Analysis in einer Variable für das Lehramt

Disclamer: Dieses Skript wurde mit Vorlage des handschriftlichen Skriptes von Christoph Baxa durch Student*innen abgetippt.

8. Juli 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

1.1 Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Wir werden in dieser Vorlesung voraussetzen (und so tun als wäre das selbstverständlich:

1. Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,...\}$ und ihre Addition und Multiplikation. Jede Menge $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \varnothing$ besitzt ein kleinstes Element (d.h. $\min A$ existiert).

2. Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$ bilden mit ihrer Addition und Multiplikation einen kommutativen Ring mit Einselement, der nullteilerfrei ist (d.h. sind $x, y \in \mathbb{Z}$ und $x \cdot y = 0$, so muss $x = 0$ oder $y = 0$ gelten).

3. Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$. Dabei kann man jedes Element von $\mathbb{Q}$ auf unendlich viele verschiedene Arten schreiben (z.B. $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = ... = \frac{-2}{-3} = ...$). Man kann aber immer verlangen, dass $b > 0$ und, dass $ggT(a, b) = 1$ (d.h. der Bruch kann nicht weiter gekürzt werden). Die rationalen Zalhen bilden mit ihrer Addition und Multiplikation einen Körper.

Gegenstand dieser Vorlesung ist die Analysis auf den reellen Zahlen $\mathbb{R}$, die aber viel weniger anschaulich sind als $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$. Wir werden uns darum kurz mit $\mathbb{Q}$ beschäftigen und wie man $\mathbb{R}$ aufgrund von $\mathbb{Q}$ konstruieren kann.

Def. Es sei K ($\neq \varnothing$) eine Menge und + und $\cdot$ zwei Verknüpfungen auf K (d.h. zwei Abbildungen $+ : K \times K \to K,\ (a, b) \mapsto a + b$ und $\cdot : K \times K \to K,\ (a, b) \mapsto a \cdot b$), die die folgenden Eigenschaften erfüllen:

1.1 $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall a, b, c \in K$ (Assoziativität der Addition)

1.2 $\exists 0 \in K, \forall a \in K : a + 0 = 0 + a = a$ (Existenz des Nullelements)

1.3 $\forall a \in K, \exists -a \in K : a+(-a) = (-a)+a = 0$ (Existenz des additiven Inversen)

1.4 $a + b = b + a, \forall a, b \in K$ (Kommutativität der Addition)

2.1 $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \forall a, b, c \in K$ (Assoziativität der Multiplikation)

2.2 $\exists 1 \in K(\text{wobei } 1 \neq 0), \forall a \in K : 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ (Existenz des Einselements)

2.3 $\forall a \in K \setminus \{0\}, \exists \frac{1}{a} \in K : a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ (Existenz des multiplikativen Inversen)

2.4 $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in K$ (Kommutativität der Multiplikation)

3.1 $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c), \forall a, b, c \in K$ (Distributivgesetz)

3.2 $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c), \forall a, b, c \in K$ (Distributivgesetz)

Dann wird $(K, +, \cdot)$ ein Körper genannt.

Aus diesen Körperaxiomen kann man ableiten, dass man mit den Körperelementen „rechnen kann wie man es gewohnt ist und erwartet“(z.B. für $\mathbb{Q}$).

Wir stellen einige wichtige Folgerungen zusammen:

1. $0{\cdot}a = a{\cdot}0 = 0, \forall a \in K$ (Aus $0{\cdot}a \underset{1.2}{=} (0+0){\cdot}a \underset{3.2}{=} (0{\cdot}a)+(0{\cdot}a)$ folgt durch Addition von $-(0{\cdot}a)$ auf beiden Seiten $0 \underset{1.3}{=} -(0{\cdot}a)+(0{\cdot}a) = -(0{\cdot}a)+(0{\cdot}a)+(0{\cdot}a) = 0{\cdot}a$)

2. Das Nullelement ist eindeutig bestimmt (Angenommen, 0^* ist ebenfalls Nullelement, d.h. $a + 0^* = 0^* + a = a, \forall a \in K$. Dann ist $0 = 0 + 0^* = 0^* + 0 = 0^*$.)

3. Zu gegebenem $a \in K$ ist das additive Inverse eindeutig bestimmt. (Angenommen, $a^* \in K$ ist ebenfalls additives Inverses zu a, d.h. $a + a^* = a^* + a = 0$. Dann ist $-a = -a + 0 = -a + (a + a^*) = (-a + a) + a^* = 0 + a^* = a^*$.)

4. Das Einselement ist eindeutig bestimmt. (Übung)

5. Zu gegebenem $a \in K \setminus \{0\}$ ist das multiplikative Inverse eindeutig bestimmt. (Übung)

6. Zu gegebenem $a, b \in K$ gibt es genau ein $x \in K$ mit der Eigenschaft $a+x = b$. (Existenz: Es sei $x = (-a) + b$. Dann ist

   $$a + x = a + ((-a) + b) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b$$

   . Eindeutigkeit: Angenommen, $a+x_1 = b$ und $a+x_2 = b$ für gewisse $x_1, x_2 \in K$. Dann ist $x_1 = 0 + x_1 = ((-a) + a) + x_1 = (-a) + (a + x_1) = (-a) + (a + x_2) = ((-a) + a) + x_2 = 0 + x_2 = x_2$.)

   Def. Für die eindeutig bestimmte Zahl x $(= (-a) + b)$ mit der Eigenschaft $a + x = b$ schreibt man kurz $x = b - a$. Diese Zahl $b - a$ wird Differenz von b und a genannt.

7. Zu $a, b \in K, a \neq 0$ gibt es genau ein $x \in K$ mit der Eigenschaft $a \cdot x = b$ (Übung)

   Def. Für die eindeutig bestimmte Zahl $x \in K$ mit der Eigenschaft $a \cdot x = b$ (wobei $a \neq 0$)schreibt man kurz $x = \frac{b}{a}$ (oder auch $x = b/a$) und nennt sie Quotient von b und a.

   Bemerkung. Diese Bezeichnung ist konsistent mit der Notation $\frac{1}{a}$, die sie erweitert. Es ist ja $x = \frac{1}{a}$ die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $a \cdot x = 1$

8. Wenn $a \cdot b = 0$ dann $a = 0$ oder $b = 0$. (Falls $a = 0$ fertig. Falls $a \neq 0$, so $b = 1 \cdot b = (\frac{1}{a} \cdot a) \cdot b = \frac{1}{a} \cdot (a \cdot b) = \frac{1}{a} \cdot 0 = 0$.)

9. $-(-a) = a, \forall a \in K$ (Es gelten $a+(-a) = (-a)+a = 0$ und $(-(-a))+(-a) = (-a) + (-(-a)) = 0$. Wegen der Eindeutigkeit des additiven Inversen von $-a$ (d.h. von $-(-a)$) folgt $-(-a) = a$.)

10. $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a, \forall a \in K \setminus \{0\}$ (Übung)

11. $-(a+b) = (-a)+(-b), \forall a,b \in K$ (Es gelten $(a+b)+((-a)+(-b)) = ((-a)+(-b))+(a+b) = 0$ und $(a+b)+(-(a+b)) = (-(a+b))+(a+b) = 0$. Wegen der Eindeutigkeit des additiven Inversen von $a+b$ (d.h. von $-(a+b)$) folgt $-(a+b) = (-a)+(-b)$).

12. $\frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}, \forall a,b \in K \setminus \{0\}$ (Übung)

13. $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b), \forall a,b \in K$ (Wir zeigen $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$: Es gelten $(-a) \cdot b + a \cdot b = ((-a)+a) \cdot b = 0 \cdot b = 0$. Wegen der Eindeutigkeit des additiven Inversen von $a \cdot b$ (d.h. von $-(a \cdot b)$) folgt $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$. (Beweis von $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$ als Übung.)

14. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc, \quad \forall a,c \in K, \quad \forall b,d \in K \setminus \{0\}$ (Übung)

15. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad \forall a,c \in K, \quad \forall b,d \in K \setminus \{0\}$ (Übung)

16. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}, \quad \forall a \in K, \quad \forall b,c,d \in K \setminus \{0\}$ (Übung)

17. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, \quad \forall a,c \in K, \quad \forall b,d \in K \setminus \{0\}$ (Übung)

Bemerkung. 1. Wir haben einerseits $\mathbb{Q}$ als Menge der Quotienten $\frac{a}{b}$ mit $a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ definiert und andererseits Quotienten $\frac{a}{b}$ mit $a,b \in K, b \neq 0$ aufgrund von Folgerung (7.) definiert. Dadurch entstehen keine Probleme (Es ist ja z.B. $x = \frac{3}{4}$ tatsächlich jene rationale Zahl mit der Eigenschaft $4x = 3$.)

2. Es gibt außer $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ noch viele andere Körper K (d.h. Mengen mit zwei Verknüpfungen, die die Körperaxiome erfüllen). Der kleinste Körper ist $\mathbb{F}_2$, der nur die Elemente 0 und 1 enthält mit den Verknüpfungen

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

3. Es stellt sich die Frage, warum man all diesen Aufwand betreibt, wenn man am Schluss doch nur erhält, „dass man rechnen kann, wie man es kennt und weiß?“Einerseits beruht dieses „Kennen und Wissen“ zunächst auf Gewohnheit und lässt außer Acht, wie die verschiedenen Rechenregeln zusammenhängen. Andererseits hat diese Vorgangsweise den großen Vorteil, dass man, sobald man überprüft hat, dass K ein Körper ist, weiß, dass alle Folgerungen für K ebenfalls gelten!

Auf $K = \mathbb{Q}$ ist eine Ordnungsrelation $<$ definiert, die die folgenden Ordnungsaxiome erfüllt:

4.1 Für $a,b \in K$ gilt genau eine der drei Beziehungen $a < b$, $b < a$ oder $a = b$. (Trichotomie)

4.2 Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$. (Transitivität)

4.3 Wenn $a < b$ und $c \in K$ dann $a + c < b + c$

4.4 Wenn $a < b$ und $0 < c$ dann $a \cdot c < b \cdot c$

Def. Zusätzlich legt man die folgenden Schreibweisen fest:

1. $a > b :\Leftrightarrow b < a$
2. $a \leq b :\Leftrightarrow a < b$ oder $a = b$
3. $a \geq b :\Leftrightarrow a < b$ oder $a = b$

Auch hier stellen wir einige wichtige Folgerungen zusammen:

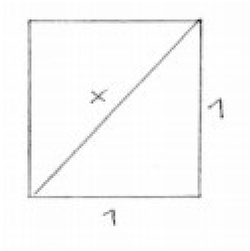
1. $a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$ ($a > 0 \Rightarrow 0 = a + (-a) > 0 + (-a) = -a$ und $-a < 0 \Rightarrow 0 = -a + a < 0 + a = a$)
2. $a < 0 \Leftrightarrow -a > 0$ (Das folgt aus 1., wenn man a durch $-a$ ersetzt und $-(-a) = a$ benützt.)
3. Wenn $a < b$ und $c < 0$ dann $a \cdot c > b \cdot c$ (Wegen 2. ist $-c > 0$. Aus 4.4 folgt $-a \cdot c = a \cdot (-c) < b(-c) = -bc$ und daher $bc = -ac + (ac + bc) < -bc + (ac + bc) = ac$.)
4. Wenn $a \neq 0$ dann $a \cdot a > 0$. (Ist $a > 0$, so ist $a \cdot a > a \cdot 0 = 0$. Ist $a < 0$, so ist $-a > 0$ und $a \cdot a = (-(-a)) \cdot a = -((-a) \cdot a) = (-a) \cdot (-a) > 0$)
5. $1 > 0$ (Denn $1 \neq 0$ und $1 = 1 \cdot 1 > 0$.)
6. Wenn $a > 0$ dann $\frac{1}{a} > 0$ (Wäre $\frac{1}{a} = 0$, so wäre $1 = a \cdot \frac{1}{a} = 0$, Wid. Wäre $\frac{1}{a} < 0$, so wäre $1 = \frac{1}{a} \cdot a < 0 \cdot a = 0$, Wid.)
7. Wenn $a < b$ und $c < d$ dann $a + c < b + d$ (Denn $a + c < b + c < b + d$.)
8. Wenn $0 < a < b$ und $0 < c < d$ dann $a \cdot c < b \cdot d$ (Denn $ac < bc < bd$.)
9. Wenn $a, b > 0$ (d.h. $a > 0$ und $b > 0$), dann $a + b > 0$ und $ab > 0$.
10. Wenn $a, b < 0$, dann $a + b < 0$ und $ab > 0$.
11. Wenn $a \cdot b > 0$ dann gilt entweder ($a > 0$ und $b > 0$) oder ($a < 0$ und $b < 0$).
12. Wenn $a \cdot b < 0$ dann gilt entweder ($a < 0$ und $b > 0$) oder ($a > 0$ und $b < 0$).
13. Wenn $0 < a < b$ dann $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.
14. Wenn $a \leq b$ und $b \leq c$ dann $a \leq c$.
15. Wenn $a \leq b$ und $c > 0$ dann $a \cdot c \leq b \cdot c$.
16. Wenn $a \leq b$ und $c < 0$ dann $a \cdot c \geq b \cdot c$.
17. Wenn $a \leq b$ und $b \leq a$ dann $a = b$.

Bemerkung. Ein Körper K, in dem die Axiome (4.1) - (4.4) gelten, wird angeordneter Körper genannt. In jedem angeordnetem Körper gelten alle oben bewiesenen Folgerungen. Auf vielen Körpern kann man keine Ordnungsrelation $<$ finden, die (4.1) - (4.4) erfüllt. Z.B. ist das für $K = \mathbb{C}$ unmöglich, da wegen Folgerung (4.) $-1 = i \cdot i > 0$ gelten würde. Daraus würde wegen Folgerung (2.) folgen, dass $1 < 0$, was Folgerung (5.) widerspricht. Auch für $K = \mathbb{F}_2$ gibt es keine solche Ordnungsrelation, da in diesem Körper $-1 = 1 > 0$ und daher $1 < 0$ gelten würde.

In $\mathbb{Q}$ gibt es „Löcher “, z.B. gibt es kein $x \in \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft $x^2 = 2$ (d.h. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

Beweis. Angenommen $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ (mit $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ und $ggT(a,b) = 1$) erfüllt $\frac{a^2}{b^2} = (\frac{a}{b})^2 = 2$.
$\Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2$ ist gerade $\Rightarrow a$ ist gerade $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{Z} : a = 2c$
$\Rightarrow 4c^2 = (2c)^2 = a^2 = 2b^2 \Rightarrow 2c^2 = b^2 \Rightarrow b^2$ ist gerade $\Rightarrow b$ ist gerade
$\Rightarrow ggT(a,b) \neq 1$, Wid.

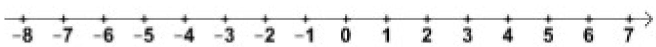
Nach dem Satz des Pythagoras hat ein Quadrat mit Seitenlänge 1 eine Diagonale der Länge x mit der Eigenschaft $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$



D.h. es ist notwendig, die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ zu erweitern, „um die Löcher zu stopfen. “

1.2 Die reellen Zahlen als Dedekindsche Schnitte

Die Vorstellung der reellen Zahlen als Punkte auf einen ununterbrochenen Zahlenstrahl (ohne Löcher)



funktioniert gut und ist sehr hilfreich (insbesondere in der Schule), ist aus mathematischer Sicht aber unbefriedigend.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die reellen Zahlen aus den rationalen zu konstruieren. Eine davon sind die sogenannten „Dedekindschen Schnitte“. Ein Dedekindscher Schnitt besteht dabei aus einer (nichtleeren) Untermenge U und einer (nichtleeren) Obermenge O mit den folgenden Eigenschaften:

1. $U \cup O = \mathbb{Q}$
2. $\forall x \in U, \forall y \in O : x < y$

3. U besitzt kein größtes Element

Aus (1.) folgt sofort $U \subseteq \mathbb{Q}$ und $O \subseteq \mathbb{Q}$ und aus (2.) folgt $U \cap O = \varnothing$ (denn wäre $x \in U \cap O$, so würde $x < x$ gelten, Wid.)
Anschaulich bedeutet das: Man teilt den „löchrigen “Zahlenstrahl, der nur rationale Zahlen enthält, in zwei Teile,

wobei der „Treffpunkt “in der Mitte zu O gehört (wenn er in $\mathbb{Q}$ liegt!)
Ist $q \in \mathbb{Q}$, so erhält man den „rationalen“ Schnitt

$$U_q = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < q\}, \quad O_q = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq q\}$$

Nicht alle Schnitte sind rational. Will man z.B. $\sqrt{2}$ beschreiben, kann man allerdings NICHT

$$U = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2}\}, \quad O = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \sqrt{2}\}$$

nehmen, da das Symbol $\sqrt{2}$ noch nicht sinnvoll definiert ist.
Man kann stattdessen aber
$U = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0 \text{ oder } (x > 0 \text{ und } x^2 < 2)\}, O = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ und } x^2 > 2\}$
definieren, ohne $\sqrt{2}$ zu verwenden.
Auf der Menge der Schnitte kann man nun Addition $+$, Multiplikation $\cdot$ und Ordnungsrelation $<$ definieren. Um einen Schnitt zu kennen, reicht es, nur die Obermenge O oder die Untermenge U zu kennen (denn $O = \mathbb{Q} \setminus U$ und $U = \mathbb{Q} \setminus O$).
Darum kann man diese Definitionen zum Beispiel mit Hilfe der Untermengen alleine notieren:

- Sind s, t zwei Schnitte mit Untermengen U_s und U_t, so definiert man
  $s < t :\Leftrightarrow U_s \subsetneqq U_t$

- Ebenso setzt man $U_{s+t} = \{x + y \mid x \in U_s, y \in U_t\}$ für die Untermenge von $s + t$

- Schwieriger ist es, $s \cdot t$ zu definieren (da man die Vorzeichen berücksichtigen muss). Für $s, t > 0$ ist z.B. $O_{s \cdot t} = \{x \cdot y \mid x \in O_s, y \in O_t\}$ eine mögliche Definition der Obermenge von $s \cdot t$

Man kann nun Überprüfen, dass $s + t$ und $s \cdot t$ wieder Schnitte sind und dass die Menge der Schnitte einen angeordneten Körper bildet – die reellen Zahlen $\mathbb{R}$! Zuletzt identifiziert man jedes $q \in \mathbb{Q}$ mit dem Schnitt U_q, O_q und hat tatsächlich die reellen aus den rationalen Zahlen konstruiert (und es gilt $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$). Hat man die Axiome (1.1) bis (4.4) überprüft, so weiß man, dass alle daraus abgeleiteten Folgerungen ebenfalls gelten.

Bemerkung. 1. Es gibt andere Möglichkeiten $\mathbb{R}$ zu konstruieren. Diese sind zum Teil geschickter, verwenden dann aber kompliziertere Hilfsmittel.

2. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\mathbb{R}$ „keine Löcher mehr hat“. Dazu müssen wie noch eine exakte Formulierung dieser Tatsache finden.

1.3 Intervalle und Absolutbetrag

Def. Es seien $a \leq b$ zwei reelle Zahlen. Dann definiert man die folgenden Intervalle:

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
  (abgeschlossenes, beschränktes Intervall, beachte $[a, a] = \{a\}$)
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
  (offenes, beschränktes Intervall, beachte $(a, a) = \varnothing$)
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
  (halboffenes, beschänktes Intervall, beachte $(a, a] = [a, a) = \varnothing$)
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
  (halboffenes, beschränktes Intervall, beachte $(a, a] = [a, a) = \varnothing$)

Zusätzlich definiert man:

- $[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
  (unbeschränktes, abgeschlossenes Intervall)
- $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
  (unbeschränktes, abgeschlossenes Intervall)
- $(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
  (unbeschränktes, offenes Intervall)
- $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
  (unbeschränktes, offenes Intervall)
- Schließlich ist $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Def. Der Absolutbetrag einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist definiert als

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Folgerungen. 1. $|a| \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}$ und $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

2. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \forall a, b \in \mathbb{R}$. Wir verwenden eine Fallunterscheidung:
   - Falls $a, b \geq 0$, so $a \cdot b \geq 0$ und $|a \cdot b| = a \cdot b = |a| \cdot |b|$
   - Falls $a, b < 0$, so $a \cdot b > 0$ und $|a \cdot b| = a \cdot b = (-a) \cdot (-b) = |a| \cdot |b|$
   - Falls $a < 0 \leq b$, so $a \cdot b \leq 0$ und $|a \cdot b| = -(a \cdot b) = (-a) \cdot b = |a| \cdot |b|$
   - Falls $b < 0 \leq a$, so $a \cdot b \leq 0$ und $|a \cdot b| = -(a \cdot b) = a \cdot (-b) = |a| \cdot |b|$
3. $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$ (Übung)
4. $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$
   ($\Rightarrow$) Wegen $0 \leq |a| \leq b$ ist $b \geq 0$. Falls $a \geq 0$, so $-b \leq 0 \leq |a| = a \leq b$.
   Falls $a < 0$, so $0 < -a = |a| \leq b \Rightarrow -b \leq a < 0 \leq b$
   ($\Leftarrow$) $-b \leq a \leq b \Rightarrow -b \leq b \Rightarrow 2b = b + b \geq b + (-b) = 0 \Rightarrow b \geq 0$
   Falls $a \geq 0$, so $|a| = a \leq b$
   Falls $a < 0$, so $-b \leq a \leq b \Rightarrow -b \leq -a \leq b \Rightarrow |a| = -a \leq b$

5. $|a+b| \leq |a| + |b|, \forall a, b \in \mathbb{R}$ (Dreiecksungleichung)
   Wegen $|a| \leq |a|, \forall a \in \mathbb{R}$ folgt aus (4) $(\Rightarrow) - |a| \leq a \leq |a|, \forall a \in \mathbb{R}$
   Da ebenso $-|b| \leq b \leq |b|$, erhält man durch Addition

$$-(|a| + |b|) = -|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|$$

   woraus wegen (4)$(\Leftarrow)|a+b| \leq |a| + |b|$ folgt.

