmen, daß A und B im Einheitsquadrat $I^2 = [0, 1]^2$ liegen. Legen wir nun über die Ebene \mathbb{R}^2 für jedes $u \in \mathbb{R}^2$ ein Gitter der folgenden Gestalt

$$G_u := \{u + nx + ky + lz + mi + hj : n, k, l, m, h \in \mathbb{Z}\},$$

wobei $x, y, z, i = (1, 0)$ und $j = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig über den rationalen Zahlen sind. Dann ist G_0 eine additive Untergruppe des \mathbb{R}^2 und G_u eine Nebenklasse davon. $\{G_u\}$ bildet also eine Partition des \mathbb{R}^2 .

Gelingt es, für jedes Gitter G_u eine bijektive Funktion $f_u : A \cap G_u \rightarrow B \cap G_u$ mit $f_u(w) = w + d_i$ für alle $w \in A \cap G_u$ zu finden, wobei die Vektoren $d_i \in \mathbb{R}^2$ ($i = 1, \dots, m$) unabhängig von G_u sein müssen, dann lassen sich diese Funktionen f_u zu einer Bijektion $f : A \rightarrow B$ mit $f(w) = w + d_i$ für alle $w \in A$ zusammensetzen. Man beachte, daß jedes f_u eine Bijektion zwischen den Gitterpunkten eines Gitters G_u in A und jenen in B darstellt.

Im weiteren betrachten wir ein festes Gitter G_{u_0} . Liegt ein Gitterpunkt $w = u_0 + nx + ky + lz + mi + hj$ in $A (\subseteq I^2)$, dann liegt $\{u_0 + nx + ky + lz\}$ in A ($\{w\}$ bezeichne den Bruchteil von w). Ein Gitterpunkt in A ist also bestimmt durch die drei ganzzahligen Parameter n, k und l . Warum es sich

gerade um drei Parameter („Freiheitsgrade“) handelt, dazu werde ich am Ende dieses Abschnittes eine Bemerkung machen.

Befassen wir uns jetzt mit folgenden Teilmengen von \mathbb{Z}^3

$$\begin{aligned} S_A(u_0) &:= \{(n, k, l) : \{u_0 + nx + ky + lz\} \in A\} \quad \text{und} \\ S_B(u_0) &:= \{(n, k, l) : \{u_0 + nx + ky + lz\} \in B\}. \end{aligned}$$

Wir nehmen an, es gelänge uns, eine Bijektion $g_{u_0} : S_A(u_0) \rightarrow S_B(u_0)$ und ein von u_0 unabhängiges $M > 0$ zu finden mit

$$|g_{u_0}(p) - p| \leq M \quad \forall p \in S_A(u_0). \quad (1)$$

Zu den Parametern (n, k, l) liefert uns g_{u_0} neue Parameter (n', k', l') , die ein $w' = \{u_0 + n'x + k'y + l'z\} = u_0 + n'x + k'y + l'z + m'i + k'j \in B \cap G_{u_0}$ festlegen. Damit ergibt sich eine Funktion $f_{u_0} : A \cap G_{u_0} \rightarrow B \cap G_{u_0}$. Die Bijektivität von g_{u_0} überträgt sich auf f_{u_0} , und die Eigenschaft (1) bewirkt, daß $f_{u_0}(w) = w + d_i$ für alle $w \in A \cap G_{u_0}$ gilt, wobei die Vektoren $d_i \in \mathbb{R}^2$ ($i = 1, \dots, m$) unabhängig von G_{u_0} sind. Die Einzelheiten werden im Abschnitt 8 ausführlich dargelegt.

Somit haben wir das Problem, eine hinreichende Bedingung für die translative Zerlegungsgleichheit zweier beschränkter meßbarer Mengen A und B zu finden, auf die Frage zurückgeführt, ob es für jedes $u \in \mathbb{R}^2$ eine bijektive Funktion $g_u : S_A(u) \rightarrow S_B(u)$ gibt, für welche die Beziehung (1) für ein von u unabhängiges $M > 0$ gilt. Der Nachweis der Existenz einer solchen Funktion g_u wird die Abschnitte 3 bis 8 umfassen.

Betrachten wir folgenden bipartiten, unendlichen Graphen: die Ecken seien die Punkte in $S_A(u) \cup S_B(u)$; zwei Ecken $a \in S_A(u)$ und $b \in S_B(u)$ seien durch eine Kante verbunden, wenn $|a - b| \leq M$ gilt; die Eckenpartition ist dann $\{S_A(u), S_B(u)\}$.

Hat dieser Graph ein vollständiges Matching, dann existiert also auch unsere gesuchte Funktion g_u . Weil jeder Eckengrad endlich ist, liefert der unendliche Heiratssatz (siehe Abschnitt 3) eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Existenz eines vollständigen Matchings:

Jedes System von k Ecken in $S_A(u)$ oder in $S_B(u)$ ist mit mindestens k Ecken benachbart. (*)

Wir müssen also zeigen, daß die Bedingung (*) erfüllt ist, und dazu werden wir beweisen, daß die Mengen $S_A(u)$ und $S_B(u)$ eine bestimmte Eigenschaft haben, die Laczkovich *uniformly spread* nennt:

Eine diskrete Menge $S \subseteq \mathbb{R}^3$ (d.h. jede beschränkte Teilmenge von S ist endlich) heißt *uniformly spread* mit Dichte α , wenn es positive Konstanten α und C gibt, sodaß

$$||S \cap H| - \alpha \lambda_3(H)| \leq C \lambda_2(\partial H)$$

für alle H gilt, wobei H eine endliche Vereinigung von Einheitswürfeln ist (λ_n bezeichne das n -dimensionale Lebesguemaß; ∂H bezeichne den Rand von H).

Wir werden im Abschnitt 4 nachweisen, daß die Bedingung (*) erfüllt ist, wenn $S_A(u)$ und $S_B(u)$ *uniformly spread* mit gleicher Dichte sind.

Erinnern wir uns an die Definition von $S_A(u)$ und $S_B(u)$:

$$\begin{aligned} S_A(u) &:= \{(n, k, l) : \{u + nx + ky + lz\} \in A\} \quad \text{und} \\ S_B(u) &:= \{(n, k, l) : \{u + nx + ky + lz\} \in B\}. \end{aligned}$$

Daß die Mengen $S_A(u)$ und $S_B(u)$ tatsächlich *uniformly spread* mit gleicher Dichte sind, wird nicht für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ gelten, die zusammen mit i und j linear unabhängig über den rationalen Zahlen sind. Eine zusätzliche Bedingung wird erforderlich sein.

Hier kommt nun der Begriff der Diskrepanz ins Spiel:

Definition 2.2 *Ist S eine endliche Teilmenge des Einheitsquadrates $I^2 = [0, 1]^2$ mit $|S| = N$ und $H \subseteq [0, 1]^2$ meßbar, dann heißt*

$$D(S; H) := \left| \frac{1}{N} |S \cap H| - \lambda_2(H) \right|$$

die Diskrepanz von S bzgl. H . Sei $J = [a, b] \times [c, d]$ ein beliebiges Rechteck mit $J \subseteq [0, 1]^2$; die Diskrepanz von S ist die Zahl

$$D(S) := \sup_{J \subseteq [0, 1]^2} D(S; J).$$

Es zeigt sich (siehe Abschnitt 9), daß die Bedingung

$$\begin{aligned} D(s_N(u; x, y, z); A) &\leq \frac{\Psi(N)}{N^3} \quad \text{und} \\ D(s_N(u; x, y, z); B) &\leq \frac{\Psi(N)}{N^3} \quad \forall N \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

wobei $s_N(u; x, y, z) := \{\{u + nx + ky + lz\} : 0 \leq n, k, l < N\}$ und Ψ eine nichtnegative Funktion auf \mathbb{N} mit $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(2^k)}{2^{2k}} < \infty$ ist, dazu ausreicht, daß $S_A(u)$ und $S_B(u)$ *uniformly spread* mit der gleichen Dichte $\alpha = \lambda_2(A) = \lambda_2(B)$ sind.

Es sei erwähnt, daß der Nachweis dieser Aussage sehr langwierig und kompliziert ist; er erstreckt sich über die Abschnitte 5 bis 9. Wesentlich ist dabei die Einführung der sogenannten dyadischen Würfel. Es handelt sich um Würfel mit achsenparallelen Kanten der Länge 2^k ($k \in \mathbb{N}_0$), und die Koordinaten aller Eckpunkte haben die Form $a2^k$ ($a \in \mathbb{Z}$).

Wir wollen nun unsere bisherigen Überlegungen zusammenfassen, indem wir die gesuchte hinreichende Bedingung für translative Zerlegungsgleichheit zweier beschränkter meßbarer Mengen mit gleichem positiven Lebesguemaß formulieren (statt A und B schreiben wir H_1 und H_2):

Satz 9.1 *Sei Ψ eine nichtnegative Funktion definiert auf \mathbb{N} mit $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(2^k)}{2^{2k}} < \infty$.
Seien H_1, H_2 meßbare Teilmengen von $I^2 = [0, 1)^2$ mit $\lambda_2(H_1) = \lambda_2(H_2) > 0$, und seien $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ so, daß:*

1. $x, y, z, i = (1, 0)$ und $j = (0, 1)$ linear unabhängig über \mathbb{Q}
2. $N^3 \cdot D(s_N(u; x, y, z); H_r) \leq \Psi(N) \quad \forall u \in \mathbb{R}^2, N \in \mathbb{N}, r = 1, 2$

Dann gilt: $H_1 \stackrel{tr}{\sim} H_2$

In den Abschnitten 10 bis 12 werden wir zeigen, daß es Punkte x, y und z im \mathbb{R}^2 , welche die Voraussetzungen 1. und 2. dieses Satzes erfüllen, überhaupt gibt. Anstatt solche Punkte zu konstruieren, weisen wir nach, daß fast alle x, y und z im \mathbb{R}^2 diese Eigenschaft haben. Dies wird uns ein wenig in die metrische Zahlentheorie führen.

Mit Hilfe von Abschätzungen bestimmter Summen, die den „Abstand zur nächsten ganzen Zahl“ enthalten, nach der Methode von W. M. Schmidt (siehe Abschnitt 11), können wir eine obere Schranke für die Diskrepanz der Menge $s_N(u; x, y, z)$ finden. Dabei werden wir die Formel von Erdős-Turán-Koksma verwenden (siehe Abschnitt 12).

Im Abschnitt 13 wollen wir noch den Begriff der isotropen Diskrepanz einführen, bei welcher das Supremum nicht über alle Rechtecke $[a, b) \times [c, d) \subseteq [0, 1)^2$ (wie in Definition 2.2) sondern über alle konvexen Mengen $C \subseteq [0, 1)^2$ gebildet wird. Mit Hilfe einer Abschätzung der isotropen Diskrepanz werden wir in der Lage sein, die hinreichende Bedingung für die translative Zerlegungsgleichheit (Satz 9.1) auf beschränkte konvexe Mengen H_1 und H_2 mit gleichem positiven Lebesguemaß anzuwenden (siehe Abschnitt 14). Als Folgerung erhalten wir die positive Antwort auf Tarski's Kreis-Quadratur Problem, da der Kreis und das Quadrat schließlich spezielle konvexe Teilmengen der Ebene sind.

Abschließend sei noch bemerkt, daß Laczkovich in seiner Arbeit [9] folgende Version des Satzes 9.1 beweist und anwendet:

Satz 9.1* *Sei Ψ eine nichtnegative Funktion definiert auf \mathbb{N} mit $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(2^k)}{2^k} < \infty$.
Seien H_1, H_2 meßbare Teilmengen von $I^2 = [0, 1)^2$ mit $\lambda_2(H_1) = \lambda_2(H_2) > 0$, und seien $x, y \in \mathbb{R}^2$ so, daß:*

1. $x, y, i = (1, 0)$ und $j = (0, 1)$ linear unabhängig über \mathbb{Q}
2. $N^2 \cdot D(s_N(u; x, y); H_r) \leq \Psi(N) \quad \forall u \in \mathbb{R}^2, N \in \mathbb{N}, r = 1, 2$

Dann gilt: $H_1 \stackrel{tr}{\sim} H_2$

Hier treten salopp gesprochen nur zwei „Freiheitsgrade“ auf. In dieser Arbeit [9] beweist Laczkovich die translative Zerlegungsgleichheit von Kreis und Quadrat, indem er zeigt, daß jede Menge, deren Rand eine stückweise glatte Jordankurve ist, deren Krümmung in jedem Punkt zwischen zwei positiven Konstanten liegt, translativ zerlegungsgleich zu einem Quadrat gleichen Inhalts ist. Und dazu sind nur zwei „Freiheitsgrade“ nötig. Hier wollen wir aber die Möglichkeit Tarski's Kreis-Quadratur nachweisen, indem wir die translative Zerlegungsgleichheit beschränkter konvexer Mengen gleichen Inhalts zeigen. Dazu sind aber mindestens drei „Freiheitsgrade“ erforderlich, damit die Abschätzung der Diskrepanz von $s_N(u; x, y, z)$ und die Abschätzung der isotropen Diskrepanz gut genug sind, um den Voraussetzungen der hinreichenden Bedingung für translative Zerlegungsgleichheit zu genügen.

Literaturverweise: [4], [7], [9], [10]

3 Der unendliche Heiratsatz

Sei im folgenden $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph (V die Eckenmenge, E die Kantenmenge) mit Eckenpartition $\{A, B\}$.

Definition 3.1 *Eine Menge M unabhängiger Kanten in einem Graphen $G = (V, E)$ heißt Matching. M heißt Matching von $U \subseteq V$, wenn jede Ecke aus U mit einer Kante aus M inzident ist. M heißt vollständiges Matching von G , wenn M sowohl Matching von A als auch von B ist.*

Ein unendlicher Graph G heißt lokal-finit, wenn alle Eckengrade endlich sind.

Ein unendlicher Graph $G = (V, E)$ heißt abzählbar, wenn sowohl V als auch E abzählbar sind.

Wir führen nun folgende Schreibweisen ein: $N_G(A')$ bezeichne die Menge aller Nachbarn der Elemente von $A' \subseteq A$ im Graphen G . Außerdem sei mit $G[V']$ der Graph mit Eckenmenge $V' \subseteq V$ gemeint, dessen Kanten genau die Kanten von G sind, deren Enden beide in V' liegen. Auch die Schreibweise $G - U := G[V \setminus U]$ ist gebräuchlich: $G - U$ entsteht durch „Löschen“ aller Ecken in $U \cap V$ und aller mit diesen Ecken inzidenten Kanten.

Zuerst wollen wir uns eine Eigenschaft eines unendlichen, lokalendlichen Graphen überlegen, der darüber hinaus noch zusammenhängend ist.

Lemma 3.1 *Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender, unendlicher, lokalendlicher Graph. Dann gilt: G ist abzählbar.*

Beweis: Wir starten bei einer beliebigen Ecke $v_0 \in V$.

Sei $K_n(G; v_0)$ die Menge der Ecken $v \in V$ mit Abstand n von v_0 (Abstand = minimale Anzahl von Kanten zwischen v und v_0).

Mittels Induktion nach n überlegt man sich leicht, daß $K_n(G; v_0)$ wegen der Lokalendlichkeit von G für alle $n \in \mathbb{N}_0$ endlich ist.

Weil G zusammenhängend ist, können wir V folgendermaßen darstellen: $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} K_n(G; v_0)$. Damit ist V abzählbar, weil eine abzählbare Vereinigung endlicher Mengen abzählbar ist.

Die Kantenmenge E ist von der Form $E = \bigcup_{v \in V} E_v$, wobei mit E_v die Menge der mit v inzidenten Kanten in G bezeichnet sei. Also ist E wegen der Lokalendlichkeit von G und der Abzählbarkeit von V abzählbar. \square

Lemma 3.2 *Sei G ein bipartiter, lokalendlicher Graph mit Eckenpartition $\{A, B\}$. Dann gilt:*

A hat genau dann ein Matching, wenn für alle endlichen $A' \subseteq A$ gilt, daß $|N_G(A')| \geq |A'|$ ist (Heiratsbedingung).

Beweis: „ \Rightarrow “: trivial.

„ \Leftarrow “: Wir unterscheiden folgende zwei Fälle:

1. A endlich:

Wir verwenden vollständige Induktion nach $|A|$.

$|A| = 1$: Die Behauptung ist trivialerweise wahr.

Es sei nun $|A| \geq 2$, und für kleinere $|A|$ sei die Heiratsbedingung hinreichend zur Existenz eines Matchings von A .

Wir unterscheiden zwei Fälle:

- $|N_G(S)| \geq |S| + 1$ gilt für jedes nicht leere $S \subsetneq A$: Wir wählen eine beliebige Kante $ab \in G$ ($a \in A$ und $b \in B$) und betrachten $G' := G - \{a, b\}$. Für jedes nicht leere $S \subseteq A \setminus \{a\}$ gilt dann

$$|N_{G'}(S)| \geq |N_G(S)| - 1 \geq |S|.$$

Nach Induktionsvoraussetzung enthält G' ein Matching von $A \setminus \{a\}$; zusammen mit der Kante ab ergibt dies ein Matching von A in G .

- Es gibt ein nicht leeres $A' \subsetneq A$ mit $|N_G(A')| = |A'|$: Nach Induktionsannahme enthält $G' := G[A' \cup N_G(A')]$ ein Matching von A' , weil A' eine echte Teilmenge von A ist.

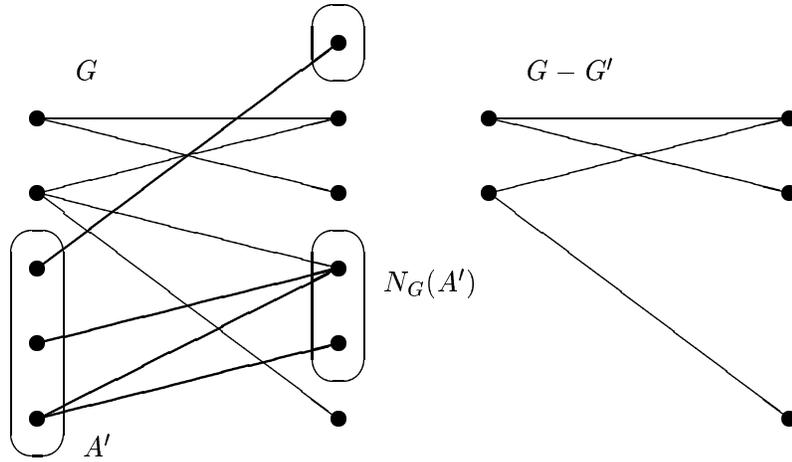


Abbildung 2: Beispiele für $G, G' := G[A' \cup N_G(A')]$ und $G - G'$.

Nun erfüllt auch $G - G'$ die Heiratsbedingung: gäbe es ein $S \subseteq A \setminus A'$ mit $|N_{G-G'}(S)| < |S|$, so wäre

$$|N_G(S \cup A')| = |N_{G-G'}(S)| + |N_G(A')| < |S| + |A'| = |S \cup A'|,$$

also ein Widerspruch. Nach Induktionsannahme enthält somit auch $G - G'$ ein Matching von $A \setminus A'$, und wir können die beiden Matchings zu einem Matching von A in G zusammensetzen.

2. A unendlich:

Nach der Aussage des Lemmas 3.1 zerfällt G in lauter höchstens abzählbare Komponenten. Somit können wir o.B.d.A. annehmen, daß G abzählbar ist; finden wir Matchings der einzelnen Zusammenhangskomponenten, so können wir diese zu einem Matching von A zusammensetzen.

Es sei $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ und wir setzen für $n \in \mathbb{N}$ $A_n := \{a_1, \dots, a_n\}$. Dann gilt nach 1.: Für jedes A_n gibt es ein Matching.

Die Zahl der Matchings von A_n ist wegen der Lokalfinitheit von G endlich.

Für $m < n$ induziert jedes Matching von A_n ein Matching von A_m .

Wähle nun ein Matching M_1 von A_1 , das durch Matchings von A_n für ∞ viele n induziert wird.

Ist für ein m schon ein Matching M_m von A_m bestimmt, das durch Matchings von A_n für ∞ viele $n > m$ induziert wird, so gibt es unter den letzteren wieder ∞ viele, die das gleiche Matching von A_{m+1} induzieren. So ein Matching wählen wir als M_{m+1} .

So erhalten wir für jedes n ein Matching M_n von A_n , und für $m < n$ ist $M_m \subseteq M_n$.

Die Vereinigung der M_n für alle $n \in \mathbb{N}$ liefert ein Matching von A . \square

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir nun den endlichen als auch den unendlichen Heiratssatz beweisen:

Satz 3.1 (Endlicher Heiratssatz) Sei $G = (V, E)$ bipartit mit Eckenpartition $\{A, B\}$ und $|A| = |B| < \infty$. Dann gilt:
 Es gibt genau dann ein vollständiges Matching von G , wenn $|N_G(A')| \geq |A'|$ für alle $A' \subseteq A$ gilt.

Beweis: Nach Lemma 3.2 hat A ein Matching. Wegen $|A| = |B| < \infty$ ist jedes Matching von A vollständig. \square

Satz 3.2 (Unendlicher Heiratssatz) Sei $G = (V, E)$ bipartit und lokal finit mit Eckenpartition $\{A, B\}$. Dann gilt:
 Es gibt genau dann ein vollständiges Matching von G , wenn $|N_G(T)| \geq |T|$ für jedes endliche $T \subseteq A$ oder $\subseteq B$ gilt.

Beweis: „ \Rightarrow “: trivial.

„ \Leftarrow “: Nach Lemma 3.2 gibt es Matchings M_A, M_B von A, B . Wir definieren den Untergraphen $G' := (A \cup B, M_A \cup M_B)$. Besitzt jede Komponente C von G' ein vollständiges Matching, so können wir diese Matchings zu einem vollständigen Matching von G' (und damit von G) zusammensetzen.

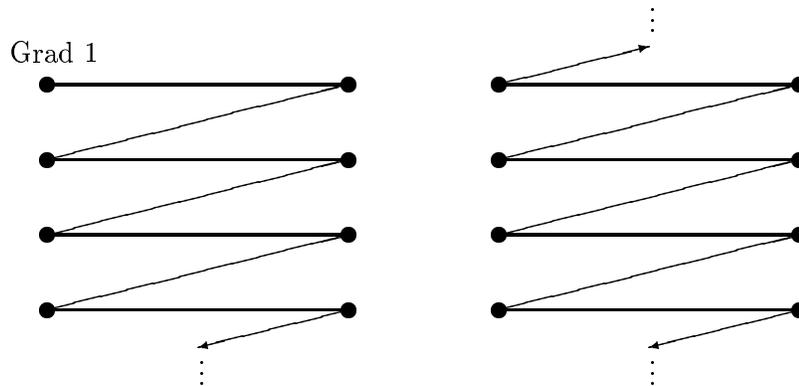


Abbildung 3: C als einseitig oder zweiseitig unendlicher Weg.

1. C endlich: fertig (nach dem endlichen Heiratssatz; $|A \cap C| = |B \cap C|$ wegen der Existenz von M_A und M_B).
2. C unendlich: C ist zusammenhängend und enthält nur Ecken vom Grad ≤ 2 (da die Kanten von C in $M_A \cup M_B$ liegen). C muß also ein einseitig oder ein zweiseitig unendlicher Weg sein, dessen Kanten

abwechselnd zu M_A und zu M_B gehören. Ist C ein einseitig unendlicher Weg und die Ecke mit Grad 1 inzident mit einer Kante aus M_A (bzw. M_B), dann setzen wir $M := M_A$ (bzw. $M := M_B$). Ist C ein zweiseitig unendlicher Weg, dann sei $M := M_A$ (siehe Abbildung 3). In beiden Fällen ist M ein vollständiges Matching von C . \square

Literaturverweise: [3], [5], [6]

4 Eine Anwendung des unendlichen Heiratssatzes

Wir werden nun eine Anwendung des unendlichen Heiratssatzes kennenlernen, die uns von großem Nutzen für den Beweis der Zerlegungsgleichheit von Kreis und Quadrat sein wird. In diesem Zusammenhang führen wir folgende Bezeichnungen ein:

- Unter einem *Einheitswürfel* verstehen wir eine Menge der Form $\prod_{i=1}^3 [a_i, a_i + 1)$ mit $a_i \in \mathbb{Z}$ für $i = 1, 2, 3$.
- \mathcal{H} stehe für die Familie aller Teilmengen von \mathbb{R}^3 , die eine endliche Vereinigung von Einheitswürfeln darstellen.
- $p(H) := \lambda_2(\partial H)$ bezeichne die Oberfläche der Menge $H \subseteq \mathbb{R}^3$ (∂H steht für den Rand von H).

Definition 4.1 *Eine Teilmenge S des \mathbb{R}^3 heißt diskret, wenn jede beschränkte Teilmenge von S endlich ist.*

Satz 4.1 *Seien S_1 und S_2 diskrete Teilmengen des \mathbb{R}^3 , und α, C_1 und C_2 seien positive Konstanten derart, daß*

$$||S_i \cap H| - \alpha \lambda_3(H)| \leq C_i \cdot p(H) \quad (2)$$

für alle $H \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2$ gilt.

Dann gibt es eine Bijektion $\Phi : S_1 \rightarrow S_2$ mit

$$|\Phi(x) - x| \leq 2\sqrt{3} \lfloor 6\alpha^{-1}(C_1 + C_2) + 1 \rfloor \quad \forall x \in S_1.$$

Bemerkung 4.1 *Laczkovich nennt diskrete Mengen $S \subseteq \mathbb{R}^3$, die die Bedingung (2) für alle $H \in \mathcal{H}$ erfüllen, „uniformly spread“ (also etwa „gleichverbreitet“) mit Dichte α .*

Die Menge \mathbb{Z}^3 beispielsweise hat diese Eigenschaft für die Dichte 1, die Menge $(2\mathbb{Z})^3$ hingegen ist nicht uniformly spread mit der Dichte 1: die Elemente von $(2\mathbb{Z})^3$ sind zwar gleichmäßig angeordnet, liegen aber zu weit auseinander.

Nebenbei sei bemerkt, daß keine endliche Menge uniformly spread mit irgendeiner Dichte sein kann.

Beweis:(der Bemerkung)

1. \mathbb{Z}^3 ist *uniformly spread* mit der Dichte 1:

Ist $H = \emptyset$, dann ist die Bedingung (2) trivialerweise erfüllt.

Für ein nicht leeres H enthält jeder Einheitswürfel $\prod_{i=1}^3 [a_i, a_i + 1)$ (mit $a_i \in \mathbb{Z}$ für $i = 1, 2, 3$) in H genau ein Element von \mathbb{Z}^3 , nämlich (a_1, a_2, a_3) . Damit ist also $|\mathbb{Z}^3 \cap H| = \lambda_3(H)$, und mit der Wahl $\alpha = 1$ gilt die Ungleichung (2) in trivialer Weise.