6. $||a| - |b|| \leq |a+b|, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ (Übung)

1.4 Die reellen Zahlen sind vollständig

Def. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$

1. $a \in \mathbb{R}$ heißt Maximum von M, wenn $a \in M$ und $x \leq a \ \forall x \in M$

2. $a \in \mathbb{R}$ heißt Minimum von M, wenn $a \in M$ und $a \leq x \ \forall x \in M$

Man schreibt dafür kurz $a = \max\, M$ beziehungsweise $a = \min\, M$

Beispiele. 1. $\max[0,1] = \max(0,1] = 1$ (nach Definition dieser Intervalle)

2. $\max\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\} = 1$ (da $n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$)

3. Die Intervalle $(0,1)$ und $[0,1)$ besitzen kein Maximum.

Bemerkung. 1. Eine nichtleere Menge braucht weder Minimum noch Maximum zu besitzen. (Das ist z.B. für für das Intervall $(0,1)$ so.)

2. Wenn das Maximum $\max M$ einer Menge M $(\subseteq \mathbb{R})$ existiert, ist es eindeutig bestimmt. (Es sei $a = \max M$ und $b = \max M$. Dann gelten $a, b \in M$ und $a \geq x \quad \forall x \in M$ und $b \geq x \quad \forall x \in M$. Daher ist $a \geq b$ und $b \geq a$, woraus $a = b$ folgt.) Ebenso ist $\min M$ eindeutig bestimmt, wenn es existiert.

Def. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$

1. Ein $s \in \mathbb{R}$ heißt obere Schranke von M, wenn $x \leq s \ \forall x \in M$.

2. Besitzt M eine obere Schranke, so heißt M nach oben beschränkt.
   Besitzt M keine obere Schranke, so heißt M nach oben unbeschränkt.

3. Ein $s \in \mathbb{R}$ heißt untere Schranke von M, wenn $s \leq x \ \forall x \in M$.

4. Besitzt M eine untere Schranke, so heißt M nach unten beschränkt.
   Besitzt M keine untere Schranke, so heißt M nach unten unbeschränkt.

5. Wenn M nach oben und unten beschränkt ist, heißt M beschränkt.

Beispiele. 1) Es sei $M = [0,1)$. Jede der Zahlen $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{22}{7}, e, \pi, 100, 1000000, \ldots$ ist eine obere Schranke für M. Jede der Zahlen $0, -1, -2, -\frac{7}{2}, -100000, \ldots$ ist eine untere Schranke für M.

Bemerkung. Beispiel 1) zeigt:

1. Eine obere oder untere Schranke für die Menge M kann, aber muss nicht in M liegen.
2. Gibt es eine obere (bzw. untere) Schranke s, so gibt es unendlich viele, da jedes $t \geq s$ (bzw. $t \leq s$) ebenfalls obere (bzw. untere) Schranke für M ist.

2) Allgemeiner ist jedes beschränkte Intervall $[a, b], [a, b), (a, b]$ bzw. (a, b) (mit $a < b$) beschränkt, da a untere und b obere Schranke ist.

3) Die Menge $\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ ist beschränkt, da $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ $\forall\, n \geq 1$

4) Das Intervall $[-1, +\infty)$ ist nach unten beschränkt (z.B. durch -1) aber nach oben unbeschränkt.

5) Allgemeiner ist jedes Intervall der Gestalt $[a, +\infty)$ bzw. $(a, +\infty)$ nach unten beschränkt (z.B. durch a) aber nach oben unbeschränkt. Ebenso ist jedes Intervall der Gestalt $(-\infty, a]$ bzw. $(-\infty, a)$ nach oben beschränkt (z.B. durch a) aber nach unten unbeschränkt.

6) $\mathbb{N}$ ist nach unten beschränkt (zum Beispiel durch 0) aber nach oben unbeschränkt

Def. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Ein $s \in \mathbb{R}$ heißt Supremum von M (kurz $s = \sup M$), wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

1. s ist eine obere Schranke von M.
2. Ist t ebenfalls eine obere Schranke von M, so gilt $s \leq t$.

Bemerkung. 1. Das Supremum von M ist also das Minimum aller oberen Schranken von M.

2. Es folgt, dass ein Supremum (wenn es existiert!) eindeutig bestimmt ist. (Gelten $s = \sup M$ und $t = \sup M$, so ist $s \leq t$ und $t \leq s$, also $s = t$.)
3. Gilt $m = \max M$, so ist $m = \sup M$. (Denn m ist eine obere Schranke für M und s ist eine andere obere Schranke für M, so muss $m \leq s$ gelten.)

Beispiele. 1. $\sup[0; 1) = 1$ (Einerseits ist $1 > x \quad \forall x \in [0, 1)$ nach Definition des Intervalls, d.h. 1 ist eine obere Schranke für $[0, 1)$. Ist $s = \sup[0, 1)$, so muss also $s \leq 1$ gelten. Angenommen es gäbe ein $s < 1$, das obere Schranke von $[0, 1)$ ist. Dann gilt $0 \leq s < \frac{1+s}{2} < 1$; d.h. $\frac{1+s}{2} \in [0, 1)$, aber $s < \frac{1+s}{2}$; Wid.)

2. $\sup\{1 - \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} = \sup\ \{1 - 1; 1 - \frac{1}{2}; 1 - \frac{1}{3}; ...\} = \sup\ \{0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; ...\} = 1$ (Es ist $1 \geq 1 - \frac{1}{n}\, \forall\, n \geq 1$; d.h. 1 ist obere Schranke. Angenommen es gäbe ein $s < 1$, das obere Schranke. Da $\mathbb{N}$ nach oben unbeschränkt ist, gibt es ein $n \geq 1$ mit der Eigenschaft, dass $n > \frac{1}{1-s}$ (sonst wäre $\frac{1}{1-s}$ obere Schranke für $\mathbb{N}$) und $n > \frac{1}{1-s} \Rightarrow 1 - s > \frac{1}{n} \Rightarrow 1 - \frac{1}{n} > s$; Wid.)

Ammann Judith, Boubenizek Anna, Bredl Vanessa, Emsenhuber Klaudia, Grujić Dragan, Janisch Alexander, Karner Nora, Kohlmann Sara, Lang Clara, Langschwert Mohamed, Mayer Barbara, Moser Laura

Bemerkung. Beide vorangegangenen Beispiele zeigen, dass das Supremum einer Menge M nicht Elemente von M sein muss.

Def. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Ein $s \in \mathbb{R}$ heißt Infimum von M (kurz $s = \inf M$), wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

1) s ist eine untere Schranke von M,

2) Ist t ebenfalls eine untere Schranke von M, so gilt $t \leq s$.

Bemerkung. Für das Infimum gelten mutatis mutandis analoge Aussagen wie für das Supremum:

- Das Infimum $\inf M$ ist das Maximum aller unterer Schranken der Menge M,

- Existiert das Infimum, so ist es eindeutig bestimmt,

- Existiert $\min M$, so ist $\inf M = \min M$,

- Das Infimum von M muss nicht in M liegen.

Wir können um die Eigenschaft von $\mathbb{R}$ vollständig zu sein (d.h. "keine Löcher zu haben") formulieren:

(5) Wenn $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \varnothing$ nach oben beschränkt ist, dann existiert $\sup M$ $(\in \mathbb{R})$.

Beweisskizze. Es sei $U_s := \bigcup\limits_{x \in M} U_x$ die Untermenge von s (wobei U_x die Untermenge von $x \in M$ bezeichnen soll). Dann ist s ein Dedekindscher Schnitt und (nach Def. von $<$ auf der Menge der Schnitte $\mathbb{R}$) $x \leq s \ \forall x \in M$.
Ist t eine obere Schranke für M, so ist $x \leq t \ \forall x \in M$ und daher $U_x \subseteq U_t \ \forall x \in M$ (wobei U_t die Untermenge von t bezeichnen soll). Daher gelten $\bigcup\limits_{x \in M} U_x \subseteq U_t$, dh $U_s \subseteq U_t$ und daher $s \leq t$.

Bemerkung.

1) Die Reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind durch ihre Eigenschaft, ein angeordneter Körper zu sein (dh Axiome (1.1) bis (1.4) zu erfüllen) und (5) vollständig festgelegt.

2) Man kann die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ durch zahlreichen andere Aussagen (die zu (5) äquivalent sind) zum Ausdruck bringen.

Satz 1 (Archimedisches Axiom)**.** *Sind $a, b > 0$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sodass $na > b$.*

Beweis. Wäre $na \leq b \ \forall n \geq 1$, so wäre $n \leq \frac{b}{a} \ \forall n \geq 1$, dh $\mathbb{N}$ wäre nach oben beschränkt, Wid.

Korollar 2. *Ist $a > 0$, so $\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \frac{1}{n} < a$.*

Beweis. Das ist ein Spezialfall von Satz 1 (mit $b = 1$).

Satz 3. Es seien $a < b$. Dann ist $(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$ (dh $\exists q \in \mathbb{Q} : a < q < b$).

Beweis. Es sei zunächst $0 < a$ $(< b)$. Nach Korollar 2 $\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \frac{1}{n} < b - a$. Betrachte die Menge $A := \{k \in \mathbb{N} \mid \frac{k}{n} > a\}$. Wegen Satz 1 ist $A \neq \varnothing$ und besitzt daher ein kleinstes Element k_0, dh $\frac{k_0-1}{n} \leq a < \frac{k_0}{n}$ (was auch stimmt, falls $k_0 = 1$ sein sollte) Weiters ist

$$b = \underbrace{a}_{\geq \frac{k_0-1}{n}} + \underbrace{(b-a)}_{> \frac{1}{n}} > \frac{k_0-1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{k_0}{n}, \text{ also insgesamt } a < \frac{k_0}{n} < b$$

Ist $a \leq 0$, so wähle ein $m \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $m > -a$. Dann ist $0 < a+m < b+m$ und nach dem schon bewiesenem Fall $\exists q_1 \in \mathbb{Q} : a+m < q_1 < b+m$ und daher $a < q_1 - m < b$, womit die Beh. bewiesen ist, da $q_1 - m \in \mathbb{Q}$.

Bemerkung. 1) Als unmittelbare Folgerung erhält man: Ist $a < b$, so enthält das Intervall (a, b) unendlich viele rationale Zahlen, denn $\exists q_1 \in (a, b) \cap \mathbb{Q}$, $\exists q_2 \in (a, q_1) \cap \mathbb{Q}$, $\exists q_3 \in (a, q_2) \cap \mathbb{Q}$, ... usw.

2) Man beschreibt den Sachverhalt von Satz 3 mit der Formulierung "$\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$".

Satz 4 (Intervallschachtelungsprinzip)**.** Für $n \geq 1$ sei $I_n = [a_n, b_n]$ (mit $a_n \leq b_n$) ein beschränktes, abgeschlossenes Invervall und es gelte

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq ... \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq ...$$

Dann ist $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n \neq \varnothing$.

Beweis. Offensichtlich gelten $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ... \leq a_n \leq a_{n+1} \leq ...$ und $...b_{n+1} \leq b_n \leq ... \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$. Weiters gilt $a_n \leq b_m$ $\forall m, n \geq 1$. (Das folgt für $m = n$ aus der Voraussetzung. Ist $n < m$, so $a_n \leq a_m \leq b_m$. Ist $n > m$, so $a_n \leq b_n \leq b_m$) Die Menge $\{a_n \mid n \geq 1\}$ ist $\neq \varnothing$ und nach oben beschränkt (z.B. durch b_n mit $n \geq 1$ beliebig).
Daher $\exists s := \sup\{a_n \mid n \geq 1\}$ und folglich $a_n \leq s$ $\forall n \geq 1$. Es gilt aber auch $s \leq b_n$ $\forall n \geq 1$, da b_n eine obere Schranke von $\{a_n \mid n \geq 1\}$ ist. Also ist $s \in [a_n, b_n]$ $\forall n \geq 1$ und daher

$$s \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

Bemerkung. Man kann die reellen Zahlen auch durch Intervallschachtelungen $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq ...$ mit $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ $\forall n \geq 1$ einführen, für die die Länge $b_n - a_n$ beliebig klein wird. Z.B. wird $\sqrt{2} = 1,41421...$ durch die Intervallschachtelung $[1, 2] \supseteq [1.4, 1.5] \supseteq [1.41, 1.42] \supseteq [1.414, 1.415] \supseteq ...$ festgelegt.

Satz 5. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \varnothing$. Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent:

(i) $s = \sup M$

(ii) $x \leq s$ $\forall x \in M$
und $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x \in M : s - \varepsilon < x$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) Es gilt $x \leq s \; \forall x \in M$, da s obere Schranke für M ist. Andererseits kann $s - \varepsilon$ keine obere Schranke sein, aber $\exists x \in M : s - \varepsilon < x$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Da $x \leq s \; \forall x \in M$ ist s obere Schranke für M. Daher $\exists t := \sup M$ und $t \leq s$. Wäre $t < s$, so wäre $x \leq t \; \forall x \in M$. Wähle nun ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft $\varepsilon \leq s - t$. Dann ist $s - \varepsilon \geq s - (s-t) = t$ und es kann kein $x \in M$ mit der Eigenschaft $s - \varepsilon < x$ geben, Wid. Also $s = t$.

Bemerkung. Analog kann man zeigen:

$$s = \inf M \Leftrightarrow s \leq x \; \forall x \in M \text{ und } \forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in M : x < s + \varepsilon$$

Def. Es seien $M, N \subseteq \mathbb{R}$, $M, N \neq \varnothing$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann seien

$$\begin{aligned} -M &= \{-x \mid x \in M\} \quad (= \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in M : y = -x\}) \\ M + N &= \{x + y \mid x \in M, y \in N\} \quad (= \{z \in \mathbb{R} \mid \exists x \in M \;\; \exists y \in N : z = x + y\}) \\ cM &= \{cx \mid x \in M\} \quad (= \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in M : y = cx\}) \end{aligned}$$

Beispiele. Ist $M = [0,1]$, $N = \{2,4\}$, $c = 4$ und $d = -2$, so sind $-M = [-1,0]$, $-N = \{-2,-4\}$, $M + N = [2,3] \cup [4,5]$, $cM = [0,4]$, $cN = \{8,16\}$, $dM = [-2,0]$ und $dN = \{-8,-4\}$.

Lemma 6. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \varnothing$. Dann gelten:

(i) s ist obere Schranke von $M \Leftrightarrow -s$ ist untere Schranke von $-M$,

(ii) $s = \sup M \Leftrightarrow -s = \inf(-M)$ (oder kurz: $\inf(-M) = -\sup M$)

Beweis. (i) $x \leq s \; \forall x \in M \Leftrightarrow -s \leq -x \; \forall x \in M \Leftrightarrow -s \leq y \; \forall y \in -M$

(ii) Es sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists x \in M : s - \varepsilon < x$ und daher $-s + \varepsilon > -x$, dh $\exists y \in -M : -s + \varepsilon > y$. Daraus folgt (wegen (i)) $-s = \inf(-M)$. Die Umkehrung zeigt man analog.

Satz 7. (i) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \varnothing$. Wenn M nach unten beschränkt ist, $\exists \inf M \in \mathbb{R}$

(ii) Es sei $\varnothing \neq M \subseteq N \subseteq \mathbb{R}$. Wenn N nach oben (bzw. unten) beschränkt ist, dann ist auch M nach oben (bzw. unten) beschränkt und $\sup M \leq \sup N$ (bzw. $\inf M \geq \inf N$)

Beweis. (i) M ist nach unten beschränkt $\Leftrightarrow -M$ ist nach oben beschränkt $\Rightarrow \exists \sup(-M) \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \inf M = -\sup(-M) \in \mathbb{R}$.

(ii) N ist nach oben beschränkt $\Rightarrow \exists \sup N \in \mathbb{R}$. Da $\sup N$ eine obere Schranke von N ist, ist es auch eine obere Schranke von M und daher $\sup M \leq \sup N$. (Der Beweis der 2. Aussage verläuft analog.)

Satz 8. Es seien $M, N \subseteq \mathbb{R}$, $M, N \neq \varnothing$ und $c > 0$. Dann gelten:

(i) Sind M und N nach oben beschränkt, dann ist auch $M + N$ nach oben beschränkt und $\sup(M + N) = \sup M + \sup N$.

(ii) Ist M nach oben beschränkt, dann ist auch cM nach oben beschränkt und $\sup(cM) = c \sup M$

Beweis. (i) Es seien s bzw. t obere Schranken für M bzw. N, dh $x \leq s\ \forall x \in M$ und $y \leq t\ \forall y \in \mathbb{N}$. Dann ist $x + y \leq s + t\ \forall x \in M\ \ \forall y \in \mathbb{N}$, dh $z \leq M + N$ $\forall z \in M + N$. Also ist $s+t$ eine obere Schranke für $M+N$. Es seien $s = \sup M$, $t = \sup N$ und $\varepsilon > 0$. Dann $\exists x \in M : s - \frac{\varepsilon}{2} < x$ und $\exists y \in \mathbb{N} : t - \frac{\varepsilon}{2} < y$ und daher $s+t-\varepsilon = (s - \frac{\varepsilon}{2}) + (t - \frac{\varepsilon}{2}) < x + y$. Aus Satz 5 folgt $s + t = \sup(M+N)$, dh $\sup M + \sup N = \sup(M + N)$.

(ii) Es sei s eine obere Schranke für M, dh $x \leq s\ \forall x \in M$. Dann ist $xc \leq cs$ $\forall x \in M$, dh cs eine obere Schranke für cM.
Es sei $s = \sup M$ und $\varepsilon > 0$. Dann $\exists x \in M : s - \frac{\varepsilon}{c} < x$ und daher $cs - \varepsilon < cx$. Aus Satz 5 folgt $c \sup M = cs = \sup(cM)$.

Korollar 9. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \varnothing$ nach oben beschränkt und $c < 0$. Dann ist cM nach unten beschränkt und $\inf(cM) = c \sup M$.

Beweis. Ist s eine obere Schranke für M, so ist $x \leq s\ \forall x \in M$ und daher $cs \leq cx$ $\forall x \in M$ (dh cs ist untere Schranke für cM) und es gilt

$$\inf(cM) = \inf(-|c|\, M) \overset{Lemma 6(ii)}{=} -\sup(|c|\, M) \overset{Satz 8(ii)}{=} -(|c| \sup M) = c \sup M.$$

Bemerkung. Analog zu Satz 8 und Korollar 9 gelten die folgenden Eigenschaften:

1) Sind $M, N \subseteq \mathbb{R}$, $M, N \neq \varnothing$ beide nach unten beschränkt, dann ist auch $M + N$ nach unten beschränkt und $\inf(M + N) = \inf M + \inf N$.

2) Ist $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \varnothing$ nach unten beschränkt und $c > 0$, so ist auch cM nach unten beschränkt und $\inf(cM) = c \inf M$.

3) Ist $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \varnothing$ nach unten beschränkt und $c < 0$, so ist cM nach oben beschränkt und $\sup(cM) = c \inf M$.

Beispiele. 1. Es seien $M = (1, 2)$ und $N = (3, 4)$. Dann ist $M + N = (4, 6)$ und $\sup(M + N) = 6 = 2 + 4 = \sup M + \sup N$.

2. Ist $c = 4$, so ist $cM = (4, 8)$ und $\sup(cM) = 8 = 4 \cdot 2 = 4 \sup M = c \sup M$.

3. Ist $d = -2$, so ist $dM = (-4, -2)$ und $\inf(dM) = -4 = (-2) \cdot 2 = d \cdot \sup M$.

1.5 Potenzen mit rationalen Exponenten

Def.

- Für $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ sei $a^0 := 1$.
- Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ sei $a^n := \underbrace{a \cdot ... \cdot a}_{n-\text{mal}}$.
  (Will man sehr genau sein, kann man induktiv $a^1 := a$ und $a^{n+1} := a^n \cdot a$ definieren.)
- Für $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ sei $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$. (Insbesondere ist also $a^{-1} := \frac{1}{a}$.)

Bemerkung. Es ist in der Analysis oft sinnvoll, die Konvention $0^0 := 1$ zu verwenden. Sollte in dieser Vorlesung ein Ausdruck a^b auftreten, bei dem $a = b = 0$ möglich ist, so gilt diese Konvention (außer es wird explizit etwas anderes festgelegt).

Satz 10. Sind entweder ($a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$) oder ($a, b \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$), so gelten

(i) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$,

(ii) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$,

(iii) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Ohne Beweis, der mittels Induktion und Fallunterscheidungen geführt werden kann.

Lemma 11. Es seien $x, y > 0$ und $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Dann gilt $x < y \Leftrightarrow x^p < y^p$.

Beweis. ($\Rightarrow$) Induktion nach p. Für $p = 1$ gilt die Behauptung laut Voraussetzung und $x^{p+1} = x^p \cdot x < y^p \cdot y = y^{p+1}$ (wegen Folgerungen 9) und 8) aus den Ordnungsaxiomen).
($\Leftarrow$) Wäre $x = y$, so wäre $x^p = y^p$. Wäre $y < x$, so wäre (nach der Implikation ($\Rightarrow$)) $y^p < x^p$, Wid. Also muss $x < y$ gelten.

Satz 12. Es sei $a \geq 0$ und $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Dann gibt es genau ein $x \geq 0$, sodass $x^p = a$.

Beweis. Ist $a = 0$, so muss $x = 0$ gelten. Ist $p = 1$, so muss $x = a$ gelten.
Es sei darum also jetzt $a > 0$ und $p > 1$.
Existenz: Die reelle Zahl x, die durch den Dedekindschen Schnitt mit Untermenge $U = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 0 \text{ oder } (q \geq 0 \text{ und } q^p < a)\}$ gegeben ist, erfüllt $x^p = a$.
Eindeutigkeit: Ist $0 < y < x$, so ist $y^p < x^p = a$. Ist $x < y$, so ist $y^p > x^p = a$ (wegen Lemma 11).

Def. Es sei $a \geq 0$ und $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Das nach Satz 12 eindeutig bestimmmte $x \geq 0$ mit $x^p = a$ wird als $p-te$ Wurzel von a bezeichnet und man schreibt dafür $\sqrt[p]{a}$ oder $a^{1/p}$.

Bemerkung.

1. Statt $\sqrt[2]{a}$ schreibt man nur $\sqrt{a}$.
2. Beachte, dass $\sqrt[p]{a}$ (nach Definition) immer ≥ 0 ist. (Es gilt zwar z.B. auch $(-2)^2 = 4$, aber $\sqrt{4} = 2$.)

3. Es gilt $(\sqrt[p]{a})^p = a$ (nach Definition von $\sqrt[p]{a}$), aber $\sqrt[p]{x^p}$ muss nicht $= x$ sein. Z.B. ist $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$. (Korrekt ist die Gleichung $\sqrt{x^2} = |x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$.)

Def. Es sei $a > 0$ und $r = \frac{p}{q}, r > 0$ mit $p, q \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Dann sei $a^r := \sqrt[q]{a^p}$ und $a^{-r} = \frac{1}{a^r} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$. Zusätzlich sei $0^r := 0$ (wieder für $r > 0$).

Bemerkung. a^r ist wohldefiniert. Es sei $r = \frac{p}{q} > 0$ (mit $p, q \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $ggT(p,q) = 1$) und $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Dann ist

$$x = \sqrt[q]{a^p} \Leftrightarrow x^q = a^p \Leftrightarrow (x^q)^k = (a^p)^k \Leftrightarrow x^{kq} = a^{kp} \Leftrightarrow x = \sqrt[kq]{a^{kp}}$$

.

Satz 13. Es seien $a, b > 0$ und $r, s \in \mathbb{Q}$. Dann gelten

(i) $a^r a^s = a^{r+s}$,

(ii) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$,

(iii) $(a^r)^s = a^{rs}$,

(iv) $a^r b^r = (ab)^r$,

(v) $\frac{a^r}{b^r} = (\frac{a}{b})^r$.

Beweis. (i) Es seien $r = \frac{m}{q}, s = \frac{n}{q}$ (mit $m, n \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$). Dann gelten $x = a^r \Leftrightarrow x^q = a^m$ und $y = a^s \Leftrightarrow y^q = a^n$. Sind also $x = a^r$ und $y = a^s$, so folgt $(xy)^q = x^q y^q = a^m a^n = a^{m+n}$. Da $r+s = \frac{m+n}{q}$ und $z = a^{r+s} \Leftrightarrow z^q = a^{m+n}$ folgt $a^r a^s = xy = z = a^{r+s}$.

(ii)-(v) Ohne Beweis.

Satz 14. Es seien $a, b > 0$ und $r \in \mathbb{Q}$. Dann gelten:

(i) $a < b \Leftrightarrow a^r < b^r$ falls $r > 0$,

(ii) $a < b \Leftrightarrow a^r > b^r$ falls $r < 0$.

Beweis. (i) Es sei $r = \frac{p}{q}$ (mit $p, q \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$). Dann gilt (wegen Lemma 11)
$a < b \Leftrightarrow a^{1/q} < b^{1/q} \Leftrightarrow a^{p/q} < b^{p/q} \Leftrightarrow a^r < b^r$.

(ii) Es sei $r = -\frac{p}{q}$ (mit $p, q \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$). Dann gilt
$a < b \Leftrightarrow a^{\frac{p}{q}} < b^{\frac{p}{q}} \Leftrightarrow \frac{1}{b^{\frac{p}{q}}} < \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} \Leftrightarrow b^{-\frac{p}{q}} < a^{-\frac{p}{q}} \Leftrightarrow b^r < a^r$.

Korollar 15. Es sei $a > 0$ und $r, s \in \mathbb{Q}, r < s$. Dann gelten:

(i) $a^r < a^s \Leftrightarrow a > 1$,

(ii) $a^r > a^s \Leftrightarrow (0 <)a < 1$.

Beweis. (i) Wegen $s - r > 0$ und $1^{s-r} = 1$ folgt aus Satz 14 (i)
$a > 1 \Leftrightarrow a^{s-r} > 1 \Leftrightarrow \frac{a^s}{a^r} > 1 \Leftrightarrow a^s > a^r$.

(ii) Analog.

1.6 Einige wichtige Gleichungen und Ungleichungen

Erinnerung:

1) Für $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ setzt man $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (oder formal sauberer induktiv: $1! = 1$ und $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$ für $n \geq 1$). Zusätzlich setzt man $0! := 1$. Die Fakultät $n!$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, n (verschiedene) Objekte aufzuteilen: Beim ersten Objekt hat man n Möglichkeiten, beim zweiten n-1, usw., bis beim n-ten und letzten nur mehr eine Möglichkeit übrigbleibt.

2) Für $k, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$ ist $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.
Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, aus einer n-elementigen Menge eine k-elementige Teilmenge auszuwählen: Man reiht die n Objekte so auf, dass zuerst die k ausgewählten liegen, und dann die $n-k$ nicht ausgewählten. Es gibt $n!$ Möglichkeiten, die Objekte aufzureihen. Da es auf die Reihenfolge der ausgewählten nicht ankommt, muss man durch $k!$ dividieren. Ebenso kommt es auf die Reihenfolge der nicht ausgewählten nicht an und man muss auch durch $(n-k)!$ dividieren.

Es gelten:

(i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für $0 \leq k \leq n$

(ii) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ für $0 \leq k < n$

Eigenschaft (ii) kann mittels des Pascalschen Dreiecks zur Berechnung von Binomialkoeffizienten verwendet werden:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & & \\
 & & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & & \\
 & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & & \\
 & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & & \\
 & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & & \\
 & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} & \\
\binom{7}{0} & & \binom{7}{1} & & \binom{7}{2} & & \binom{7}{3} & & \binom{7}{4} & & \binom{7}{5} & & \binom{7}{6} & & \binom{7}{7} \\
 & & & & & & & \ldots & & & & & & &
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
 & & & & & & & \ldots & & & & & & &
\end{array}
$$

Satz 16 (Binomischer Lehrsatz). Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j}$$

Beweis. Induktion nach n. $n = 1$:

$$(x+y)^1 = x + y = \binom{1}{0} x^0 y^1 + \binom{1}{1} x^1 y^0.$$

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n \cdot (x+y) \overset{\text{IV}}{=} \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j}\right) \cdot (x+y) =$$

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{j+1} y^{n-j} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n+1-j} =$$

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{j+1} y^{(n+1)-(j+1)} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n+1-j} =$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} x^j y^{(n+1)-j} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n+1-j} =$$

$$y^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \left(\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}\right) x^j y^{(n+1)-j} + x^{n+1} =$$

$$\binom{n+1}{0} x^0 y^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n+1}{j} x^j y^{(n+1)-j} + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y^0 = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} x^j y^{(n+1)-j}$$

Bemerkung. 1. Der binomische Lehrsatz erklärt die Bezeichnung "Binomialkoeefizient"

2. In Satz 16 haben wir die Konvention $0^0 = 1$ verwendet. (Es könnte ja x=0 oder y=0 sein.)

Satz 17 (Ungleichung zwischen arithmetischem und geomentrischem Mittel)**.** Für $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $x_1, x_2, ...x_n \geq 0$ gilt $\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n)$.

Beweis. Die Behauptung ist erfüllt, wenn $x_i = 0$ für ein $i \in \{1, 2, ..., n\}$ (da dann $\sqrt[n]{x_1 x_1 ... x_n} = 0 \leq \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n)$). Ebenso ist sie erfüllt, wenn $x_1 = x_2 = ...x_n$, da dann $\sqrt[n]{x_1 x_1 ... x_n} = x = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n)$.
Es sei darum ab jetzt $x_i > 0$ für $1 \leq i \leq n$ und die x_i nicht alle gleich. Unter diesen Voraussetzungen führen wir Induktion nach n durch:
$n = 1$: Trivial
$n = 2$: Es sei $A := \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$. OBdA sei $x_1 < x_2$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft $x_1 = A - \delta$ und $x_2 = A + \delta$ (nämlich $\delta = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$). Dann gilt: $x_1 x_2 = (A - \delta)(A + \delta) = A^2 - \delta^2 \leq A^2$ und daher $\sqrt{x_1 x_2} \leq \sqrt{A^2} = A = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

Ang., die Behauptung ist für $n \geq 2$ gezeigt. Es sei $A := \frac{1}{n+1}(x_1 + x_2 + ... + x_{n+1})$. Da $x_1, x_1, ...x_{n+1}$ nicht alle gleich sind, muss es $i, j \in \{1, ..., n+1\}$ mit $x_i > A$ und $x_j < A$ geben. OBdA seien $x_n = A - \delta$ und $x_n + x_{n+1} = A + \varepsilon$ für gewisse $\delta, \varepsilon > 0$. Dann ist

$$x_1 ... x_{n+1} = x_1 ... x_{n-1}(A - \delta)(A + \varepsilon) = x_1 ... x_{n-1}(A^2 + (\varepsilon - \delta)A - \delta\varepsilon) <$$

$$x_1 ... x_{n-1}(A^2 + (\varepsilon - \delta)A) = x_1 ... x_{n-1}(A - \delta + \varepsilon)A$$

. Wir wenden die IV nun auf die n Zahlen $x_1, ..., x_{n-1}, A - \delta + \varepsilon$ an. Diese haben ebenfalls arithmetisches Mittel A, denn $A - \delta + \varepsilon = x_n + x_{n+1} - A$ und daher

$$\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + A - \delta + \varepsilon) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_{n+1} - A)$$

$$= \frac{1}{n}((n+1)A - A) = \frac{1}{n} \cdot nA = A$$

. Anwendung der IV liefert

$$\sqrt[n]{x_1 ... x_{n-1}(A - \delta + \varepsilon)} \leq A \Rightarrow x_1 ... x_{n-1}(A - \delta + \varepsilon) \leq A^n$$

$$\Rightarrow x_1 ... x_{n+1} < x_1 ... x_{n-1}(A - \delta + \varepsilon)A \leq A^n \cdot A = A^{n+1}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n+1]{x_1 ... x_{n+1}} \leq A = \frac{1}{n+1}(x_1 + ... + x_{n+1})$$

Satz 18 (Bernoullische Ungleichung)**.** Sind $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $x > -1, x \neq 0$, so gilt $(1+x)^n > 1 + nx$.

Beweis. Induktion nach n. $n = 2$: $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$ und da $x^2 > 0$, $1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$. Ang., die Behauptung ist für $n \geq 2$ gezeigt. Da $1 + x > 0$, folgt $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) > (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 > 1 + (n+1)x$ (da $nx^2 > 0$)

2 Folgen

2.1 Definition und einfache Eigenschaften

Def. Eine Zahlenfolge (oder kurz Folge) ist eine Abbildung $\mathbb{N}\diagdown\{0\} \to \mathbb{R}$, $n \rightarrowtail a_n$. Man schreibt dafür $(a_n)_{n\geq 1}$

Bemerkung. Eine Folge kann auch mit einem anderen Index beginnen, also z.B. eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ oder $\{p, p+1, p+2, ...\} \to \mathbb{R}$ (mit $p \in \mathbb{Z}$) sein. Man schreibt dann $(a_n)_{n\geq 0}$ oder $(a_n)_{n\geq p}$.

Def. Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heißt beschränkt, wenn die Menge $\{a_n | n \geq 1\}$ beschränkt ist, d.h. wenn $\exists M > 0$, sodass $|a_n| \leq M \ \forall n \geq 1$.

Def. Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heißt konvergent mit Grenzwert (oder Limes) a($\in \mathbb{R}$) wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\diagdown\{0\}$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$
Man schreibt dafür $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ (aber nicht $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \to a$)

Eine Folge heißt konvergent, wenn sie gegen einen Grenzwert konvergiert, andernfalls heißt sie divergent.

Def. Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heißt Nullfolge, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ gilt. (D.h. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\diagdown\{0\}$, sodass $|a_n| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$)

Def. Eine Folge $(b_k)_{k\geq 1}$ heißt Teilfolge einer Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ wenn es eine Folge $(n_k)_{k\geq 1}$ natürlicher Zahlen mit der Eigenschaft $n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_k < n_{k+1} < ..$ gibt, sodass $b_k = a_{n_k} \ \forall k \geq 1$.

Bemerkung.

1. Anschaulich besagt die Def. der Konvergenz gegen $a \in \mathbb{R}$ folgendes: Für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ liegen alle bis auf endlich viele Folgenglieder im Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

2. Kann man nun zeigen, dass $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \geq 1 : \ |a_n - a| \leq \varepsilon \ \forall n \geq n_0$, dann gilt bereits $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. (Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so $\exists n_0 \geq 1$, sodass $|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \ \ \forall n \geq n_0$ gilt.)

3. Man kann die Def der Konvergenz gegen a auch so formulieren:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 \geq 1 : |a_n - a| < \varepsilon \ \forall n > n_1$ (Man sieht die Äquivalenz dieser Def, wenn man $n_0 = n_1 + 1$ wählt)

4. Die Aussage $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ist äquivalent damit, dass $(a_n - a)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge ist.

Satz 19.

i) Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt

ii) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

iii) Ist eine Folge konvergent, so konvergiert auch jeder ihrer Teilfolgen und zwar gegen denselben Grenzwert.

Beweis. (i) Es sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ wobei o.B.d.A $a < b$. Es sei $\varepsilon = \frac{1}{2}(b-a)$.
Aus $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ folgt, dass $\exists n_1 \geq 1 : |a_n - a| < \varepsilon\ \forall n \geq n_1$. Ebenso $\exists n_2 \geq 1 : |a_n - b| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_2$ (da $\lim_{n\to\infty} a_n = b$). Für $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ gilt daher einserseits $a_n - a < \frac{b-a}{2}$ und daher $a_n < a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$ und andererseits $a_n - b > -\frac{b-a}{2} = \frac{a-b}{2}$ und daher $a_n > b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$, ein Widerspruch.

(ii) Es sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Wähle $\varepsilon = 1 > 0$. Dann $\exists n_0 \geq 1 : |a_n - a| < 1\ \forall n \geq n_0$
Für $n \geq n_0$ gilt dann $|a_n| - |a| \leq ||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < 1$ und daher $|a_n| < 1 + |a|$. Insgesamt ist $|a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|..., |a_{n_0-1}|, |a| + 1\}\ \forall n \geq 1$.

(iii) Es sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$ (und $n_1 < n_2 < n_3 < ...$). Es sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists n_0 \geq 1 : |a_n - a| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0$.
Offenbar gilt $n_k \geq k\ \forall k \geq 1$ (Formal genauer: Beweis mit Induktion nach k).
Ist nun $k \geq n_0$, so ist daher $n_k \geq n_0$ und daher $|a_{n_k} - a| < \varepsilon\ \forall k \geq n_0$

Beispiele. 1. Die konstante Folge $(a)_{n\geq 1}$ (d.h. $a_n = a \in \mathbb{R} \quad \forall n \geq 1$) erfüllt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (Es sei $\varepsilon > 0$. Für $n_0 = 1$ gilt $|a_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon \quad \forall n \geq 1$)

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (Es sei $\varepsilon > 0$. Nach Korollar 2 $\exists n_0 \geq 1 : \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Für $n \geq n_0$ gilt dann $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, d.h. $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$.)

3. Es sei $p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ (Das folgt aus dem vorangegangenen Bsp. und Satz 19(iii), da$(\frac{1}{n^p})_{n\geq 1}$ eine Teilfolge von $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ ist.)

4. Es sei $p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Dann $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{n}} = 0$ (Es sei $\varepsilon > 0$. Nach Bsp 2 $\exists n_0 \geq 1 : \frac{1}{n} < \varepsilon^p\ \forall n \geq n_0$. Aus Satz 14 folgt $0 < \frac{1}{\sqrt[p]{n}} < \varepsilon\ \forall n \geq n_0$, d.h. $|\frac{1}{\sqrt[p]{n}} - 0| = \frac{1}{\sqrt[p]{n}} < \varepsilon$.)

5. Es sei $|q| < 1$. Dann $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ (Für $q = 0$ folgt das aus Bsp 1). Es sei also $0 < |q| < 1$. Dann ist $\frac{1}{|q|} > 1$, d.h. $\exists h > 0 : \frac{1}{|q|} = 1 + h$ woraus $|q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+h)^n} \overset{\text{Satz 18}}{<} \frac{1}{1+nh} < \frac{1}{nh}$ folgt. Zu vorgegebenen $\varepsilon > 0$ wähle $n_0 > \frac{1}{\varepsilon h}$. Für $n \geq n_0$ gilt dann $|q^n - 0| = |q^n| < \frac{1}{nh} \leq \frac{1}{n_0 h} < \varepsilon$.

6. Die Folge $(n)_{n\geq 1}$ ist divergent, da sie nicht beschränkt ist.

7. Ist $p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, so ist (allgemein) die Folge $(n^p)_{n\geq 1}$ divergent, da sie nicht beschränkt ist.

8. Die Folge $((-1)^n)_{n\geq 1}$ ist beschränkt (da $|(-1)^n| \leq 1\ \forall n \geq 1$) und divergent. (Angenommen es wäre $\lim_{n\to\infty} (-1)^n = a \in \mathbb{R}$. Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}$.
Falls $a \geq 0$, so gilt für alle ungeraden n, dass
$|(-1)^n - a| = | - 1 - a| = a + 1 \geq 1 > \varepsilon$, Widerspruch.
Falls $a < 0$, so gilt für alle geraden n, dass
$|(-1)^n - a| = |1 - a| = 1 + |a| > 1 > \varepsilon$, Widerspruch)

2.2 Rechnen mit konvergenten Folgen

Satz 20. (i) Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, und $a_n \leq b_n$ für fast alle n (dh. für alle bis auf endlich viele n), dann $a \leq b$.

(ii) Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle n, dann ist auch die Folge $(c_n)_{n\geq 1}$ konvergent und $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

(iii) Ist $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\geq 1}$ beschränkt, so ist $(a_n b_n)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge.

Bemerkung. Für Satz 20(ii) gibt es verschiedene Bezeichnungen wie Einschnürungssatz oder Sandwich-Theorem.

Beweis. (i) Angenommen, es wäre $a > b$. Wähle $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$. Dann $\exists n_1 \geq 1 : |a_n - a| < \frac{a-b}{2}$ $\forall n \geq n_1$ und $\exists n_2 \geq 1 : |b_n - b| < \frac{a-b}{2}$ $\forall n \geq n_2$. Für $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ wäre dann $a_n > a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = b + \frac{a-b}{2} > b_n$, ein Widerspruch zur Voraussetzung.

(ii) Es sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists n_1 \geq 1 : |a_n - a| < \varepsilon \;\; \forall n \geq n_1$ und $\exists n_2 \geq 1 : |b_n - a| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_2$. Ist $a_n \leq c_n \leq b_n \forall n \geq n_3$, so gilt für $n \geq \max\{n_1, n_2, n_3\}$, dass $a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$, woraus $-\varepsilon < c_n - a < \varepsilon$ und daher $|c_n - a| < \varepsilon$ folgt.

(iii) Da $(b_n)_{n\geq 1}$ beschränkt ist, $\exists B > 0 : |b_n| \leq B \;\forall n \geq 1$. Es sei $\varepsilon > 0$. Da $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge ist $\exists n_0 \geq 1 : |a_n| < \frac{\varepsilon}{B}$ $\forall n \geq n_0$. Daher ist
$|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq B \cdot |a_n| < B \cdot \frac{\varepsilon}{B} = \varepsilon \;\forall n \geq n_0$.

Satz 21. Es seien $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gelten

(i) Die Folge $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

(ii) Die Folge $(a_n - b_n)_{n\geq 1}$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$.

(iii) Die Folge $(a_n b_n)_{n\geq 1}$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

(iv) Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist die Folge $(\alpha a_n)_{n\geq 1}$ konvergent und $\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n) = \alpha a$.