2. $(2\mathbb{Z})^3$ ist nicht *uniformly spread* mit der Dichte 1:

Zu zeigen ist:

$$\forall C > 0 \exists H \in \mathcal{H} : | |(2\mathbb{Z})^3 \cap H| - \lambda_3(H) | > C \cdot p(H).$$

Wir betrachten die Folge $(H_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{H}$ mit $H_n := \prod_{i=1}^3 [0, 2n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir stellen fest: $|(2\mathbb{Z})^3 \cap H_n| = n^3$, $\lambda_3(H_n) = (2n)^3$ und $p(H_n) = 6 \cdot (2n)^2$.

Seien nun $C > 0$ beliebig vorgegeben. Welche Anforderungen muß n erfüllen, damit $|(2\mathbb{Z})^3 \cap H_n| - \lambda_3(H_n) > C \cdot p(H_n)$ gilt?

$$\begin{aligned} |n^3 - 8 \cdot n^3| &> C \cdot 6 \cdot 4 \cdot n^2 \\ \Leftrightarrow n^3 \cdot |1 - 8| &> 24 \cdot C \cdot n^2 \\ \Leftrightarrow n &> \frac{24 \cdot C}{7}. \end{aligned}$$

Für gegebenes $C > 0$ gibt es also stets ein natürliches $n > \frac{24 \cdot C}{7}$, sodaß $|(2\mathbb{Z})^3 \cap H_n| - \lambda_3(H_n) > C \cdot p(H_n)$ gilt.

3. Keine endliche Menge ist *uniformly spread* mit irgendeiner Dichte:

Sei S eine endliche Menge im \mathbb{R}^3 . Wir nehmen an, es gäbe positive Konstanten α und C , sodaß

$$| |S \cap H| - \alpha \lambda_3(H) | \leq C \cdot p(H)$$

für alle $H \in \mathcal{H}$ gälte. Wir betrachten die Folge $(H_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{H}$ mit $H_n := \prod_{i=1}^3 [-n, n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $S \subseteq H_n$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Für alle $n \geq n_0$ ist $|S \cap H_n| = |S|$, $\lambda_3(H_n) = (2n)^3$ und $p(H_n) = 6 \cdot (2n)^2$. Damit folgern wir:

$$| |S| - \alpha \cdot (2n)^3 | \leq C \cdot 6 \cdot (2n)^2$$

gilt für alle $n \geq n_0$, also ist

$$\left| \frac{|S|}{n^2} - 8 \cdot \alpha \cdot n \right| \leq 24 \cdot C$$

für alle $n \geq n_0$, was widersprüchlich ist. \square

Beweis:(des Satzes) Wir setzen $M := \lfloor 6\alpha^{-1}(C_1 + C_2) + 1 \rfloor$.

Die Aussage des Satzes kann folgendermaßen formuliert werden:

Der bipartite Graph $G = (S_1 \cup S_2, \{(x, y) : x \in S_1, y \in S_2, |x - y| \leq 2\sqrt{3}M\})$ mit Eckenpartition $\{S_1, S_2\}$ hat ein vollständiges Matching.

Der Grad jeder Ecke von G ist endlich, da S_1 und S_2 diskret sind (Grad von $x_1 \in S_1 =$ Anzahl der $y \in S_2$ mit $|x_1 - y| \leq 2\sqrt{3}M =$ endlich, da jede beschränkte Teilmenge von S_2 endlich ist; analog mit $x_2 \in S_2$). Außerdem sind die Mengen S_1 und S_2 unendlich (Bemerkung 4.1).

Somit folgt die Existenz eines vollständigen Matchings von G nach dem unendlichen Heiratssatz aus folgender Bedingung:

Jedes System von k Ecken in S_1 oder in S_2 ist benachbart zu wenigstens k Ecken in G .

Wir werden nun diese Bedingung überprüfen:

Sei $X \subseteq S_1$ gegeben mit $|X| = k$.

Sei \mathcal{F}_M die Menge der Würfel der Form $Q = \prod_{i=1}^3 [a_i M, (a_i + 1)M)$ ($a_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, 3$), und sei Q_1, \dots, Q_n eine Aufzählung jener Würfel in \mathcal{F}_M , die wenigstens ein Element von X enthalten. Sei Q'_i der mit Q_i konzentrische Würfel mit Seitenlänge $3M$, und wir setzen $A := \bigcup_{i=1}^n Q_i$ und $B := \bigcup_{i=1}^n Q'_i$. Wir zeigen nun, daß folgende Ungleichungen gelten:

$$p(A) = \lambda_2(\partial A) \leq \frac{6}{M} \lambda_3(B \setminus A), \quad p(B) = \lambda_2(\partial B) \leq \frac{6}{M} \lambda_3(B \setminus A). \quad (3)$$

Es sei dazu der Rand von A als folgende disjunkte Vereinigung dargestellt: $\partial A = \bigcup_{j=1}^r F_j$, wobei $F_j \subseteq \partial A$ eine Seitenfläche von einem der Q_i (etwa Q_{i_j}) ist. D.h. F_1, \dots, F_r ist eine Aufzählung aller untereinander verschiedenen Seitenflächen, die den Rand von A ausmachen. Zu jeder solchen Seitenfläche F_j gehört genau ein Würfel $Q_{i_j} \subseteq A$. Es folgt unmittelbar, daß $p(A) = rM^2$ gilt.

P_j sei der eindeutig bestimmte Würfel aus \mathcal{F}_M , der mit dem Würfel Q_{i_j} die gemeinsame Seitenfläche F_j hat (siehe Abbildung 4). Weil $Q_{i_j} \subseteq A$ und $F_j \subseteq \partial A$ gelten, ist $P_j \cap A = \emptyset$. Außerdem gilt $P_j \subseteq Q'_{i_j} \subseteq \bigcup_{i=1}^n Q'_i = B$. Also ist $P_j \subseteq B \setminus A$ für alle j .

In der Folge P_1, \dots, P_r tritt ein Würfel höchstens 6 mal auf, da jeder Würfel P_j durch „Spiegelung“ an einer seiner 6 Seiten erhalten wird. Daraus folgt:

$$6\lambda_3(B \setminus A) \geq \sum_{j=1}^r \lambda_3(P_j) = rM^3 = MrM^2 = Mp(A),$$

also

$$p(A) \leq \frac{6}{M} \lambda_3(B \setminus A).$$

Damit ist die erste Ungleichung von (3) gezeigt.

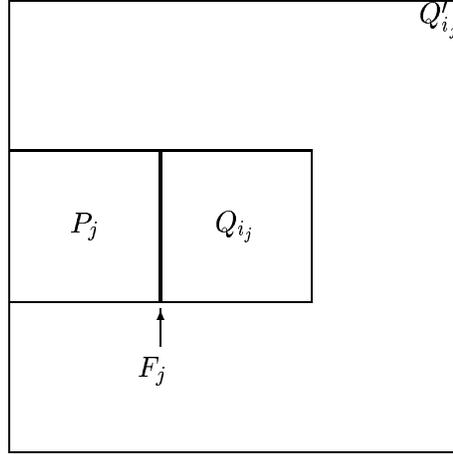


Abbildung 4: Konstruktion von P_j in 2 Dimensionen

Jetzt stellen wir $B \setminus A$ folgendermaßen dar:

$B \setminus A = \bigcup_{k=1}^m R_k$, wobei R_1, \dots, R_m verschiedene Elemente von \mathcal{F}_M sind. Dann gilt aufgrund der Konstruktion von B aus A : $\partial B \subseteq \bigcup_{k=1}^m \partial R_k$. Somit ergibt sich:

$$p(B) = \lambda_2(\partial B) \leq \sum_{k=1}^m \lambda_2(\partial R_k) \leq m6M^2 = \frac{6}{M}mM^3 = \frac{6}{M}\lambda_3(B \setminus A).$$

Also ist auch die zweite Ungleichung von (3) bewiesen.

Wir haben $M = \lfloor 6\alpha^{-1}(C_1 + C_2) + 1 \rfloor$ gesetzt. Daraus ergibt sich $M \geq 6\alpha^{-1}(C_1 + C_2)$, und es folgt $\alpha \geq \frac{6}{M}(C_1 + C_2)$. Damit und mit der Beziehung (3) können wir folgern:

$$\begin{aligned} C_1p(A) + C_2p(B) &\stackrel{(3)}{\leq} \frac{6}{M}(C_1 + C_2)\lambda_3(B \setminus A) \\ &\leq \alpha\lambda_3(B \setminus A) \\ &= \alpha\lambda_3(B) - \alpha\lambda_3(A). \end{aligned} \quad (4)$$

Nach der Voraussetzung (2) gilt speziell für A und B ($\in \mathcal{H}$):

$$\begin{aligned} |S_1 \cap A| - \alpha\lambda_3(A) &\leq ||S_1 \cap A| - \alpha\lambda_3(A)| \leq C_1p(A), \\ \alpha\lambda_3(B) - |S_2 \cap B| &\leq ||S_2 \cap B| - \alpha\lambda_3(B)| \leq C_2p(B). \end{aligned}$$

Zusammen mit der Eigenschaft (4) ergibt sich also:

$$\begin{aligned} |S_2 \cap B| &\geq \alpha\lambda_3(B) - C_2p(B) \\ &\geq \alpha\lambda_3(A) + C_1p(A) \\ &\geq |S_1 \cap A| \geq |X| = k. \end{aligned} \quad (5)$$

Es gilt: $B \subseteq U(X, 2\sqrt{3}M) := \{y \in \mathbb{R}^3 : \text{dist}(y, X) \leq 2\sqrt{3}M\}$.
 ($2\sqrt{3}M$ ist der doppelte Durchmesser eines Würfels aus \mathcal{F}_M)

Daher gilt wegen (5): $|S_2 \cap U(X, 2\sqrt{3}M)| \geq |S_2 \cap B| \stackrel{(5)}{\geq} k$; d.h. X ist benachbart zu mindestens k Ecken in G .

Symmetrisch dazu beweist man, daß jede k -elementige Teilmenge von S_2 zu mindestens k Ecken von G benachbart ist. \square

Es sei noch eine Charakterisierung diskreter Mengen, die *uniformly spread* mit Dichte α sind, erwähnt, die ich hier nur teilweise beweisen möchte. Der vollständige Beweis (siehe [11]) ist etwas aufwendig und würde uns zu weit von unserer Thematik entfernen.

Bemerkung 4.2 Für jede diskrete Menge $S \subseteq \mathbb{R}^3$ und für jedes $\alpha > 0$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. S ist uniformly spread mit Dichte α .
2. Es gibt eine Bijektion $\Phi : S \rightarrow \alpha^{-\frac{1}{3}}\mathbb{Z}^3$ mit

$$\sup_{x \in S} |\Phi(x) - x| < \infty.$$

3. Es gibt eine positive Konstante C , sodaß

$$||S \cap H| - \alpha \lambda_3(H)| \leq C \cdot \lambda_3(\{x \in \mathbb{R}^3 : \text{dist}(x, \partial H) \leq 1\})$$

für jede beschränkte meßbare Menge $H \in \mathbb{R}^3$ gilt.

Beweis: „2. \Rightarrow 3.“: ohne Beweis.

„3. \Rightarrow 1.“: ohne Beweis.

„1. \Rightarrow 2.“: Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ diskret und *uniformly spread* mit Dichte α .

Natürlich ist die Identität $id : \alpha^{-\frac{1}{3}}\mathbb{Z}^3 \rightarrow \alpha^{-\frac{1}{3}}\mathbb{Z}^3$ eine Bijektion mit $\sup_{x \in \alpha^{-\frac{1}{3}}\mathbb{Z}^3} |id(x) - x| = 0 < \infty$. Also erfüllt die Menge $\alpha^{-\frac{1}{3}}\mathbb{Z}^3$ die Bedingung 2. und damit die Bedingung 1., sie ist somit ebenfalls *uniformly spread* mit Dichte α .

Der Satz 4.1 liefert die gewünschte Bijektion. \square

Literaturverweise: [4], [9], [11]

5 Das System der dyadischen Würfel

Die Voraussetzung (2) des Satzes 4.1, nämlich die Eigenschaft einer Menge, *uniformly spread* zu sein, ist für unsere Zwecke recht unhandlich. Wir wollen versuchen, eine leichter zu handhabende hinreichende Bedingung dafür zu finden (siehe Bemerkung 8.1). Zu diesem Zweck führen wir das System der dyadischen Würfel ein.

Definition 5.1 Ein Gitterwürfel ist eine Menge der Form $Q = \prod_{i=1}^3 [a_i, a_i + n)$ mit $a_i \in \mathbb{Z}$ für $i = 1, 2, 3$ und $n \in \mathbb{N}$. Die Seitenlänge von Q bezeichnen wir mit $s(Q)$.

Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ setzen wir:

$$\mathcal{D}_k := \left\{ \prod_{i=1}^3 [a_i 2^k, (a_i + 1) 2^k) : a_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, 3 \right\}$$

Das System der dyadischen Würfel ist definiert als

$$\mathcal{D} := \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}_k.$$

Bemerkung 5.1 Die Menge der Einheitswürfel ist gleich der Menge \mathcal{D}_0 und daher in \mathcal{D} enthalten.

Zunächst wollen wir eine Vorstellung der dyadischen Würfel bekommen (siehe Abbildung 5), und dann beschäftigen wir uns mit einigen einfachen Eigenschaften dieser Würfel.

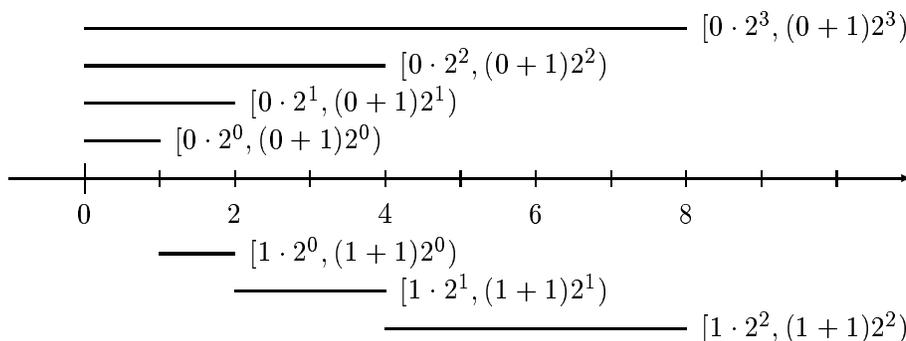


Abbildung 5: Beispiele für dyadische Würfel in 1 Dimension. Die Situation auf der negativen Halbachse ist (bis auf die Endpunkte) spiegelsymmetrisch.

Proposition 5.1 Für das System der dyadischen Würfel gelten folgende Eigenschaften:

1. Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ bildet \mathcal{D}_k eine Partition des \mathbb{R}^3 .

2. Für alle $Q_1, Q_2 \in \mathcal{D}$ gilt mindestens eine der Relationen $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset, Q_1 \subseteq Q_2, Q_2 \subseteq Q_1$.
3. Für jede endliche Familie $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ ist $\bigcup \mathcal{A}$ die disjunkte Vereinigung der (bzgl. der Inklusion) maximalen Elemente von \mathcal{A} .
4. Für alle $H \in \mathcal{H}$ gilt: H ist die disjunkte Vereinigung der maximalen Elemente von $\{Q \in \mathcal{D} : Q \subseteq H\}$.
5. Für jedes $Q \in \mathcal{D}$ gibt es ein eindeutig bestimmtes Element $Q^* \in \mathcal{D}$ mit $Q \subseteq Q^*$ und $s(Q^*) = 2s(Q)$.
6. Zu jedem $Q^* \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_0$ gehören 2^3 disjunkte $Q \in \mathcal{D}$ mit $Q \subseteq Q^*$ und $s(Q^*) = 2s(Q)$, deren Vereinigung gerade Q^* ist.

Beweis: ad 1.: trivial.

ad 2.: Seien $Q_1 \in \mathcal{D}_{k_1}, Q_2 \in \mathcal{D}_{k_2}$, also

$$Q_1 = \prod_{i=1}^3 [a_i 2^{k_1}, (a_i + 1) 2^{k_1}), \quad Q_2 = \prod_{i=1}^3 [b_i 2^{k_2}, (b_i + 1) 2^{k_2})$$

mit $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ für $i = 1, 2, 3$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- $k_1 = k_2$:
 - wenn $(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3)$: Dann ist $Q_1 = Q_2$.
 - wenn $(a_1, a_2, a_3) \neq (b_1, b_2, b_3)$: Es folgt $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$, denn sei o.B.d.A. $a_1 \neq b_1$: dann ist $|a_1 - b_1| \geq 1$ und daher $[a_1 2^{k_1}, (a_1 + 1) 2^{k_1}) \cap [b_1 2^{k_1}, (b_1 + 1) 2^{k_1}) = \emptyset$ (siehe Abbildung 5).
- $k_1 \neq k_2$: o.B.d.A. $k_1 < k_2$:
 - wenn $(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3) = (0, 0, 0)$ oder $= (-1, -1, -1)$: Dann ist $Q_1 \subseteq Q_2$ (siehe Abbildung 5).
 - wenn $(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3) \neq (0, 0, 0)$ und $\neq (-1, -1, -1)$: Es folgt $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$, denn sei o.B.d.A. $a_1 = b_1 \neq 0$ und $\neq -1$: dann ist wegen $k_1 + 1 \leq k_2$ auch $[a_1 2^{k_1}, (a_1 + 1) 2^{k_1}) \cap [a_1 2^{k_2}, (a_1 + 1) 2^{k_2}) = \emptyset$ (siehe Abbildung 5).
 - wenn $(a_1, a_2, a_3) \neq (b_1, b_2, b_3)$: o.B.d.A. $a_1 \neq b_1$
 - * wenn $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$: fertig.
 - * wenn $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$: $Q_2 \subseteq Q_1$ ist unmöglich, denn $k_1 < k_2$. Angenommen $Q_1 \not\subseteq Q_2$: Wegen $k_1 < k_2$ ist das Intervall

$[a_1 2^{k_1}, (a_1 + 1) 2^{k_1}]$ kürzer als das Intervall $[b_1 2^{k_2}, (b_1 + 1) 2^{k_2}]$,
d.h. für $a_1 2^{k_1} = b_1 2^{k_2}$ oder für $(b_1 + 1) 2^{k_2} = (a_1 + 1) 2^{k_1}$ würde
 $Q_1 \subseteq Q_2$ folgen; und daher gilt entweder

$$a_1 2^{k_1} < b_1 2^{k_2} < (a_1 + 1) 2^{k_1}$$

oder

$$a_1 2^{k_1} < (b_1 + 1) 2^{k_2} < (a_1 + 1) 2^{k_1}.$$

Daraus folgt entweder

$$a_1 < b_1 2^{k_2 - k_1} < a_1 + 1$$

oder

$$a_1 < (b_1 + 1) 2^{k_2 - k_1} < a_1 + 1;$$

in beiden Fällen ein Widerspruch. Es folgt $Q_1 \subseteq Q_2$.

ad 3.: Folgt direkt aus 2.

ad 4.: H ist eine endliche Vereinigung von Einheitswürfeln. Deshalb gilt:
 $H = \bigcup \{Q \in \mathcal{D} : Q \subseteq H\}$, und somit ist H nach 3. darstellbar als die
disjunkte Vereinigung der maximalen Elemente von $\{Q \in \mathcal{D} : Q \subseteq H\}$.

ad 5.: Eindeutigkeit:

Seien $Q_1^*, Q_2^* \in \mathcal{D}$ mit $Q \subseteq Q_1^*, Q \subseteq Q_2^*$ und $s(Q_1^*) = s(Q_2^*) = 2s(Q)$. Da
 $Q \in \mathcal{D}$ ist, gibt es ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $Q \in \mathcal{D}_k$; und es folgt $Q_1^*, Q_2^* \in \mathcal{D}_{k+1}$.
Aus dem Beweisteil „ad 2.“ (Fall „ $k_1 = k_2$ “) wissen wir: $Q_1^* = Q_2^*$ oder
 $Q_1^* \cap Q_2^* = \emptyset$. $Q_1^* \cap Q_2^* = \emptyset$ ist unmöglich, da sich sonst ein Widerspruch zu
 $Q \subseteq Q_1^*, Q \subseteq Q_2^*$ ergeben würde.

Existenz:

Sei $Q \in \mathcal{D}_k$ mit $Q = \prod_{i=1}^3 [a_i 2^k, (a_i + 1) 2^k]$, ($a_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, 3$).

Wegen $s(Q^*) = 2s(Q)$ ist $Q^* \in \mathcal{D}_{k+1}$. Wir konstruieren nun ein Q^* mit den
gewünschten Eigenschaften:

- a_i gerade: $a_i = 2l, l \in \mathbb{Z}$. Setze:
Projektion von Q^* auf die i -te Achse := $[(a_i - l) 2^{k+1}, (a_i + 1 - l) 2^{k+1}]$
Denn:

$$\begin{aligned} (a_i - l) 2^{k+1} &\leq a_i 2^k & \overset{a_i = 2l}{\Leftrightarrow} & 0 \leq 0, \\ (a_i + 1) 2^k &\leq (a_i + 1 - l) 2^{k+1} & \overset{a_i = 2l}{\Leftrightarrow} & 0 \leq 1. \end{aligned}$$

- a_i ungerade: $a_i = 2l - 1, l \in \mathbb{Z}$. Setze:
Projektion von Q^* auf die i -te Achse := $[(a_i - l) 2^{k+1}, (a_i + 1 - l) 2^{k+1}]$
Denn:

$$\begin{aligned} (a_i - l) 2^{k+1} &\leq a_i 2^k & \overset{a_i = 2l - 1}{\Leftrightarrow} & 0 \leq 1, \\ (a_i + 1) 2^k &\leq (a_i + 1 - l) 2^{k+1} & \overset{a_i = 2l - 1}{\Leftrightarrow} & 0 \leq 0. \end{aligned}$$

ad 6.: Sei $Q^* \in \mathcal{D}_{k+1}$ mit $Q^* = \prod_{i=1}^3 [b_i 2^{k+1}, (b_i+1)2^{k+1})$, ($b_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2, 3$).
 Betrachten wir die Projektion von Q^* auf die i -te Achse:

$$\begin{aligned}
 & [b_i 2^{k+1}, (b_i + 1) 2^{k+1}) \\
 &= \underbrace{[2b_i 2^k, (2b_i + 2) 2^k)}_{\in \mathbb{Z}} \\
 &= [2b_i 2^k, (2b_i + 1) 2^k) \cup [(2b_i + 1) 2^k, (2b_i + 2) 2^k) \\
 &= [a_i 2^k, (a_i + 1) 2^k) \cup [(a_i + 1) 2^k, ((a_i + 1) + 1) 2^k),
 \end{aligned}$$

wenn wir $a_i := 2b_i$ setzen. Die Projektion von Q^* auf die i -te Achse setzt sich also zusammen aus zwei disjunkten Projektionen von Würfeln $Q \in \mathcal{D}_k$ auf die i -te Achse. Und weil \mathcal{D}_k eine Partition des \mathbb{R}^3 darstellt, sind es genau zwei Projektionen.

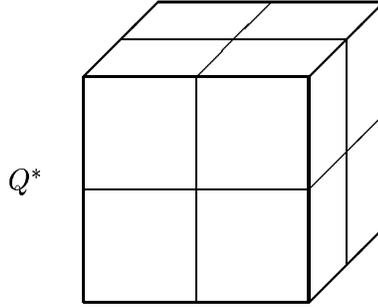


Abbildung 6: Q^* und die enthaltenen Q mit $s(Q^*) = 2s(Q)$.

Da wir uns im \mathbb{R}^3 bewegen, gibt es somit 2^3 disjunkte, in Q_i^* enthaltene $Q \in \mathcal{D}_k$, deren Vereinigung Q^* ist (Abbildung 6). \square

Literaturverweise: [11]

6 Ein Mengensystem

Um Mengen $H \in \mathcal{H}$, also endliche Vereinigungen von Einheitswürfeln, mit Hilfe dyadischer Würfel darzustellen, führen wir in diesem Abschnitt folgendes Mengensystem ein:

Definition 6.1 Sei \mathcal{A} ein endliches System von Mengen. Wir definieren induktiv ein neues Mengensystem $S(\mathcal{A})$ wie folgt:
 Setze $S_0(\mathcal{A}) := \mathcal{A} \cup \{\emptyset\}$.

Wurde $S_n(\mathcal{A})$ bereits definiert, dann gehört eine Menge A genau dann zu $S_{n+1}(\mathcal{A})$, wenn mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. $A \in S_n(\mathcal{A})$.
2. Es gibt disjunkte Subsysteme $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}$ und Mengen $A_1 \in S_n(\mathcal{A}_1), A_2 \in S_n(\mathcal{A}_2)$ so, daß $A = A_1 \cup A_2$ und $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
3. Es gibt disjunkte Subsysteme $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}$ und Mengen $A_1 \in S_n(\mathcal{A}_1), A_2 \in S_n(\mathcal{A}_2)$ so, daß $A = A_1 \setminus A_2$ und $A_2 \subseteq A_1$.