(v) Die Folge $(|a_n|)_{n\geq 1}$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

(vi) Ist $b \neq 0$, so ist $b_n \neq 0$ für fast alle n, die Folge $(\frac{a_n}{b_n})_{n\geq 1}$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$. (Dabei ist $N \geq 1$ so gewählt, dass $b_n \neq 0 \;\; \forall n \geq N$.)

(vi) Ist $a_n \geq 0 \;\; \forall n \geq 1$, so ist $a \geq 0$ und $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

Beweis. (i) Es sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists n_1 \geq 1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq n_1$ und
$\exists n_2 \geq 1 : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq n_2$. Für $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ gilt dann
$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

(iii) Da die Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergiert, ist die sie beschränkt, d.h. $\exists B > 0 : |b_n| \leq B$ $\forall n \geq 1$. Falls $a = 0$ folgt die Beh. aus Satz 20(iii). Sei darum ab jetzt $a \neq 0$. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists n_1 \geq 1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2B}$ $\forall n \geq n_1$ und $\exists n_2 \geq 1 : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|}$ $\forall n \geq n_2$. Für $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ gilt dann $|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + (b_n - b)a| \leq |a_n - a| \cdot |b_n| + |b_n - b| \cdot |a| \leq |a_n - a| \cdot B + |b_n - b| \cdot |a| < \frac{\varepsilon}{2B} \cdot B + \frac{\varepsilon}{2|a|} \cdot |a| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

(iv) Ist ein Spezialfall von (iii) mit $b_n = \alpha \;\; \forall\, n \geq 1$.

(ii) Folgt aus (i) und (iv): $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n + (-b_n)) \overset{(i)}{=} \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty}(-b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty}((-1) \cdot b_n) \overset{(iv)}{=} \lim\limits_{n\to\infty} a_n + (-1) \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(v) Es sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists n_0 \geq 1 : |a_n - a| < \varepsilon \;\; \forall n \geq n_0$
$\Rightarrow ||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon \;\; \forall n \geq n_0$.

(vi) Wir zeigen zunächst den Spezialfall $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. Es sei $\varepsilon > 0$. Nach (v) gilt $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = |b| > 0$. Wählt man $\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$, $\exists n_1 \geq 1 : ||b_n| - |b|| < \frac{|b|}{2} \;\; \forall n \geq n_1$ und daher $|b_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} > 0 \;\; \forall n \geq n_1$ und daher $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|} \;\; \forall n \geq n_1$. Weiters $\exists n_2 \geq 1 : |b_n - b| < \frac{b^2\varepsilon}{2}$. Für $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ gilt dann

$$|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| = |\frac{b_n - b}{bb_n}| \leq \frac{2}{|b|^2}|b_n - b| < \frac{2}{|b|^2} \cdot \frac{b^2\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Aus (iii) und den bisher bewiesenen folgt dann
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot \frac{1}{b_n}) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}) = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$.

(vii) Aus $a_n \geq 0 \; \forall n \geq 1$ folgt wegen Satz 20(i) $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq 0$.

1. Fall: $a = 0$: Es sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists n_0 \geq 1 : a_n = |a_n - 0| < \varepsilon^2 \; \forall n \geq n_0$ und daher
$|\sqrt{a_n} - \sqrt{0}| = \sqrt{a_n} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon \; \forall n \geq n_0$

2. Fall: $a > 0$: Es sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists n_0 \geq 1 : |a_n - a| < \sqrt{a}\varepsilon \; \forall n \geq n_0$ und daher
$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = |\frac{(\sqrt{a_n}-\sqrt{a})(\sqrt{a_n}+\sqrt{a})}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\sqrt{a}\varepsilon}{\sqrt{a}} = \varepsilon \; \forall n \geq n_0$

Bemerkung. 1) Man kann die Aussagen von Satz 21 kurz folgendermaßen formulieren:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n, \quad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n),$$

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n, \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = |\lim_{n\to\infty} a_n|, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

$$\text{und } \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n}.$$

2) Beachte, dass in allen Aussagen von Satz 21 die Existenz von $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ vorausgesetzt wird! Eine Rechnung wie

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n} + (-1)^n + (-1)^{n+1}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n} + (-1)^n) + \lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$$

ist falsch und unsinnig, da weder $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}+(-1)^n)$ noch $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$ existieren!

3) Wir werden später sehen, dass die beiden Aussagen $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = |\lim\limits_{n\to\infty} a_n|$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$ zur Stetigkeit der Betragsfunktion $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\rightarrowtail |x|$ bzw. Wurzelfunktion $[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $x\rightarrowtail\sqrt{x}$ äquivalent sind.

Beispiele. 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$. Für $n\geq 2$ ist:

$$1 = \sqrt[n]{1} \overset{\text{Satz 14}}{<} \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n}^2\cdot 1^{n-2}} \overset{\text{Satz 17}}{\leq} \frac{1}{n}(2\sqrt{n}+n-2) =$$

$$\frac{2}{\sqrt{n}} + 1 - \frac{2}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

.

Nach Bsp. 4 in 2.1 ist $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ und daher (wegen Satz 21(i) und (iv)) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{2}{\sqrt{n}}) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 + 2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + 2\cdot 0 = 1.$

Aus Satz 20(ii) folgt $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.

2. Es sei $a>0$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$. Das ist trivial für $a=1$. Für $a>1$ gilt $n>a$ für fast alle n und daher $1<\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{n}$ für fast alle n. Aus Bsp.(1) folgt mit Hilfe von Satz 20 (ii), dass $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$. Ist $0<a<1$, so ist $\frac{1}{a}>1$ und daher $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$. Mit Hilfe von Satz 21(vi) folgt $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a}}} = \frac{1}{1} = 1$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3-4n^2+7}{2n^3+5n} = \frac{3}{2}$, denn

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-4n^2+7}{2n^3+5n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{4}{n}+\frac{7}{n^3}}{2+\frac{5}{n^2}} \overset{\text{Satz 21}}{=} \frac{3-4\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+7\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}{2+5\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} =$$

$$\frac{3+0+0}{2+0} = \frac{3}{2}.$$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = 0$, denn $0<\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ und die Beh. folgt wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ aus Satz 20(ii).

5. Es sei $|q| < 1$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n) = \frac{1}{1-q}$ (geometrische Reihe). Es gilt $1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $\forall n \geq 1$ (und alle $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$)
Induktion nach $n : n = 1$: $1 + q = \frac{1-q^2}{1-q}$ ($\Leftrightarrow (1 + q)(1 - q) = 1 - q^2$)
$1 + q + q^2 + ... + q^n + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$
und daher (jetzt für $|q| < 1$)
$$\lim_{n\to\infty}(1 + q + q^2 + ... + q^n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q} \cdot q^{n+1})$$
$$= \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q} \underbrace{\lim_{n\to\infty} q^{n+1}}_{=0} = \frac{1}{1-q},$$
wobei $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ in Bsp. 5. in 2.1 bewiesen wurde.

2.3 Konvergenzkriterien

Def. Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ wird monoton wachsend (bzw. streng monoton wachsend) genannt, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \geq 1$ (bzw. $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \geq 1$) gilt.
Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ wird monoton fallend (bzw. streng monoton fallend) genannt, wenn $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \geq 1$ (bzw. $a_n > a_{n+1}$ für alle $n \geq 1$) gilt.
Eine Folge heißt monoton, wenn sie monoton fallend oder wachsend ist.

Satz 22. Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine monotone Folge. Dann sind äquivalent:

(i) $(a_n)_{n\geq 1}$ ist konvergent

(ii) $(a_n)_{n\geq 1}$ ist beschränkt

Gelten diese beiden Aussagen, dann ist
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n | n \geq 1\} = \sup_{n\geq 1} a_n \text{ falls } (a_n)_{n\geq 1} \text{ monoton wächst}$$
bzw.
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n | n \geq 1\} = \inf_{n\geq 1} a_n \text{ falls } (a_n)_{n\geq 1} \text{ monoton fällt.}$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) Gilt allgemein und wurde in Satz 19 (ii) bewiesen.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton wachsend und $a := \sup\{a_n | n \geq 1\}$. Es sei $\epsilon > 0$. Dann $\exists n_0 \geq 1 : a_{n_0} > a - \epsilon$ (wg. Satz 5: Definition Sup) und daher
$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$. Daraus folgt sofort (durch Subtraktion von a) $-\varepsilon < a_n - a \leq \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$ und somit $|a_n - a| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$.
Es sei nun $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend. Dann ist $(-a_n)_{n\geq 1}$ monoton wachsend (da aus $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n \geq 1$ folgt, dass $-a_n \leq -a_{n+1}$ $\forall n \geq 1$). Daher ist
$-\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(-a_n) = \sup\{-a_n | n \geq 1\} = -\inf\{a_n | n \geq 1\}$ und folglich
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n | n \geq 1\}$.

Beispiele. Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = (1 + \frac{x}{n})^n$ ist monoton wachsend für jedes feste $x \geq -1$ (woraus $1 + \frac{x}{n} \geq 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \geq 0$ $\forall n \geq 1$ folgt):
$$(1+\frac{x}{n})^n = 1\cdot(1+\frac{x}{n})^n \overset{\text{Satz 17}}{\leq} (\frac{1}{n+1}(1+n(1+\frac{x}{n})))^{n+1} = (\frac{1+n+x}{n+1})^{n+1} = (1+\frac{x}{n+1})^{n+1}.$$

Insbesondere sind die beiden Folgen $((1+\frac{1}{n})^n)_{n\geq 1}$ und $((1-\frac{1}{n})^n)_{n\geq 1}$ beide monoton wachsend. Aus der zweiten Aussage folgt, dass die Folge $(\frac{1}{(1-\frac{1}{n})^n})_{n\geq 2} = (\frac{1}{(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}})_{n\geq 1}$ monoton fällt. Wegen

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}} = \frac{1}{(\frac{n+1-1}{n+1})^{n+1}} = \frac{1}{(\frac{n}{n+1})^{n+1}} = (\frac{n+1}{n})^{n+1} = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

ist also die Folge $((1+\frac{1}{n})^{n+1})_{n\geq 1}$ monoton fallend. Da

$$(1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n})^{n+1} \leq 2^2 = 4 \ \forall n \geq 1$$

ist $((1+\frac{1}{n})^n)_{n\geq 1}$ nach oben beschränkt und daher konvergent nach Satz 22.

Def. $e := \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \sup\{(1+\frac{1}{n})^n \mid n \geq 1\}$

Bemerkung. Die Zahl $e = 2,7182818...$ wird Eulersche Zahl genannt. Sie ist irrational (Tatsächlich ist sie sogar transzendent, dh sie ist nicht Nullstelle eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten - mit Ausnahme des Nullpolynoms natürlich). Die Folge $((1+\frac{1}{n})^n)_{n\geq 1}$ konvergiert aber so langsam gegen e, dass sie zur Berechnung von e nicht gut geeignet ist.

Beispiele. Sei $a > 0$. Wähle $x_0 > 0$ beliebig und definiere die Folge $(x_n)_{n>0}$ iterativ durch $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ (für $n \geq 0$).
Wir zeigen zunächst, dass $(x_n)_{n\geq 0}$ konvergiert. Mit Induktion nach n sieht man sofort $x_n \geq 0 \ \forall n \geq 0$. Tatsächlich gilt sogar $x_n \geq \sqrt{a} \ \forall n \geq 1$, da
$\sqrt{a} = \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} \leq \frac{1}{2}(x_1 + \frac{a}{x_n}) = x_{n+1} \ \forall n \geq 0$ wegen Satz 17. Insbesondere ist die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ durch $\sqrt{a}$ nach unten beschränkt Es folgt $x_n^2 \geq a \ \forall n \geq 1 \Rightarrow \frac{a}{x_n} \leq x_n$ $\forall n \geq 1 \Rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \leq \frac{1}{2}\cdot(2x_n) = x_n \ \forall n \geq 1$.

Dh. die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ ist monoton fallend. Wegen Satz 22 $\exists \xi := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ und nach Satz 20 (i) gilt $\xi \geq \sqrt{a} > 0$.

Wir zeigen nun, dass $\xi = \sqrt{a}$ gilt. Es ist
$\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) = \frac{1}{2}(\lim\limits_{n\to\infty} x_n + \frac{a}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}) = \frac{1}{2}(\xi + \frac{a}{\xi})$
$\Rightarrow 2\xi = \xi + \frac{a}{\xi} \Rightarrow \xi = \frac{a}{\xi} \Rightarrow \xi^2 = a \Rightarrow \xi = \sqrt{a}$.

Bemerkung. Das in diesem Bsp. beschriebene Verfahren liefert eine Folge, die sehr rasch gegen $\sqrt{a}$ konvergiert und zur numerischen Berechnung von Quadratwurzeln gut geeignet ist.

Satz 23 (Satz von Bolzano-Weierstrass)**.** Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine beschränkte Folge. Dann existiert eine konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$.

Beweis. Wir beweisen, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ eine monotone Teilfolge enthält. Da $(a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt ist, folgt die Behauptung aus Satz 22.
Wir nennen einen Index $m \geq 1$ "Gipfelstelle" von $(a_n)_{n\geq 1}$ wenn $a_m > a_n \ \forall n > m$.
<u>1.Fall:</u> Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ besitzt unendlich viele Gipfelstellen $m_1 < m_2 < m_3 < ....$ Dann gilt $a_{m_1} > a_{m_2} > a_{m_3} > ....$, dh $(a_{m_k})_{k\geq 1}$ ist eine streng monoton fallende

Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$.
<u>2.Fall:</u> Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ besitzt endlich viele Gipfelstellen. Wähle ein $n_1 \geq 1$, das größer ist als die größte Gipfelstelle. Dann ist n_1 keine Gipfelstelle. Daher $\exists n_2 > n_1 : a_{n_1} \leq a_{n_2}$. Da auch n_2 keine Gipfelstelle ist, $\exists n_3 > n_2 : a_{n_2} \leq a_{n_3}$. Verfahre weiter so: Sind $n_1 < n_2 < ... < n_k$ schon gefunden, so existiert $n_{k+1} > n_k : a_{n_k} \leq a_{n_{k+1}}$ (da n_k keine Gipfelstelle ist). Die Folge $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ ist eine monoton wachsende Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$.

Def. Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heißt Cauchyfolge wenn
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \geq 1\ \forall m, n \geq n_0 : \mid a_m - a_n \mid < \varepsilon$

Satz 24. Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge. Dann sind äquivalent:

(i) $(a_n)_{n\geq 1}$ ist konvergent

(ii) $(a_n)_{n\geq 1}$ ist Cauchyfolge

Beweis. (i)$\Rightarrow$(ii) Es sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Es sei $\varepsilon > 0$.
Dann $\exists n_0 \geq 1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq n_0$. Daraus folgt
$|a_m - a_n| = |(a_m - a) + (a - a_n)| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ \forall m, n \geq n_0$.

(ii)$\Rightarrow$(i) Wir zeigen zunächst, dass die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt ist. Zu $\varepsilon = 1 > 0$ $\exists n_0 \geq 1\ \forall m, n \geq n_0 : |a_m - a_n| < 1$. Daraus folgt
$|a_n| - |a_{n_0}| \leq ||a_n| - |a_{n_0}|| \leq |a_n - a_{n_0}| < 1\ \forall n \geq n_0$
und daher $|a_n| \leq |a_{n_0}| + 1\ \forall n \geq n_0$
Damit erhält man sofort $|a_n| \leq \max\{|a_1|, ..., |a_{n_0-1}|, |a_{n_0}| + 1\}\ \forall n \geq 1$.
Wegen Satz 23 existiert eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ mit
Grenzwert $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Wir zeigen nun $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.
Es sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists N \geq 1$, sodass $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall m, n \geq N$.
Wähle nun ein $n_{k_0} \geq 1$. (dh den Index eines Glieds der konvergenten Teilfolge), sodass $n_{k_0} \geq N$ und $|a_{n_{k_0}} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt
$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_{k_0}}| + |a_{n_{k_0}} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ \forall n \geq N$, dh $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Bemerkung. Satz 24 ermöglicht es, die Konvergenz (oder Divergenz) einer Folge zu beweisen, ohne dass man ihren Grenzwert kennt.

Beispiele.

1. Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = (-1)^n$ ist keine Cauchyfolge (und daher divergent): Für n gerade und m ungerade ist $|a_n - a_m| = |(1 - (-1)| = 2$. Für $0 < \varepsilon < 2$ gibt es daher kein $n_0 \geq 1$, sodass $|a_n - a_m| < \varepsilon\ \forall m, n \geq n_0$.

2. Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ gegeben durch $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$. Dann ist $(a_n)_{n\geq 1}$ keine Cauchyfolge (und daher divergent), da
$a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$, dh für $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ gibt es kein $n_0 \geq 1$, sodass $|a_n - a_m| < \varepsilon\ \forall n, m \geq n_0$. Da $(a_n)_{n\geq 1}$ streng monoton wächst, folgt aus Satz 22, dass die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ unbeschränkt ist.

3. Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ gegeben durch $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + -... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.
Wir zeigen, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchyfolge ist. O.B.d.A. sei $m > n$,

dh $m = n + k$ für ein $k \geq 1$. Dann gilt

$a_{n+k} - a_n = \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} + ... + \frac{(-1)^{n+k-1}}{n+k}$
$= (-1)^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - +... + \frac{(-1)^{k-1}}{n+k}\right)$

Dabei ist $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - +... + \frac{(-1)^{k-1}}{n+k} > 0$.

Für gerades k ist

$(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) + (\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}) + ... + (\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k})$
$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+3)(n+4)} + ... + \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} > 0$.

Für ungerades k ist

$(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) + (\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}) + ... + (\frac{1}{n+k-2} - \frac{1}{n+k-1}) + \frac{1}{n+k}$
$\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+3)(n+4)} + ... + \frac{1}{(n+k-2)(n+k-1)} + \frac{1}{n+k} > 0$.

Andererseits ist $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - +... \frac{(-1)^{k-1}}{n+k} < \frac{1}{n+1}$. Für gerades k ist

$\frac{1}{n+1} - \underbrace{(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3})}_{>0} - \underbrace{(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5})}_{>0} - ... - \underbrace{(\frac{1}{n+k-2} - \frac{1}{n+k-1})}_{>0} - \underbrace{\frac{1}{n+k}}_{>0} <$
$\frac{1}{n+1}$.

Für ungerades k ist

$\frac{1}{n+1} - \underbrace{(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3})}_{>0} - \underbrace{(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5})}_{>0} - ... - \underbrace{(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k})}_{>0} < \frac{1}{n+1}$.

Insgesamt gilt also

$|a_{n+k} - a_n| = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - +... + \frac{(-1)^{k-1}}{n+k} < \frac{1}{n+1}$.

Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so wähle $n_0 \geq 1$, derart, dass $\frac{1}{n_0+1} < \varepsilon$. Für $m, n \geq n_0$ ist dann

$|a_m - a_n| < \frac{1}{\min\{m,n\}+1} \leq \frac{1}{n_0+1} < \varepsilon$.

Dh. $(a_n)_{n\geq 1}$ ist eine Cauchyfolge und daher konvergent.

Bemerkung. Mit anderen Methoden kann man

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + -... + \frac{(-1)^{n-1}}{n}) = \log 2 \quad \text{zeigen.}$$

Satz 25. Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eine Folge $(q_n)_{n\geq 1}$ rationaler Zahlen mit der Eigenschaft $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = x$. Die Folge $(q_n)_{n\geq 1}$ kann monoton wachsend gewählt werden.

Beweis. Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Nach Satz 3 $\exists q_n \in (x - \frac{1}{n}, x - \frac{1}{n+1}) \cap \mathbb{Q}$. Dann ist $(q_n)_{n\geq 1}$ eine Folge rationaler Zahlen und wegen $q_n < x - \frac{1}{n+1} < q_{n+1}$ $\forall n \geq 1$ streng monoton wachsend. Da $x - \frac{1}{n} < q_n < x$ $\forall n \geq 1$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = x$ aus Satz 20(ii).

Bemerkung. Man kann Cauchyfolgen benützen um $\mathbb{R}$ (ausgehend von $\mathbb{Q}$) zu konstruieren. Es sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Cauchyfolgen rationaler Zahlen.

(Man muss nur in der Def. der Cauchyfolge $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ fordern).
Auf $\mathcal{F}$ definiert man eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch $(a_n)_{n\geq 1} \sim (b_n)_{n\geq 1}$ wenn $(a_n - b_n)$ eine Nullfolge ist. (Auch in der Def. der Nullfolge wird $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ gefordert.) Auf der Menge $\mathcal{F}/\sim$ der Äquivalenzrelation definiert man die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ folgendermaßen: Bezeichnet $[(a_n)_{n\geq 1}]$ die Äquvivalenzklasse, in der $(a_n)_{n\geq 1}$ liegt, so seien
$[(a_n)_{n\geq 1}]+[(b_n)_{n\geq 1}]:=[(a_n+b_n)_{n\geq 1}]$ und $[(a_n)_{n\geq 1}]\cdot[(b_n)_{n\geq 1}]:=[(a_nb_n)_{n\geq 1}]$.
(Beides ist wohldefiniert, da aus $(a_n)_{n\geq 1} \sim (a'_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1} \sim (b'_n)_{n\geq 1}$ folgt, dass $(a_n+b_n)_{n\geq 1} \sim (a'_n+b'_n)_{n\geq 1}$ und $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1} \sim (a'_n \cdot b'_n)_{n\geq 1}$).
Die Menge $\mathbb{R}$ wird als die Menge der Äquvivalenzklassen definiert, die Verknüpfungen sind wie oben angegeben und die rationalen Zahlen werden folgendermaßen eingebettet: Ist $q \in \mathbb{Q}$, so identifiziert man q mit $[(q,q,q,,...)]$.