Damit ist $S_n(\mathcal{A})$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ definiert. Nun setzen wir

$$S(\mathcal{A}) := \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n(\mathcal{A}).$$

Wir wollen uns zunächst mit einigen Beispielen auseinandersetzen, um ein „Gefühl“ für dieses Mengensystem zu bekommen:

- Sei $\mathcal{A} = \emptyset$, dann ist $S_n(\mathcal{A}) = \{\emptyset\}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, also $S(\mathcal{A}) = \{\emptyset\}$.
- Sei $\mathcal{A} = \{A_1\}$, dann ist $S_n(\mathcal{A}) = \{\emptyset, A_1\}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, also $S(\mathcal{A}) = \{\emptyset, A_1\}$.
- Sei $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$ mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, dann gilt:

$$\begin{aligned} S_0(\mathcal{A}) &= \{\emptyset, A_1, A_2\}, \\ S_1(\mathcal{A}) &= \{\emptyset, A_1, A_2, A_1 \cup A_2\} = S_n(\mathcal{A}) \quad \forall n \geq 1, \text{ also} \\ S(\mathcal{A}) &= \{\emptyset, A_1, A_2, A_1 \cup A_2\}. \end{aligned}$$

- Sei $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$ mit $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, $A_1 \not\subseteq A_2$ und $A_2 \not\subseteq A_1$, dann gilt:

$$\begin{aligned} S_0(\mathcal{A}) &= \{\emptyset, A_1, A_2\} = S_n(\mathcal{A}) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \text{ also} \\ S(\mathcal{A}) &= \{\emptyset, A_1, A_2\}. \end{aligned}$$

- Sei $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$ mit $A_2 \subseteq A_1$, dann gilt:

$$\begin{aligned} S_0(\mathcal{A}) &= \{\emptyset, A_1, A_2\}, \\ S_1(\mathcal{A}) &= \{\emptyset, A_1, A_2, A_1 \setminus A_2\} = S_n(\mathcal{A}) \quad \forall n \geq 1, \text{ also} \\ S(\mathcal{A}) &= \{\emptyset, A_1, A_2, A_1 \setminus A_2\}. \end{aligned}$$

- Sei $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$ mit paarweise disjunkten A_i , dann gilt:

$$S_0(\mathcal{A}) = \{\emptyset, A_1, A_2, A_3\},$$

$$S_1(\mathcal{A}) = S_0(\mathcal{A}) \cup \{A_1 \cup A_2, A_1 \cup A_3, A_2 \cup A_3\}$$

$$S_2(\mathcal{A}) = S_1(\mathcal{A}) \cup \{A_1 \cup A_2 \cup A_3\} = S_n(\mathcal{A}) \quad \forall n \geq 2, \text{ also}$$

$$S(\mathcal{A}) = \{\emptyset, A_1, A_2, A_3, A_1 \cup A_2, A_1 \cup A_3, A_2 \cup A_3, A_1 \cup A_2 \cup A_3\}.$$

- Sei $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$ mit $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$ (Abbildung 7), dann gilt:

$$S_0(\mathcal{A}) = \{\emptyset, A_1, A_2, A_3\},$$

$$S_1(\mathcal{A}) = S_0(\mathcal{A}) \cup \{A_2 \setminus A_1, A_3 \setminus A_1, A_3 \setminus A_2\}$$

$$S_2(\mathcal{A}) = S_1(\mathcal{A}) \cup \{(A_3 \setminus A_2) \cup A_1\} = S_n(\mathcal{A}) \quad \forall n \geq 2, \text{ also}$$

$$S(\mathcal{A}) = \{\emptyset, A_1, A_2, A_3, A_2 \setminus A_1, A_3 \setminus A_1, A_3 \setminus A_2, (A_3 \setminus A_2) \cup A_1\}.$$

- Sei $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$ mit $A_1 \cap A_3 = \emptyset$ und $A_2 \subseteq A_3$ ($\Rightarrow A_1 \cap A_2 = \emptyset$) (Abbildung 7), dann gilt:

$$S_0(\mathcal{A}) = \{\emptyset, A_1, A_2, A_3\},$$

$$S_1(\mathcal{A}) = S_0(\mathcal{A}) \cup \{A_1 \cup A_2, A_1 \cup A_3, A_3 \setminus A_2\}$$

$$S_2(\mathcal{A}) = S_1(\mathcal{A}) \cup \{(A_3 \setminus A_2) \cup A_1\} = S_n(\mathcal{A}) \quad \forall n \geq 2, \text{ also}$$

$$S(\mathcal{A}) = \{\emptyset, A_1, A_2, A_3, A_1 \cup A_2, A_1 \cup A_3, A_3 \setminus A_2, (A_3 \setminus A_2) \cup A_1\}.$$

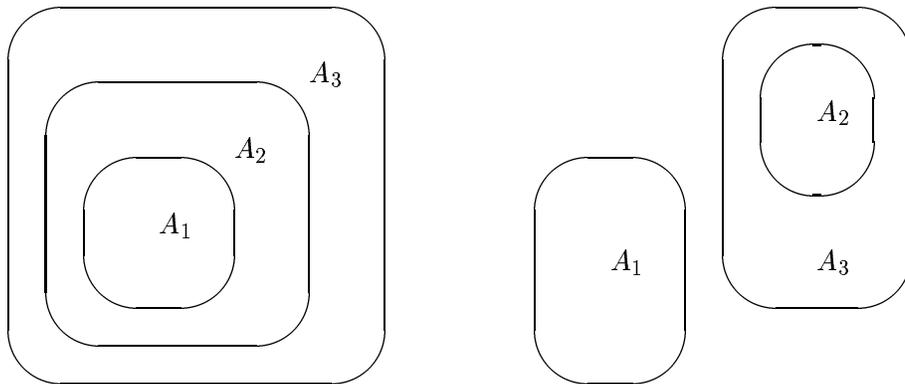


Abbildung 7: Illustration der letzten beiden Beispiele.

Die betrachteten Beispiele legen folgende Eigenschaften von $S(\mathcal{A})$ nahe:

Proposition 6.1 *Seien \mathcal{A} und \mathcal{B} endliche Systeme von Mengen. Dann gilt:*

1. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $S_n(\mathcal{A}) \subseteq S_{n+1}(\mathcal{A})$.
2. Wenn $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ ist, dann gilt $S_n(\mathcal{A}) \subseteq S_n(\mathcal{B})$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und damit natürlich $S(\mathcal{A}) \subseteq S(\mathcal{B})$.
3. $S(\mathcal{A})$ ist der Abschluß von $\mathcal{A} \cup \{\emptyset\}$ unter den Operationen der disjunkten Vereinigung und der eigentlichen Differenz ($A \setminus B$, wo $B \subseteq A$) mit der Einschränkung, daß jedes Element von \mathcal{A} nur einmal verwendet werden darf; d.h.:
 Sei $\mathcal{A} = \{A_1^0, \dots, A_m^0\}$. Ein Element gehört genau dann zu $S(\mathcal{A})$, wenn es entweder die leere Menge \emptyset ist oder als eine „Kette“ von A_i^0 aus \mathcal{A} verknüpft mit den beiden Mengenoperationen \cup und \setminus dargestellt werden kann, sodaß:
 - jedes A_i^0 in der „Kette“ höchstens einmal auftritt,
 - bei jeder vorkommenden Vereinigung \cup die zwei beteiligten Mengen disjunkt sind,
 - bei jeder vorkommenden Differenz \setminus die abzuziehende Menge Teilmenge der anderen ist.
4. $S(\mathcal{A})$ ist endlich.

Beweis: ad 1.: trivial nach Regel 1. der Definition 6.1.

ad 2.: Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$; wir zeigen, $S_n(\mathcal{A}) \subseteq S_n(\mathcal{B})$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$, mittels Induktion nach n .

$n = 0$:

$$S_0(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \cup \{\emptyset\} \subseteq \mathcal{B} \cup \{\emptyset\} = S_0(\mathcal{B}).$$

Nun gelte $S_n(\mathcal{A}) \subseteq S_n(\mathcal{B})$, wir wollen zeigen, daß dann auch $S_{n+1}(\mathcal{A}) \subseteq S_{n+1}(\mathcal{B})$ gilt.

Sei $A \in S_{n+1}(\mathcal{A})$:

- wenn $A \in S_n(\mathcal{A}) \subseteq S_n(\mathcal{B}) \stackrel{1.}{\subseteq} S_{n+1}(\mathcal{B})$; fertig.
- wenn $A = A_1 \cup A_2$ mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ (oder $A = A_1 \setminus A_2$ mit $A_2 \subseteq A_1$) und $A_1 \in S_n(\mathcal{A}_1)$ und $A_2 \in S_n(\mathcal{A}_2)$, wobei \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 disjunkte Subsysteme von \mathcal{A} sind, dann sind \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 auch disjunkte Subsysteme von \mathcal{B} . Damit liegt A auch in $S_{n+1}(\mathcal{B})$.

Also gilt $S_n(\mathcal{A}) \subseteq S_n(\mathcal{B})$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, und damit folgt natürlich $S(\mathcal{A}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n(\mathcal{A}) \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n(\mathcal{B}) = S(\mathcal{B})$.

ad 3.: Sei $\mathcal{A} = \{A_1^0, \dots, A_m^0\}$. $C(\mathcal{A})$ bezeichne den Abschluß von $\mathcal{A} \cup \{\emptyset\}$ unter den Operationen der disjunkten Vereinigung und der eigentlichen Differenz mit der Einschränkung, daß jedes Element von \mathcal{A} nur einmal verwendet werden darf.

Um $S(\mathcal{A}) \subseteq C(\mathcal{A})$ zu beweisen, zeigen wir durch Induktion nach n , daß $S_n(\mathcal{A}) \subseteq C(\mathcal{A})$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

$n = 0$:

$$S_0(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \cup \{\emptyset\} \subseteq C(\mathcal{A}).$$

Nun gelte $S_n(\mathcal{A}) \subseteq C(\mathcal{A})$ für \mathcal{A} und jedes seiner Subsysteme, wir wollen zeigen, daß dann auch $S_{n+1}(\mathcal{A}) \subseteq C(\mathcal{A})$ gilt.

Sei $A \in S_{n+1}(\mathcal{A})$:

- wenn $A \in S_n(\mathcal{A}) \subseteq C(\mathcal{A})$; fertig.
- wenn $A = A_1 \cup A_2$ mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ (oder $A = A_1 \setminus A_2$ mit $A_2 \subseteq A_1$) und $A_1 \in S_n(\mathcal{A}_1)$ und $A_2 \in S_n(\mathcal{A}_2)$, wobei \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 disjunkte Subsysteme von \mathcal{A} sind, dann sind nach der Induktionsannahme $A_1 \in S_n(\mathcal{A}_1) \subseteq C(\mathcal{A}_1)$ und $A_2 \in S_n(\mathcal{A}_2) \subseteq C(\mathcal{A}_2)$. Weil \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 disjunkt sind, treten in den Darstellungen von A_1 und A_2 als „Ketten“ keine gemeinsamen Elemente A_i^0 auf. Also liegt $A = A_1 \cup A_2$ (bzw. $A = A_1 \setminus A_2$) in $C(\mathcal{A})$.

Nun ist noch $C(\mathcal{A}) \subseteq S(\mathcal{A})$ zu zeigen. Diesen Beweis führen wir durch Induktion nach $|\mathcal{A}|$.

$|\mathcal{A}| = 0$: Dann ist $\mathcal{A} = \emptyset$ und somit

$$C(\mathcal{A}) = \{\emptyset\} = S(\mathcal{A}).$$

$|\mathcal{A}| = 1$: Dann ist $\mathcal{A} = \{A_1^0\}$ und somit

$$C(\mathcal{A}) = \{\emptyset, A_1^0\} = S(\mathcal{A}).$$

Sei jetzt $|\mathcal{A}| \geq 2$, und für Mengensysteme \mathcal{A}^* mit $|\mathcal{A}^*| < |\mathcal{A}|$ gelte $C(\mathcal{A}^*) \subseteq S(\mathcal{A}^*)$.

Sei $A \in C(\mathcal{A})$, d.h. A ist entweder die leere Menge \emptyset oder eine „Kette“ aus A_i^0 verknüpft mit \cup und \setminus mit den geforderten Eigenschaften.

Wenn $A = \emptyset$ oder $A = A_i^0$ für ein $i \in \{1, \dots, m\}$ ist, dann ist $A \in S_0(\mathcal{A}) \subseteq S(\mathcal{A})$.

Andernfalls ist A eine Verknüpfung zweier „Teilketten“ A_1 und A_2 durch die disjunkte Vereinigung oder die eigentliche Differenz, d.h. $A = A_1 * A_2$ mit $*$ $\in \{\cup, \setminus\}$, mit der Einschränkung, daß jedes A_i^0 in $A_1 * A_2$ höchstens einmal vorkommt. Betrachten wir die folgenden Subsysteme von \mathcal{A} :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &:= \{A_i^0 : A_i^0 \text{ kommt in } A_1 \text{ vor}\} \quad \text{und} \\ \mathcal{A}_2 &:= \{A_i^0 : A_i^0 \text{ kommt in } A_2 \text{ vor}\}. \end{aligned}$$

Sie sind disjunkt, und es gilt $|\mathcal{A}_1| < |\mathcal{A}|$ und $|\mathcal{A}_2| < |\mathcal{A}|$, weil die „Teilketten“ A_1 und A_2 nicht leer sind. Dann ist nach der Induktionsannahme $A_1 \in C(\mathcal{A}_1) \subseteq S(\mathcal{A}_1)$ und $A_2 \in C(\mathcal{A}_2) \subseteq S(\mathcal{A}_2)$.

Es existieren also $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$, sodaß $A_1 \in S_{n_1}(\mathcal{A}_1)$ und $A_2 \in S_{n_2}(\mathcal{A}_2)$ ist. Wegen der Eigenschaft 1. ist somit $A_1 \in S_{\bar{n}}(\mathcal{A}_1)$ und $A_2 \in S_{\bar{n}}(\mathcal{A}_2)$ mit $\bar{n} = \max\{n_1, n_2\}$. Nach den Bedingungen 2. und 3. in der Definition 6.1 gilt deshalb $A = A_1 * A_2 \in S_{\bar{n}+1}(\mathcal{A})$. Daher ist A auch in $S(\mathcal{A})$.

ad 4.: Die Endlichkeit von $S(\mathcal{A})$ folgt dank der Endlichkeit von \mathcal{A} unmittelbar aus Eigenschaft 3. \square

Literaturverweise: [11]

7 Zwei Lemmata zu den dyadischen Würfeln

Das erste Lemma, mit dem wir uns in diesem Abschnitt auseinandersetzen wollen, liefert eine Aussage für alle Dimensionen $d \geq 1$. Wir werden diese Aussage nur für $d = 3$ brauchen. Aus beweistechnischen Gründen soll das Lemma aber mittels Induktion über d für alle Dimensionen gezeigt werden. Wir verwenden folgende Schreibweisen:

- $\mathcal{H}^{(d)}$ stehe für die Familie aller Teilmengen von \mathbb{R}^d , die eine endliche Vereinigung von Einheitswürfeln $\prod_{i=1}^d [a_i, a_i + 1)$, ($a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, d$) darstellen.
- Ein Gitterwürfel ist eine Menge der Form $\prod_{i=1}^d [a_i, a_i + n)$, ($a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, d$, $n \in \mathbb{N}$).
- Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ setzen wir:

$$\mathcal{D}_k^{(d)} := \left\{ \prod_{i=1}^d [a_i 2^k, (a_i + 1) 2^k) : a_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, d \right\}$$

Das System der dyadischen Würfel ist definiert als

$$\mathcal{D}^{(d)} := \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}_k^{(d)}.$$

Sei eine Folge von Funktionen $f_d : (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$ wie folgt definiert:

Sei $f_1 \equiv 1$.

Ist $d \geq 2$ und f_{d-1} bereits definiert, dann setze

$$f_d(x) := 1 + \frac{f_{d-1}(\sqrt{x})}{1 - \sqrt{x}}, \quad (x \in (0, 1)).$$

Dann erhalten wir für $f_2, f_3 : (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$ folgende Darstellungen:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 1 + \frac{1}{1 - \sqrt{x}} \quad \text{und} \\ f_3(x) &= 1 + \frac{1}{1 - \sqrt{x}} + \frac{1}{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt{\sqrt{x}})}. \end{aligned}$$

Eine Skizze soll eine Vorstellung von f_2 und f_3 vermitteln (siehe Abbildung 8).

Lemma 7.1 *Sei $H \in \mathcal{H}^{(d)}$ und sei Q ein Gitterwürfel mit $s(Q) = n$, der H enthält. Es gelte*

$$\lambda_d(H) \leq c \cdot n^d \tag{6}$$

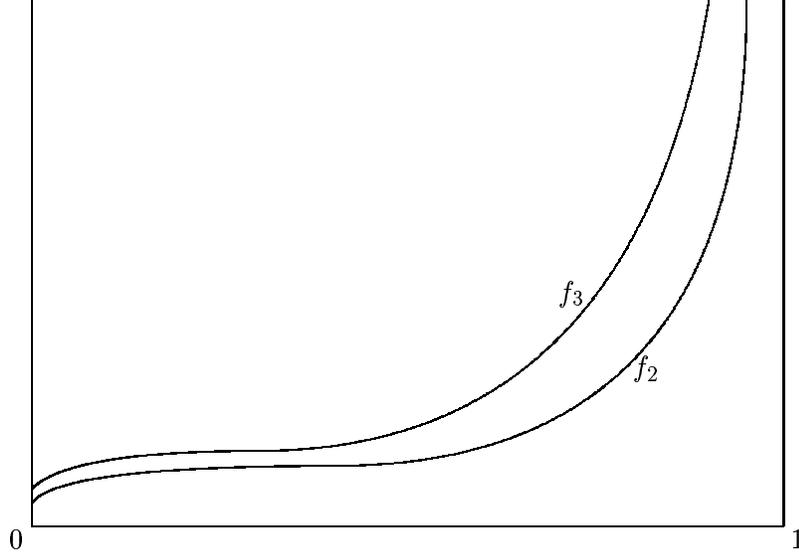


Abbildung 8: Die Funktionen f_2 und f_3 .

und

$$\lambda_{d-1}(\partial H \cap \text{int}Q) < \epsilon \cdot n^{d-1}, \quad (7)$$

wobei $c \in (0, 1)$ und $\epsilon > 0$ ist. Dann gilt:

$$\lambda_d(H) < \epsilon \cdot f_d(c) \cdot n^d. \quad (8)$$

Beweis: Induktion nach d :

$d = 1$: Ist $H = \emptyset$, dann gilt (8) in trivialer Weise. Sei nun $H \neq \emptyset$: H ist eine endliche Vereinigung von Einheitsintervallen und liegt in einem Intervall Q mit ganzzahligen Randpunkten und der Länge n . Aus der Bedingung (6) folgt $H \subsetneq Q$, und deshalb liegt mindestens ein Randpunkt von H im Inneren von Q (siehe Abbildung 9), d.h.

$$1 \leq \lambda_0(\partial H \cap \text{int}Q) \stackrel{(7)}{<} \epsilon \cdot n^0 = \epsilon.$$

Wir sehen also, daß in diesem Fall $\epsilon > 1$ gelten muß. Und damit ist wegen $H \subsetneq Q$ und $f_1 \equiv 1$

$$\lambda_1(H) < \lambda_1(Q) = n < \epsilon \cdot f_1(c) \cdot n.$$

Sei nun $d \geq 2$, und wir nehmen an, daß die Aussage des Lemmas im \mathbb{R}^{d-1} gilt. Sei o.B.d.A. $Q = \prod_{i=1}^d [0, n)$. Wir setzen

$$L_j := \prod_{i=1}^{d-1} [0, n) \times [j-1, j), \quad (j = 1, \dots, n).$$

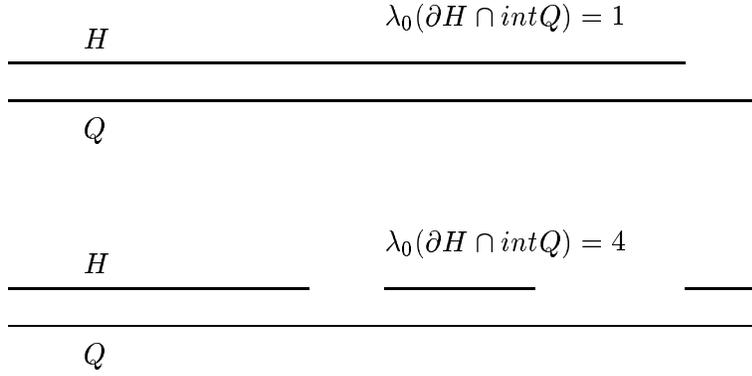


Abbildung 9: Zwei Beispiele für $H \neq \emptyset$ und Q im Falle $d = 1$.

Dann ist natürlich $H \subseteq Q = \bigcup_{j=1}^n L_j$.

I bezeichne die Menge der Indizes $j \in \{1, \dots, n\}$, für die $\lambda_d(H \cap L_j) \leq \sqrt{c} \cdot n^{d-1}$ ist. Nun gilt (da die L_j für $j = 1, \dots, n$ paarweise disjunkt sind)

$$\begin{aligned}
c \cdot n^d &\stackrel{(6)}{\geq} \lambda_d(H) \\
&= \lambda_d\left(\bigcup_{j=1}^n (H \cap L_j)\right) \\
&\geq \lambda_d\left(\bigcup_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus I} (H \cap L_j)\right) \\
&= \sum_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus I} \lambda_d(H \cap L_j) \\
&> (n - |I|) \sqrt{c} \cdot n^{d-1}
\end{aligned}$$

und somit $|I| > (1 - \sqrt{c})n$.

Sei $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$ die Projektion

$$\sigma(x_1, \dots, x_d) = (x_1, \dots, x_{d-1}), \quad x_i \in \mathbb{R}$$

Dann ist für alle $j = 1, \dots, n$ $H_j := \sigma(H \cap L_j) \in \mathcal{H}^{(d-1)}$, und $\sigma(L_j)$ ist ein Gitterwürfel in \mathbb{R}^{d-1} .

Da H aus lauter Einheitswürfeln der Dimension d besteht und „Facetten“ kleinerer Dimension d' eines Einheitswürfels stets d' -dimensionales Maß 1 haben, ist $\lambda_{d-2}(\partial H_j \cap \text{int } \sigma(L_j))$ gerade die Anzahl der vertikalen „Seitenflächen“ von $\partial H \cap \text{int} Q \cap L_j$, und deshalb ist

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{d-2}(\partial H_j \cap \text{int } \sigma(L_j)) \leq \lambda_{d-1}(\partial H \cap \text{int} Q).$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}
\epsilon \cdot n^{d-1} &\stackrel{(7)}{>} \lambda_{d-1}(\partial H \cap \text{int} Q) \\
&\geq \sum_{j=1}^n \lambda_{d-2}(\partial H_j \cap \text{int} \sigma(L_j)) \\
&\geq \sum_{j \in I} \lambda_{d-2}(\partial H_j \cap \text{int} \sigma(L_j)) \\
&\geq |I| \cdot \min_{j \in I} \lambda_{d-2}(\partial H_j \cap \text{int} \sigma(L_j)).
\end{aligned}$$

Weil $|I| > (1 - \sqrt{c})n > 0$ ist, muß es ein $j_0 \in I$ geben, sodaß das Minimum in der vorigen Zeile angenommen wird, und somit folgt:

$$\lambda_{d-2}(\partial H_{j_0} \cap \text{int} \sigma(L_{j_0})) < \frac{\epsilon}{|I|} \cdot n^{d-1} < \frac{\epsilon}{1 - \sqrt{c}} \cdot n^{d-2}.$$

Außerdem gilt $\lambda_{d-1}(H_{j_0}) = \lambda_{d-1}(\sigma(H \cap L_{j_0})) = \lambda_d(H \cap L_{j_0}) \leq \sqrt{c} \cdot n^{d-1}$. Wir verwenden die Induktionshypothese für die Menge H_{j_0} und den Würfel $\sigma(L_{j_0})$. Das ergibt:

$$\begin{aligned}
\lambda_{d-1}(H_{j_0}) &< \frac{\epsilon}{1 - \sqrt{c}} \cdot f_{d-1}(\sqrt{c}) \cdot n^{d-1} \\
&= \epsilon \cdot (f_d(c) - 1) \cdot n^{d-1},
\end{aligned}$$

also

$$\lambda_d(H \cap L_{j_0}) < \epsilon \cdot (f_d(c) - 1) \cdot n^{d-1}. \quad (9)$$

Sei nun $U = \prod_{i=1}^{d-1} [a_i, a_i + 1) \times [j_0 - 1, j_0)$ ein in L_{j_0} enthaltener Einheitswürfel. Wir bezeichnen mit R_U die „Säule“, die U enthält, d.h.

$$R_U := \prod_{i=1}^{d-1} [a_i, a_i + 1) \times [0, n).$$

Wenn $U \subseteq L_{j_0} \setminus H$ und $H \cap R_U \neq \emptyset$, dann ist $\partial H \cap \text{int} R_U \neq \emptyset$, weil R_U mindestens einen Einheitswürfel, der zu H gehört, und zumindest einen, der nicht zu H gehört, enthält (siehe Abbildung 10). Sei S die Menge jener Einheitswürfel U , für die $U \subseteq L_{j_0} \setminus H$ und $H \cap R_U \neq \emptyset$ ist. Zählen wir die Elemente der Menge S , so zählen wir nur horizontale „Seitenflächen“ von $\partial H \cap \text{int} Q$. Darum gilt:

$$|S| \leq \lambda_{d-1}(\partial H \cap \text{int} Q) \stackrel{(7)}{<} \epsilon \cdot n^{d-1}.$$

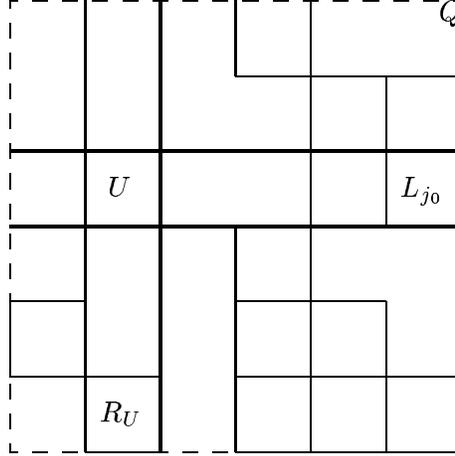


Abbildung 10: Situation für $d = 2$.

Klarerweise ist H in $\bigcup\{R_U : U \in S \text{ oder } U \subseteq H \cap L_{j_0}\}$ enthalten. Somit folgt:

$$\begin{aligned}
\lambda_d(H) &\leq n \cdot |S| + n \cdot |\{U : U \subseteq H \cap L_{j_0}\}| \\
&< n \cdot \epsilon \cdot n^{d-1} + n \cdot \lambda_d(H \cap L_{j_0}) \\
&\stackrel{(9)}{<} \epsilon \cdot (1 + f_d(c) - 1) \cdot n^d \\
&= \epsilon \cdot f_d(c) \cdot n^d,
\end{aligned}$$

was den Beweis beendet. \square

Wir kehren nun wieder zu unserer Situation zurück, nämlich zurück in den \mathbb{R}^3 , und wir setzen folgende Konstanten fest:

$$\hat{c} = 1 - 2^{-(d+1)}, \quad \hat{\epsilon} = (2f_d(\hat{c}))^{-1} \quad \text{und} \quad \hat{C} = \frac{2(2^d + 1)}{\hat{\epsilon}},$$

also mit $d = 3$

$$\begin{aligned}
\hat{c} &= 1 - 2^{-4} = 0.9375, \\
\hat{\epsilon} &= (2f_3(\hat{c}))^{-1} \approx 2.499 \cdot 10^{-4} \quad \text{und} \\
\hat{C} &= \frac{2(2^3 + 1)}{\hat{\epsilon}} \approx 7.2 \cdot 10^4.
\end{aligned}$$

Lemma 7.2 Seien $\emptyset \neq H \in \mathcal{H}$ und $Q \in \mathcal{D}$ mit $H \subseteq Q$ und $\lambda_3(H) \leq \frac{1}{2}\lambda_3(Q)$. Dann gilt:
Es gibt dyadische Würfel $Q_1, \dots, Q_n \subseteq Q$, sodaß

$$H \in S(\{Q_1, \dots, Q_n\})$$

und

$$\forall l \in \mathbb{N}_0 : |\{i : s(Q_i) = 2^l\}| \leq \hat{C} \cdot \frac{\lambda_2(\partial H \cap \text{int}Q)}{2^{2l}}.$$

Beweis: Induktion nach k , wobei $s(Q) = 2^k$.

Der Fall $k = 0$ kann nicht eintreten, denn $H \subseteq Q$ und $\lambda_3(H) \leq \frac{1}{2}\lambda_3(Q) = \frac{1}{2}$ würden $H = \emptyset$ implizieren.

$k = 1$: H liegt in einem Würfel Q mit Seitenlänge 2, und es gilt $\lambda_3(H) \leq \frac{1}{2}\lambda_3(Q) = 4$. Die Einheitswürfel, aus denen H zusammengesetzt ist, liefern uns die gesuchten dyadischen Würfel Q_1, \dots, Q_n . Damit steht auch fest, daß für alle natürlichen $l \geq 1$ $|\{i : s(Q_i) = 2^l\}| = 0 \leq \hat{C} \cdot \frac{\lambda_2(\partial H \cap \text{int}Q)}{2^{2l}}$ gilt. Zu untersuchen ist also noch der Fall $l = 0$: Es gelten die Beziehungen $0 < |\{i : s(Q_i) = 2^0\}| \leq 4$ und $\lambda_2(\partial H \cap \text{int}Q) \geq 1$, weil H nicht leer ist und aus maximal 4 Einheitswürfeln besteht; somit ist die gewünschte Ungleichung ebenfalls erfüllt (Abbildung 11).

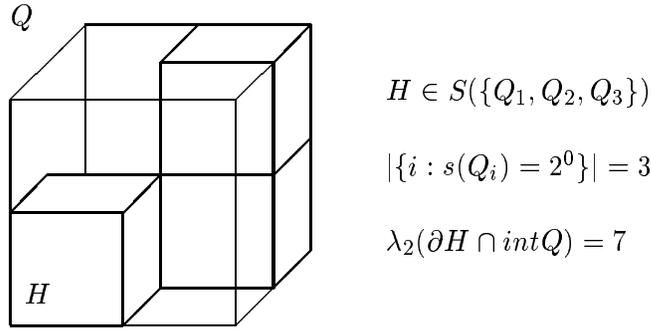


Abbildung 11: Ein Beispiel für H im Fall $k = 1$.

Wenden wir uns nun dem Induktionsschritt zu:

H und Q erfüllen die Voraussetzungen des Lemmas, und sei $s(Q) = 2^{k_0}$. Wir nehmen an, das Lemma gilt für H_1 und Q_1 (die ebenfalls den Voraussetzungen genügen) mit $s(Q_1) < 2^{k_0}$.

Definiere:

$$\mathcal{A} := \{P \in \mathcal{D} : P \subseteq Q, P \not\subseteq H, \lambda_3(P \cap H) \geq 2^{-4}\lambda_3(P), \lambda_2(\partial H \cap \text{int}P) < \hat{\epsilon} \cdot s(P)^2\}$$

Befassen wir uns zunächst mit dem Fall, daß \mathcal{A} leer ist.

Seien Q_1, \dots, Q_n die maximalen Elemente von $\{P \in \mathcal{D} : P \subseteq H\}$. Dann

sind Q_1, \dots, Q_n paarweise disjunkt und $H = \bigcup_{i=1}^n Q_i$ (Proposition 5.1).
Für alle $i = 1, \dots, n$ ist $Q_i \subseteq H \subseteq Q$, und da Q_1, \dots, Q_n paarweise disjunkt sind, gilt nach der Proposition 6.1

$$H \subseteq S(\{Q_1, \dots, Q_n\}).$$

Damit ist der erste Teil der Aussage des Lemmas (im Falle $\mathcal{A} = \emptyset$) gezeigt.
Sei jetzt $l \in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest. Wir haben zu zeigen, daß

$$|\{i : s(Q_i) = 2^l\}| \leq \hat{C} \cdot \frac{\lambda_2(\partial H \cap \text{int}Q)}{2^{2l}}$$

gilt. Sei $i \in \{i : s(Q_i) = 2^l\}$ fest. Q_i ist ein maximales Element von $\{P \in \mathcal{D} : P \subseteq H\}$. Wir erinnern uns: Q_i^* ist der eindeutig bestimmte dyadische Würfel mit $Q_i \subseteq Q_i^*$ und $s(Q_i^*) = 2s(Q_i)$.
Aus der Voraussetzung $\lambda_3(H) \leq \frac{1}{2}\lambda_3(Q)$ folgt $H \subsetneq Q$ und damit $Q_i \subsetneq Q$.
Wir wollen uns überlegen, daß daraus $Q_i^* \subseteq Q$ folgt:

Weil Q_i^* und Q dyadische Würfel sind, gilt nach Proposition 5.1 mindestens eine der Relationen $Q_i^* \subseteq Q, Q \subseteq Q_i^*, Q_i^* \cap Q = \emptyset$.
 $Q_i^* \cap Q = \emptyset$ kann nicht eintreten, da $Q_i \subsetneq Q$ und $Q_i \subseteq Q_i^*$ gelten.
Im Falle $Q \subseteq Q_i^*$ existieren die Möglichkeiten $Q = Q_i^*$ (dann gilt auch $Q_i^* \subseteq Q$) und $Q \subsetneq Q_i^*$. Für die zweite Möglichkeit erhielten wir also $Q_i \subsetneq Q \subsetneq Q_i^*$ und damit

$$s(Q_i) < s(Q) = 2^{k_0} < s(Q_i^*) = 2s(Q_i).$$

Sei etwa $s(Q_i) = 2^{k_1}$ ($k_1 < k_0$), dann gälte

$$2^{k_1} < 2^{k_0} < 2 \cdot 2^{k_1}$$

und somit

$$1 < 2^{k_0 - k_1} < 2,$$

was widersprüchlich wäre. Es ist also stets $Q_i^* \subseteq Q$.

Aus der Maximalität von Q_i ergibt sich $Q_i^* \not\subseteq H$. Wegen $Q_i \subseteq Q_i^*$ und $Q_i \subseteq H$ gilt $Q_i \subseteq Q_i^* \cap H$ und deshalb auch

$$\lambda_3(Q_i^* \cap H) \geq \lambda_3(Q_i) = 2^{-3}\lambda_3(Q_i^*) \geq 2^{-4}\lambda_3(Q_i^*).$$

Wir können schließen, daß

$$\lambda_2(\partial H \cap \text{int}Q_i^*) \geq \hat{\epsilon} \cdot s(Q_i^*)^2 = \hat{\epsilon} \cdot (2 \cdot 2^l)^2 = \hat{\epsilon} \cdot 2^{2(l+1)} \quad (10)$$

gilt, denn sonst wäre Q_i^* ein Element von \mathcal{A} , also ein Widerspruch zu $\mathcal{A} = \emptyset$.
Da für alle $i \in \{i : s(Q_i) = 2^l\}$ jeweils $Q_i^* \subseteq Q$ ist, gilt die Beziehung

$$\partial H \cap \bigcup_{i \in \{i : s(Q_i) = 2^l\}} \text{int}Q_i^* \subseteq \partial H \cap \text{int}Q. \quad (11)$$

Wir wissen nach der Proposition 5.1, daß zu einem Würfel Q_i^* 2^3 Würfel $Q_{(i)}$ mit $Q_{(i)} \subseteq Q_i^*$ und $s(Q_i^*) = 2s(Q_{(i)})$ gehören, deren Vereinigung gerade Q_i^* ist. Achtung: Die 2^3 mit (i) indizierten Würfel müssen nicht alle in $\{Q_i : i = 1, \dots, n, s(Q_i) = 2^l\}$ sein.

Betrachten wir einen Punkt x von $\partial H \cap \bigcup_{i \in \{i: s(Q_i)=2^l\}} \text{int} Q_i^*$, dann gibt es ein $i_0 \in \{i : s(Q_i) = 2^l\}$, sodaß $x \in Q_{i_0}^*$ ist. In der Aufzählung $(Q_i^*)_{i \in \{i: s(Q_i)=2^l\}}$ kommt $Q_{i_0}^*$ nach der erwähnten Eigenschaft höchstens 2^3 mal vor. Also gilt

$$2^3 \lambda_2(\partial H \cap \bigcup_{i \in \{i: s(Q_i)=2^l\}} \text{int} Q_i^*) \geq \sum_{i \in \{i: s(Q_i)=2^l\}} \lambda_2(\partial H \cap \text{int} Q_i^*), \quad (12)$$

weil wir beim Summieren auf der rechten Seite der Ungleichung jeden Punkt x von $\partial H \cap \bigcup_{i \in \{i: s(Q_i)=2^l\}} \text{int} Q_i^*$ höchstens 2^3 mal berücksichtigen. Fassen wir zusammen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda_2(\partial H \cap \text{int} Q) &\stackrel{(11)}{\geq} \lambda_2(\partial H \cap \bigcup_{i \in \{i: s(Q_i)=2^l\}} \text{int} Q_i^*) \\ &\stackrel{(12)}{\geq} \frac{1}{2^3} \sum_{i \in \{i: s(Q_i)=2^l\}} \lambda_2(\partial H \cap \text{int} Q_i^*) \\ &\stackrel{(10)}{\geq} \hat{\epsilon} \cdot 2^{2l-1} \cdot |\{i : s(Q_i) = 2^l\}|. \end{aligned}$$

Also gilt

$$|\{i : s(Q_i) = 2^l\}| \leq \frac{2}{\hat{\epsilon}} \cdot \frac{\lambda_2(\partial H \cap \text{int} Q)}{2^{2l}} \leq \hat{C} \cdot \frac{\lambda_2(\partial H \cap \text{int} Q)}{2^{2l}},$$

mit $\hat{C} = \frac{2(2^3+1)}{\hat{\epsilon}}$. Damit ist der Fall $\mathcal{A} = \emptyset$ abgehandelt.

Im weiteren Beweis sei \mathcal{A} stets nicht leer. Ist $P \in \mathcal{A}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_3(P \setminus H) &= \lambda_3(P \setminus P \cap H) \\ &= \lambda_3(P) - \lambda_3(P \cap H) \\ &\leq (1 - 2^{-4}) \lambda_3(P) \\ &= \hat{c} \cdot \lambda_3(P) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \lambda_2(\partial(P \setminus H) \cap \text{int} P) &= \lambda_2(\partial H \cap \text{int} P) \\ &< \hat{\epsilon} \cdot s(P)^2. \end{aligned}$$

Wegen Lemma 7.1 und der speziellen Wahl von $\hat{\epsilon}$ gilt mit $P \setminus H$ und P anstelle von H und Q :

$$\lambda_3(P \setminus H) < \hat{\epsilon} \cdot f_3(\hat{c}) \cdot \lambda_3(P) = (2f_3(\hat{c}))^{-1} \cdot f_3(\hat{c}) \cdot \lambda_3(P) = \frac{1}{2} \lambda_3(P). \quad (13)$$

Seien P_1, \dots, P_m die maximalen Elemente von \mathcal{A} . Dann sind P_1, \dots, P_m paarweise disjunkt und $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{j=1}^m P_j$ (Proposition 5.1).
 Sei $H_1 := H \cup \bigcup_{j=1}^m P_j$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_3(H_1) &\leq \lambda_3(H) + \lambda_3\left(\bigcup_{j=1}^m (P_j \setminus H)\right) \\ &\stackrel{(13)}{<} \frac{1}{2}\lambda_3(Q) + \sum_{j=1}^m \frac{1}{2}\lambda_3(P_j) \quad (P_j \subseteq Q \text{ und disjunkt}) \\ &\leq \frac{1}{2}\lambda_3(Q) + \frac{1}{2}\lambda_3(Q) = \lambda_3(Q). \end{aligned}$$

Daher gilt:

$$H_1 \subsetneq Q; \text{ im speziellen ist } P_j \subsetneq Q \text{ f\u00fcr alle } j = 1, \dots, m. \quad (14)$$

Seien Q_1, \dots, Q_n die maximalen Elemente von $\{P \in \mathcal{D} : P \subseteq H_1\}$. Dann sind Q_1, \dots, Q_n paarweise disjunkt und $H_1 = \bigcup_{i=1}^n Q_i$ (Proposition 5.1).

Wir wenden nun die Induktionshypothese auf $P_j \setminus H \in \mathcal{H}$ und P_j an (Ungleichung (13): $\lambda_3(P_j \setminus H) < \frac{1}{2}\lambda_3(P_j)$, $P_j \setminus H \neq \emptyset$, weil $P_j \in \mathcal{A}$ und daher $P_j \not\subseteq H$, und $s(P_j) < s(Q)$, da nach (14) $P_j \subsetneq Q$). Dann folgt:

$$\exists Q_{j1}, \dots, Q_{jn_j} \in \mathcal{D} : Q_{jr} \subseteq P_j \quad (r = 1, \dots, n_j), \text{ soda\u00df} \quad (15)$$

$$P_j \setminus H \in S(\{Q_{j1}, \dots, Q_{jn_j}\}) \quad \text{und} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \forall l \in \mathbb{N}_0 : |\{r : s(Q_{jr}) = 2^l\}| &\leq \hat{C} \cdot \frac{\lambda_2(\partial(P_j \setminus H) \cap \text{int}P_j)}{2^{2l}} \\ &= \hat{C} \cdot \frac{\lambda_2(\partial H \cap \text{int}P_j)}{2^{2l}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Nun ist $H_1 = H \cup \bigcup_{j=1}^m P_j = H \cup \bigcup_{j=1}^m (P_j \setminus H)$, wobei H und $\bigcup_{j=1}^m (P_j \setminus H)$ disjunkt sind. Also gilt: $H = H_1 \setminus \bigcup_{j=1}^m (P_j \setminus H) = (\bigcup_{i=1}^n Q_i) \setminus \bigcup_{j=1}^m (P_j \setminus H)$, und die Mengen $P_j \setminus H$ sind paarweise disjunkt. Es folgt wegen

$$P_j \setminus H \in S(\{Q_{j1}, \dots, Q_{jn_j}\})$$

nach der Proposition 6.1, da\u00df

$$\bigcup_{j=1}^m (P_j \setminus H) \in S(\{Q_{11}, \dots, Q_{1n_1}, \dots, Q_{m1}, \dots, Q_{mn_m}\}),$$

und weil die Mengen Q_i ebenfalls paarweise disjunkt sind, gilt

$$\bigcup_{i=1}^n Q_i \in S(\{Q_1, \dots, Q_n\}).$$

Somit ergibt sich, weil $\bigcup_{j=1}^m (P_j \setminus H) \subseteq H_1 = \bigcup_{i=1}^n Q_i$ ist, und wegen $H = (\bigcup_{i=1}^m Q_i) \setminus \bigcup_{j=1}^m (P_j \setminus H)$ (wiederum nach Proposition 6.1):

$$H \in S(\{Q_1, \dots, Q_n, Q_{11}, \dots, Q_{1n_1}, \dots, Q_{m1}, \dots, Q_{mn_m}\}).$$

Es ist $Q_i \subseteq H_1 = H \cup \bigcup_{j=1}^m P_j \subseteq Q$ und nach (15) $Q_{jr} \subseteq P_j \subseteq Q$ für alle i, j, r . Damit ist der erste Teil der Behauptung des Lemmas gezeigt.

Sei jetzt $l \in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest, und seien

$$E := \{i : s(Q_i) = 2^l\} \quad \text{und} \quad E_j := \{r : s(Q_{jr}) = 2^l\} \quad (j = 1, \dots, m).$$

Die Anzahl der Würfel mit der Seitenlänge 2^l in der Menge

$$\{Q_1, \dots, Q_n, Q_{11}, \dots, Q_{1n_1}, \dots, Q_{m1}, \dots, Q_{mn_m}\}$$

ist dann gegeben durch den Ausdruck

$$|E| + \sum_{j=1}^m |E_j|.$$

Somit ist noch zu zeigen:

$$|E| + \sum_{j=1}^m |E_j| \leq \hat{C} \cdot \frac{\lambda_2(\partial H \cap \text{int}Q)}{2^{2l}}. \quad (18)$$

Wir bestimmen zuerst $|E|$:

Sei $i \in E$ fest. Q_i ist ein maximales Element von $\{P \in \mathcal{D} : P \subseteq H_1\}$. Q_i^* ist der eindeutig bestimmte dyadische Würfel mit $Q_i \subseteq Q_i^*$ und $s(Q_i^*) = 2s(Q_i)$. Aus der Maximalität von Q_i folgt

$$Q_i^* \not\subseteq H_1 \quad \text{und damit} \quad Q_i^* \notin \mathcal{A} \quad (19)$$

(angenommen $Q_i^* \in \mathcal{A}$, dann gäbe es ein maximales $P_{j_0} \in \mathcal{A}$ mit $Q_i^* \subseteq P_{j_0} \subseteq H_1$, Widerspruch).

Wie wir gesehen haben (Beziehung (14)), ist $H_1 \subsetneq Q$, und daher muß $Q_i \subsetneq Q$ gelten. Wir haben uns schon überlegt (Seite 31, eingerückter Absatz), daß daraus folgt:

$$Q_i^* \subseteq Q. \quad (20)$$

Wir wollen nun zeigen:

$$\lambda_3(Q_i^* \cap H) \geq 2^{-4} \lambda_3(Q_i^*). \quad (21)$$

Dazu unterscheiden wir zwei Fälle:

- $Q_i \cap (\bigcup_{j=1}^m P_j) = \emptyset$:
Da $Q_i \subseteq H_1 = H \cup \bigcup_{j=1}^m P_j$, gilt $Q_i \subseteq H$ und somit $Q_i \subseteq Q_i^* \cap H$, daher gilt

$$\lambda_3(Q_i^* \cap H) \geq \lambda_3(Q_i) = 2^{-3} \lambda_3(Q_i^*) \geq 2^{-4} \lambda_3(Q_i^*).$$

- $Q_i \cap P_j \neq \emptyset$ für ein j :

Dann gilt entweder $Q_i \subsetneq P_j$ oder $P_j \subseteq Q_i$, da $Q_i, P_j \in \mathcal{D}$ (Proposition 5.1). Wenn $Q_i \subsetneq P_j$ ist, dann folgt nach der Überlegung auf Seite 31 (eingrückter Absatz) $Q_i^* \subseteq P_j \subseteq H_1$; Widerspruch zu (19). Daher gilt $P_j \subseteq Q_i$, wann immer $Q_i \cap P_j \neq \emptyset$ ist. J bezeichne die Menge der Indizes j , für die $P_j \subseteq Q_i$ gilt.

Außerdem gilt $H = (\bigcup_{i=1}^n Q_i) \setminus \bigcup_{j=1}^m (P_j \setminus H)$, und somit

$$\begin{aligned}
Q_i \setminus H &= Q_i \cap H^c \\
&= Q_i \cap \left[\left(\bigcup_{i=1}^n Q_i \right) \setminus \bigcup_{j=1}^m (P_j \setminus H) \right]^c \\
&= Q_i \cap \left[\left(\bigcup_{i=1}^n Q_i \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^m (P_j \setminus H) \right)^c \right]^c \\
&= Q_i \cap \left[\left(\bigcup_{i=1}^n Q_i \right)^c \cup \bigcup_{j=1}^m (P_j \setminus H) \right] \\
&= \underbrace{\left(Q_i \cap \bigcap_{i=1}^n Q_i^c \right)}_{=\emptyset} \cup \left(Q_i \cap \bigcup_{j=1}^m (P_j \setminus H) \right) \\
&= Q_i \cap \bigcup_{j=1}^m (P_j \setminus H) = \bigcup_{j=1}^m \underbrace{(Q_i \cap P_j)}_{=\emptyset \text{ für } j \notin J} \cap H^c \\
&= \bigcup_{j \in J} \underbrace{(Q_i \cap P_j)}_{=P_j, \text{ da } P_j \subseteq Q_i} \cap H^c = \bigcup_{j \in J} (P_j \cap H^c) \\
&= \bigcup_{j \in J} (P_j \setminus H).
\end{aligned}$$

Daraus können wir folgern:

$$\begin{aligned}
\lambda_3(Q_i \setminus H) &= \lambda_3\left(\bigcup_{j \in J} (P_j \setminus H)\right) \\
&\leq \sum_{j \in J} \lambda_3(P_j \setminus H) \\
&\stackrel{(13)}{<} \sum_{j \in J} \frac{1}{2} \lambda_3(P_j) \\
&\leq \frac{1}{2} \lambda_3(Q_i),
\end{aligned}$$

weil für alle $j \in J$ $P_j \subseteq Q_i$ ist und die P_j paarweise disjunkt sind.

Natürlich gilt

$$\lambda_3(Q_i) = \lambda_3((Q_i \cap H) \cup (Q_i \setminus H)) = \lambda_3(Q_i \cap H) + \lambda_3(Q_i \setminus H)$$

und daher:

$$\begin{aligned} \lambda_3(Q_i^* \cap H) &\geq \lambda_3(Q_i \cap H) \\ &= \lambda_3(Q_i) - \lambda_3(Q_i \setminus H) \\ &\geq \lambda_3(Q_i) - \frac{1}{2}\lambda_3(Q_i) \\ &= 2^{-4}\lambda_3(Q_i^*). \end{aligned}$$

Somit ist (21) gezeigt.

Da $Q_i^* \subseteq Q$ (Beziehung (20)), $Q_i^* \not\subseteq H$ (sonst wäre $Q_i^* \subseteq H \subseteq H_1$; Widerspruch zu (19)) und $Q_i^* \notin \mathcal{A}$ (Beziehung (19)) folgt aus (21) nach der Definition von \mathcal{A}

$$\lambda_2(\partial H \cap \text{int}Q_i^*) \geq \hat{\varepsilon} \cdot s(Q_i^*)^2 = \hat{\varepsilon} \cdot (2 \cdot 2^l)^2 = \hat{\varepsilon} \cdot 2^{2(l+1)}. \quad (22)$$

Sei $K := \partial H \cap \bigcup_{i \in E} \text{int}Q_i^*$.

Wie wir uns schon überlegt haben (Absatz vor Ungleichung (12)), gilt:

$$\begin{aligned} 2^3 \lambda_2(K) &\stackrel{(12)}{\geq} \sum_{i \in E} \lambda_2(\partial H \cap \text{int}Q_i^*) \\ &\stackrel{(22)}{\geq} \hat{\varepsilon} \cdot 2^{2(l+1)} \cdot |E|, \end{aligned}$$

und deshalb folgt

$$|E| \leq \frac{2}{\hat{\varepsilon} \cdot 2^{2l}} \cdot \lambda_2(K). \quad (23)$$

Nun zur Abschätzung von $\sum_{j=1}^m |E_j|$:

Wir definieren

$$J_1 := \{j : P_j \subseteq Q_i^* \text{ für ein } i \in E\}$$

und

$$J_2 := \{1, \dots, m\} \setminus J_1.$$

Wenn $j \in J_1$ und $r \in E_j$ ist, dann ist $Q_{jr} \in \mathcal{D}_l$, und es gilt nach (15) $Q_{jr} \subseteq P_j \subseteq Q_i^*$ für ein $i \in E$. Wollen wir in

$$\{Q_{11}, \dots, Q_{1n_1}, \dots, Q_{m1}, \dots, Q_{mm_m}\}$$

die Anzahl der Würfel Q_{jr} mit $j \in J_1$ und Seitenlänge 2^l , nämlich $\sum_{j \in J_1} |E_j|$, bestimmen, dann können wir nach vorheriger Feststellung genau so gut die „zugehörigen“ Q_i^* mit $Q_{jr} \subseteq Q_i^*$ zählen. Es kommen dabei nur

Q_i^* mit $i \in E$ in Frage (deshalb ist $Q_i^* \in \mathcal{D}_{l+1}$), und jedes dieser Q_i^* kann nach Proposition 5.1 höchstens 2^3 mal gezählt werden. Es gilt also:

$$\sum_{j \in J_1} |E_j| \leq 2^3 \cdot |E|. \quad (24)$$

Wenn $j \in J_2$ und $i \in E$ ist, dann ist $P_j \not\subseteq Q_i^*$. Weil außerdem $Q_i^* \not\subseteq P_j$ gilt (sonst wäre $Q_i^* \subseteq P_j \subseteq H_1$; Widerspruch zu (19)), ist $P_j \cap Q_i^* = \emptyset$, da P_j und Q_i^* dyadische Würfel sind (Proposition 5.1).

Die Mengen $K_j := \partial H \cap \text{int} P_j$ ($j \in J_2$) sind paarweise disjunkt, weil die Mengen P_j paarweise disjunkt sind. Somit gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J_2} |E_j| &\stackrel{(17)}{\leq} \sum_{j \in J_2} \hat{C} \cdot 2^{-2l} \cdot \lambda_2(K_j) \\ &= \hat{C} \cdot 2^{-2l} \cdot \sum_{j \in J_2} \lambda_2(K_j) \\ &= \hat{C} \cdot 2^{-2l} \cdot \lambda_2\left(\bigcup_{j \in J_2} K_j\right). \end{aligned} \quad (25)$$

Zusammenfassend erhalten wir folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m |E_j| &= \sum_{j \in J_1} |E_j| + \sum_{j \in J_2} |E_j| \\ &\stackrel{(24), (25)}{\leq} 2^3 \cdot |E| + \hat{C} \cdot 2^{-2l} \cdot \lambda_2\left(\bigcup_{j \in J_2} K_j\right). \end{aligned} \quad (26)$$

Nun sind $K = \partial H \cap \bigcup_{i \in E} \text{int} Q_i^*$ und $\bigcup_{j \in J_2} K_j = \bigcup_{j \in J_2} (\partial H \cap \text{int} P_j)$ Teilmengen von $\partial H \cap \text{int} Q$, weil für alle $i \in E$ $Q_i^* \subseteq Q$ (Beziehung (20)) und für alle j $P_j \subseteq Q$ (da $P_j \in \mathcal{A}$) gilt. Außerdem sind die Mengen K und $\bigcup_{j \in J_2} K_j$ disjunkt, denn für $j \in J_2$ und $i \in E$ gilt $P_j \cap Q_i^* = \emptyset$, wie wir uns überlegt haben (unmittelbar nach (24)).

Deshalb gilt mit $\hat{C} = \frac{2(2^3+1)}{\hat{\epsilon}}$:

$$\begin{aligned} |E| + \sum_{j=1}^m |E_j| &\stackrel{(26)}{\leq} |E| + 2^3 \cdot |E| + \hat{C} \cdot 2^{-2l} \cdot \lambda_2\left(\bigcup_{j \in J_2} K_j\right) \\ &\stackrel{(23)}{\leq} \frac{2(2^3+1)}{\hat{\epsilon}} \cdot 2^{-2l} \cdot \lambda_2(K) + \hat{C} \cdot 2^{-2l} \cdot \lambda_2\left(\bigcup_{j \in J_2} K_j\right) \\ &= \hat{C} \cdot 2^{-2l} \cdot (\lambda_2(K) + \lambda_2\left(\bigcup_{j \in J_2} K_j\right)) \\ &= \hat{C} \cdot 2^{-2l} \cdot \lambda_2\left(K \cup \bigcup_{j \in J_2} K_j\right) \\ &\leq \hat{C} \cdot 2^{-2l} \cdot \lambda_2(\partial H \cap \text{int} Q). \end{aligned}$$

Damit ist (18) gezeigt. \square

Literaturverweise: [11]

8 Ein kombinatorisches Resultat

Mit Hilfe des Lemmas 7.2 gelingt es nun, jede Menge, die eine endliche Vereinigung von Einheitswürfeln ist, mittels dyadischer Würfel darzustellen, und wir erhalten eine Information darüber, wieviele dyadische Würfel einer bestimmten Seitenlänge dazu benötigt werden (siehe Satz 8.1).