2.4 Potenzen mit irrationalen Exponenten

Lemma 26. Es sei $a > 0$ und $(q_n)_{n\geq 1}$ eine Folge rationaler Zahlen mit der Eigenschaft $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 0$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a^{q_n} = 1$.

Beweis. Nach Bsp. 2 in 2.2 gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ und daher $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = 1$.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $m \geq 1$, sodass $|a^{\frac{1}{m}} - 1| < \varepsilon$ und $|a^{-\frac{1}{m}} - 1| < \varepsilon$
Zu $\frac{1}{m} > 0$ $\exists n_0 \geq 1$, sodass $|q_n| < \frac{1}{m}$ $\forall n \geq n_0$, dh. $-\frac{1}{m} < q_n < \frac{1}{m}$ $\forall n \geq n_0$. Für $a = 1$ ist $a^{q_n} = 1$ $\forall n \geq 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a^{q_n} = 1$ folgt trivialerweise.
Für $a > 1$ folgt aus Kor.15(i) $1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{m}} < a^{q_n} < a^{\frac{1}{m}} < 1 + \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$, dh. $|a^{q_n} - 1| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$
Für $0 < a < 1$ gilt wegen Kor.15(ii) $1 - \varepsilon < a^{\frac{1}{m}} < a^{q_n} < a^{-\frac{1}{m}} < 1 + \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$, dh. $|a^{q_n} - 1| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$

Def. Es sei $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Dann sei $a^x := \lim\limits_{n\to\infty} a^{q_n}$, wobei $(q_n)_{n\geq 1}$ irgendeine Folge rationaler Zahlen mit der Eigenschaft $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = x$ sei.

Bemerkung. Nach Satz 25 gibt es eine Folge $(q_n)_{n\geq 1}$ rationaler Zahlen mit der Eigenschaft $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = x$. Wählt man die Folge $(q_n)_{n\geq 1}$ monoton (was nach Satz 25 möglich ist), so ist die Folge $(a^{q_n})_{n\geq 1}$ nach Kor. 15 ebenfalls monoton. Da sie auch beschränkt ist, ist sie nach Satz 22 konvergent, dh. $\lim\limits_{n\to\infty} a^{q_n}$ existiert. Sind $(q_n)_{n\geq 1}, (p_n)_{n\geq 1}$ zwei Folgen rationaler Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} q_n = x$, so ist $(q_n - p_n)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge und wegen Lemma 26 gilt

$$\lim_{n\to\infty} a^{q_n} = \lim_{n\to\infty} a^{(p_n-q_n)+q_n} = \lim_{n\to\infty} a^{p_n-q_n} \cdot a^{q_n} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} a^{p_n-q_n}}_{=1} \cdot \lim_{n\to\infty} a^{q_n} = \lim_{n\to\infty} a^{q_n}.$$

Dh. $\lim\limits_{n\to\infty} a^{q_n}$ existiert auch wenn die Folge $(q_n)_{n\geq 1}$ mit der Eigenschaft $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = x$ nicht monoton ist und hängt nicht von der Wahl der Folge $(q_n)_{q\geq 1}$ ab.

Satz 27. Es seien $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

(i) $a^x a^y = a^{x+y}$

(ii) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

(iii) $(a^x)^y = a^{xy}$

(iv) $a^x b^x = (ab)^x$

(v) $\frac{a^x}{b^x} = (\frac{a}{b})^x$

Beweis. (i) Es seien $(q_n)_{n\geq 1}$ und $(p_n)_{n\geq 1}$ Folgen rationaler Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = x$ und $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = y$. (sollten $x \in \mathbb{Q}$ bzw. $q \in \mathbb{Q}$ sein, so sei $q_n = x\ \forall n \geq 1$ bzw. $p_n = y \forall n \geq 1$.) Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} (q_n + p_n) = x + y)$ und daher
$a^x \cdot a^y = (\lim\limits_{n\to\infty} a^{q_n}) \cdot (\lim\limits_{n\to\infty} a^{p_n}) = \lim\limits_{n\to\infty} a^{q_n} \cdot a^{p_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{q_n+p_n} = a^{x+y}$

(ii)-(v) ohne Beweis.

Bemerkung. Es gilt $a^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Für $x \in \mathbb{Q}$ folgt das aus Satz 12. Es sei nun $x \in \mathbb{R} \diagdown \mathbb{Q}$. Aus Satz 27(i) folgt $a^x a^{-x} = a^{x-x} = a^0 = 1$ und daher $a^x \neq 0$. Ist $(q_n)_{n\geq 1}$ eine Folge rationaler Zahlen mit der Eigenschaft $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = x$, so folgt aus Satz 12 $a^{q_n} > 0$ und wegen Satz 20(i) daher $a^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{q_n} \geq 0$. Zusammen erhält man $a^x > 0$.

2.5 Divergente Folgen

Def. Man sagt, die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ divergiert gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$), wenn gilt, dass $\forall M > 0 : \exists n_0 \geq 1 : \forall n \geq n_0 : a_n \geq M$ (bzw. $\forall M > 0 : \exists n_0 \geq 1 : \forall n \geq n_0 : a_n \leq -M$) und schreibt dafür $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$).

Beispiele. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$ (Zu gegebenem $M > 0$ wähle $n_0 \geq M$. Dann ist $n \geq M\ \forall n \geq n_0$).

2) Es sei $p \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} n^p = +\infty$ (Zu gegebenem $M > 0$ wähle wieder $n_0 \geq M$. Dann ist $n^p \geq n \geq n_0 \geq M \forall n \geq n_0$.)

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$ (Zu gegebenem $M > 0$ wähle $n_0 \geq M^2$. Dann ist $\sqrt{n} \geq \sqrt{n_0} \geq M\ \forall n \geq n_0$.)

4) Es sei $p \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p]{n} = +\infty$. (Übung)

5) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}) = +\infty$ (Die Folge $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n})_{n\geq 1}$ wächst offensichtlich monoton, ist aber - wie in Bsp. 2 von 2.3 gezeigt wurde - keine Cauchyfolge. Wegen Satz 22 ist sie unbeschränkt.)

Satz 28. Es seien $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c\ (\in \mathbb{R})$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + c_n) = +\infty$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha a_n) = \begin{cases} +\infty, & \text{falls } \alpha > 0 \\ -\infty, & \text{falls } \alpha < 0 \end{cases}$

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = +\infty$

(v) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha}{a_n} = 0$ (wobei verwendet wird, dass $a_n \neq 0$ für fast alle n)

Beweis. Übung

Bemerkung. 1) Die Resultate von Satz 28 werden oft folgendermaßen kurz zusammengefasst: $(+\infty)+(+\infty) = +\infty$, $(+\infty)+c = +\infty$, $\alpha\cdot(+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{falls } \alpha > 0 \\ -\infty, & \text{falls } \alpha < 0 \end{cases}$, $(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$, $\frac{\alpha}{+\infty} = 0$.

2) Analog dazu gelten die folgenden Regeln: $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$, $(-\infty) + c = -\infty$, $\alpha \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & \text{falls } \alpha > 0 \\ +\infty, & \text{falls } \alpha < 0 \end{cases}$, $(-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$, $\frac{\alpha}{-\infty} = 0$, $(+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$, $(-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$.

3) Für die folgenden „unbestimmten Ausdrücke“ gibt es keine allgemeingültige Regel, dh. man muss sie von Fall zu Fall unterscheiden.

- $(+\infty) - (+\infty)$, denn:
  $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 - n) = +\infty$, da $n^2 - n = n(n-1)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} n = \lim\limits_{n\to\infty} n - 1 = +\infty$
  $\lim\limits_{n\to\infty}((c + \sqrt{n+1}) - \sqrt{n}) = c$ $(\in \mathbb{R})$, da $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$
  $\lim\limits_{n\to\infty}(n - n^2) = -\infty$, da $n - n^2 = -(n^2 - n)$.
- $\frac{+\infty}{+\infty}$, denn:
  $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2} = 0$, da $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$
  $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{cn^2+1}{n^2} = c \;\forall c > 0$, da $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{cn^2+1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{c+\frac{1}{n^2}}{1} = \lim\limits_{n\to\infty}(c + \frac{1}{n^2}) = c$
  $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n} = +\infty$, da $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$
- $0 \cdot +\infty$, denn (mit denselben Bsp. wie für $\frac{+\infty}{+\infty}$):
  $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot n = 0$, da $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$
  $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot(cn^2+1) = c \;\forall c > 0$, da $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot(cn^2+1) = \lim\limits_{n\to\infty}(c + \frac{1}{n^2}) = c$
  $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot n^2 = +\infty$, denn $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$.

Ebenso sind die analogen Ausdrücke mit $-\infty$ statt $+\infty$ unbestimmt.

Lemma 29. Es sei $a_{n_{n\geq 1}}$ eine Folge und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(i) $\forall \epsilon > 0\, \exists$unendlich viele $n \geq 1 : |a_n - \alpha| < \epsilon$

(ii) $\exists$Teilfolge $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ von $(a_n)_{n\geq 1}$ mit der Eigenschaft $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = \alpha$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Es sei zunächst $\epsilon = 1$. Dann $\exists n_1 \geq 1 : |a_n - \alpha| < 1$. Es sei nun $\epsilon = \frac{1}{2}$. Da es unendlich viele $n \geq 1$ mit der Eigenschaft $|a_n - \alpha| < \frac{1}{2}$ gibt, $\exists n_2 > n_1 : |a_{n_2} - \alpha| < \frac{1}{2}$. Verfahre weiter so. Ang., es wurden bereits $n_1 < n_2 < ... < n_j$ mit $|a_{n_k} - \alpha| < \frac{1}{k}$ für $1 \leq k \leq j$ gefunden. Da es unendlich viele $n \geq 1$ mit der Eigenschaft $|a_n - \alpha| < \frac{1}{j+1}$ gibt, $\exists n_{j+1} > n_j : |a_{n_{j+1}} - \alpha| < \frac{1}{j+1}$. Man erhält auf diese Weise eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ mit der Eigenschaft $|a_{n_k} - \alpha| < \frac{1}{k}\ \forall k \geq 1$ und daher $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = \alpha$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Es sei $\epsilon > 0$. Dann $\exists k_0 \geq 1 : |a_{n_k} - \alpha| < \epsilon\ \forall k \geq k_0$. Daher ist $|a_n - \alpha| < \epsilon\ \forall n \in \{n_{k_0}, n_{k_0+1}, n_{k_0+2}, ...\}$.

Def. Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge und $\alpha \in \mathbb{R}$. Wenn eine (und damit beide) Bedingungen aus Lemma 29 erfüllt sind, wird α Häufungswert (oder Häufungspunkt) der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ genannt.

Korollar 30. (i) Ist die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergent, so besitzt sie genau einen Häufungswert, nämlich $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$.

(ii) Jede beschränkte Folge besitzt einen Häufungswert.

(iii) Divergiert eine Folge gegen $+\infty$ oder $-\infty$, so besitzt sie keinen Häufungswert.

Beweis. (i) Aus der Def. des Häufungswertes folgt sofort, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ein Häufungswert der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist. Wegen Satz 19 (iii) kann es keinen weiteren Häufungswert geben.

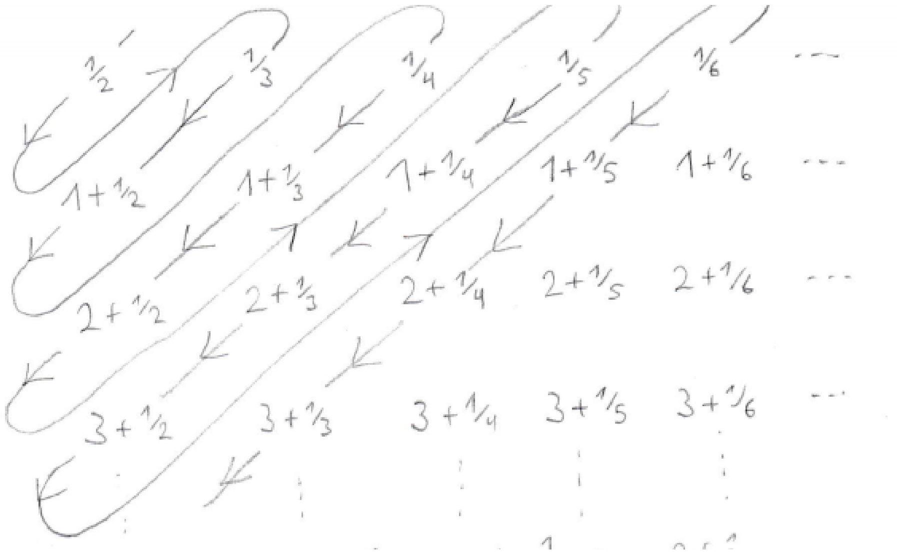
(ii) Das ist eine Umformulierung des Satzes von Bolzano-Weierstrass (Satz 23).

(iii) Es sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig. Zu $M := |\alpha| + 1 > 0$ gibt es ein $n_0 \geq 1$ sodass $a_n \geq M = |\alpha|+1 \geq \alpha+1\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow$ Das Intervall $(\alpha-1, \alpha+1)$ kann höchstens die Folgenglieder $a_1, ..., a_{n_{0-1}}$ enthalten $\Rightarrow$ Es gibt nur endlich viele $n \geq 1$ mit der Eigenschaft $|a_n - \alpha| < 1$, dh α ist kein Häufungswert.
Im Fall $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ verläuft der Beweis analog.

Beispiele. 1. Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = (-1)^n$ bestitzt die Häufungswerte -1 und 1, da $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} \underbrace{(-1)^{2k}}_{=1} = 1$ und $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} \underbrace{(-1)^{2k-1}}_{=-1} = -1$.

2. Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ gerade ist} \\ 1 + \frac{1}{n^2} & \text{falls } n \text{ ungerade ist} \end{cases}$
besitzt die Häufungswerte 0 und 1, da $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{2k} = 0$ und $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim\limits_{k\to\infty}(1 + \frac{1}{(2k-1)^2}) = 1$

3. Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ sei durch folgendes Schema gegeben:



D.h. $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = 1 + \frac{1}{2}, a_4 = \frac{1}{4}, ...$ Diese Folge besitzt für jedes $\alpha \in \mathbb{N}$ einen Häufungswert. Insbesondere kann eine Folge unendlich viele Häufungswerte besitzen.

Lemma 31. Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge und H die Menge ihrer Häufungswerte. Ist $H \neq \emptyset$ und nach oben beschränkt (bzw. nach unten beschränkt], so existiert $\max H$ (bzw. $\min H$), d.h. es existiert ein größter (bzw. kleinster] Häufungswert.

Beweis. Da Lemma $H \neq \emptyset$ und H nach oben beschränkt ist, existiert $s :=$ sup H. Nach Satz 5 gibt es einen Häufungswert $h_1 \in H$ mit $h_1 > s - \frac{1}{2}$. Da h_1 Häufungswert ist, $\exists\ n_1 \geq 1 : |a_{n_1} - h_1| < \frac{1}{2}$. Wieder nach Satz 5 ist es $h_2 \in H$ mit $h_2 > s - \frac{1}{4}$. Da h_2 Häufungswert ist, $\exists\ n_2 > n_1 : |a_{n_2} - h_2| < \frac{1}{4}$.
Verfahre weiter so: Seien $a_{n_1}, ..., a_{n_{k-1}}$ bereits gefunden. Nach Satz 5 $\exists\ h_j \in H$ mit $h_j > s - \frac{1}{2j}$. Da h_j Häufungswert ist, $\exists\ n_j > n_{j-1} : |a_{n_j} - h_j| < \frac{1}{2j}$.
Für alle $k \geq 1$ gilt nun $a_{n_k} > h_k - \frac{1}{2k} > (s - \frac{1}{2k}) - \frac{1}{2k} = s - \frac{1}{k}$ und $a_{n_k} < h_k + \frac{1}{2k} \leq s + \frac{1}{2k} < s + \frac{1}{k}$. Dh $s - \frac{1}{k} < a_{n_k} < s + \frac{1}{k}$ und daher $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = s \in H$ (Beweis der 2. Behauptung analog).

Def. Ist die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ nach oben beschränkt und besitzt Häufungswerte, dann bezeichnet man den größten Häufungswert als **Limes Superior** und schreibt: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ (oder $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$) dafür.
Ist die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ nach unten beschränkt und besitzt Häufungswerte, so bezeichnet man ihren kleinsten Häufungswert als **Limes Inferior** und schreibt $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ (oder $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$) dafür.
Ist die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ nach oben (bzw. unten) unbeschränkt, so setzt man $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = +\infty$ (bzw. $\underline{\lim} a_n) = -\infty$

Bemerkung. Ist $(a_n)_{n\geq 1}$ eine beschränkte Folge, so existieren wegen Kor. 31(ii) und Lemma 32 stets $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ und $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ und es gilt trivialerweise $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$

Beispiele. 1. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-1)^n = -1, \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-1)^n = +1$

2. Ist $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 1 + \frac{1}{n^2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

3. Ist $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } n = 3k \text{ für ein } k \geq 1 \\ 1 - \frac{1}{n} & \text{falls } n = 3k+1 \text{ für ein } k \geq 0 \\ 2 + \frac{1}{n^2} & \text{falls } n = 3k+2 \text{ für ein } k \geq 0 \end{cases}$

   so besitzt a_n die drei Häufungswerte $0, 1, 2$. (denn $\lim\limits_{k\to\infty} a_{3k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{3k} = 0$; $\lim\limits_{k\to\infty} a_{3k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} 1 - \frac{1}{3k+1} = 1$; $\lim\limits_{k\to\infty} a_{3k+2} = \lim\limits_{k\to\infty} 2 + \frac{1}{(3k+2)^2} = 2$ und daher $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 2$.

4. $a_n = \begin{cases} 1 & \text{falls n gerade} \\ n & \text{falls n ungerade} \end{cases}$

   so ist $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 1$ und $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Insbesondere braucht eine Folge, die nur einen Häufungswert besitzt, nicht konvergent zu sein.

Satz 32. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge, die Häufungswerte besitzt und nach oben beschränkt ist. Dann sind äquivalent:

(i) $\alpha = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ gilt $a_n < \alpha + \varepsilon$ für fast alle $n \geq 1$ und $a_n > \alpha - \varepsilon$ für unendlich viele $n \geq 1$

Beweis. (i)⇒(ii): Sei $\varepsilon > 0$. Da α Häufungswert von $(a_n)_{n\geq 1}$ ist, gibt es nach Lemma 29 unendlich viele $n \geq 1$ mit $|a_n - \alpha| < \varepsilon$. Daher gilt $a_n - \alpha > -\varepsilon$ und somit $a_n > \alpha - \varepsilon$ für unendlich viele $n \geq 1$.
Würde $a_n < \alpha + \varepsilon$ nicht für fast alle n gelten, so wäre $a_n \geq \alpha + \varepsilon$ für endlich viele n. Bezeichnet man $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ die Teilfolge aller Folgenglieder a_n mit $a_n \geq \alpha + \varepsilon$ (d.h. $a_{n_k} \geq \alpha + \varepsilon$), so wäre $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ eine beschränkte Folge und würde daher wegen Satz 23 eine konvergente Teilfolge von $(a_{n_{k_l}})_{l\geq 1}$ mit Grenzwert $\beta := \lim\limits_{l\to\infty} a_{n_{k_l}}$ besitzen. Diese wäre auch Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$ und β daher auch Häufungswert von $(a_n)_{n\geq 1}$. Wegen Satz 20(i) würde $\beta \geq \alpha + \varepsilon > \alpha$ gelten, Widerspruch.

(ii)⇒(i) Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gilt $\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$ (und daher $-\varepsilon < a_n - \alpha < \varepsilon \Rightarrow |\alpha - a_n| < \varepsilon$) für unendlich viele $n \geq 1$, dh α ist Häufungswert der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$.
Angenommen, es würde einen Häufungswert $\beta > \alpha$ geben. Zu $\varepsilon := \frac{\beta-\alpha}{2} > 0$ würde es dann unendlich viele $n \geq 1$ mit $|a_n - \beta| < \frac{\beta-\alpha}{2}$ geben. Für diese n würde $-\frac{\beta-\alpha}{2} < a_n - \beta \Rightarrow a_n > \beta - \frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{2}$ Dh die erste Bedingung aus (ii) wäre für $\varepsilon = \frac{\beta-\alpha}{2}$ verletzt, Widerspruch.

Bemerkung. Völlig analog zeigt man: Ist $\alpha \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge, die Häufungswerte besitzt und nach unten beschränkt ist, so sind äquivalent:

(i) $\alpha = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ gilt $a_n > \alpha - \varepsilon$ für fast alle $n \geq 1$ und $a_n < \alpha + \varepsilon$ für unendlich viele $n \geq 1$.