Satz 8.1 *Für alle $\emptyset \neq H \in \mathcal{H}$ gibt es dyadische Würfel Q_1, \dots, Q_n , sodaß:*

$$H \in S(\{Q_1, \dots, Q_n\})$$

und

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : |\{i : s(Q_i) = 2^k\}| \leq \hat{C} \cdot \frac{p(H)}{2^{2k}}.$$

Beweis: Sei $\emptyset \neq H \in \mathcal{H}$ gegeben.

Wir wählen ein $l \in \mathbb{N}$ so, daß $2^l \geq 2\lambda_3(H)$ gilt. Sei P_1, \dots, P_m die Aufzählung jener Würfel $P \in \mathcal{D}_l$, die H schneiden.

Es gilt für alle $j = 1, \dots, m$: $\emptyset \neq H \cap P_j \in \mathcal{H}$, $P_j \in \mathcal{D}$, $H \cap P_j \subseteq P_j$ und nach der Wahl von l

$$\lambda_3(H \cap P_j) \leq \lambda_3(H) \leq 2^{l-1} \leq 2^{3l-1} = \frac{1}{2} \lambda_3(P_j).$$

Damit sind die Voraussetzungen des Lemmas 7.2 für $H \cap P_j$ und P_j an der Stelle von H und Q erfüllt, und es gilt:

Es gibt dyadische Würfel $Q_{j1}, \dots, Q_{jn_j} \subseteq P_j$ ($j = 1, \dots, m$):

$$H \cap P_j \in S(\{Q_{j1}, \dots, Q_{jn_j}\}) \quad \text{und}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : |\{r : s(Q_{jr}) = 2^k\}| \leq \hat{C} \cdot \frac{\lambda_2(\partial(H \cap P_j) \cap \text{int}P_j)}{2^{2k}}. \quad (27)$$

Wir werden nun zeigen:

Das System der Würfel $\mathcal{Q} := \{Q_{11}, \dots, Q_{1n_1}, \dots, Q_{m1}, \dots, Q_{mn_m}\}$ erfüllt das Gewünschte.

Es gilt $H = (H \cap P_1) \cup \dots \cup (H \cap P_m)$, wobei die Mengen $H \cap P_j$ ($j = 1, \dots, m$) paarweise disjunkt sind, da $P_j \in \mathcal{D}_l$ ($j = 1, \dots, m$) und daher paarweise disjunkt sind. Da $H \cap P_j \in S(\{Q_{j1}, \dots, Q_{jn_j}\})$ ($j = 1, \dots, m$) gilt, folgt aufgrund der Proposition 6.1, daß $H \in S(\mathcal{Q})$ liegt.

Eine mengentheoretische Nebenüberlegung: Sei $x \in \partial(H \cap P_j)$ und $K_r(x)$ bezeichne die offene Kugel mit Radius r und Mittelpunkt x , dann gilt

$$\forall r > 0 \quad K_r(x) \cap (H \cap P_j) \neq \emptyset \quad \text{und} \quad K_r(x) \cap (H \cap P_j)^c \neq \emptyset.$$

Die erste Beziehung impliziert:

$$\forall r > 0 \quad K_r(x) \cap H \neq \emptyset \quad \text{und} \quad K_r(x) \cap P_j \neq \emptyset;$$

die zweite liefert

$$\forall r > 0 \quad (K_r(x) \cap H^c) \cup (K_r(x) \cap P_j^c) \neq \emptyset,$$

d.h.

$$\forall r > 0 \quad K_r(x) \cap H^c \neq \emptyset \quad \text{oder} \quad K_r(x) \cap P_j^c \neq \emptyset.$$

Damit gilt also $x \in \partial H$ oder $x \in \partial P_j$, oder anders ausgedrückt $\partial(H \cap P_j) \subseteq \partial H \cup \partial P_j$. Daraus folgt:

$$\partial(H \cap P_j) \cap \text{int}P_j \subseteq (\partial H \cup \partial P_j) \cap \text{int}P_j = \partial H \cap \text{int}P_j \subseteq \partial H.$$

Damit gilt dann

$$\bigcup_{j=1}^m (\partial(H \cap P_j) \cap \text{int}P_j) \subseteq \partial H. \quad (28)$$

Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Wir numerieren die Würfel in \mathcal{Q} neu, sodaß $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_n\}$ ist. Zählen wir die Würfel Q_i in \mathcal{Q} mit Seitenlänge 2^k , so zählen wir zunächst jeweils die Würfel Q_{jr} in $\{Q_{j1}, \dots, Q_{jn_j}\}$ ($j = 1, \dots, m$) mit Seitenlänge 2^k und bilden dann die Summe:

$$\begin{aligned} |\{i : s(Q_i) = 2^k\}| &= \sum_{j=1}^m |\{r : s(Q_{jr}) = 2^k\}| \\ &\stackrel{(27)}{\leq} \frac{\hat{C}}{2^{2k}} \sum_{j=1}^m \lambda_2(\partial(H \cap P_j) \cap \text{int}P_j) \\ &= \frac{\hat{C}}{2^{2k}} \lambda_2\left(\bigcup_{j=1}^m (\partial(H \cap P_j) \cap \text{int}P_j)\right) \\ &\stackrel{(28)}{\leq} \hat{C} \cdot \frac{\lambda_2(\partial H)}{2^{2k}} \\ &= \hat{C} \cdot \frac{p(H)}{2^{2k}}, \end{aligned}$$

also ist die Aussage des Satzes bewiesen. \square

Lemma 8.1 Sei Ψ eine nichtnegative Funktion definiert auf $\{2^k : k \in \mathbb{N}_0\}$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(2^k)}{2^{2k}} < \infty$.
Seien S_1, S_2 diskrete Teilmengen des \mathbb{R}^3 und für ein $\alpha > 0$ gelte

$$\|S_i \cap Q\| - \alpha \lambda_3(Q) \leq \Psi(s(Q)) \quad (29)$$

für jeden dyadischen Würfel Q und für $i = 1, 2$.
Dann gibt es eine Bijektion $\Phi : S_1 \rightarrow S_2$ mit

$$|\Phi(x) - x| \leq M \quad \forall x \in S_1,$$

wobei die Konstante M nur von Ψ und α abhängt.

Beweis: Wir zeigen zuerst:

Sei $\alpha > 0$, $S \subseteq \mathbb{R}^3$, $Q_1, \dots, Q_n \in \mathcal{D}$ und $H \in S(\{Q_1, \dots, Q_n\})$. Dann gilt:

$$\|S \cap H\| - \alpha \lambda_3(H) \leq \sum_{i=1}^n \|S \cap Q_i\| - \alpha \lambda_3(Q_i). \quad (30)$$

Denn:

$$\begin{aligned} A \cap B = \emptyset &\Rightarrow \|S \cap (A \cup B)\| - \alpha \lambda_3(A \cup B) \\ &= (\|S \cap A\| - \alpha \lambda_3(A)) + (\|S \cap B\| - \alpha \lambda_3(B)) \\ B \subseteq A &\Rightarrow \|S \cap (A \setminus B)\| - \alpha \lambda_3(A \setminus B) \\ &= (\|S \cap A\| - \alpha \lambda_3(A)) - (\|S \cap B\| - \alpha \lambda_3(B)). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung folgt:

Ist $A \cap B = \emptyset$, dann gilt

$$\|S \cap (A \cup B)\| - \alpha \lambda_3(A \cup B) \leq \|S \cap A\| - \alpha \lambda_3(A) + \|S \cap B\| - \alpha \lambda_3(B),$$

und ist $B \subseteq A$, dann gilt

$$\|S \cap (A \setminus B)\| - \alpha \lambda_3(A \setminus B) \leq \|S \cap A\| - \alpha \lambda_3(A) + \|S \cap B\| - \alpha \lambda_3(B).$$

H ist entweder leer, dann ist (30) trivialerweise erfüllt, oder entsteht aus Q_1, \dots, Q_n durch die Operationen der disjunkten Vereinigung und der eigentlichen Differenz, wobei jedes Q_i nur einmal verwendet wird: die Ungleichung (30) folgt nach Proposition 6.1. Zur Illustration sei ein Beispiel angegeben:

Es seien Q_1, Q_2, Q_3 und Q_4 dyadische Würfel mit den Eigenschaften $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$, $Q_1 \cup Q_2 \subseteq Q_4$ und $Q_3 \subseteq Q_4 \setminus (Q_1 \cup Q_2)$.

Dann ist $H = (Q_4 \setminus (Q_1 \cup Q_2)) \setminus Q_3$ ein Element der Menge $S(\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\})$, und es gilt:

$$\begin{aligned}
\|S \cap H| - \alpha\lambda_3(H)| &\leq \|S \cap (Q_4 \setminus (Q_1 \cup Q_2))| - \alpha\lambda_3(Q_4 \setminus (Q_1 \cup Q_2))| \\
&\quad + \|S \cap Q_3| - \alpha\lambda_3(Q_3)| \\
&\leq \|S \cap Q_4| - \alpha\lambda_3(Q_4)| \\
&\quad + \|S \cap (Q_1 \cup Q_2)| - \alpha\lambda_3(Q_1 \cup Q_2)| \\
&\quad + \|S \cap Q_3| - \alpha\lambda_3(Q_3)| \\
&\leq \sum_{i=1}^4 \|S \cap Q_i| - \alpha\lambda_3(Q_i)|.
\end{aligned}$$

Sei $H \in \mathcal{H}$ beliebig, aber $H \neq \emptyset$. Nach dem Satz 8.1 gibt es dyadische Würfel Q_1, \dots, Q_n , sodaß:

$$H \in S(\{Q_1, \dots, Q_n\}) \quad \text{und}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : |\{i : s(Q_i) = 2^k\}| \leq \hat{C} \cdot \frac{p(H)}{2^{2k}}. \quad (31)$$

Für die folgende Überlegung gelte weiterhin $H \neq \emptyset$, und es sei $r \in \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned}
\|S_r \cap H| - \alpha\lambda_3(H)| &\stackrel{(30)}{\leq} \sum_{i=1}^n \|S_r \cap Q_i| - \alpha\lambda_3(Q_i)| \\
&\stackrel{(29)}{\leq} \sum_{i=1}^n \Psi(s(Q_i)) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \Psi(2^k) \cdot |\{i : s(Q_i) = 2^k\}| \\
&\stackrel{(31)}{\leq} \hat{C} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(2^k)}{2^{2k}} \right) \cdot p(H) \\
&= K \cdot p(H).
\end{aligned}$$

Ist hingegen $H = \emptyset$, dann gilt

$$\|S_r \cap \emptyset| - \alpha\lambda_3(\emptyset)| = 0 = K \cdot p(\emptyset).$$

Obige Beziehung bleibt somit auch in diesem Fall gültig.

Damit sind die Voraussetzungen des Satzes 4.1, welcher die gewünschte Bijektion liefert, erfüllt.

Die Konstante M hat die Gestalt $M = 2\sqrt{3}[6\alpha^{-1}(C_1 + C_2) + 1]$, wobei in unserem speziellen Fall $C_1 = C_2 = K$ ist. Und K wiederum ist nur abhängig von Ψ , nicht aber von H . \square

Im eben geführten Beweis erbringen wir außerdem den Nachweis für die gesuchte hinreichende Bedingung dafür, daß eine diskrete Menge *uniformly spread* ist, nämlich:

Bemerkung 8.1 Sei Ψ eine nichtnegative Funktion definiert auf $\{2^k : k \in \mathbb{N}_0\}$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(2^k)}{2^{2k}} < \infty$. Sei S eine diskrete Teilmenge des \mathbb{R}^3 , und für ein $\alpha > 0$ gelte

$$||S \cap Q| - \alpha \lambda_3(Q)| \leq \Psi(s(Q))$$

für jeden dyadischen Würfel Q .

Dann ist S uniformly spread mit Dichte α .

Literaturverweise: [11]

9 Eine hinreichende Bedingung für Zerlegungsgleichheit

In diesem Abschnitt soll endlich die Verbindung zwischen den bisher angestellten kombinatorischen Überlegungen und der Zerlegungsgleichheit von Mengen hergestellt werden. Der folgende Satz bildet das Kernstück dieser Arbeit.

Wir definieren:

$$s_N(u; x, y, z) := \{\{u + nx + ky + lz\} : 0 \leq n, k, l < N\},$$

wobei $u, x, y, z \in \mathbb{R}^2$ und $n, k, l, N \in \mathbb{Z}$ sind. Für $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ bezeichne $\{a\} = \{(a_1, a_2)\} := (\{a_1\}, \{a_2\})$ den Bruchteil von a .

Satz 9.1 Sei Ψ eine nichtnegative Funktion definiert auf \mathbb{N} mit $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(2^k)}{2^{2k}} < \infty$. Seien H_1, H_2 meßbare Teilmengen von $I^2 = [0, 1]^2$ mit $\lambda_2(H_1) = \lambda_2(H_2) > 0$, und seien $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ so, daß:

1. $x, y, z, i = (1, 0)$ und $j = (0, 1)$ linear unabhängig über \mathbb{Q}
2. $N^3 \cdot D(s_N(u; x, y, z); H_r) \leq \Psi(N) \quad \forall u \in \mathbb{R}^2, N \in \mathbb{N}, r = 1, 2$

Dann gilt: $H_1 \stackrel{tr}{\sim} H_2$

Beweis: Wir setzen $\alpha := \lambda_2(H_r)$ ($r = 1, 2$) (Dann folgt $0 < \alpha \leq 1$). x, y und z genügen den Bedingungen 1. und 2. des Satzes. Setze für $u \in \mathbb{R}^2$ und $r = 1, 2$:

$$S_r(u) := \{(n, k, l) \in \mathbb{Z}^3 : \{u + nx + ky + lz\} \in H_r\}.$$

Wir werden zunächst beweisen, daß für jeden Gitterwürfel Q und für alle $u \in \mathbb{R}^2$ folgende Ungleichung gilt:

$$||S_r(u) \cap Q| - \alpha \lambda_3(Q)| \leq \Psi(s(Q)) \quad (r = 1, 2). \quad (32)$$

Sei $Q = \prod_{i=1}^3 [a_i, a_i + N)$ mit $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2, 3$ und $N \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $r = 1, 2$:

$$\begin{aligned} |S_r(u) \cap Q| &= |\{(n, k, l) \in \mathbb{Z}^3 : a_1 \leq n < a_1 + N, \\ &\quad a_2 \leq k < a_2 + N, a_3 \leq l < a_3 + N, \\ &\quad \{u + nx + ky + lz\} \in H_r\}| \\ &= |\{(m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}^3 : 0 \leq m_i < N, i = 1, 2, 3, \\ &\quad \{u + a_1x + a_2y + a_3z + m_1x + m_2y + m_3z\} \in H_r\}| \\ &= |s_N(u + a_1x + a_2y + a_3z; x, y, z) \cap H_r|. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich wegen $|s_N(u; x, y, z)| = N^3$ für alle $u \in \mathbb{R}^2$ (folgt aus Bedingung 1. des Satzes) und $\alpha = \lambda_2(H_r)$ und nach der Definition der Diskrepanz D (Definition 2.2):

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{N^3} |S_r(u) \cap Q| - \alpha \right| \\ &= \left| \frac{|s_N(u + a_1x + a_2y + a_3z; x, y, z) \cap H_r|}{|s_N(u + a_1x + a_2y + a_3z; x, y, z)|} - \lambda_2(H_r) \right| \\ &= D(s_N(u + a_1x + a_2y + a_3z; x, y, z); H_r) \\ &\stackrel{2.}{\leq} \frac{\Psi(N)}{N^3}. \end{aligned}$$

Und daraus folgt mit $\lambda_3(Q) = N^3$:

$$||S_r(u) \cap Q| - \alpha \lambda_3(Q)| \leq \Psi(N) = \Psi(s(Q)),$$

also die Beziehung (32).

Nach dem Lemma 8.1 gibt es somit für jedes $u \in \mathbb{R}^2$ eine Bijektion $\Phi_u : S_1(u) \rightarrow S_2(u)$ mit

$$|\Phi_u(s) - s| \leq M \quad \forall s \in S_1(u), \quad (33)$$

wobei die Konstante M nur von Ψ und α abhängt. Wichtig ist hierbei, daß M nicht von u abhängig ist, weil die Ungleichung (32) mit festem Ψ für alle $u \in \mathbb{R}^2$ gültig ist.

Sei G die additive Gruppe, die von x, y, z, i und j erzeugt wird. Wir definieren folgende Relation auf \mathbb{R}^2 :

$$w_1 \sim w_2 \quad :\Leftrightarrow \quad w_1 - w_2 \in G \quad (w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2).$$

„ \sim “ ist eine Äquivalenzrelation, denn:

- reflexiv: $w \sim w \quad \forall w \in \mathbb{R}^2$, da $0 \in G$.
- symmetrisch: $w_1 \sim w_2 \Rightarrow w_1 - w_2 \in G$
 $\Rightarrow -(w_1 - w_2) \in G \Rightarrow w_2 \sim w_1 \quad \forall w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$.
- transitiv: $w_1 \sim w_2$ und $w_2 \sim w_3 \Rightarrow w_1 - w_2, w_2 - w_3 \in G$
 $\Rightarrow (w_1 - w_2) + (w_2 - w_3) = w_1 - w_3 \in G$
 $\Rightarrow w_1 \sim w_3 \quad \forall w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^2$.

Sei E eine Äquivalenzklasse, und sei ein Element $u_0 \in E$ gewählt. Dann hat jedes Element $w \in E$ folgende Form:

$$w = u_0 + nx + ky + lz + mi + hj \quad (n, k, l, m, h \in \mathbb{Z}).$$

Wenn $w \in H_1$ ist, dann ist $\{u_0 + nx + ky + lz\} \in H_1$ und daher $(n, k, l) \in S_1(u_0)$.

Denn: Angenommen $\{u_0 + nx + ky + lz\} \notin H_1$. Es gilt $\{mi + hj\} = (0, 0)$, und $w \in H_1 \subseteq I^2$ impliziert $w = \{w\}$. Wir betrachten:

$$\begin{aligned} w &= u_0 + nx + ky + lz + mi + hj \\ &= \underbrace{(u_0 + nx + ky + lz - \{u_0 + nx + ky + lz\})}_{\in \mathbb{Z}^2} + mi + hj \\ &\quad + \{u_0 + nx + ky + lz\} \end{aligned}$$

Damit würde folgen, daß $\{w\} = \{u_0 + nx + ky + lz\} = w \notin H_1$, also ein Widerspruch.

Sei $\Phi_{u_0}((n, k, l)) = (n', k', l') \in S_2(u_0)$, dann gilt $\{u_0 + n'x + k'y + l'z\} \in H_2$. Und es gibt $m', h' \in \mathbb{Z}$, sodaß

$$u_0 + n'x + k'y + l'z + m'i + h'j \in H_2,$$

nämlich

$$\begin{aligned} m' &:= -(1. \text{ Koordinate von } u_0 + n'x + k'y + l'z - \{u_0 + n'x + k'y + l'z\}), \\ h' &:= -(2. \text{ Koordinate von } u_0 + n'x + k'y + l'z - \{u_0 + n'x + k'y + l'z\}). \end{aligned}$$

Wir definieren eine Funktion $\chi_{u_0} : H_1 \cap E \rightarrow H_2 \cap E$, indem wir jedem $w = u_0 + nx + ky + lz + mi + hj \in H_1 \cap E$ den Funktionswert

$$\chi_{u_0}(w) := u_0 + n'x + k'y + l'z + m'i + h'j \in H_2 \cap E$$

zuordnen. m', h' sind eindeutig bestimmt durch n', k', l' , daher ist die Funktion χ_{u_0} wohldefiniert.

Da $\Phi_{u_0} : S_1(u_0) \rightarrow S_2(u_0)$ bijektiv ist, ist auch $\chi_{u_0} : H_1 \cap E \rightarrow H_2 \cap E$ eine bijektive Funktion. Denn:

- Injektivität: Seien $w, v \in H_1 \cap E$ mit $w \neq v$, und wir nehmen an, es wäre $\chi_{u_0}(w) = \chi_{u_0}(v)$; also

$$u_0 + n'_1x + k'_1y + l'_1z + m'_1i + h'_1j = u_0 + n'_2x + k'_2y + l'_2z + m'_2i + h'_2j,$$

daraus ergibt sich

$$(n'_1 - n'_2)x + (k'_1 - k'_2)y + (l'_1 - l'_2)z + (m'_1 - m'_2)i + (h'_1 - h'_2)j = 0,$$

und wegen der linearen Unabhängigkeit von x, y, z, i und j über den rationalen Zahlen folgt

$$n'_1 = n'_2, \quad k'_1 = k'_2, \quad l'_1 = l'_2, \quad m'_1 = m'_2 \quad \text{und} \quad h'_1 = h'_2.$$

Da die Funktion $\Phi_{u_0} : S_1(u_0) \rightarrow S_2(u_0)$ bijektiv ist, gilt

$$(n_1, k_1, l_1) = \Phi_{u_0}^{-1}(n'_1, k'_1, l'_1) = \Phi_{u_0}^{-1}(n'_2, k'_2, l'_2) = (n_2, k_2, l_2).$$

Weil $\{u_0 + n_1x + k_1y + l_1z\}$ und $\{u_0 + n_2x + k_2y + l_2z\}$ in H_1 und insbesondere in I^2 liegen, folgt

$$w = \{u_0 + n_1x + k_1y + l_1z\} = \{u_0 + n_2x + k_2y + l_2z\} = v,$$

was zu einem Widerspruch führt.

- Surjektivität: Sei $w' \in H_2 \cap E$, dann gibt es (weil $w' \in E$) ganze Zahlen n', k', l', m' und h' so, daß

$$w' = u_0 + n'x + k'y + l'z + m'i + h'j.$$

Weil $w' = \{w'\} = \{u_0 + n'x + k'y + l'z\}$ in H_2 liegt, liegt (n', k', l') in $S_2(u_0)$. Wegen der Bijektivität der Funktion $\Phi_{u_0} : S_1(u_0) \rightarrow S_2(u_0)$ gibt es ein Tripel $(n, k, l) \in S_1(u_0)$ mit $\Phi_{u_0}((n, k, l)) = (n', k', l')$. Nach der Definition von $S_1(u_0)$ gilt $w = \{u_0 + nx + ky + lz\} \in H_1$, wie auch $w \in E$.

Wir widmen uns nun einigen Abschätzungen:

Sei also E eine Äquivalenzklasse der Äquivalenzrelation „ \sim “ und u_0 ein Repräsentant von E . Sei

$$w = u_0 + nx + ky + lz + mi + hj \in H_1 \cap E$$

und

$$\chi_{u_0}(w) = u_0 + n'x + k'y + l'z + m'i + h'j \in H_2 \cap E$$

der zugehörige Funktionswert. Wegen der Beziehung $|(n', k', l') - (n, k, l)| = |\Phi_{u_0}((n, k, l)) - (n, k, l)| \stackrel{(33)}{\leq} M$ gelten die Ungleichungen

$$|n' - n| \leq M, \quad |k' - k| \leq M \quad \text{und} \quad |l' - l| \leq M. \quad (34)$$

Da $w \in H_1$ und $\chi_{u_0}(w) \in H_2$ und daher $w, \chi_{u_0}(w) \in I^2$ sind, gilt die Abschätzung $|\chi_{u_0}(w) - w| \leq \sqrt{2}$ und deshalb:

$$\begin{aligned}
|(m' - m)i + (h' - h)j| &= |(u_0 + n'x + k'y + l'z + m'i + h'j) \\
&\quad - (u_0 + nx + ky + lz + mi + hj) \\
&\quad + (nx - n'x) + (ky - k'y) + (lz - l'z)| \\
&\leq |\chi_{u_0}(w) - w| \\
&\quad + |n' - n||x| + |k' - k||y| + |l' - l||z| \\
&\stackrel{(34)}{\leq} \sqrt{2} + M(|x| + |y| + |z|) =: K.
\end{aligned}$$

Damit ergeben sich (wegen $i = (1, 0)$ und $j = (0, 1)$):

$$|m' - m| \leq K \quad \text{und} \quad |h' - h| \leq K. \quad (35)$$

Wir können also mit

$$\begin{aligned}
\chi_{u_0}(w) &= u_0 + n'x + k'y + l'z + m'i + h'j \\
&= u_0 + nx + ky + lz + mi + hj \\
&\quad + (n' - n)x + (k' - k)y + (l' - l)z + (m' - m)i + (h' - h)j \\
&= w + (n' - n)x + (k' - k)y + (l' - l)z + (m' - m)i + (h' - h)j \\
&= w + ax + by + cz + di + ej
\end{aligned}$$

dank (34) und (35) zusammenfassend feststellen:

$$\begin{aligned}
\forall w \in H_1 \cap E \quad \exists a, b, c, d, e \in \mathbb{Z} : \\
\chi_{u_0}(w) &= w + ax + by + cz + di + ej \\
\text{mit } |a|, |b|, |c| &\leq M \quad \text{und} \quad |d|, |e| \leq K.
\end{aligned} \quad (36)$$

Sei $\{d_t\}_{t=1}^L$ eine Aufzählung der Vektoren $ax + by + cz + di + ej$, für welche die ganzen Zahlen a, b, c, d und e der Bedingung (36) genügen. Dann gilt $L \leq (2M + 1)^3(2K + 1)^2$, und die Konstanten M und K hängen nur von α, Ψ und der Länge der Vektoren x, y und z ab, jedoch nicht von u_0 . Damit hängt auch $\{d_t\}_{t=1}^L$ nicht von u_0 ab. Somit haben wir gezeigt:

$$\forall w \in H_1 \cap E \quad \exists t, 1 \leq t \leq L : \quad \chi_{u_0}(w) = w + d_t.$$

Weil die Äquivalenzklasse E mit dem Repräsentanten u_0 beliebig gewählt war und $d_t \in G$ ist für alle t , gibt es eine Bijektion $\chi : H_1 \rightarrow H_2$ mit

$$\forall w \in H_1 \quad \exists t, 1 \leq t \leq L : \quad \chi(w) = w + d_t.$$

Wir setzen $A_t := \{w \in H_1 : \chi(w) = w + d_t\}$, ($t = 1, \dots, L$). Dann gilt: $\bigcup_{t=1}^L A_t$ und $\bigcup_{t=1}^L (A_t + d_t)$ sind disjunkte Zerlegungen von

H_1 und H_2 , und jedes A_t wird unter der Translation $\chi|_{A_t}$ mit Translationsvektor d_t auf $A_t + d_t$ abgebildet, was den Beweis der translativen Zerlegungsgleichheit von H_1 und H_2 vervollständigt. \square

Literaturverweise: [8], [9], [10]

10 Ein wenig metrische Zahlentheorie

Die Frage, der wir nun nachgehen müssen, ist, ob es überhaupt Punkte x , y und z im \mathbb{R}^2 gibt, die die Voraussetzungen 1. und 2. des Satzes 9.1 erfüllen. Die Konstruktion solcher Punkte dürfte recht schwierig sein; wir werden hingegen zeigen, daß fast alle Punkte im \mathbb{R}^2 diese Eigenschaft haben.

Um dieses Problem anzugehen, wollen wir in diesem Abschnitt einige vorbereitende Lemmata aus der Theorie der metrischen Zahlentheorie diskutieren.

Definition 10.1 Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann heißt $\langle x \rangle$ der Abstand von x zur nächsten ganzen Zahl:

$$\langle x \rangle := \min\{\{x\}, 1 - \{x\}\} = \min_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|.$$

Lemma 10.1 Sei f eine Lebesgue-integrierbare Funktion auf $[0, 1]$ mit endlichem Lebesgue-Integral. Dann gilt für alle $a \in \mathbb{R}$ und für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 f(a + kx) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx.$$

Beweis: Wir führen eine Fallunterscheidung durch:

- $a \geq 0, \{a\} \leq \frac{1}{2}$:

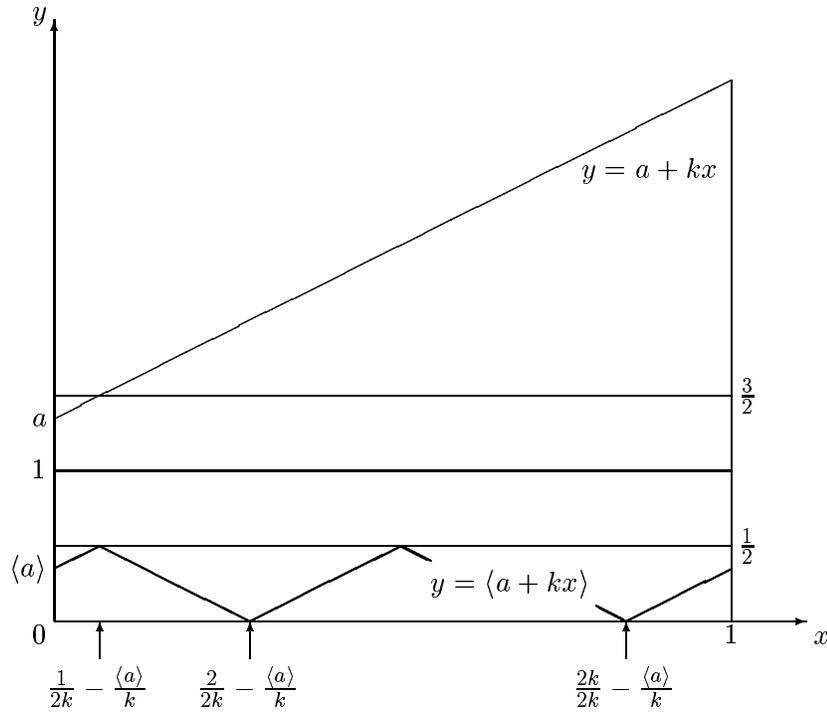


Abbildung 12: Der Graph der Funktion $y = \langle a + kx \rangle$.

Anhand der Abbildung 12 können wir das zu bestimmende Integral folgendermaßen aufteilen:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 f(\langle a + kx \rangle) dx &= \int_0^{\frac{1}{2k} - \frac{\langle a \rangle}{k}} f(kx + \langle a \rangle) dx \\
 &+ \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\frac{2j}{2k} - \frac{\langle a \rangle}{k}}^{\frac{2j+1}{2k} - \frac{\langle a \rangle}{k}} f(kx + \langle a \rangle - j) dx \\
 &+ \sum_{j=1}^k \int_{\frac{2j-1}{2k} - \frac{\langle a \rangle}{k}}^{\frac{2j}{2k} - \frac{\langle a \rangle}{k}} f(-kx - \langle a \rangle + j) dx \\
 &+ \int_{\frac{2k}{2k} - \frac{\langle a \rangle}{k}}^1 f(kx + \langle a \rangle - k) dx
 \end{aligned}$$

und mit geeigneten Substitutionen gilt weiter

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{k} \int_{\langle a \rangle}^{\frac{1}{2}} f(y) dy \\
 &\quad + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{k} \int_0^{\frac{1}{2}} f(y) dy \\
 &\quad + \sum_{j=1}^k -\frac{1}{k} \int_{\frac{1}{2}}^0 f(y) dy \\
 &\quad + \frac{1}{k} \int_0^{\langle a \rangle} f(y) dy \\
 &= \left(\frac{1}{k} + \frac{k-1}{k} + 1 \right) \int_0^{\frac{1}{2}} f(y) dy \\
 &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(y) dy.
 \end{aligned}$$

- $a \geq 0$, $\{a\} > \frac{1}{2}$: analog.
- $a < 0$, $\{a\} \leq \frac{1}{2}$: analog.
- $a < 0$, $\{a\} > \frac{1}{2}$: analog.

Damit ist der Beweis erbracht. \square

Lemma 10.2 Die Ungleichung $\langle kx \rangle < \frac{1}{k^2}$ hat unendlich viele positive ganzzahlige Lösungen k für fast kein $x \in \mathbb{R}$.

Beweis: Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ fest.

Wir betrachten die folgende Menge:

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : \langle kx \rangle < \frac{1}{k^2} \right\}.$$

Diese Menge ist eine Vereinigung von Intervallen auf der reellen Achse, deren Länge jeweils $\frac{2}{k^3}$ beträgt und deren Zentren jeweils Abstand $\frac{1}{k}$ haben (siehe Abbildung 13).

O.B.d.A. sehen wir uns den Bereich $0 \leq x < 1$ an:

Dazu setzen wir

$$U_k := \left\{ x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1, \langle kx \rangle < \frac{1}{k^2} \right\}.$$

Dann gilt:

$$\lambda_1(U_k) = k \cdot \frac{2}{k^3} = \frac{2}{k^2}.$$

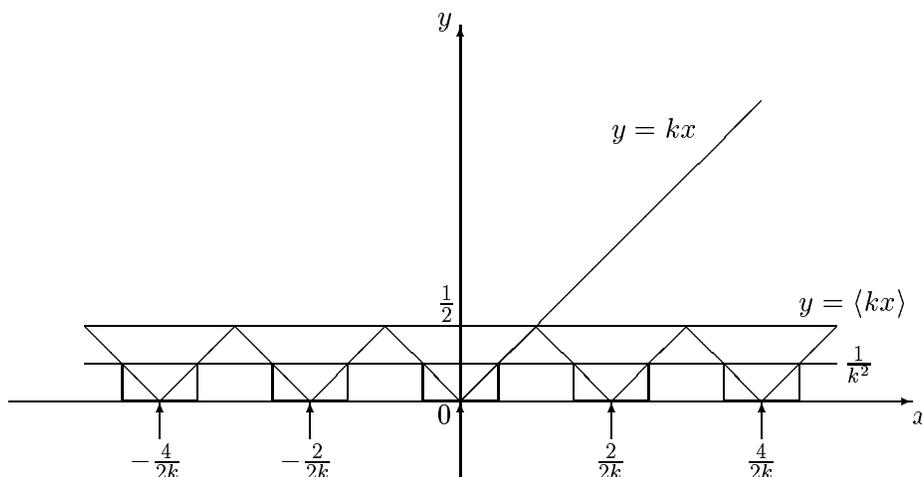


Abbildung 13: Die Menge $\{x \in \mathbb{R} : \langle kx \rangle < \frac{1}{k^2}\}$.

Wir interessieren uns für das Maß der Menge

$$U := \left\{ x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1, \langle kx \rangle < \frac{1}{k^2} \text{ gilt für } \infty \text{ viele } k \geq u \right\},$$

wobei $u \in \mathbb{N}$ zunächst beliebig ist.

Sei ein $\epsilon > 0$ vorgegeben.

Nun gilt:

$$\begin{aligned} U &= \left\{ x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1, \langle kx \rangle < \frac{1}{k^2} \text{ gilt für } \infty \text{ viele } k \geq u \right\} \\ &\subseteq \left\{ x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1, \langle ux \rangle < \frac{1}{u^2} \right\} \cup \\ &\quad \left\{ x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1, \langle (u+1)x \rangle < \frac{1}{(u+1)^2} \right\} \cup \dots \\ &= \bigcup_{k \geq u} U_k. \end{aligned}$$

Wir können folgern, daß

$$\lambda_1(U) \leq \lambda_1\left(\bigcup_{k \geq u} U_k\right) \leq \sum_{k \geq u} \lambda_1(U_k) = \sum_{k \geq u} \frac{2}{k^2} < \epsilon$$

gilt, wenn u genügend groß ist.

Damit ist die Aussage des Lemmas gezeigt. \square

Später werden wir dieses Lemma in einer etwas anderen Form brauchen, die sich leicht ergibt:

Folgerung 10.1 Für fast alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\langle kx \rangle \geq \frac{1}{k^2}$ für alle bis auf endlich viele $k \in \mathbb{N}$.

Betrachten wir nun den zweidimensionalen Fall:

Lemma 10.3 Die Ungleichung $\langle hx + ky \rangle < \frac{1}{(hk)^2}$ hat unendlich viele Lösungen $(h, k) \in \mathbb{N}^2$ für fast kein $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Beweis: O.B.d.A. sei $(x, y) \in [0, 1)^2$:

Wir können schreiben $\langle hx + ky \rangle = |hx + ky - m|$ mit $m = m(h, k) \in \mathbb{Z}$. Dieses m ist eindeutig bestimmt bis auf den Fall, daß $\{hx + ky\} = \frac{1}{2}$ ist. Wir können diesen Fall ausschließen, weil

$$\begin{aligned} & \left\{ (x, y) \in [0, 1)^2 : \{hx + ky\} = \frac{1}{2} \text{ mit } h, k \in \mathbb{N} \right\} \\ & \subseteq \left\{ (x, y) \in [0, 1)^2 : hx + ky = \frac{1}{2} + n \text{ mit } h, k \in \mathbb{N} \text{ und } n \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

ist. Die zweite Menge ist eine abzählbare Vereinigung von Geradenstücken und damit eine Nullmenge.

Sei $\delta = \delta(h, k) := \frac{c'}{(hk)^{1+\frac{1}{2}}}$ mit $0 < c' < 1$ beliebig.

Dann ist:

$$\langle hx + ky \rangle < \frac{c'}{(hk)^{1+\frac{1}{2}}} = \delta \quad \Leftrightarrow \quad -\delta < hx + ky - m < \delta.$$

Wenn h, k, m und x gegeben sind, dann gilt:

$$\frac{-\delta + m - hx}{k} < y < \frac{\delta + m - hx}{k}. \quad (37)$$

Damit so ein $y \in [0, 1)$ existiert, muß zumindest gelten:

$$\frac{-\delta + m - hx}{k} < 1 \quad \text{und} \quad \frac{\delta + m - hx}{k} > 0.$$

Diese Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn gilt:

$$m < k + \delta + hx \quad \text{und} \quad m > hx - \delta. \quad (38)$$

Zu gegebenen h, k und x gibt es also höchstens $k + 2\delta + 1$ solche m . Wenn m der Bedingung (38) genügt, dann hat die Menge der y , für welche (37) erfüllt ist, höchstens das Maß $\frac{2\delta}{k}$.

Zusammenfassend stellen wir fest:

$$\begin{aligned} U_{c'} &:= \{0 \leq x < 1\} \cap \{0 \leq y < 1 : \exists (h, k) \in \mathbb{N}^2 \text{ mit } \langle hx + ky \rangle < \delta\} \\ &\subseteq \{0 \leq x < 1\} \cap \{0 \leq y < 1 : \exists (h, k) \in \mathbb{N}^2, \exists m \in \mathbb{Z} \text{ mit (37) und (38)}\}, \end{aligned}$$

und es gilt somit:

$$\begin{aligned} \lambda_2(U_{c'}) &\leq \sum_{h,k=1}^{\infty} 1 \cdot (k + 2\delta + 1) \cdot \frac{2\delta}{k} \\ &= \sum_{h,k=1}^{\infty} \left(k + 2 \cdot \frac{c'}{(hk)^{1+\frac{1}{2}}} + 1 \right) \cdot \frac{2}{k} \cdot \frac{c'}{(hk)^{1+\frac{1}{2}}} \\ &= \left[2 \sum_{h,k=1}^{\infty} \frac{1}{(hk)^{1+\frac{1}{2}}} + 4c' \sum_{h,k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{(hk)^3} + 2 \sum_{h,k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{(hk)^{1+\frac{1}{2}}} \right] \cdot c' \\ &< \left[2 \sum_{h,k=1}^{\infty} \frac{1}{(hk)^{1+\frac{1}{2}}} + 4 \sum_{h,k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{(hk)^3} + 2 \sum_{h,k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{(hk)^{1+\frac{1}{2}}} \right] \cdot c' \\ &=: c \cdot c' < \infty, \end{aligned}$$

weil $0 < c' < 1$ ist. Man beachte, daß die Konstante c nicht von c' abhängt.

Betrachten wir ein festes Paar $(x_0, y_0) \in [0, 1]^2$, für welches die Ungleichung $\langle hx_0 + ky_0 \rangle < \frac{1}{(hk)^2}$ unendlich viele Lösungen $(h, k) \in \mathbb{N}^2$ hat. Dann gibt es für jedes $0 < c' < 1$ ein Paar $(h, k) \in \mathbb{N}^2$ mit $\langle hx_0 + ky_0 \rangle < \frac{c'}{(hk)^{1+\frac{1}{2}}}$. Denn: Angenommen es gäbe ein $0 < c' < 1$ so, daß für alle $(h, k) \in \mathbb{N}^2$

$$\langle hx_0 + ky_0 \rangle \geq \frac{c'}{(hk)^{1+\frac{1}{2}}}$$

gelten würde, dann wäre für unendlich viele h und k

$$\frac{1}{(hk)^2} > \langle hx_0 + ky_0 \rangle \geq \frac{c'}{(hk)^{1+\frac{1}{2}}}.$$

Für unendlich viele h und k würde also $c' < (hk)^{-\frac{1}{2}}$ sein, was bedeuten würde, daß $c' = 0$ sein muß; Widerspruch.

Insgesamt stellen wir fest, daß für alle $0 < c' < 1$ gilt:

$$\begin{aligned} U &:= \left\{ (x, y) \in [0, 1]^2 : \langle hx + ky \rangle < \frac{1}{(hk)^2} \text{ gilt für } \infty \text{ viele } (h, k) \in \mathbb{N}^2 \right\} \\ &\subseteq \left\{ (x, y) \in [0, 1]^2 : \exists (h, k) \in \mathbb{N}^2 \text{ mit } \langle hx + ky \rangle < \frac{c'}{(hk)^{1+\frac{1}{2}}} \right\} \\ &= U_{c'}. \end{aligned}$$

Damit folgt für alle $0 < c' < 1$

$$\lambda_2(U) \leq \lambda_2(U_{c'}) < c \cdot c',$$

also gilt $\lambda_2(U) = 0$, was die Aussage des Lemmas liefert. \square

Wie im eindimensionalen Fall formulieren wir nun noch die Aussage des Lemmas 10.3 so, wie wir sie im nächsten Kapitel verwenden werden:

Folgerung 10.2 *Für fast alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt $\langle hx + ky \rangle \geq \frac{1}{(hk)^2}$ für alle bis auf endlich viele $(h, k) \in \mathbb{N}^2$.*

Literaturverweise: [2], [9], [12]

11 Abschätzungen bestimmter Summen

Nach der Methode von W. M. Schmidt werden wir in diesem Abschnitt spezielle Summen, die den Abstand zur nächsten ganzen Zahl $\langle \cdot \rangle$ enthalten, nach oben hin abschätzen. Diese Resultate werden wir im Abschnitt 12 zur Bestimmung der Diskrepanz der Menge $s_N(u; x, y, z)$ benötigen.

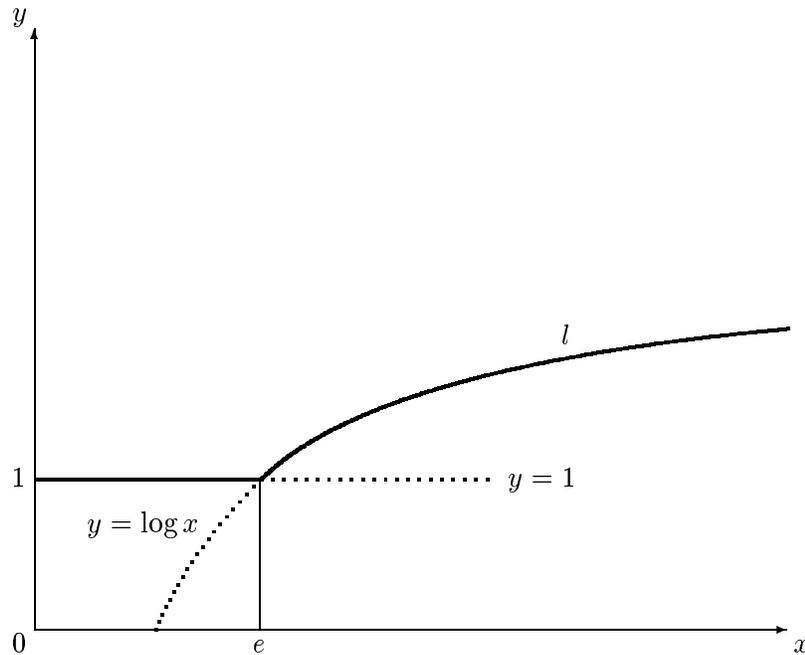


Abbildung 14: Die Funktion l .

Wir definieren folgende Funktion l auf $[0, \infty)$:

$$l(x) := \begin{cases} 1 & , \text{ wenn } x \leq e \\ \log x & , \text{ wenn } x > e \end{cases} ,$$

wobei e die Eulerkonstante bezeichnet (siehe Abbildung 14). Mit „ \log “ ist stets der natürliche Logarithmus gemeint.

Lemma 11.1 *Für fast alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ und für alle $\epsilon > 0$ gibt es eine positive Konstante C , sodaß*

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\langle kx \rangle \langle ky \rangle \langle kz \rangle} \leq C \cdot n \cdot l^{4+\epsilon}(n) \quad (39)$$

und

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k \langle kx \rangle \langle ky \rangle \langle kz \rangle} \leq C \cdot l^{4+\epsilon}(n) \quad (40)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben.

Wir betrachten folgende Funktion:

$$f(x, y, z) := \sum_{k=1}^{\infty} [kl^{1+\epsilon}(k) \langle kx \rangle |\log \langle kx \rangle|^{1+\epsilon} \langle ky \rangle |\log \langle ky \rangle|^{1+\epsilon} \langle kz \rangle |\log \langle kz \rangle|^{1+\epsilon}]^{-1}.$$

Wir werden zeigen: Diese Funktion f ist Lebesgue-integrierbar auf $[0, 1]^3$ mit einem endlichen Lebesgue-Integral. Dann können wir folgern: Der Wert der Funktion f ist endlich für fast alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Es gilt mit Hilfe von Lemma 10.1:

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^3} f d\lambda_3 \\ &= \int_{[0,1]^3} \sum_{k=1}^{\infty} [kl^{1+\epsilon}(k) \langle kx \rangle |\log \langle kx \rangle|^{1+\epsilon} \langle ky \rangle |\log \langle ky \rangle|^{1+\epsilon} \langle kz \rangle |\log \langle kz \rangle|^{1+\epsilon}]^{-1} d\lambda_3 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[[kl^{1+\epsilon}(k)]^{-1} \cdot \left(\int_0^1 [\langle kx \rangle |\log \langle kx \rangle|^{1+\epsilon}]^{-1} dx \right)^3 \right] \\ &= 8 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} [kl^{1+\epsilon}(k)]^{-1} \cdot \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x |\log x|^{1+\epsilon}} dx \right)^3 . \end{aligned}$$

Wir berechnen nun dieses Integral (mit der Substitution $-\log x = t$):

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x|\log x|^{1+\epsilon}} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(-\log x)^{1+\epsilon}} dx \\
 &= \int_a^b \frac{-e^{-t}}{e^{-t}t^{1+\epsilon}} dt \\
 &= \left. -\frac{t^{-\epsilon}}{-\epsilon} \right|_a^b \\
 &= \left. \frac{1}{\epsilon \cdot (-\log x)^\epsilon} \right|_0^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{\epsilon \cdot (-\log \frac{1}{2})^\epsilon} \\
 &= \frac{1}{\epsilon \cdot \log^\epsilon 2}. \tag{41}
 \end{aligned}$$

Damit gilt nun:

$$\int_{[0,1]^3} f d\lambda_3 \stackrel{(41)}{=} 8 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} [kl^{1+\epsilon}(k)]^{-1} \cdot \frac{1}{\epsilon^3 \cdot \log^{3\epsilon} 2} = \frac{8}{\epsilon^3 \cdot \log^{3\epsilon} 2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} [kl^{1+\epsilon}(k)]^{-1}.$$

Und nach dem Integralkriterium für Reihen können wir schließen, daß dieses Integral $\int_{[0,1]^3} f d\lambda_3 < \infty$ ist:

Für $k \geq 3$ ist $l(k) = \log k$. Der Ausdruck $[x \log^{1+\epsilon} x]^{-1}$ ist für alle $x \geq 3$ definiert, nichtnegativ und monoton fallend. Außerdem gilt:

$$\int_3^{\infty} [x \log^{1+\epsilon} x]^{-1} dx = \left. -\frac{1}{\epsilon \cdot \log^\epsilon x} \right|_3^{\infty} = \frac{1}{\epsilon \cdot \log^\epsilon 3} < \infty.$$

Die Folgerung 10.1 besagt:

Für fast alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\langle kx \rangle \geq k^{-2}$ für alle bis auf endlich viele $k \in \mathbb{N}$. Also gibt es für jedes solche x eine positive Konstante C' (abhängig von x), sodaß $\langle kx \rangle \geq C' \cdot k^{-2}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Für so ein festgehaltenes x gilt für alle k :

$$\log \langle kx \rangle \geq \log C' - 2 \log k.$$

Und daher:

$$\begin{aligned}
 |\log \langle kx \rangle| &= -\log \langle kx \rangle \\
 &\leq 2 \log k - \underbrace{\log C'}_{\leq |\log C'|} \\
 &\leq \underbrace{2 \log k}_{\leq l(k)} + |\log C'| \cdot \underbrace{1}_{\leq l(k)} \\
 &\leq (2 + |\log C'|) \cdot l(k).
 \end{aligned}$$

Zusammenfassend haben wir somit:

$$|\log \langle kx \rangle| \leq (2 + |\log C'_x|) \cdot l(k) \quad (42)$$

gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}$ und für alle $k \in \mathbb{N}$, wobei C'_x eine von x abhängende positive Konstante ist.

Nun können wir schließen:

$$\begin{aligned} \infty &> f(x, y, z) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} [kl^{1+\epsilon} \langle kx \rangle |\log \langle kx \rangle|^{1+\epsilon} \langle ky \rangle |\log \langle ky \rangle|^{1+\epsilon} \langle kz \rangle |\log \langle kz \rangle|^{1+\epsilon}]^{-1} \end{aligned}$$

gilt für fast alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, und weiters

$$\begin{aligned} &\stackrel{(42)}{\geq} \frac{1}{(2 + |\log C'_x|)^{1+\epsilon} (2 + |\log C'_y|)^{1+\epsilon} (2 + |\log C'_z|)^{1+\epsilon}} \\ &\cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kl^{4+4\epsilon} \langle kx \rangle \langle ky \rangle \langle kz \rangle}. \end{aligned}$$

Damit folgt für fast alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$C = C(x, y, z, \epsilon) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kl^{4+\epsilon} \langle kx \rangle \langle ky \rangle \langle kz \rangle} < \infty,$$

weil $g(X) \cdot h(X) < \infty$ mit $g(X) > 0$ und $h(X) > 0$ impliziert, daß $h(X) < \infty$ gilt (ϵ war beliebig; ich kann also auch $\frac{\epsilon}{4}$ nehmen).

Betrachten wir nun:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n \cdot l^{4+\epsilon}(n)} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{\langle kx \rangle \langle ky \rangle \langle kz \rangle} &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{kl^{4+\epsilon} \langle kx \rangle \langle ky \rangle \langle kz \rangle} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kl^{4+\epsilon} \langle kx \rangle \langle ky \rangle \langle kz \rangle} \\ &= C < \infty \end{aligned}$$

gilt für fast alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Damit ist (39) gezeigt.

Aus

$$\begin{aligned} \frac{1}{l^{4+\epsilon}(n)} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \langle kx \rangle \langle ky \rangle \langle kz \rangle} &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{kl^{4+\epsilon} \langle kx \rangle \langle ky \rangle \langle kz \rangle} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kl^{4+\epsilon} \langle kx \rangle \langle ky \rangle \langle kz \rangle} \\ &= C < \infty \end{aligned}$$

für fast alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ folgt (40). \square

Nun folgt eine ähnliche Abschätzung, allerdings nicht im \mathbb{R}^3 sondern im \mathbb{R}^6 . Die Vorgangsweise, um diese Abschätzung zu erhalten, ist analog zum Beweis von Lemma 11.1.

Lemma 11.2 *Für fast alle $(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) \in \mathbb{R}^6$ und für alle $\epsilon > 0$ gibt es eine positive Konstante C , sodaß*

$$\sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{hk \langle hx_1 + kx_2 \rangle \langle hy_1 + ky_2 \rangle \langle hz_1 + kz_2 \rangle} \leq C \cdot l^{8+\epsilon}(n) \quad (43)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben.

Wir betrachten folgende Funktion:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) &:= \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [hl^{1+\epsilon}(h) \cdot kl^{1+\epsilon}(k) \\ &\quad \cdot \langle hx_1 + kx_2 \rangle \cdot |\log \langle hx_1 + kx_2 \rangle|^{1+\epsilon} \\ &\quad \cdot \langle hy_1 + ky_2 \rangle \cdot |\log \langle hy_1 + ky_2 \rangle|^{1+\epsilon} \\ &\quad \cdot \langle hz_1 + kz_2 \rangle \cdot |\log \langle hz_1 + kz_2 \rangle|^{1+\epsilon}]^{-1}. \end{aligned}$$

Wir werden zeigen: Diese Funktion f ist Lebesgue-integrierbar auf $[0, 1]^6$ mit einem endlichen Lebesgue-Integral. Dann können wir folgern: Der Wert der Funktion f ist endlich für fast alle $(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) \in \mathbb{R}^6$.