3 Reelle Funktionen

3.1 Definitionen und einfache Eigenschaften

In diesem Abschnitt wollen wir grundlegende Tatsachen über Funktionen f der Gestalt

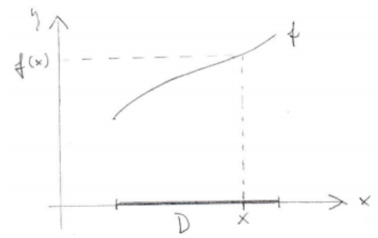
$$f : D \to \mathbb{R}$$

wiederholen. Dabei heißt $D \subseteq \mathbb{R}$ Definitionsmenge und wird meistens ein Intervall sein. Die Menge

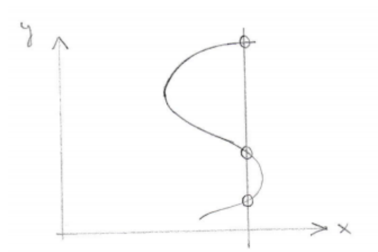
$$f(D) = \{f(x) | x \in D\} = \{y \in \mathbb{R} | \ \exists \ x \in D : f(x) = y\}$$

heißt Wertebereich der Funktion f.

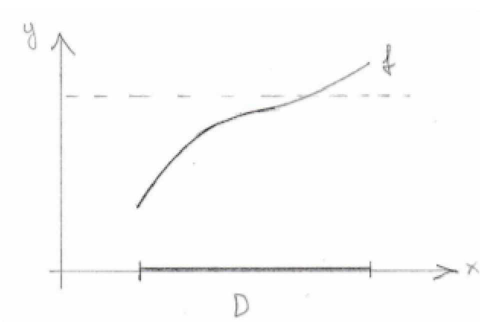
Reelle Funktionen werden durch ihre Graphen veranschaulicht. Ist $f : D \to \mathbb{R}$, so bezeichnet $G_f = \{(x, y) | x \in D, x = f(x)\}$ den Graphen von f.

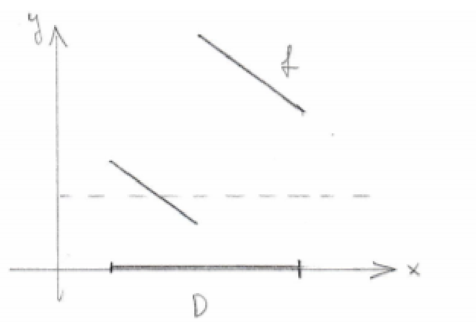


Nicht jede Kurve in der x-y-Ebene ist Graph einer Funktion $f : D(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Die Kurve unten ist z.B. nicht Graph einer Funktion, da einem x-Wert mehrere y-Werte zugeordnet werden.



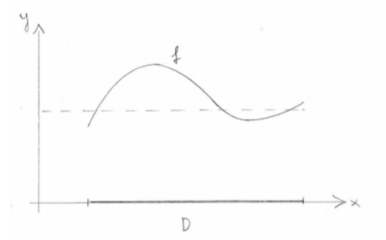
Am Graphen einer Funktion kann man viele ihrer Eigenschaften ablesen, die nachfolgenden beiden Funktionen sind z.B. injektiv, da jede Parallele zur x-Achse, den Graphen höchstens einmal schneidet:



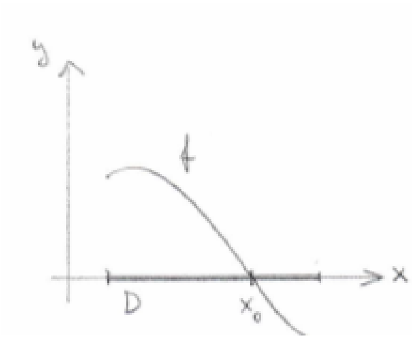


Ammann Judith, Boubenizek Anna, Bredl Vanessa, Emsenhuber Klaudia, Grujić Dragan, Janisch Alexander, Karner Nora, Kohlmann Sara, Lang Clara, Langschwert Mohamed, Mayer Barbara, Moser Laura

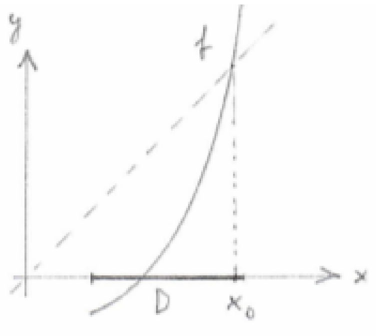
Die nachfolgende Funktion ist nicht injektiv, da es Parallele zur x-Achse gibt, die den Graphen mehrmals schneiden:



Weiters kann man z.B. erkennen:

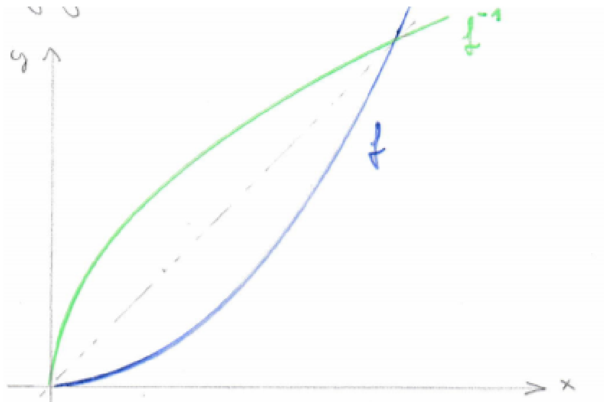


x_0 ist Nullstelle von f (dh $f(x_0) = 0$) da der Graph von f bei x_0 die x-Achse schneidet



x_0 ist ein Fixpunkt von f (dh $f(x_0) = x_0$)) da der Graph von f bei x_0 die 1. Mediane schneidet

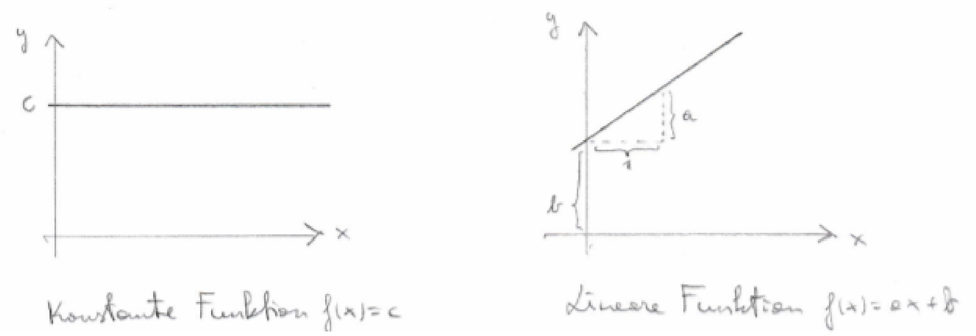
Ist die Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$ injektiv, so ist $f : D \to W$ (mit W=f(D)) bijektiv und man definiert die Umkehrabbildung oder zu f inverse Funktion f^{-1} durch $f^{-1} : W \to D, f^{-1}(y) = x$ wenn $f(x) = y$. Den Graphen von f^{-1} erhält man aus dem von f durch Spiegelung an der 1. Mediane (die durch die Gleichung $y = x$ gegeben ist).



<u>Konvention:</u> Solange nichts anderes festgelegt wird, soll eine Funktion stets den größtmöglichen Definitionsbereich besitzen.

Beispiele (für Funktionen). 1. Konstante Funktion $f(x) = c \ \forall x \in \mathbb{R}$ (für ein $c \in \mathbb{R}$)

2. Lineare Funktion $f(x) = ax + b$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$)



3. Polynomfunktionen (kurz: Polynome), d.h. Funktionen der Gestalt $f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + ... + c_1 x + c_0 = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$ mit $c_0, ..., c_n \in \mathbb{R}$
   Die Größen $c_0, c_1, ..., c_n$ werden Koeffizienten genannt.

Def. Ist beim Polynom $p(x) = c_n x^n + ... + c_1 x + c_0$ der Koeffizient $c_n \neq 0$, so sagt man, der Grad des Polynoms sei n. Dafür schreibt man grad p=n (oder deg p=n). Zusätzlich setzt man grad 0=$-\infty$. (D.h. das Nullpolynom soll Grad -∞ haben.)

Bemerkung. 1. Ist grad p= 1,2 bzw. 3, so spricht man von einem linearen, quadratischen bzw. kubischen Polynom.

2. Mit den Koeffizienten $-\infty + n = n + (-\infty) = (-\infty) + (-\infty) = -\infty \; \forall n \in \mathbb{N}$ sowie $max\{n, -\infty\} = max\{-\infty, n\} = n \; \forall n \in \mathbb{N}$ und $max\{-\infty, -\infty\} = -\infty$ gelten die beiden Rechenregeln
   grad$(p \cdot q) =$ grad $p +$ grad q und grad$(p + q) \leq \max\{\text{grad } p, \text{grad } q\}$
   für alle Polynomfunktionen p und q.

3. Sind f und g zwei Polynomfunktionen und $g \neq 0$, so kann man Division mit Rest durchführen. D.h. es gibt eindeutig bestimmte Polynomfunktionen q und r mit den beiden Eigenschaften $f = qg + r$ und grad r $<$ grad g. (Dabei gilt die Konvention $-\infty < n \; \forall n \in \mathbb{N}$).

Lemma 33. Es sei $p(x) = c_n x^n + ... + c_1 x + c_0$ (mit $c_0, ..., c_n \in \mathbb{R}$). Ist $p(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, so gilt $c_0 = c_1 = ... = c_n = 0$.

Beweis. Angenommen es wäre $c_n > 0$. Für $x \geq 1$ ist dann

$$0 = p(x) = x^n(c_n + \frac{c_{n-1}}{x}) + ... + \frac{c_0}{x^n})$$

und daher

$$\begin{aligned} 0 = c_n + \frac{c_{n-1}}{x} + ... + \frac{c_0}{x^n} &\geq c_n - |\frac{c_{n-1}}{x}| - ... - |\frac{c_0}{x^n}| \\ = c_n - (\frac{|c_{n-1}|}{x} + ... + \frac{|c_0|}{x^n}) &\geq c_n - \frac{|c_{n-1}| + ... + |c_0|}{x} \end{aligned}$$

(denn $x \geq 1 \Rightarrow x^i \geq x \; \forall i \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{x^i} \; \forall i \geq 1 \Rightarrow -\frac{1}{x^i} \geq -\frac{1}{x} \; \forall i \geq 1$).

Daraus folgt aber

$$c_n \leq \frac{|c_{n-1}| + ... + |c_0|}{x} \quad \text{und daher} \quad x \leq \frac{|c_{n-1}| + ... + |c_0|}{c_n} \; \forall x \geq 1.$$

Das ist offensichtlich ein Widerspruch.

Ist $c_n < 0$, so betrachte $0 = -p(x) = -c_n x^n - c_{n-1}x^{n-1} - ... - c_1 x - c_0$.
Nach dem bereits bewiesenen Fall ist $-c_n = ... = -c_0 = 0$ und daher ebenfalls $c_n = ... = c_0 = 0$.

Satz 34. Es seien $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ und $q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ zwei Polynomfunktionen und $a_n \neq 0, b_n \neq 0$. Wenn $p(x) = q(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ dann ist $n = m$ und $a_i = b_j$ für $0 \leq i \leq n$.

Beweis. O.b.d.A sei $n \geq m$. Setze $b_{m+1} = ... = b_n = 0$. Dann ist $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ $\forall x \in \mathbb{R}$ und daher $\sum_{i=0}^{n}(b_i - a_i)x^i = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Wegen Lemma 33 folgt $b_n - a_n = ... = b_0 - a_0 = 0$ und somit $a_i = b_i$ für $0 \leq i \leq n$.

Bemerkung. Satz 34 rechtfertigt Koeffizientenvergleich: Man hat $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ $\forall x \in \mathbb{R}$ beweisen, so muss $a_i = b_i$(für $0 \leq i \leq n$) gelten.

Beispiele (Weitere Beispiele für Funktionen)**.** (4) Rationale Funktionen ´
$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei p und q Polynomfunktionen (und $q \neq 0$) sind, d.h.

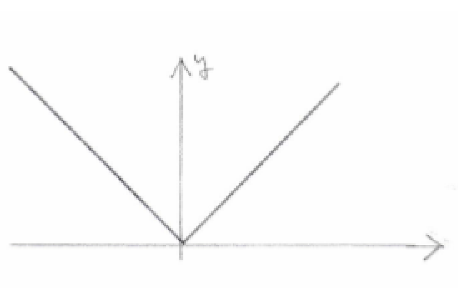
$$f(x) = \frac{a_m x^m + ... + a_1 x + a_0}{b_n x^n + ... + b_1 x + b_0} \quad \text{mit } a_m, ..., a_0, b_n, ..., b_0 \in \mathbb{R}.$$

Der Definitionsbereich von $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ist $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} | q(x) = 0\}$.

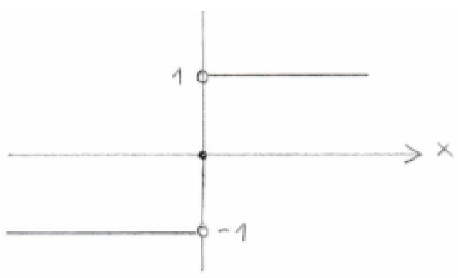
Bemerkung. Die beiden Funktionen $f(x) = 1 + x^2$ und $g(x) = \frac{1-x^4}{1-x^2}$ stimmen auf $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ überein (da $1 - x^4 = (1 + x^2)(1 - x^2)$). Der Definitionsbereich von f ist $\mathbb{R}$, der von g ist $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$.

(5) $f(x) = |x|$ (Betragsfunktion)

(6) $f(x) = sgn x = \begin{cases} 1 \text{ falls } x > 0 \\ 0 \text{ falls } x = 0 \\ -1 \text{ falls } x < 0 \end{cases}$ (Signumfunktion)



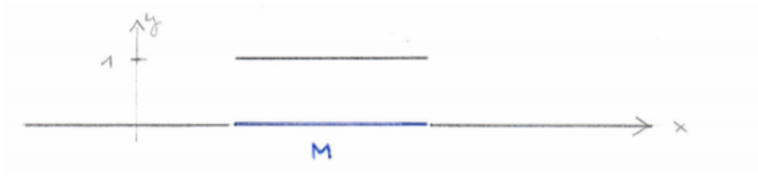
Betragsfunktion



Signumfunktion

(7) charakteristische Funktion (oder Indikatorfunktion) einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}$

$$c_M(x) = \begin{cases} 1 \text{ falls } x \in M \\ 0 \text{ falls } x \notin M \end{cases}$$

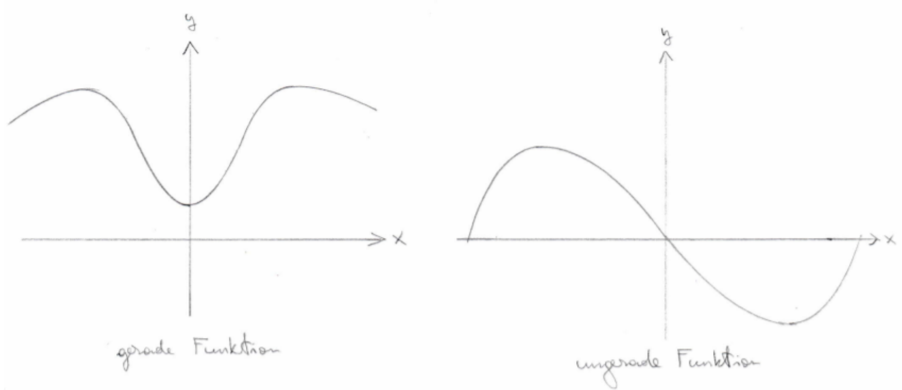


(8) Dirichletfunktion (Spezialfall von (7) für $M = \mathbb{Q}$),

$$c_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 \text{ falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Def. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ mit $-D = D$ (d.h. $x \in D \Leftrightarrow -x \in D$) und $f : D \to \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt gerade (bzw. ungerade) wenn $f(-x) = f(x)\ \forall x \in D$ (bzw. $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in D$).

Bemerkung. Der Graph einer geraden Funktion liegt symmetrisch zur y-Achse, der einer ungeraden Funktion symmetrisch zum Nullpunkt.

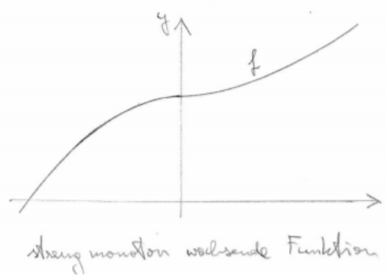


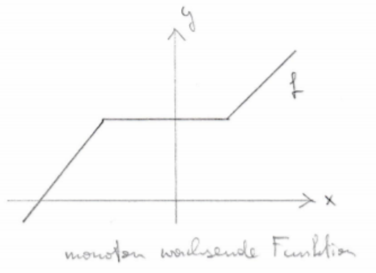
Beispiele. 1. Gerade sind alle geraden Potenzen, d.h. $f(x) = 1 = (x^0), x^2, x^4, ...$ und $|x|$ und alle ihre Linearkombinationen, d.h. $p(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + ... + a_{2n}x^{2n}$ (mit $a_0, a_2, ..., a_{2n} \in \mathbb{R}$).

2. Ungerade sind alle ungeraden Potenzen, d.h. $f(x) = x\ (= x^1), x^3, x^5, ...$ und $sgnx$ und alle ihre Linearkombinationen, d.h. $p(x) = a_1x + a_3x^3 + ... + a_{2n-1}x^{2n-1}$ (mit $a_1, a_3, ..., a_{2n-1} \in \mathbb{R}$)

Def. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt

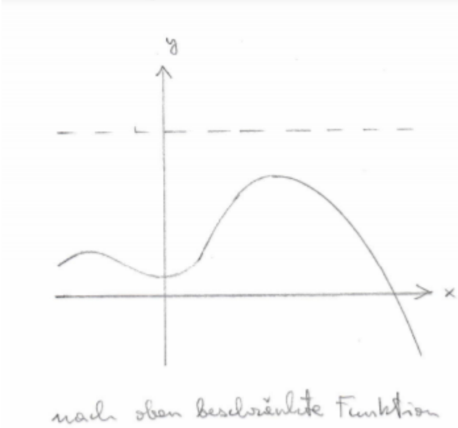
- monoton wachsend wenn für $x, y \in D$ gilt $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- heißt streng monoton wachsend wenn für $x, y \in D$ gilt $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- heißt monoton fallend wenn für $x, y \in D$ gilt $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
- heißt streng monoton fallend wenn für $x, y \in D$ gilt $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

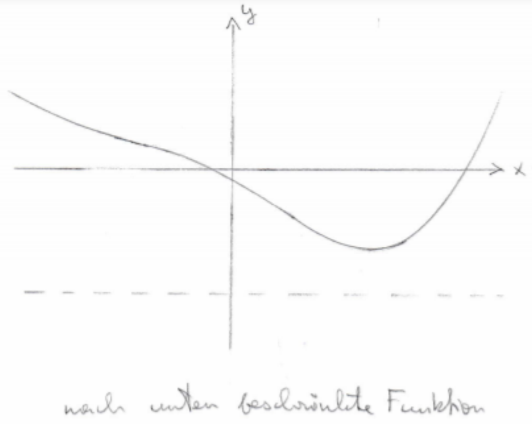


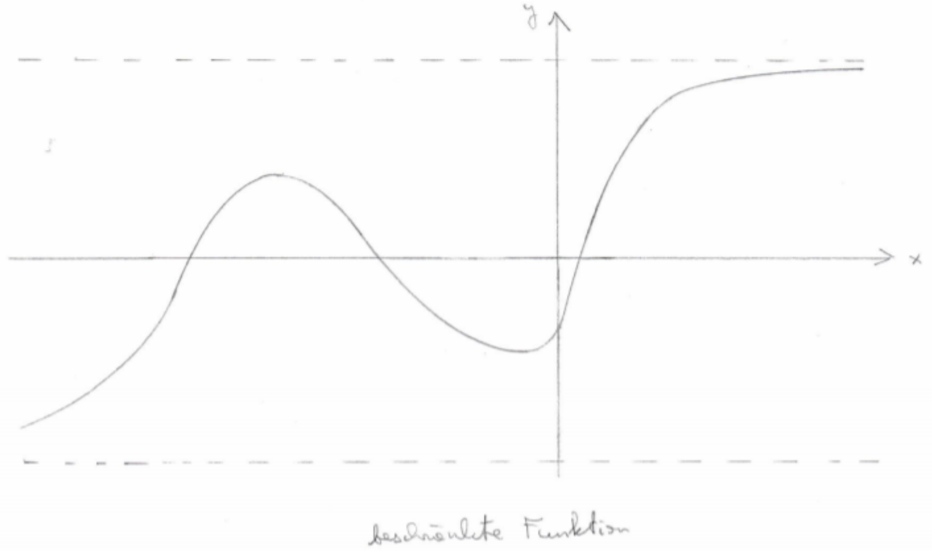


Beispiele. Für jedes $p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ ist $f(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^p$ streng monoton wachsend (Lemma 11).

Def. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt nach oben beschränkt (bzw. nach unten beschränkt bzw. beschränkt) wenn ihre Wertemenge $f(D)$ nach oben beschränkt (bzw. nach unten beschränkt bzw. beschränkt) ist.







Beispiele. 1. $f(x) = x^2$ ist nach unten beschränkt (da $x^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$)

2. $f(x) = -x^{-4} + 1$ ist nach oben beschränkt (da $-x^{-4} + 1 \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$)

3. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist beschränkt (da $a \leq 1 + x^2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$)

3.2 Allgemeine Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktionen

Satz 35. Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Die Potenzfunktion $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^\alpha$ ist positiv (d.h $f(x) > 0\ \forall x > 0$) und

(i) streng monoton wachsend falls $\alpha > 0$

(ii) streng monoton fallend falls $\alpha < 0$

Beweis. Dass $x^\alpha > 0\ \forall x > 0\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ wurde in einer Bemerkung am Ende vom Abschnitt 2.4 bewiesen.

(i) Es sei $0 < x < y$ ($\Rightarrow \frac{y}{x} > 1$). Für $\alpha \in \mathbb{Q}$ gilt $x^\alpha < y^\alpha$ nach Satz 14(i). Sei nun $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Nach Satz 3 $\exists p \in (0, \alpha) \cap \mathbb{Q}$ und nach Satz 25 gibt es eine Folge $(q_n)_{n\geq 1}$ rationaler Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \alpha$. Dann muss $\exists n_0 \geq 1$ sodass $q_n > p\ \forall n \geq n_0$. Daraus folgt

$$1 = (\frac{y}{x})^0 \overset{\text{Kor. 15(i)}}{<} (\frac{y}{x})^p \overset{\text{Kor. 15(i)}}{<} (\frac{y}{x})^{q_n}\ \forall n \geq n_0$$

und daher

$$\frac{y^\alpha}{x^\alpha} \overset{\text{Satz 27(v)}}{=} (\frac{y}{x})^\alpha = \lim_{n\to\infty} (\frac{y}{x})^{q_n} \overset{\text{Satz 20(i)}}{\geq} (\frac{y}{x})^p > 1$$

woraus $x^\alpha < y^\alpha$ folgt.

(ii) Es sei wieder $0 < x < y$. Dann ist $\frac{1}{x^\alpha} \overset{\text{Satz 27 (ii)}}{=} x^{-\alpha} \overset{\text{(i)}}{<} y^{-\alpha} \overset{\text{Satz 27(ii)}}{=} \frac{1}{y^\alpha}$, woraus $y^\alpha < x^\alpha$ folgt.

Satz 36. Sei $a > 0$ fest gewählt. Die Exponentialfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a^x$ ist positiv und

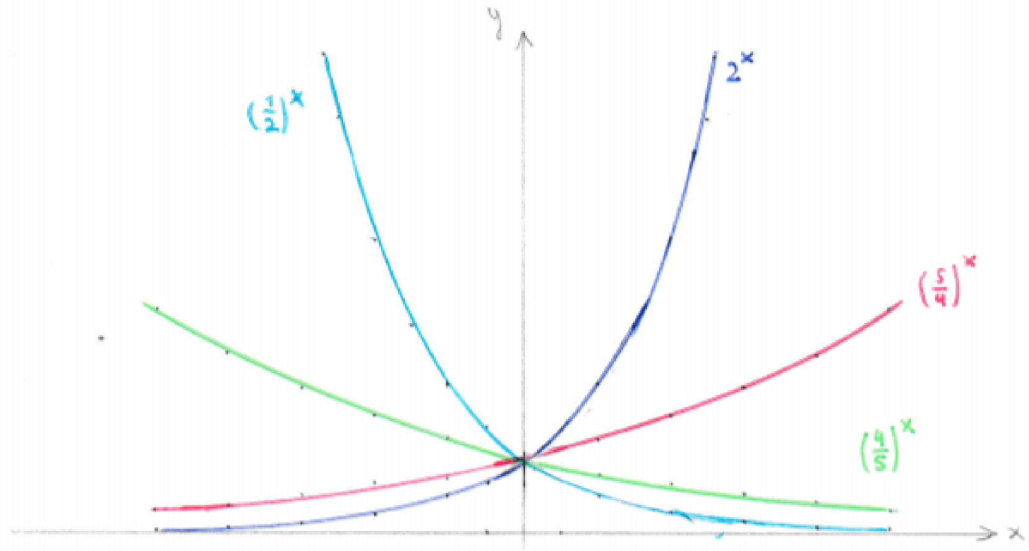
(i) streng monoton wachsend falls $a > 1$

(ii) streng monoton fallend falls $0 < a < 1$.

Beweis. Dass $a^x > 0\ \forall a > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ folgt wieder aus der Bemerkung am Ende vor Abschnitt 2.4.

(i) Es sei $x < y$. Aus Satz 35(i) folgt $1 = 1^{y-x} < a^{y-x} \overset{\text{Satz 27(ii)}}{=} \frac{a^y}{a^x}$ und daher $a^x < a^y$.

(ii) Es sei wieder $x < y$. Da $\frac{1}{a} > 1$ folgt $\frac{1}{a^x} \overset{\text{Satz 27(v)}}{=} (\frac{1}{a})^x \overset{\text{(i)}}{<} (\frac{1}{a})^y \overset{\text{Satz 27(v)}}{=} \frac{1}{a^y}$ woraus $a^x > a^y$ folgt.



Lemma 37. Es sei $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$. Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ (für eine Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ reeller Zahlen) dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x$.

Beweis. Ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, so zeigt man analog zum Beweis von Lemma 26, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = 1$.
Ist $x \in \mathbb{R}$ beliebig, so ist $(x_n - x)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge und daher

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = \lim_{n\to\infty} a^{(x_n-x)+x} &\overset{\text{Satz 27(i)}}{=} \lim_{n\to\infty} (a^{xn-x} \cdot a^x) \\ &\overset{\text{Satz 21(iii)}}{=} (\lim_{n\to\infty} a^{x_n-x}) \cdot (\lim_{n\to\infty} a^x) = 1 \cdot a^x = a^x\end{aligned}$$

Satz 38. Es sei $b > 1$ und $a > 0$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $x \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $b^x = a$.

Beweis. Es gilt $0 < \frac{1}{b} < 1$ und daher $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{b})^n = 0$. Daher gibt es ein $m \geq 1$ mit der Eigenschaft $(\frac{1}{b})^m \leq min\{a, \frac{1}{a}\}$ und daher $b^{-m} \leq a \leq b^m$.
Setze nun $x_1 = -m, y_1 = m$ und $z_1 = \frac{x_1+y_1}{2}(= 0)$. Es gilt nun $b^{x_1} \leq a \leq b^{y_1}$ und $b^{x_1} \leq b^{z_1} \leq b^{y_1}$. Also ist entweder $a \in [b^{x_1}, b^{z_1}]$ oder $a \in (b^{z_1}, b^{y_1}]$. Im ersten Fall setze $x_2 = x_1,\ y_1 = z_1$, im zweiten Fall setze $x_2 = z_1,\ y_2 = y_1$. In beiden Fällen sei $z_2 = \frac{x_2+y_2}{2}$.
Verfahre weiter so: Ist das Intervall $[x_n, y_n]$ mit $b^{x_n} \leq a \leq b^{y_n}$ und $b^{x_n} \leq b^{z_n} \leq b^{y_n}$ (mit $z_n = \frac{x_n+y_n}{2}$) bereits gefunden, so wähle $[x_{n+1}, y_{n+1}] = [x_n, z_n]$ falls $a \in [b^{x_n}, b^{z_n}]$ und $[x_{n+1}, y_{n+1}] = [z_n, y_n]$ falls $a \in (b^{z_n}, b^{y_n}]$.
Nach dem Intervallschachtelungsprinzip (Satz 4) $\exists x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [x_n, y_n]$.
Offenbar gelten $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$ und wegen Satz 20(ii) und Lemma 37 folgt $b^x = \lim\limits_{n\to\infty} b^{x_n} \leq a \leq \lim\limits_{n\to\infty} b^{y_n} = b^x$ und daher $b^x = a$. Die Eindeutigkeit der Lösung folgt aus der (strengen) Monotonie der Exponentialfunktion (Satz 36(i)).

Ammann Judith, Boubenizek Anna, Bredl Vanessa, Emsenhuber Klaudia, Grujić Dragan, Janisch Alexander, Karner Nora, Kohlmann Sara, Lang Clara, Langschwert Mohamed, Mayer Barbara, Moser Laura

Def. Es sei $b > 1$ und $a > 0$. Die nach Satz 38 eindeutig bestimmte Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $b^x = a$ wird als Logarithmus von a zur Basis b bezeichnet. Wir schreiben dafür $x =_b \log a$.

Bemerkung.

1. Von besonderer Bedeutung ist der Logarithmus zur Basis e. Wir schreiben kurz $\log x$. (Oft findet man auch $\ln x$ für logarithmus naturalis.)
2. Für $x \leq 0$ ist ${}_b\log x$ nicht definiert.

Satz 39. Sei $b > 1$. Dann gelten:

(i) ${}_b\log b = 1$

(ii) ${}_b\log 1 = 0$

(iii) ${}_b\log(xy) =_b \log x +_b \log y \qquad \forall x, y > 0$

(iv) ${}_b\log \frac{x}{y} =_b \log x -_b \log y \qquad \forall x, y > 0$

(v) ${}_b\log x^y = y \cdot_b \log x \qquad \forall x > 0\ \forall y \in \mathbb{R}$

(vi) Die Logarithmusfunktion $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) =_b \log x$ ist streng monoton wachsend

(vii) ${}_b\log x < 0\ \forall x \in (0, 1)$ und ${}_b\log x > 0\ \forall x > 1$

Beweis. (i) Folgt aus $b^1 = b$

(ii) Folgt aus $b^0 = 1$

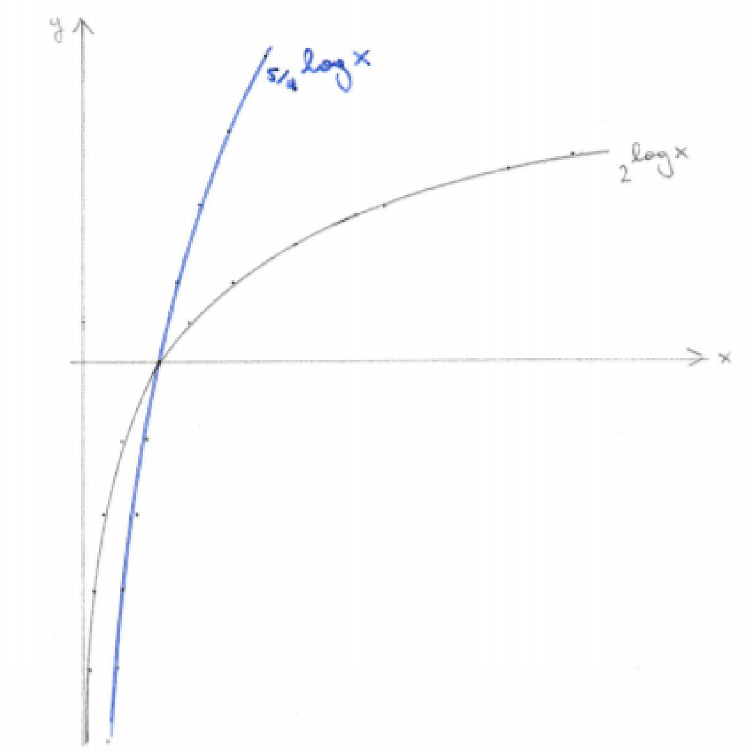
(iii) Wenn $\xi = {}_b\log x,\ \zeta = {}_b\log y$ und $\eta = {}_b\log(xy)$, dann gelten $b^\xi = x$, $b^\zeta = y$ und $b^\eta = xy$ und daher $b^\eta = xy = b^\xi b^\zeta \overset{\text{Satz 27 (i)}}{=} b^{\xi+\zeta}$. Wegen der Eigenschaft von ${}_b\log(xy)$ folgt ${}_b\log(xy) = \eta = \xi + \zeta =_b \log x +_b \log y$.

(iv) Beweist man sehr ähnlich wie (iii). (Verwende Satz 27(ii) statt Satz 27(i))

(v) Beweist man sehr ähnlich wie (iii). (Verwende Satz 27(iii) statt Satz 27(i))

(vi) Es sei $0 < x < y$. Wäre ${}_b\log x \geq {}_b\log y$, so würde wegen Satz 36(i) folgen, dass $x = b^{{}_b\log x} \geq b^{{}_b\log y} = y$, Wid.

(vii) Ist $0 < x < 1$, so ${}_b\log x <_b \log 1 = 0$.
Ist $x > 1$, so ${}_b\log x >_b \log 1 = 0$.



Satz 40. (i) Für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ ist $a^x = e^{x \log a}$

(ii) Für $a, b > 1$ und $x > 0$ gilt $_a\log x = \frac{_b\log x}{_b\log a}$

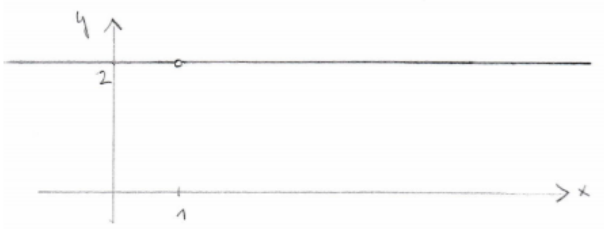
Beweis. (i) Aus $a = e^{\log a}$ folgt $a^x = (e^{\log a})^x = e^{x \ \log a}$

(ii) Aus $x = a^{a \ \log x}$ folgt $_b\log x =_b \log(a^{a \ \log x}) \overset{\text{Satz 39 (v)}}{=} ({_a}\log x) \cdot ({_b}\log a)$

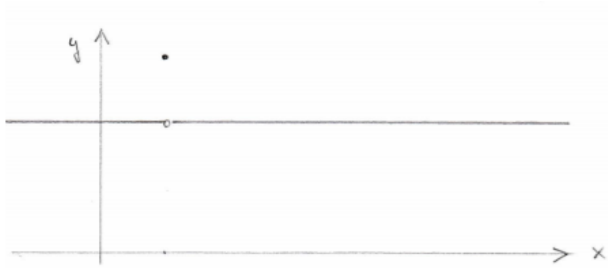
3.3 Grenzwerte von Funktionen

Def. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Für ein $\xi \in \mathbb{R}$ (das nicht unbedingt in D liegen muss) soll gelten, dass $(\xi - c, \ \xi + c)\diagdown\{\xi\} \subseteq D$ für ein gewisses $c > 0$.
Man sagt, die Funktion f konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$ für $x \to \xi$ wenn gilt dass
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$, sodass $0 < |x - \xi| < \delta, \ x \in D \ \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$.
(ξ ist der Wert gegen den man das x gehen lässt)

Beispiele. 1. Es sei $f : \mathbb{R}\diagdown\{1\} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \frac{2x-2}{x-1}$. In diesem Fall ist $D = \mathbb{R}\diagdown\{1\}$ und $\xi = 1$.
Es gilt $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$, denn für $x \in \mathbb{R}\diagdown\{1\}$ und für $\delta > 0$ beliebig gilt
$|f(x) - 2| = |2 - 2| = 0 < \varepsilon$

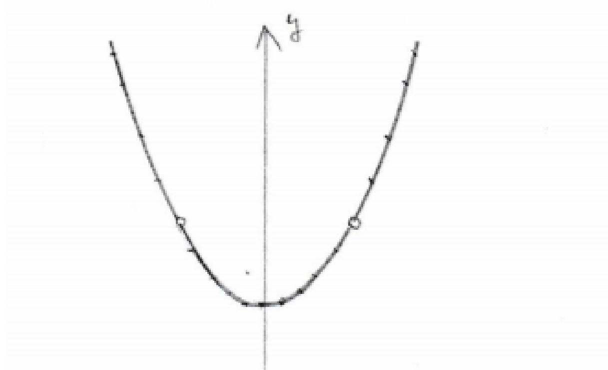


2. Es sei
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\frac{2x-2}{x-1} \text{ für } x\neq 1\\ 3 \text{ für } x=1\end{cases}$$
Auch hier gilt $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$. Der Beweis ist derselbe wie in Beispiel 1.



Merke: Der Wert von f bei ξ ist für den Wert von $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)$ irrelevant.

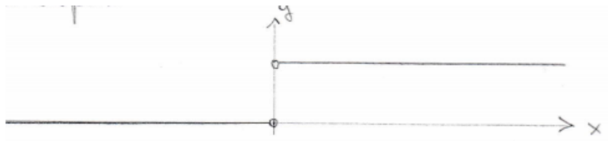
3. Es sei $f:\mathbb{R}\diagdown\{1,-1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^4-1}{x^2-1}=\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2-1}$.
Für $x\notin\{1,-1\}$ ist $f(x)=x^2+1$. Es gilt $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$.
Hier ist $\xi=1$ und man kann z. B. $c=1$ wählen. (Tatsächlich kann jedes $c\in(0,2)$ verwendet werden.)
Es sei $\varepsilon>0$. Wähle $\delta<\ min\{1,\frac{\varepsilon}{3}\}$. Wegen $\delta<1$ gilt dann $\delta^2<\delta$.
Es sei nun $0<|x-1|<\delta$. Dann ist $|x+1|=|(x-1)+2|\leq|x-1|+2$ und daher (beachte $x\notin\{1,-1\}$)
$$\begin{aligned}|f(x)-2|&=|x^2+1-2|=|x^2-1|=|x-1|\cdot|x+1|\leq|x-1|(|x-1|+2)\\&<\delta\cdot(\delta+2)=\delta^2+2\delta<3\delta<\varepsilon\end{aligned}$$
Ähnlich kann man $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=2$ zeigen.



4. Es sei $f(x)=\begin{cases}0 \text{ für } x<0\\ 1 \text{ für } x>0\end{cases}$

Dann existiert $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nicht.
Es sei $\varepsilon=\frac{1}{2}>0$. Wäre $a:=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, so würde es ein $\delta>0$ geben, derart,

dass $0 < |x| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - a| < \frac{1}{2}$. Für $x < 0$ ist $f(x) = 0$ und daher $|a| = |0 - a| < \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; a \leq |a| < \frac{1}{2}$. Für $x > 0$ ist $f(x) = 1$ und daher $|1 - a| < \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; 1 - a \leq |1 - a| < \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; a > \frac{1}{2}$, Wid.



5. Sei $f(x) = x \cdot c_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} x \text{ falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

   Dann ist $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. Es sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \varepsilon$. Wenn $|x| < \delta$ dann $|x \cdot c_{\mathbb{Q}}(x)| = |x| \cdot \underbrace{|c_{\mathbb{Q}}(x)|}_{\leq 1} \leq |x| < \delta = \varepsilon$

Bemerkung. Mit den Begriffen Stetigkeit und Differenzierbarkeit werden wir bald wichtige Anwendungen des Grenzwertbegriffs kennenlernen.

Satz 41. Es seien $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ Funktionen. Dann gelten:

(i) Wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to \xi} f(x)$ existiert, ist er eindeutig bestimmt.

(ii) Gilt $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in D$, so ist $\lim\limits_{x \to \xi} f(x) \leq \lim\limits_{x \to \xi} g(x)$ (wenn beide Grenzwerte existieren).

(iii) Ist $f(x) \leq h(x) \leq g(x)\ \forall x \in D$ und gilt $\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = \lim\limits_{x \to \xi} g(x)$, dann existiert auch $\lim\limits_{x \to \xi} h(x)$ und $\lim\limits_{x \to |xi} h(x) = \lim\limits_{x \to \xi} f(x) = \lim\limits_{x \to \xi} g(x)$.

Beweis. (i) Angenommen, es wäre $\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = a$ und $\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = b$, wobei o.B.d.A $a < b$ gelten soll. Es sei $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$. Dann würde gelten:
$\exists \delta_1 > 0 : 0 < |x - \xi| < \delta_1$ (und $x \in D$) $\Rightarrow |f(x) - a| < \frac{b-a}{2}$
(und daher $f(x) < a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$) und
$\exists \delta_2 > 0 : 0 < |x - \xi| < \delta_2$ (und $x \in D$) $\Rightarrow |f(x) - b| < \frac{b-a}{2}$
(und daher $f(x) > b - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$). Für $0 < |x - \xi| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ (und $x \in D$) würde dann $\frac{a+b}{2} < f(x) < \frac{a+b}{2}$ gelten, ein Widerspruch.

(ii) Es bezeichne $\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = a$ und $\lim\limits_{x \to \xi} g(x) = b$. Angenommen, es wäre $a > b$.
Es sei $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$. Dann würde gelten:
$\exists \delta_1 > 0 : 0 < |x - \xi| < \delta_1$ (und $x \in D$) $\Rightarrow |f(x) - a| < \frac{a-b}{2}$
(und daher $f(x) > a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$) und
$\exists \delta_2 > 0 : 0 < |x - \xi| < \delta_2$ (und $x \in D$) $\Rightarrow |g(x) - b| < \frac{a-b}{2}$
(und daher $g(x) < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$. Für $0 < |x - \xi| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ (und $x \in D$) würde dann $g(x) < \frac{a+b}{2} < f(x)$ gelten, ein Widerspruch.