Zunächst gilt:

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^6} f d\lambda_6 &= \int_{[0,1]^6} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [hl^{1+\epsilon}(h) \cdot kl^{1+\epsilon}(k) \\ &\quad \cdot \langle hx_1 + kx_2 \rangle \cdot |\log \langle hx_1 + kx_2 \rangle|^{1+\epsilon} \\ &\quad \cdot \langle hy_1 + ky_2 \rangle \cdot |\log \langle hy_1 + ky_2 \rangle|^{1+\epsilon} \\ &\quad \cdot \langle hz_1 + kz_2 \rangle \cdot |\log \langle hz_1 + kz_2 \rangle|^{1+\epsilon}]^{-1} d\lambda_6 \\ &= \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[[hl^{1+\epsilon}(h) \cdot kl^{1+\epsilon}(k)]^{-1} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(\int_0^1 \int_0^1 [\langle hx_1 + kx_2 \rangle \cdot |\log \langle hx_1 + kx_2 \rangle|^{1+\epsilon}]^{-1} dx_1 dx_2 \right)^3 \right]. \end{aligned}$$

Wir wollen nun dieses Doppelintegral berechnen. Unter Anwendung des

Lemmas 10.1 sehen wir (mit $a := kx_2 \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}
G(x_2) &:= \int_0^1 [\langle hx_1 + kx_2 \rangle \cdot |\log \langle hx_1 + kx_2 \rangle|^{1+\epsilon}]^{-1} dx_1 \\
&= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} [x_1 \cdot |\log x_1|^{1+\epsilon}]^{-1} dx_1 \\
&\stackrel{(41)}{=} 2 \cdot \frac{1}{\epsilon \cdot \log^\epsilon 2}.
\end{aligned}$$

Es fällt auf, daß $G(x_2)$ gar nicht von x_2 abhängt. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]^6} f d\lambda_6 &= \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [hl^{1+\epsilon}(h) \cdot kl^{1+\epsilon}(k)]^{-1} \cdot \left(\int_0^1 G(x_2) dx_2 \right)^3 \\
&= \frac{8}{\epsilon^3 \cdot \log^{3\epsilon} 2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} [kl^{1+\epsilon}(k)]^{-1} \right)^2 < \infty,
\end{aligned}$$

wie wir mit dem Integralkriterium für Reihen schon im Beweis von Lemma 11.1 gesehen haben.

Die Folgerung 10.2 besagt:

Für fast alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt $\langle hx + ky \rangle \geq (hk)^{-2}$ für alle bis auf endlich viele $(h, k) \in \mathbb{N}^2$.

Es gibt also für fast alle $(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) \in \mathbb{R}^6$ eine positive Konstante C' (abhängig von diesem Sextupel), sodaß die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\langle hx_1 + kx_2 \rangle &\geq C' \cdot (hk)^{-2}, \\
\langle hy_1 + ky_2 \rangle &\geq C' \cdot (hk)^{-2} \quad \text{und} \\
\langle hz_1 + kz_2 \rangle &\geq C' \cdot (hk)^{-2}
\end{aligned}$$

für alle $(h, k) \in \mathbb{N}^2$ gelten. Wie im Beweis von Lemma 11.1 schließen wir:

$$\begin{aligned}
|\log \langle hx_1 + kx_2 \rangle| &= -\log \langle hx_1 + kx_2 \rangle \\
&\leq 2 \cdot \log h + 2 \cdot \log k - \underbrace{\log C'}_{\leq |\log C'|} \\
&\leq 2 \cdot \underbrace{\log h \cdot 1}_{\leq l(h) \cdot l(k)} + 2 \cdot \underbrace{1 \cdot \log k}_{\leq l(h) \cdot l(k)} + |\log C'| \cdot \underbrace{1}_{\leq l(h) \cdot l(k)} \\
&\leq (4 + |\log C'|) \cdot l(h) \cdot l(k).
\end{aligned}$$

Für fast alle Sextupel $(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) \in \mathbb{R}^6$ gelten also die Ungleichungen

$$\begin{aligned}
|\log \langle hx_1 + kx_2 \rangle| &\leq (4 + |\log C'|) \cdot l(h) \cdot l(k), \\
|\log \langle hy_1 + ky_2 \rangle| &\leq (4 + |\log C'|) \cdot l(h) \cdot l(k) \quad \text{und} \\
|\log \langle hz_1 + kz_2 \rangle| &\leq (4 + |\log C'|) \cdot l(h) \cdot l(k)
\end{aligned}$$

für alle $(h, k) \in \mathbb{N}^2$.

Wir können nun schließen:

$$\begin{aligned}
\infty &> f(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) \\
&= \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [hl^{1+\epsilon}(h) \cdot kl^{1+\epsilon}(k) \\
&\quad \cdot \langle hx_1 + kx_2 \rangle \cdot |\log \langle hx_1 + kx_2 \rangle|^{1+\epsilon} \\
&\quad \cdot \langle hy_1 + ky_2 \rangle \cdot |\log \langle hy_1 + ky_2 \rangle|^{1+\epsilon} \\
&\quad \cdot \langle hz_1 + kz_2 \rangle \cdot |\log \langle hz_1 + kz_2 \rangle|^{1+\epsilon}]^{-1}
\end{aligned}$$

gilt für fast alle $(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) \in \mathbb{R}^6$, und weiters

$$\begin{aligned}
&\geq \left(\frac{1}{(4 + |\log C'|)^{1+\epsilon}} \right)^3 \\
&\quad \cdot \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{hk \cdot l^{4+4\epsilon}(h) \cdot l^{4+4\epsilon}(k) \langle hx_1 + kx_2 \rangle \langle hy_1 + ky_2 \rangle \langle hz_1 + kz_2 \rangle}.
\end{aligned}$$

Damit folgt (wie im Beweis von Lemma 11.1) für fast alle $(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) \in \mathbb{R}^6$

$$\sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{hk \cdot l^{4+\epsilon}(h) \cdot l^{4+\epsilon}(k) \langle hx_1 + kx_2 \rangle \langle hy_1 + ky_2 \rangle \langle hz_1 + kz_2 \rangle} < \infty.$$

Betrachten wir nun:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{l^{8+\epsilon}(n)} \cdot \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{hk \langle hx_1 + kx_2 \rangle \langle hy_1 + ky_2 \rangle \langle hz_1 + kz_2 \rangle} \\
&\leq \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{hk \cdot l^{4+\frac{\epsilon}{2}}(h) \cdot l^{4+\frac{\epsilon}{2}}(k) \langle hx_1 + kx_2 \rangle \langle hy_1 + ky_2 \rangle \langle hz_1 + kz_2 \rangle} \\
&\leq \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{hk \cdot l^{4+\frac{\epsilon}{2}}(h) \cdot l^{4+\frac{\epsilon}{2}}(k) \langle hx_1 + kx_2 \rangle \langle hy_1 + ky_2 \rangle \langle hz_1 + kz_2 \rangle} \\
&=: C = C(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, \epsilon) < \infty
\end{aligned}$$

gilt für fast alle $(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) \in \mathbb{R}^6$. Damit ist (43) gezeigt. \square

Literaturverweise: [9]

12 Eine obere Schranke für die Diskrepanz der Menge $s_N(u; x, y, z)$

Die Abschätzungen des vorigen Abschnittes versetzen uns in die Lage, eine obere Schranke für die Diskrepanz der Menge $s_N(u; x, y, z)$ zu finden, die

wichtig für die Erfüllung der Voraussetzung 2. der hinreichenden Bedingung für Zerlegungsgleichheit (Satz 9.1) ist.

Zuerst wollen wir aber noch eine andere Überlegung anstellen.

Lemma 12.1 *Für fast alle $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ sind die Vektoren $x, y, z, i = (1, 0)$ und $j = (0, 1)$ linear unabhängig über \mathbb{Q} .*

Beweis: Die drei Vektoren x, y und z sollen folgende Komponenten-darstellung haben:

$$x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2), \quad z = (z_1, z_2).$$

Wir werden zeigen, daß die Menge

$$U := \{(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) \in \mathbb{R}^6 : x, y, z, i, j \text{ l.a. über } \mathbb{Q}\}$$

eine Nullmenge ist. Dazu überlegen wir uns, daß gilt

$$\begin{aligned} U &:= \{(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) \in \mathbb{R}^6 : x, y, z, i, j \text{ l.a. über } \mathbb{Q}\} \\ &= \{(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) \in \mathbb{R}^6 : \exists q = (q_1, \dots, q_5) \in \mathbb{Q}^5 \setminus \{0\} \\ &\quad \text{mit } q_1x + q_2y + q_3z + q_4i + q_5j = 0\} \\ &= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}^5 \setminus \{0\}} \underbrace{\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^6 : q_1x + q_2y + q_3z + q_4i + q_5j = 0\}}_{=: U_q} \\ &= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}^5 \setminus \{0\}} U_q. \end{aligned}$$

Sei $q = (q_1, \dots, q_5) \in \mathbb{Q}^5 \setminus \{0\}$ fest. Es gilt:

$$\begin{aligned} U_q &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^6 : q_1x + q_2y + q_3z + q_4i + q_5j = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) \in \mathbb{R}^6 : q_1x_1 + q_2y_1 + q_3z_1 + q_4 = 0 \\ &\quad \text{und } q_1x_2 + q_2y_2 + q_3z_2 + q_5 = 0\}. \end{aligned}$$

Die Vektoren $(q_1, q_2, q_3, 0, 0, 0)$ und $(0, 0, 0, q_1, q_2, q_3)$ sind genau dann l.a. über \mathbb{R} , wenn $(q_1, q_2, q_3) = (0, 0, 0)$ gilt. Wegen $q = (q_1, \dots, q_5) \in \mathbb{Q}^5 \setminus \{0\}$ muß dann aber $(q_4, q_5) \neq (0, 0)$ sein. In diesem Fall ist U_q leer.

Andernfalls ist die Menge U_q der Durchschnitt zweier Hyperebenen des \mathbb{R}^6 , also ein höchstens 4-dimensionaler affiner Teilraum von \mathbb{R}^6 .

In beiden Fällen gilt $\lambda_6(U_q) = 0$. Somit können wir folgern:

$$\lambda_6(U) = \lambda_6\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}^5 \setminus \{0\}} U_q\right) \leq \sum_{q \in \mathbb{Q}^5 \setminus \{0\}} \lambda_6(U_q) = 0.$$

Also haben wir bewiesen, daß U tatsächlich eine Nullmenge ist. \square

Zur Erinnerung:

$$s_N(u; x, y, z) = \{\{u + nx + ky + lz\} : 0 \leq n, k, l < N\},$$

wobei $u, x, y, z \in \mathbb{R}^2$ und $n, k, l, N \in \mathbb{Z}$ sind. Wenn $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ derart sind, daß die Vektoren $x, y, z, i = (1, 0)$ und $j = (0, 1)$ linear unabhängig über \mathbb{Q} sind, dann gilt $|s_N(u; x, y, z)| = N^3$.

Satz 12.1 *Für fast jedes Tripel von Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ und für alle $\epsilon > 0$ gibt es eine positive Konstante C , sodaß*

$$D(s_N(u; x, y, z)) \leq C \cdot \frac{l^{8+\epsilon}(N)}{N^3} \quad (44)$$

für alle $u \in \mathbb{R}^2$ und für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt.

Beweis: Die drei Vektoren x, y und z sollen folgende Komponenten-darstellung haben:

$$x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2), \quad z = (z_1, z_2).$$

Wir werden zeigen:

Wenn $(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) \in \mathbb{R}^6$ so ist, daß die Vektoren $x, y, z, i = (1, 0)$ und $j = (0, 1)$ linear unabhängig über \mathbb{Q} sind, und daß (40)

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k \langle kx_i \rangle \langle ky_i \rangle \langle kz_i \rangle} \leq C' \cdot l^{4+\epsilon}(n)$$

für die beiden Tripel (x_i, y_i, z_i) mit $i = 1, 2$ und (43)

$$\sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{hk \langle hx_1 + kx_2 \rangle \langle hy_1 + ky_2 \rangle \langle hz_1 + kz_2 \rangle} \leq C'' \cdot l^{8+\epsilon}(n)$$

für jedes der Sextupel $(\pm x_1, \pm x_2, \pm y_1, \pm y_2, \pm z_1, \pm z_2)$ gilt, dann folgt (44). Die Konstanten C' und C'' hängen ab von $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ und ϵ .

Nach den Lemmata 11.1, 11.2 und 12.1 haben fast alle $(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) \in \mathbb{R}^6$ diese Eigenschaft, was den Beweis des Satzes erbringt.

Seien also die Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ zusammen mit $i = (1, 0)$ und $j = (0, 1)$ linear unabhängig über den rationalen Zahlen. Um die Diskrepanz der Menge $s_N(u; x, y, z)$ zu bestimmen, verwenden wir die Formel von Erdős-Turán-Koksma (siehe [7]):

$$\forall m \in \mathbb{N}: \quad D(s_N(u; x, y, z)) \leq C \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{N^3} \cdot \sum \right),$$

wobei C eine Konstante ist und

$$\sum = \sum_{0 < \|h\| \leq m} \frac{1}{r(h)} \left| \sum_{0 \leq n, k, l < N} e^{2\pi i (h_1 \cdot \{u_1 + nx_1 + ky_1 + lz_1\} + h_2 \cdot \{u_2 + nx_2 + ky_2 + lz_2\})} \right|$$

mit

$$\begin{aligned} h &:= (h_1, h_2) \in \mathbb{Z}^2, \\ \|h\| &:= \max\{|h_1|, |h_2|\}, \\ r(h) &:= \prod_{j=1}^2 \max\{|h_j|, 1\}. \end{aligned}$$

Sei Σ_1 die Summe jener Terme von \sum_h , wo $h_1 > 0$ und $h_2 = 0$ ist. Zunächst gelten:

$$e^{2\pi i h_1 \cdot (u_1 + nx_1 + ky_1 + lz_1)} = \underbrace{e^{2\pi i h_1 \cdot [u_1 + nx_1 + ky_1 + lz_1]}}_{=1} \cdot e^{2\pi i h_1 \cdot \{u_1 + nx_1 + ky_1 + lz_1\}}$$

und

$$|e^{2\pi i h_1 u_1}| = 1.$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{h_1=1}^m \frac{1}{h_1} \left| \sum_{0 \leq n, k, l < N} e^{2\pi i h_1 \cdot (u_1 + nx_1 + ky_1 + lz_1)} \right| \\ &= \sum_{h_1=1}^m \frac{1}{h_1} \left| \sum_{0 \leq n, k, l < N} e^{2\pi i h_1 \cdot (nx_1 + ky_1 + lz_1)} \right|. \end{aligned}$$

Wir betrachten:

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{0 \leq n, k, l < N} e^{2\pi i h_1 \cdot (nx_1 + ky_1 + lz_1)} \right| \\ &= \left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i h_1 n x_1} \right| \cdot \left| \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i h_1 k y_1} \right| \cdot \left| \sum_{l=0}^{N-1} e^{2\pi i h_1 l z_1} \right| \\ &= \left| \frac{e^{2\pi i h_1 N x_1} - 1}{e^{2\pi i h_1 x_1} - 1} \right| \cdot \left| \frac{e^{2\pi i h_1 N y_1} - 1}{e^{2\pi i h_1 y_1} - 1} \right| \cdot \left| \frac{e^{2\pi i h_1 N z_1} - 1}{e^{2\pi i h_1 z_1} - 1} \right|. \end{aligned} \quad (45)$$

Nun stellen wir einige Nebenüberlegungen an:

Da 1 und $e^{2\pi i h_1 N x_1}$ Punkte des Einheitskreises sind gilt

$$|e^{2\pi i h_1 N x_1} - 1| \leq 2.$$

Weiters gilt:

$$\begin{aligned} |e^{2\pi i h_1 x_1} - 1| &= \sqrt{(\cos 2\pi h_1 x_1 - 1)^2 + \sin^2 2\pi h_1 x_1} \\ &= \sqrt{\cos^2 2\pi h_1 x_1 - 2 \cos 2\pi h_1 x_1 + 1 + \sin^2 2\pi h_1 x_1} \\ &= \sqrt{2(1 - \cos 2\pi h_1 x_1)} \\ &= \sqrt{2(1 - 2 \cos^2 \pi h_1 x_1 + 1)} \\ &= 2\sqrt{1 - \cos^2 \pi h_1 x_1} = 2|\sin \pi h_1 x_1|. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\left| \frac{e^{2\pi i h_1 N x_1} - 1}{e^{2\pi i h_1 x_1} - 1} \right| \leq \frac{1}{|\sin \pi h_1 x_1|}.$$

Wie man der Abbildung 15 leicht entnehmen kann, gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$|\sin \pi x| \geq 2\langle x \rangle.$$

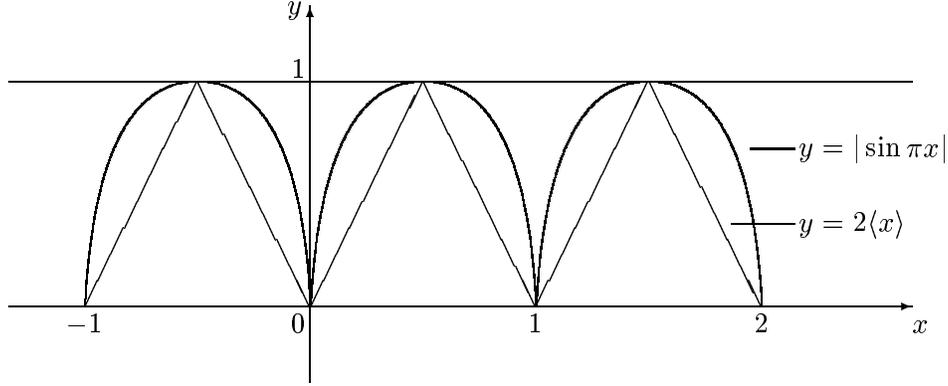


Abbildung 15: Die Funktionen $y = |\sin \pi x|$ und $y = 2\langle x \rangle$.

Somit können wir bei der Gleichung (45) folgendermaßen fortfahren:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{0 \leq n, k, l < N} e^{2\pi i h_1 \cdot (n x_1 + k y_1 + l z_1)} \right| &\leq \frac{1}{|\sin \pi h_1 x_1|} \cdot \frac{1}{|\sin \pi h_1 y_1|} \cdot \frac{1}{|\sin \pi h_1 z_1|} \\ &\leq \frac{1}{8 \cdot \langle h_1 x_1 \rangle \langle h_1 y_1 \rangle \langle h_1 z_1 \rangle} \\ &\leq \frac{1}{\langle h_1 x_1 \rangle \langle h_1 y_1 \rangle \langle h_1 z_1 \rangle}. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir folgende Abschätzung:

$$\Sigma_1 \leq \sum_{h_1=1}^m \frac{1}{h_1} \cdot \frac{1}{\langle h_1 x_1 \rangle \langle h_1 y_1 \rangle \langle h_1 z_1 \rangle} \stackrel{(40)}{\leq} C' \cdot l^{4+\epsilon}(m).$$

Sei Σ_2 die Summe jener Terme von \sum_h , wo $h_1 < 0$ und $h_2 = 0$ ist. Analog erhalten wir:

$$\Sigma_2 \leq \sum_{h_1=1}^m \frac{1}{h_1} \cdot \frac{1}{\langle -h_1 x_1 \rangle \langle -h_1 y_1 \rangle \langle -h_1 z_1 \rangle} \stackrel{(40)}{\leq} C' \cdot l^{4+\epsilon}(m),$$

weil $\langle -x \rangle = \min\{-x, 1 - \{-x\}\} = \min\{1 - \{x\}, \{x\}\} = \langle x \rangle$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Dieselben Abschätzungen gelten für die Summen jener Terme von \sum_h , wo $h_1 = 0$ und $h_2 > 0$ oder $h_2 < 0$ sind.

Sei Σ_3 die Summe jener Terme von \sum_h , wo $h_1, h_2 > 0$ gilt. Dann gilt nach analoger Vorgangsweise:

$$\begin{aligned}
\Sigma_3 &= \sum_{h_1, h_2=1}^m \underbrace{\frac{1}{r(h)}}_{=h_1 \cdot h_2} \cdot \left| \sum_{0 \leq n, k, l < N} e^{2\pi i (h_1 \cdot \{u_1 + nx_1 + ky_1 + lz_1\} + h_2 \cdot \{u_2 + nx_2 + ky_2 + lz_2\})} \right| \\
&\leq \sum_{h_1, h_2=1}^m \frac{1}{h_1 \cdot h_2} \cdot \frac{1}{\langle h_1 x_1 + h_2 x_2 \rangle \langle h_1 y_1 + h_2 y_2 \rangle \langle h_1 z_1 + h_2 z_2 \rangle} \\
&\stackrel{(43)}{\leq} C'' \cdot l^{8+\epsilon}(m).
\end{aligned}$$

Dieselben Abschätzungen erhalten wir für die Summen jener Terme von \sum_h , wo $h_1 > 0$ und $h_2 < 0$ ist, etc.

Zusammenfassend folgt also:

$$\sum \leq C''' \cdot l^{8+\epsilon}(m)$$

gilt für alle $m \in \mathbb{N}$, wobei C''' eine Konstante ist, die nur von $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ und ϵ abhängt.

Wir wählen $m = N^3$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
D(s_N(u; x, y, z)) &\leq C \cdot \left(\frac{1}{N^3} + \frac{1}{N^3} \cdot C''' \cdot l^{8+\epsilon}(N^3) \right) \\
&\leq \text{const} \cdot \frac{l^{8+\epsilon}(N)}{N^3},
\end{aligned}$$

weil $l^{8+\epsilon}(N^3) = \begin{cases} l^{8+\epsilon}(N) & : N = 1 \\ 3^{8+\epsilon} \cdot l^{8+\epsilon}(N) & : N > 1 \end{cases}$ ist. Damit ist der Beweis erbracht. \square

Literaturverweise: [7], [8], [9]

13 Die isotrope Diskrepanz

In diesem Abschnitt wollen wir den Begriff der isotropen Diskrepanz einführen. Sie wird uns nützen, eine weitere Abschätzung der „normalen“ Diskrepanz zu finden. Als wesentlich für unser Anliegen, die Zerlegungsgleichheit von Kreis und Quadrat zu beweisen, wird sich herausstellen, daß die isotrope Diskrepanz durch Supremumbildung über alle konvexen Teilmengen von I^2 erhalten wird (siehe Definition 13.1).

Wir wollen uns zunächst die Definition der Diskrepanz (Definition 2.2) in Erinnerung rufen:

Ist S eine endliche Teilmenge des Einheitsquadrates $I^2 = [0, 1]^2$ mit $|S| = N$ und $H \subseteq I^2$ meßbar, dann heißt

$$D(S; H) = \left| \frac{1}{N} |S \cap H| - \lambda_2(H) \right|$$

die Diskrepanz von S bzgl. H . Sei $J = [a, b) \times [c, d)$ ein beliebiges Rechteck mit $J \subseteq I^2$; die Diskrepanz von S ist die Zahl

$$D(S) = \sup_{J \subseteq I^2} D(S; J).$$

Definition 13.1 Sei S eine endliche Teilmenge von $I^2 = [0, 1]^2$ mit $|S| = N$. Außerdem bezeichne $\mathcal{C} := \{C \subseteq I^2 : C \text{ konvex}\}$ die Familie aller konvexen Teilmengen des Einheitsquadrates. Dann heißt

$$D_I(S) := \sup_{C \in \mathcal{C}} \left| \frac{1}{N} |S \cap C| - \lambda_2(C) \right|$$

die isotrope Diskrepanz von S .

Bemerkung 13.1 Wie man leicht feststellt, gilt:

$$D_I(S) = \sup_{C \in \mathcal{C}} \left| \frac{1}{N} |S \cap C| - \lambda_2(C) \right| = \sup_{C \in \mathcal{C}} D(S; C).$$

Zuerst überlegen wir uns eine alternative Darstellung der isotropen Diskrepanz D_I ; anstatt alle konvexen Teilmengen von I^2 zu betrachten, müssen wir nur alle abgeschlossenen oder offenen, konvexen Polygone in I^2 in Betracht ziehen (ein konvexes Polygon ist die konvexe Hülle endlich vieler Punkte im \mathbb{R}^2):

Lemma 13.1 Sei $S \subseteq I^2$ eine endliche Menge mit $|S| = N$.
 $\mathcal{P} := \{P \subseteq I^2 : P \text{ abgeschlossenes oder offenes, konvexes Polygon}\}$.
 Dann gilt:

$$D_I(S) = \sup_{P \in \mathcal{P}} \left| \frac{1}{N} |S \cap P| - \lambda_2(P) \right|.$$

Beweis: Wir werden zeigen:

$$D_I(S) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \left| \frac{1}{N} |S \cap Q| - \lambda_2(Q) \right|$$

mit $\mathcal{Q} := \{Q \subseteq \bar{I}^2 : Q \text{ abgeschlossenes oder offenes, konvexes Polygon}\}$ (\bar{I}^2 steht für den Abschluß von I^2).

Damit ist der Beweis erbracht, denn:

- Jedes offene konvexe Polygon enthalten in \bar{I}^2 ist auch in I^2 enthalten.
- $S \subseteq I^2$ ist endlich. Daraus folgt:
Für alle $\epsilon > 0$ und für jedes abgeschlossene konvexe Polygon $Q \subseteq \bar{I}^2$ gibt es ein abgeschlossenes konvexes Polygon $P = P(\epsilon) \subseteq I^2$ mit $|S \cap Q| = |S \cap P|$ und $\lambda_2(Q) \geq \lambda_2(P) > \lambda_2(Q) - \epsilon$.

Damit gilt: Das Supremum über \mathcal{Q} ist dasselbe wie das über \mathcal{P} .

Nun gilt nach der Definition der isotropen Diskrepanz:

$$D_I(S) = \sup_{C \in \mathcal{C}} \left| \frac{1}{N} |S \cap C| - \lambda_2(C) \right|$$

mit $\mathcal{C} = \{C \subseteq I^2 : C \text{ konvex}\}$. Für solch ein $C \in \mathcal{C}$ gilt:

$$|S \cap \text{int}C| \leq |S \cap C| \leq |S \cap \bar{C}|$$

und

$$\lambda_2(\text{int}C) \leq \lambda_2(C) \leq \lambda_2(\bar{C}) = \lambda_2(\text{int}C \cup \partial C) = \lambda_2(\text{int}C) + \lambda_2(\partial C) = \lambda_2(\text{int}C)$$

also

$$\lambda_2(\text{int}C) = \lambda_2(C) = \lambda_2(\bar{C}),$$

weil $\lambda_2(\partial C) = 0$ ist (dies ergibt sich übrigens als Konsequenz des Lemmas 13.2).

Damit folgt:

$$\left| \frac{1}{N} |S \cap C| - \lambda_2(C) \right| \leq \max \left\{ \left| \frac{1}{N} |S \cap \text{int}C| - \lambda_2(\text{int}C) \right|, \left| \frac{1}{N} |S \cap \bar{C}| - \lambda_2(\bar{C}) \right| \right\}.$$

Es genügt also abgeschlossene oder offene, konvexe Mengen in \bar{I}^2 zu betrachten.

Wir haben noch zu zeigen:

$$D_I(S) = \sup_{R \in \mathcal{R}} \left| \frac{1}{N} |S \cap R| - \lambda_2(R) \right|$$

mit $\mathcal{R} := \{R = R_1 \cap \bar{I}^2 : R_1 \text{ abgeschlossenes oder offenes, konvexes Polygon}\}$.

Dazu genügt es zu beweisen:

Für jede abgeschlossene oder offene, konvexe Menge C in \bar{I}^2 gibt es $P, Q \in \mathcal{R}$ mit

$$|S \cap P| = |S \cap C| = |S \cap Q|$$

und

$$\lambda_2(P) \leq \lambda_2(C) \leq \lambda_2(Q).$$

Dann gilt nämlich:

$$\left| \frac{1}{N} |S \cap C| - \lambda_2(C) \right| \leq \max \left\{ \left| \frac{1}{N} |S \cap P| - \lambda_2(P) \right|, \left| \frac{1}{N} |S \cap Q| - \lambda_2(Q) \right| \right\}.$$

Dazu nun: Sei $S = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq I^2$.

Sei $C \subseteq \bar{I}^2$ eine abgeschlossene oder offene, konvexe Menge, und wir nehmen an, C enthält genau die Elemente x_{i_1}, \dots, x_{i_r} von S .

Konstruktion von P :

P sei die konvexe Hülle dieser Punkte x_{i_1}, \dots, x_{i_r} ($P = \emptyset$, wenn $C \cap S = \emptyset$).

Es gilt: $P \in \mathcal{R}$, $P \subseteq C$, $|S \cap P| = |S \cap C|$ und $\lambda_2(P) \leq \lambda_2(C)$.

Konstruktion von Q :

Seien x_{j_1}, \dots, x_{j_s} die Elemente von S , die nicht zu C gehören.

- $s = 0$: Wir setzen $Q := \bar{I}^2$. Es erfüllt unsere Forderungen.

- $s > 0$:

- C ist nicht offen (dann ist $C \subseteq \bar{I}^2$ abgeschlossen und somit kompakt):

Wir vergrößern C so zu einer konvexen Menge C' (muß nicht $\subseteq \bar{I}^2$), daß C' die Elemente x_{j_1}, \dots, x_{j_s} weiterhin nicht enthält, aber x_{i_1}, \dots, x_{i_r} als innere Punkte hat.

- C ist offen:

Wir setzen $C' := C$.

Durch jeden Punkt x_{j_m} ($1 \leq m \leq s$) gibt es eine Gerade g_m , sodaß C' ganz in einer offenen Halbebene T_m (definiert durch g_m) liegt. Wir setzen $Q := \bigcap_{m=1}^s T_m \cap \bar{I}^2$. Dieses Q erfüllt, was wir suchen:

Es gilt $Q \in \mathcal{R}$ (der Durchschnitt konvexer Mengen ist konvex). Aus $x_{j_m} \notin T_m$ für alle $1 \leq m \leq s$ folgt $x_{j_1}, \dots, x_{j_s} \notin Q$. Andererseits sind x_{i_1}, \dots, x_{i_r} innere Punkte von C' , also gilt $x_{i_1}, \dots, x_{i_r} \in Q$. Somit gilt:

$$|S \cap Q| = |S \cap C|$$

und

$$\lambda_2(Q) \geq \lambda_2(C' \cap \bar{I}^2) \geq \lambda_2(C).$$

Damit haben wir in jedem Fall ein gewünschtes Q konstruiert. \square

Bevor wir uns mit der Abschätzung der Diskrepanz D mit Hilfe der isotropen Diskrepanz D_I beschäftigen werden, wollen wir eine dazu erforderliche geometrische Überlegung anstellen:

Lemma 13.2 *Seien P_1 und P_2 zwei konvexe Polygone mit $P_1 \subseteq P_2$, dann kann der Umfang von P_1 den Umfang von P_2 nicht übertreffen ($p(P_1) = \lambda_1(\partial P_1) \leq \lambda_1(\partial P_2) = p(P_2)$).*

Beweis: Wir betrachten zunächst eine Strecke AB der Länge a , die ja als ein „entstelltes“ konvexes Polygon angesehen werden kann. Sei \vec{e} der Normalenvektor von AB .

Wir legen eine Referenzrichtung \vec{r} fest. \vec{r} schlieÙe mit \vec{e} den Winkel ϕ ein. Sei $S(\vec{r})$ der Streifen kleinster Breite $b(\vec{r})$ mit der Richtung \vec{r} , der die Strecke AB umfaÙt (siehe Abbildung 16).

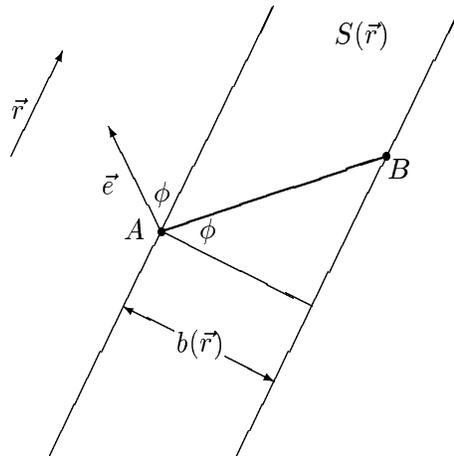


Abbildung 16: Breite einer Strecke AB bezüglich einer Referenzrichtung \vec{r} .

Die Breite $b(\vec{r})$ des Streifens $S(\vec{r})$ ist stets nichtnegativ, und es gilt für alle $0 \leq \phi \leq \pi$: $b(\vec{r}) = a \cdot |\cos \phi|$.

Betrachten wir nun folgendes Integral:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi b(\vec{r}) d\phi &= \int_0^\pi a \cdot |\cos \phi| d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cdot \cos \phi d\phi - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi a \cdot \cos \phi d\phi \\ &= a \cdot \sin \phi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - a \cdot \sin \phi \Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi \\ &= a + a = 2 \cdot a. \end{aligned}$$

Wir können also für unser „entstelltes“ konvexe Polygon, nämlich die Strecke AB , feststellen, daß sich sein Umfang folgendermaßen darstellen läßt:

$$p(AB) = 2 \cdot a = \int_0^\pi b(\vec{r}) d\phi.$$

Sei nun P ein konvexes Polygon mit n Seiten $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ der Längen a_1, \dots, a_n . Sei wiederum eine Referenzrichtung \vec{r} gewählt, und sei $S(\vec{r})$ der

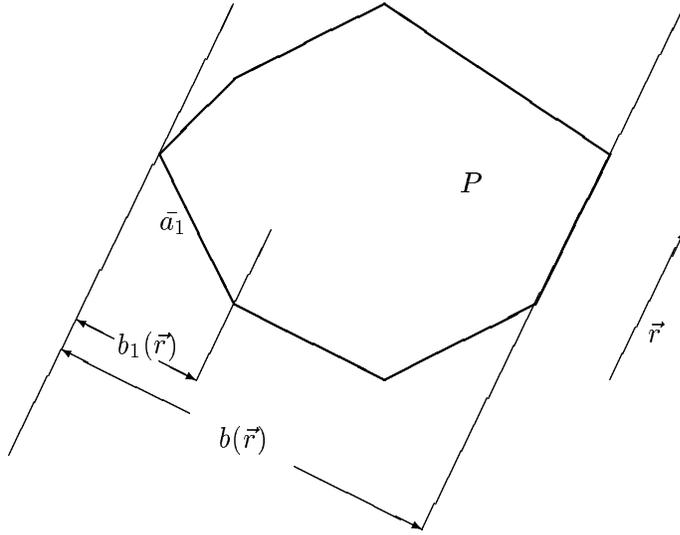


Abbildung 17: Breite eines konvexen Polygons P .

Streifen kleinster Breite $b(\vec{r})$ der Richtung \vec{r} , der P umfaßt. Für jede Seite \bar{a}_i sei $b_i(\vec{r})$ die zugehörige Breite (wie in Abbildung 16).

Die Summe der Breiten aller Seiten von P ist gleich der doppelten Breite von P bei einer festen Referenzrichtung \vec{r} , wie aus der Abbildung 17 hervorgeht:

$$2 \cdot b(\vec{r}) = b_1(\vec{r}) + \dots + b_n(\vec{r}).$$

Integration dieser Gleichung über alle möglichen Richtungen \vec{r} liefert:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \int_0^\pi b(\vec{r}) d\phi &= \int_0^\pi b_1(\vec{r}) d\phi + \dots + \int_0^\pi b_n(\vec{r}) d\phi \\ &= 2 \cdot a_1 + \dots + 2 \cdot a_n \\ &= 2 \cdot p(P). \end{aligned}$$

Damit gilt also für den Umfang eines konvexen Polygons P :

$$p(P) = \int_0^\pi b(\vec{r}) d\phi.$$

Sind jetzt zwei konvexe Polygone P_1 und P_2 gegeben mit $P_1 \subseteq P_2$, dann gilt für jede Richtung \vec{r} einleuchtenderweise $b_1(\vec{r}) \leq b_2(\vec{r})$ (b_i stehe hier für die Breite von P_i). Und daher gilt für die Umfänge:

$$p(P_1) = \int_0^\pi b_1(\vec{r}) d\phi \leq \int_0^\pi b_2(\vec{r}) d\phi = p(P_2),$$

was zu beweisen war. \square

Satz 13.1 Sei S eine endliche Teilmenge von I^2 mit $|S| = N$.
Dann gilt:

$$D(S) \leq D_I(S) \leq (8\sqrt{2} + 1)D^{\frac{1}{2}}(S).$$

Beweis: Die linke Ungleichung ist trivial, weil jedes Rechteck $[a, b] \times [c, d]$ konvex ist.

Wir wenden uns nun der rechten Ungleichung zu:

Gegeben sei ein Polygon $P \in \mathcal{P}$, d.h. P ist ein abgeschlossenes oder ein offenes, konvexes Polygon in I^2 .

Wir schließen P zwischen zwei Mengen P_1 und P_2 ein, die beide endliche Vereinigungen von Rechtecken sind (die exakte Form von P_1 und P_2 folgt später):

$$P_1 \subseteq P \subseteq P_2.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{N} |S \cap P_1| - \lambda_2(P_1) \right) + (\lambda_2(P_1) - \lambda_2(P)) \\ & \leq \frac{1}{N} |S \cap P| - \lambda_2(P) \\ & \leq \left(\frac{1}{N} |S \cap P_2| - \lambda_2(P_2) \right) + (\lambda_2(P_2) - \lambda_2(P)). \end{aligned}$$

Und folglich gilt:

$$\left| \frac{1}{N} |S \cap P| - \lambda_2(P) \right| \leq \max_{i=1,2} \left| \frac{1}{N} |S \cap P_i| - \lambda_2(P_i) \right| + \max_{i=1,2} |\lambda_2(P_i) - \lambda_2(P)|. \quad (46)$$

Die rechte Seite der Ungleichung (46) soll abgeschätzt werden.

Wir konstruieren nun P_1 und P_2 :

Sei $r \in \mathbb{N}$ beliebig.

Für jeden Gitterpunkt $(h_1, h_2) \in \mathbb{Z}^2$ mit $0 \leq h_i < r$ ($i = 1, 2$) definieren wir ein Rechteck

$$J_{h_1 h_2}^{(r)} := \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{h_i}{r} \leq x_i < \frac{h_i + 1}{r}, i = 1, 2 \right\}.$$

Die Familie $\mathcal{J}^{(r)}$ aller dieser Rechtecke bildet eine Partition von I^2 .

Wir definieren $P_1 = P_1^{(r)}$ als die Vereinigung aller jener Rechtecke von $\mathcal{J}^{(r)}$, die ganz in P liegen.

Wir definieren $P_2 = P_2^{(r)}$ als die Vereinigung aller jener Rechtecke von $\mathcal{J}^{(r)}$, die nichtleeren Durchschnitt mit P haben.

Damit haben wir erreicht: $P_1 \subseteq P \subseteq P_2$.

Halten wir jetzt h_1 fest.

Dann sind die ganzen Zahlen h , $0 \leq h < r$ mit $J_{h_1 h}^{(r)} \subseteq P$ aufeinanderfolgend

(sonst würde sich ein Widerspruch zur Konvexität von P ergeben). Also ist die Vereinigung dieser Rechtecke $J_{h_1 h}^{(r)}$ ($0 \leq h < r$) wieder ein Rechteck.

Somit kann, wegen $0 \leq h_1 < r$, P_1 als Vereinigung von „höchstens“ r paarweise disjunkten Rechtecken geschrieben werden.

Analog erhält man, daß auch P_2 als Vereinigung von „höchstens“ r paarweise disjunkten Rechtecken geschrieben werden kann.

Damit folgt, da die Diskrepanz D ja durch Supremumsbildung über alle Rechtecke im Einheitsquadrat definiert ist, wenn wir die Darstellung $P_i := \bigcup_{j=1}^{r_i} R_j^i$ mit paarweise disjunkten Rechtecken R_j^i und $r_i \leq r$ ($i = 1, 2$) wählen:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} |S \cap P_i| - \lambda_2(P_i) \right| &= \left| \frac{1}{N} |S \cap \bigcup_{j=1}^{r_i} R_j^i| - \lambda_2\left(\bigcup_{j=1}^{r_i} R_j^i\right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{r_i} |S \cap R_j^i| - \sum_{j=1}^{r_i} \lambda_2(R_j^i) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{r_i} \left| \frac{1}{N} |S \cap R_j^i| - \lambda_2(R_j^i) \right| \\ &\leq r_i \cdot D(S) \leq r \cdot D(S), \end{aligned}$$

und deshalb gilt

$$\max_{i=1,2} \left| \frac{1}{N} |S \cap P_i| - \lambda_2(P_i) \right| \leq r \cdot D(S),$$

was den ersten Teil der rechten Seite von (46) abschätzt.

Wir wollen jetzt die Differenz $\lambda_2(P_2) - \lambda_2(P)$ bestimmen:

Wenn δ den Durchmesser von $J_{h_1 h_2}^{(r)}$ bezeichnet, gilt: $\delta = \frac{\sqrt{2}}{r}$. Also hat jeder Punkt von P_2 höchstens den Abstand δ von einem Punkt von P .

Nun konstruieren wir eine neue Menge Q (siehe Abbildung 18): Wir vergrößern das Polygon P um δ und schneiden das Resultat mit \bar{I}^2 .

Genauer: Für jede Seite g , die zum Rand von P gehört, betrachten wir eine parallele Gerade g' mit orthogonalem Abstand δ zu g in der offenen Halbebene bestimmt durch g , die P nicht enthält. Wir schneiden die aus g' resultierenden abgeschlossenen Halbebenen, die P enthalten, mit \bar{I}^2 . Somit erhalten wir ein abgeschlossenes konvexes Polygon Q , für welches wegen $P \subseteq P_2 \subseteq Q$ folgende Beziehung gilt:

$$\lambda_2(P_2) - \lambda_2(P) \leq \lambda_2(Q \setminus P).$$

Nach der Konstruktion von Q gilt außerdem:

$$\lambda_2(Q \setminus P) \leq \delta \cdot p(Q),$$

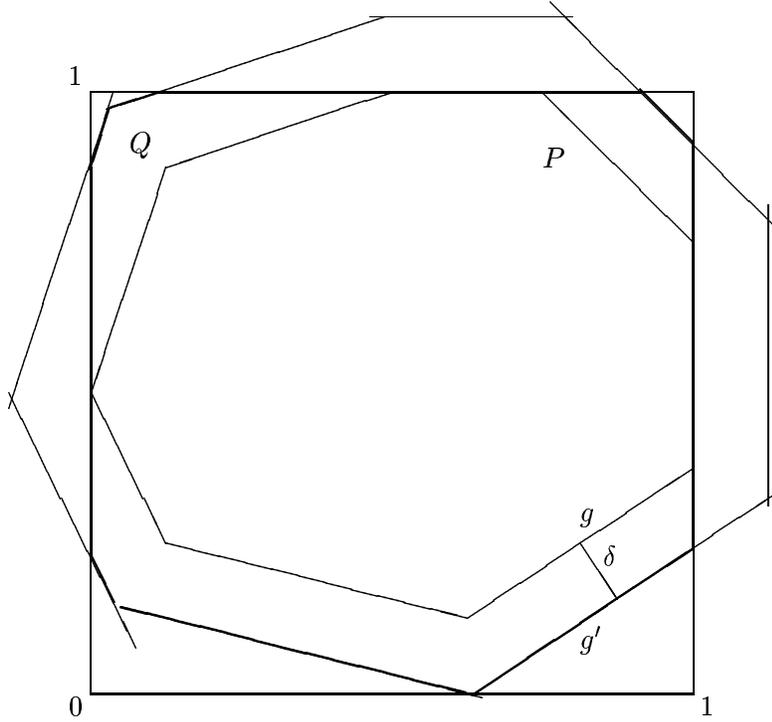


Abbildung 18: Konstruktion der Menge Q .

wobei $p(Q) = \lambda_1(\partial Q)$ den Umfang von Q bezeichnet.

Weil $Q \subseteq \bar{I}^2$ ist, ergibt sich mit dem Lemma 13.2 die Ungleichung $p(Q) \leq 4$ und daher insgesamt

$$\lambda_2(P_2) - \lambda_2(P) \leq \lambda_2(Q \setminus P) \leq \delta \cdot p(Q) \leq \frac{4\sqrt{2}}{r}.$$

In analoger Schlußweise erhalten wir $\lambda_2(P) - \lambda_2(P_1) \leq \frac{4\sqrt{2}}{r}$, also zusammenfassend

$$\max_{i=1,2} |\lambda_2(P_i) - \lambda_2(P)| \leq \frac{4\sqrt{2}}{r}.$$

Wir können somit die rechte Seite der Ungleichung (46) vollständig abschätzen und gewinnen dadurch:

$$\left| \frac{1}{N} |S \cap P| - \lambda_2(P) \right| \leq r \cdot D(S) + \frac{4\sqrt{2}}{r}.$$

Es gilt damit für alle $r \in \mathbb{N}$ (Lemma 13.2):

$$D_I(S) = \sup_{P \in \mathcal{P}} \left| \frac{1}{N} |S \cap P| - \lambda_2(P) \right| \leq r \cdot D(S) + \frac{4\sqrt{2}}{r}.$$

Wir wählen jetzt speziell $r := \lfloor D^{-\frac{1}{2}}(S) \rfloor$.

Da stets $D(S) \leq 1$ ist, gilt immer $D^{-\frac{1}{2}}(S) \geq 1$. Betrachten wir noch folgende Nebenrechnung für reelle x :

$$\begin{aligned} x \geq 1 &\Rightarrow \lfloor x \rfloor \geq 1 \geq \{x\} \\ &\Leftrightarrow x - \{x\} \geq \{x\} \\ &\Leftrightarrow x \geq 2 \cdot \{x\} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}x \geq \{x\} \\ &\Leftrightarrow x - \{x\} \geq \frac{1}{2}x \\ &\Leftrightarrow \lfloor x \rfloor \geq \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

Damit gilt $\lfloor D^{-\frac{1}{2}}(S) \rfloor \geq \frac{1}{2}D^{-\frac{1}{2}}(S)$, und wir können folgern:

$$D_I(S) \leq \underbrace{\lfloor D^{-\frac{1}{2}}(S) \rfloor}_{\leq \frac{1}{2}D^{-\frac{1}{2}}(S)} \cdot D(S) + \frac{4\sqrt{2}}{\lfloor D^{-\frac{1}{2}}(S) \rfloor} \leq (8\sqrt{2} + 1)D^{\frac{1}{2}}(S),$$

was den Beweis vervollständigt. \square

Literaturverweise: [1], [7]

14 Zerlegungsgleichheit beschränkter konvexer Mengen

In den Abschnitten 9 bis 13 haben wir die nötige Vorarbeit geleistet, um nun endlich den Satz 9.1, die hinreichende Bedingung für translative Zerlegungsgleichheit, verwenden zu können. Damit sind wir nun in der Lage, die translative Zerlegungsgleichheit zweier beschränkter konvexer Mengen gleichen positiven Inhalts nachzuweisen. Dieses Ergebnis ist natürlich wesentlich mehr als nur die Lösung von Tarski's Kreis-Quadratur.

Satz 14.1 *Seien $H_1, H_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ beschränkte konvexe Mengen mit $\lambda_2(H_1) = \lambda_2(H_2) > 0$. Dann gilt: $H_1 \stackrel{tr}{\sim} H_2$.*

Beweis: O.B.d.A. seien $H_1, H_2 \subseteq I^2$.

Nach dem Lemma 12.1 gilt für fast alle $x, y, z \in \mathbb{R}^2$, daß $x, y, z, i = (1, 0)$

und $j = (0, 1)$ linear unabhängig über den rationalen Zahlen sind.
Wir betrachten für solche $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ die Menge

$$s_N(u; x, y, z) = \{u + nx + ky + lz : 0 \leq n, k, l < N\},$$

wobei außerdem $u \in \mathbb{R}^2$ und $n, k, l, N \in \mathbb{Z}$ sind. Diese Menge liegt in I^2 und ist endlich mit $|s_N(u; x, y, z)| = N^3$.

Unter Anwendung der Satzes 13.1 erhalten wir:

$$D(s_N(u; x, y, z)) \leq D_I(s_N(u; x, y, z)) \leq (8\sqrt{2} + 1) \cdot D^{\frac{1}{2}}(s_N(u; x, y, z)).$$

Nach der Definition der isotropen Diskrepanz D_I (Definition 13.1), und weil H_1 und H_2 nach Voraussetzung konvexe Teilmengen von I^2 sind, gilt:

$$\begin{aligned} D_I(s_N(u; x, y, z)) &= \sup_{C \in \mathcal{C}} \left| \frac{1}{N^3} |s_N(u; x, y, z) \cap C| - \lambda_2(C) \right| \\ &\geq \left| \frac{1}{N^3} |s_N(u; x, y, z) \cap H_r| - \lambda_2(H_r) \right| \\ &= D(s_N(u; x, y, z); H_r) \quad (r = 1, 2). \end{aligned}$$

Insgesamt folgt daraus mit dem Satz 12.1 für $r = 1, 2$:

Für fast alle $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ und für alle $\epsilon > 0$ gibt es eine Konstante C , sodaß

$$\begin{aligned} D(s_N(u; x, y, z); H_r) &\leq D_I(s_N(u; x, y, z)) \\ &\leq (8\sqrt{2} + 1) \cdot D^{\frac{1}{2}}(s_N(u; x, y, z)) \\ &\leq (8\sqrt{2} + 1) \cdot C^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{l^{4+\frac{\epsilon}{2}}(N)}{N^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

für alle $u \in \mathbb{R}^2$ und für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt.

Es gibt also ein festes Tripel von Vektoren x, y und z , die zusammen mit $i = (1, 0)$ und $j = (0, 1)$ linear unabhängig über Q sind, und für welche die folgende Beziehung mit $\epsilon = 2$ für alle $u \in \mathbb{R}^2$ und für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt:

$$D(s_N(u; x, y, z); H_r) \leq C' \cdot \frac{N^{\frac{3}{2}} \cdot l^5(N)}{N^3}.$$

Wir setzen $\Psi(N) := C' \cdot N^{\frac{3}{2}} \cdot l^5(N)$ und erhalten:

$$D(s_N(u; x, y, z); H_r) \leq \frac{\Psi(N)}{N^3}$$

gilt für alle $u \in \mathbb{R}^2$ und für alle $N \in \mathbb{N}$.

Zu überprüfen sind noch die im Satz 9.1 geforderten Eigenschaften der Funktion Ψ .

$\Psi(N)$ ist nichtnegativ für alle $N \in \mathbb{N}$.

Wir betrachten:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(2^k)}{2^{2k}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C' \cdot 2^{\frac{3k}{2}} \cdot l^5(2^k)}{2^{2k}} \\ &= K_1 + C' \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^5 \cdot \log^5(2)}{2^{\frac{k}{2}}} \\ &= K_1 + K_2 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^5}{2^{\frac{k}{2}}} < \infty,\end{aligned}$$

wie man sich leicht mit dem Quotiententest für Reihen überzeugen kann.

Damit sind die Voraussetzungen des Satzes 9.1 erfüllt, der die translative Zerlegungsgleichheit von H_1 und H_2 liefert. \square

Folgerung 14.1 *Ein Kreis und ein Quadrat mit gleichem positiven Inhalt sind translativ zerlegungsgleich.*

Beweis: Kreis und Quadrat sind konvexe Mengen. Damit folgt die translative Zerlegungsgleichheit aus dem Satz 14.1. \square

Literaturverweise: [8], [10]

Literatur

- [1] T. Bonnesen und W. Fenchel, Theorie der konvexen Körper, Chelsea Publishing Company, Bronx, New York 1971.
- [2] J.W.S. Cassels, An introduction to diophantine approximation, Cambridge 1957.
- [3] R. Diestel, Graphentheorie, Springer-Lehrbuch 1996.
- [4] R.J. Gardner and S. Wagon, At long last, the circle has been squared, Notices of the American Mathematical Society, 36 (1989) 10, 1338-1343.
- [5] R. Halin, Graphentheorie, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1989.
- [6] K. Jacobs, Einführung in die Kombinatorik, de Gruyters, Berlin, New York 1983.
- [7] L. Kuipers and H. Niederreiter, Uniform distributions of sequences, John Wiley & Sons, New York 1974.
- [8] M. Laczkovich, Decomposition of sets with small boundary, Journal of the London Mathematical Society, (2) 46 (1992), 58-64.
- [9] M. Laczkovich, Equidecomposability and discrepancy; a solution of Tarski's circle-squaring problem, Journal für Reine und Angewandte Mathematik, 404 (1990), 77-117.
- [10] M. Laczkovich, Equidecomposability of sets, invariant measures, and paradoxes, Rendiconti dell' Istituto di Matematica dell' Università di Trieste, 23 (1991) 1, 145-176 (1993).
- [11] M. Laczkovich, Uniformly spread discrete sets in \mathbb{R}^d , Journal of the London Mathematical Society, (2) 46 (1992), 39-57.
- [12] G. Larcher, handschriftliche Aufzeichnungen.
- [13] A. Tarski, Problème 38, Fund. Math. 7 (1925) 381.
- [14] S. Wagon, The Banach-Tarski paradox, Cambridge Univ. Press, 1986.