(iii) Es bezeichne $a := \lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi} g(x)$ und es sei $\varepsilon > 0$. Dann gelten:
$\exists\delta_1 > 0 : 0 < |x-\xi| < \delta_1, x \in D \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$ (und daher $f(x) > a - \varepsilon$)
und
$\exists\delta_2 > 0 : 0 < |x-\xi| < \delta_2, x \in D \Rightarrow |g(x) - a| < \varepsilon$ (und daher $g(x) < a + \varepsilon$)
Für $0 < |x-\xi| < \min\{\delta_1, \delta_2\}, x \in D$ gilt dann
$a - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < a + \varepsilon$,
woraus $-\varepsilon < h(x) - a < \varepsilon$ und daher $|h(x) - a| < \varepsilon$ folgt. Also gilt $\lim_{x\to\xi} h(x) = a$.

Satz 42. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen und die Grenzwerte $\lim_{x\to\xi} f(x)$ und $\lim_{x\to\xi} g(x)$ mögen existieren. Dann gelten:

(i) $\lim_{x\to\xi}(f(x) + g(x))$ existiert und $\lim_{x\to\xi}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to\xi} f(x) + \lim_{x\to\xi} g(x)$,

(ii) $\lim_{x\to\xi}(f(x) \cdot g(x))$ exisitert und $\lim_{x\to\xi}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to\xi} f(x) \cdot \lim_{x\to\xi} g(x)$,

(iii) Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, so existiert $\lim_{x\to\xi}(\alpha \cdot f(x))$ und $\lim_{x\to\xi}(\alpha \cdot f(x)) = \alpha \cdot \lim_{x\to\xi} f(x)$,

(iv) Ist $\lim_{x\to\xi} g(x) \neq 0$, dann existiert $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)}$ und $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to\xi} f(x)}{\lim_{x\to\xi} g(x)}$.

Beweis. Es bezeichne $\lim_{x\to\xi} f(x) = a$ und $\lim_{x\to\xi} g(x) = b$.

(i) Es sei $\varepsilon > 0$. Dann
$\exists\delta_1 > 0 : 0 < |x-\xi| < \delta_1, x \in D \Rightarrow |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$
und
$\exists\delta_2 > 0 : 0 < |x-\xi| < \delta_2, x \in D \Rightarrow |g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Für $0 < |x-\xi| < \min\{\delta_1, \delta_2\}, x \in D$ gilt dann
$|(f(x) + g(x)) - (a + b)| = |(f(x) - a) + (g(x) - b)| \leq |f(x) - a| + |g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

(ii) 1. Fall: $a = 0$. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann
$\exists\delta_1 > 0 : 0 < |x-\xi| < \delta_1, x \in D \Rightarrow |f(x)| < \frac{\varepsilon}{|b|+1}$
und
$\exists\delta_2 > 0 : 0 < |x-\xi| < \delta_2, x \in D \Rightarrow |g(x) - b| < 1$ ($\Rightarrow |g(x)| < |b| + 1$).
Für $0 < |x-\xi| < \min\{\delta_1, \delta 2\}, x \in D$ gilt dann
$|f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < \frac{\varepsilon}{|b|+1} \cdot (|b| + 1) = \varepsilon$.
2. Fall: $b = 0$. Gilt aus Symmetriegründen.
3. Fall: $a, b \neq 0$. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann
$\exists\delta_1 > 0 : 0 < |x-\xi| < \delta_1, x \in D \Rightarrow |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{4|b|}$
und
$\exists\delta_2 > 0 : 0 < |x-\xi| < \delta_2, x \in D \Rightarrow |g(x) - b| < \min\{\frac{\varepsilon}{2|a|}, |b|\}$.
(In der zweiten Aussage ist $|g(x) - b| < |b|$ enthalten, woraus $|g(x)| < 2|b|$ folgt.) Für $0 < |x-\xi| < \min\{\delta_1, \delta_2\}, x \in D$ gilt dann
$|f(x)g(x) - ab| = |(f(x) - a)g(x) + (g(x) - b)a|$
$\leq |f(x) - a| \cdot |g(x)| + |g(x) - b| \cdot |a| < \frac{\varepsilon}{4|b|} \cdot 2|b| + \frac{\varepsilon}{2|a|} \cdot |a| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

(iii) Es sei $g : D \to \mathbb{R}, g(x) = \alpha$. Dann ist $\lim\limits_{x\to\xi} g(x) = \alpha$.
(Wähle $\delta > 0$, derart dass $(\xi - \delta, \xi + \delta)\setminus\{\xi\} \subseteq D$. Für $0 < |x - \xi| < \delta$ gilt dann $|g(x) - \alpha| = |\alpha - \alpha| = 0 < \varepsilon$ für $\varepsilon > 0$ beliebig.) Die Behauptung folgt nun aus (ii).

(iv) Da $b \neq 0$ gilt:
Zu $\frac{|b|}{2} > 0$ $\exists c > 0$ sodass $0 < |x - \xi| < c, x \in D \Rightarrow |g(x) - b| < \frac{|b|}{2}$, woraus $|g(x)| > \frac{|b|}{2}$ folgt. Insbesondere ist $g(x) \neq 0$ für $0 < |x - \xi| < c, x \in D$ und es gilt $\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|b|}$.
Wir zeigen als ersten Schritt $\lim\limits_{x\to\xi} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b}$. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann

$\exists\delta > 0$ (O.B.d.A mit $\delta < c$) sodass $0 < |x - \xi| < \delta, x \in D \Rightarrow |g(x) - b| < \frac{\varepsilon b^2}{2}$.
Für $0 < |x - \xi| < \delta, x \in D$ gilt dann
$|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b}| = \frac{|b-g(x)|}{|bg(x)|} < \frac{2}{b^2}|g(x) - b| < \frac{2}{b^2} \cdot \frac{\varepsilon b^2}{2} = \varepsilon$.
Der allgemeine Fall folgt nun aus (ii) denn

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi}(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}) \overset{(ii)}{=} (\lim_{x\to\xi} f(x)) \cdot (\lim_{x\to\xi} \frac{1}{g(x)}) = \frac{\lim\limits_{x\to\xi} f(x)}{\lim\limits_{x\to\xi} g(x)}.$$

Def. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei auf dem offenen Intervall $(\xi, \xi + c) \subseteq D$ (mit $c > 0$) definiert. Dann heißt $a \in \mathbb{R}$ rechtsseitiger Grenzwert von f (für $x \to \xi+$) wenn gilt, dass
$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ sodass $0 < x - \xi < \delta, x \in D \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$.
Man schreibt dafür $\lim\limits_{x\to\xi+} f(x) = a$.
Ist die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf dem offenen Intervall $(\xi - c, \xi) \subseteq D$ definiert (mit $c > 0$), so heißt $a \in \mathbb{R}$ linksseitiger Grenzwert von f (für $x \to \xi-$) wenn gilt, dass
$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ sodass $0 < \xi - x < \delta, x \in D \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$.
Man schreibt dafür $\lim\limits_{x\to\xi-} f(x) = a$.

Beispiele. 1. Es sei $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } x < 0 \\ 1 \text{ für } x > 0 \end{cases}$ Dann gilt $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1$ und $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 0$. (Es sei $\varepsilon > 0$. Für $\delta > 0$ beliebig gilt: Wenn $0 < x < \delta$ dann $f(x) = 1$ und daher $|f(x) - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$.
Ebenso gilt für $-\delta < x < 0$ dass $f(x) = 0$ und $|f(x) - 0| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$.)

2. Völlig analog überprüft man $\lim\limits_{x\to 0+} sgnx = 1$ und $\lim\limits_{x\to 0-} sgnx = -1$

Bemerkung. 1. Die Aussagen der Sätze 41 und 42 gelten mutatis mutandis für einseitige Grenzwerte.

2. Offenbar gilt : $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)$ exisitiert genau dann wenn sowohl $\lim\limits_{x\to\xi-} f(x)$ als auch $\lim\limits_{x\to\xi+} f(x)$ exisitieren und übereinstimmen. In diesem Fall gilt dann $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = \lim\limits_{x\to\xi+} f(x) = \lim\limits_{x\to\xi-} f(x)$.

3.4 Definition und grundlegende Eigenschaften

Def. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$ und $\xi \in D$. Dann heißt f stetig in ξ, wenn gilt, dass $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |x - \xi| < \delta, x \in D \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$. Die Funktion f heißt stetig, wenn sie in jedem Punkt $\xi \in D$ stetig ist.

Bemerkung. Ist D ein offenes Intervall, so ist f genau dann stetig in $\xi \in D$ wenn $\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = f(\xi)$.
Ist a linksseitiger Randpunkt des Intervalls D (also $D = [a, b], D = [a, b)$ oder $D = [a, +\infty)$) so ist f genau dann stetig in a, wenn $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$.
Ist b rechtsseitiger Randpunkt des Intervalls D, so ist f genau dann stetig in b, wenn $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = f(b)$.

Lemma 43. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig in a und $f(a) > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, sodass $f(x) > 0 \ \forall x \in [a, a + \delta)$.

Beweis. Zu $\varepsilon = \frac{f(a)}{2} > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta, x \in [a, b] \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{f(a)}{2}$. Wählt man o.B.d.A. ein $\delta < b - a$, so ist $|x - a| < \delta, x \in [a, b] \Leftrightarrow a \leq x < a + \delta$ und für diese x gilt dann $f(x) > f(a) - \frac{f(a)}{2} = \frac{f(a)}{2} > 0$.

Bemerkung. Völlig analog gilt (unter sonst gleichen Voraussetzungen):
Ist $f(a) < 0$, so $\exists \delta > 0 : f(x) < 0 \ \forall x \in [a, a + \delta)$. (Der Beweis erfolgt analog oder durch Anwenden von Lemma 43 auf $-f$.)
Ebenso gilt: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig in b und $f(b) > 0$ (bzw. $f(b) < 0$), so $\exists \delta > 0 : f(x) > 0$ (bzw. $f(x) < 0$) $\forall x \in (b - \delta, b]$.
Aus dem bisher Gesagten folgt sofort: Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig in $\xi \in (a, b)$ und $f(\xi) > 0$ (bzw. $f(\xi) < 0$), so $\exists \delta > 0 : f(x) > 0$ (bzw. $f(x) < 0$) für alle $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$.

Satz 44. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $\xi \in D$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die beide in ξ stetig sind. Dann gelten:

(i) $f + g : D \to \mathbb{R}, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ist in ξ stetig,

(ii) $f \cdot g : D \to \mathbb{R}, (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ ist in ξ stetig,

(iii) Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist $\alpha \cdot f : D \to \mathbb{R}, (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ in ξ stetig,

(iv) Wenn $g(\xi) \neq 0$, ist $\frac{f}{g} : D \diagdown \{x \in D | g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$ in ξ stetig.

Beweis. Alle Aussagen folgen sofort aus Satz 42 (bzw. den analogen Aussagen für einseitige Grenzwerte).
Ist z.B. D ein offenes Intervall und $\xi \in D$, so gilt
$\lim\limits_{x \to \xi}(f(x) + g(x)) \overset{\text{Satz 42(i)}}{=} \lim\limits_{x \to \xi} f(x) + \lim\limits_{x \to \xi} g(x) = f(\xi) + g(\xi)$.
Beim Beweis von (iv) ist dabei zu beachten: Ist $g(\xi) > 0$, so gibt es nach Lemma 43 (bzw. der Bemerkung danach) ein $\delta > 0$, sodass $(\xi - \delta, \xi + \delta) \subseteq D$ und $g(x) > 0 \ \forall x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$ (und analog $g(x) < 0 \ \forall x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$ für ein $\delta > 0$ falls $g(\xi) < 0$).

Beispiele. 1. Konstante Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = c(\in \mathbb{R})\ \forall x \in \mathbb{R}$ sind stetig. (Es sei $\xi \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ beliebig. Dann ist $|f(x) - f(\xi)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ für $|x - \xi| < \delta$.)

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$ ist stetig. (Es sei $\xi \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \varepsilon$. Wenn $|x - \xi| < \delta$ dann $|f(x) - f(\xi)| = |x - \xi| < \delta = \varepsilon$.)

3. Alle Polynomfunktionen $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ sind stetig. Das folgt aus Beispielen 1) und 2) und Satz 44 (i), (ii) und (iii).

4. Sind p und $q(\neq 0)$ Polynomfunktionen, so ist die rationale Funktion $f : \mathbb{R}\setminus\{x \in \mathbb{R} | q(x) = 0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ in allen $\xi \in \mathbb{R}$ mit $q(\xi) \neq 0$ stetig. Das folgt aus Beispiel 3) ud Satz 44 (iv).

5. Die Betragsfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$ ist stetig. Ist $\xi > 0$ (bzw. $\xi < 0$) so ist f in ξ stetig, da f dort mit der stetigen Funktion $x \mapsto x$ (bzw. $x \mapsto -x$) übereinstimmt. Es bleibt zu zeigen, dass f in $\xi = 0$ stetig ist. Es sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \varepsilon$. Wenn $|x| = |x - 0| < \delta$ dann $||x| - |0|| = ||x|| = |x| < \delta = \varepsilon$.

6. Die Signumfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = sgn x$ ist in allen $\xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ stetig. Ist $\xi > 0$ (bzw. $\xi < 0$), so ist f in ξ stetig, da f dort mit der stetigen Funktion $x \mapsto 1$ (bzw. $x \mapsto -1$) übereinstimmt. Im Punkt $\xi = 0$ ist f nicht stetig, da $\lim_{x \to 0} sgn x$ nicht existiert.

Satz 45. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}, \xi \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig in ξ,

(ii) Ist $(x_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in D, die $\lim_{n \to \infty} x_n = \xi$ erfüllt, so gilt $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\xi)$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) Es sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists \delta > 0 : |x - \xi| < \delta, x \in D \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$. Wegen $\lim_{n \to \infty} x_n = \xi$ folgt: $\exists n_0 \geq 1$ sodass $|x_n - \xi| < \delta$ $\forall n \geq n_0$. Daraus folgt $|f(x_n) - f(\xi)| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0$, d.h. $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\xi)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Angenommen, f wäre in ξ <u>nicht</u> stetig. Dann würde gelten:
$\exists \epsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in D, |x - \xi| < \delta$ aber $|f(x) - f(\xi)| \geq \varepsilon$.
Das gilt insbesondere, wenn man $\delta = \frac{1}{n}$ (mit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$) wählt, d.h.
$\forall n \geq 1\ \exists x_n \in D$ sodass $|x_n - \xi| < \frac{1}{n}$ aber $|f(x_n) - f(\xi)| \geq \varepsilon$.
D.h. $\lim_{n \to \infty} x_n = \xi$ aber die Folge $(f(x_n))_{n \geq 1}$ konvergiert nicht gegen $f(\xi)$, d.h. (ii) ist falsch.

Korollar 46. Es sei $a > 0$. Die Exponentialfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a^x$ ist stetig.

Beweis. Das folgt aus Lemma 37 und Satz 45.

Bemerkung. 1. Ebenso kann man Satz 45 verwenden, um zu zeigen, dass:

- Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ stetig ist (wegen Satz 21(v)),
- Die Wurzelfunktion $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$ stetig ist (wegen Satz 21(vii)).

2. Umgekehrt kann man Satz 45 verwenden, um Grenzwerte von Folgen zu berechnen: Ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und f in a stetig, so ist auch
$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a) = f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)$,
also z.B. $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |\lim\limits_{n\to\infty} a_n|$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$.

Satz 47. Es seien $D, E \subseteq \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}, g : E \to \mathbb{R}, f(D) \subseteq E$ und $\xi \in D$. Ist f bei ξ stetig und g bei $f(\xi)$ stetig, so ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ bei ξ stetig.

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$. Da g bei $f(\xi)$ stetig ist,

$$\exists \delta > 0 : |y - f(\xi)| < \delta, y \in E \Rightarrow |g(y) - g(f(\xi))| < \varepsilon.$$

Da f bei ξ stetig ist,

$$\exists \eta > 0 : |x - \xi| < \eta, x \in D \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \delta$$

und daher $|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(\xi)| = |g(f(x)) - g(f(\xi))| < \varepsilon$.

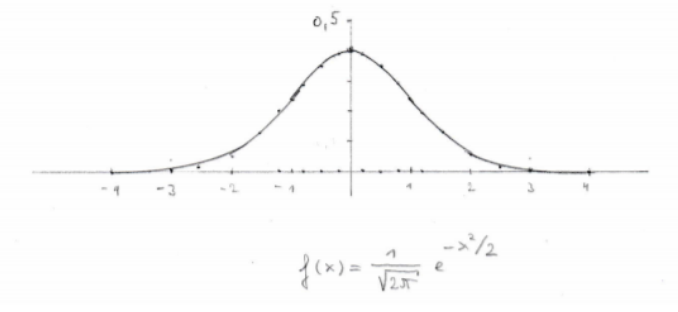
Korollar 48. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann sind auch die Funktionen

$$\begin{aligned} |f| : D \to \mathbb{R}, |f|(x) &= |f(x)|, \\ \min\{f, g\} : D \to \mathbb{R},\ \min\{f, g\}(x) &= \min\{f(x), g(x)\} \\ \text{und } \max\{f, g\} : D \to \mathbb{R},\ \max\{f, g\}(x) &= \max\{f(x), g(x)\} \end{aligned}$$

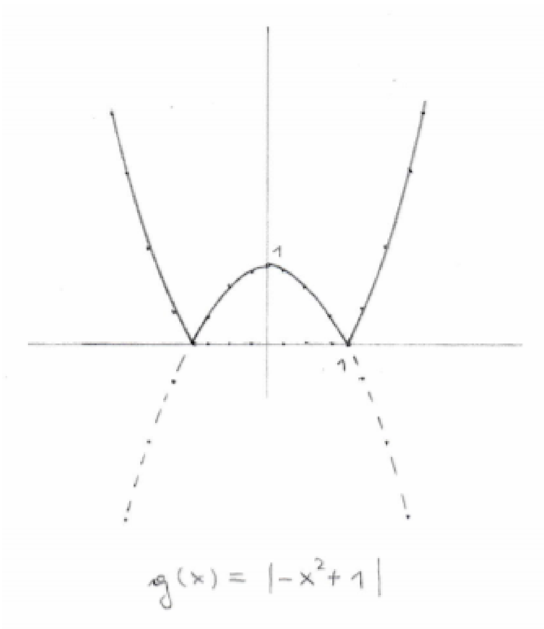
auf D stetig.

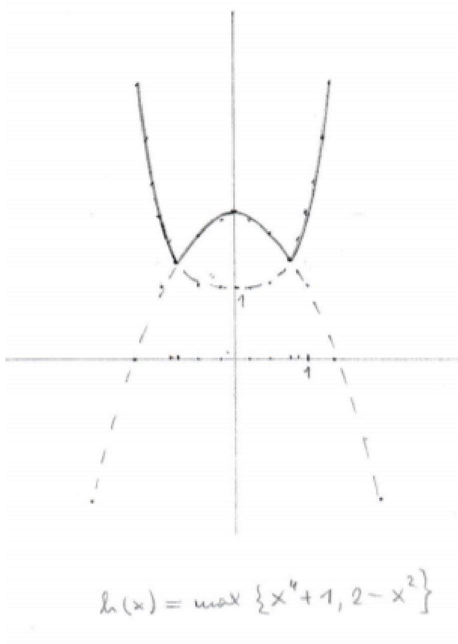
Beweis. Die Stetigkeit von $|f|$ folgt aus der Stetigkeit der Betragsfunktion und Satz 47. Die Stetigkeit von $\min\{f, g\}$ und $\max\{f, g\}$ folgt aus der Stetigkeit der Betragsfunktion, Satz 44 und den beiden Darstellungen $\min\{f, g\} = \frac{1}{2} \cdot (f + g - |f - g|)$ und $\max\{f, g\} = \frac{1}{2} \cdot (f + g + |f - g|)$ (vergleiche Übungsbeispiel 27).

Beispiele. Aus dem bisher Bewiesenen folgt die Stetigkeit einer Fülle von Funktionen, z.B. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, g(x) = |-x^2 + 1|$ oder $h(x) = \max\{x^4 + 1, 2 - x^2\}$.



Ammann Judith, Boubenizek Anna, Bredl Vanessa, Emsenhuber Klaudia, Grujić Dragan, Janisch Alexander, Karner Nora, Kohlmann Sara, Lang Clara, Langschwert Mohamed, Mayer Barbara, Moser Laura





3.5 Stetige Funktionen auf beschränkten, abgeschlossenen Intervallen

Satz 49 (Nullstellensatz)**.** Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$. Dann $\exists c \in (a,b) : f(c) = 0$.

Beweis. Es sei $M := \{x \in [a,b] | f(x) > 0\}$. Dann ist $M \neq \varnothing$ (da $a \in M$) und M ist nach oben beschränkt (durch b), d.h. $\exists c := supM$. Wir zeigen zunächst $a < c < b$, d.h. $c \in (a,b)$. Wegen Lemma 43 $\exists \delta > 0 : f(x) > 0 \ \forall x \in [a, a+\delta)$. Daher muss $c \geq a + \delta > a$ gelten. Ebenso $\exists \delta > 0 : f(x) < 0 \ \forall x \in (b-\delta, b]$ und daher $c \leq b - \delta < b$.
Wir zeigen nun $f(c) = 0$: Wäre $f(c) > 0$, so würde wegen Lemma 43 ein $\delta > 0$ existieren, sodass $f(x) > 0 \ \forall x \in [c, c+\delta)$, d.h. c wäre keine obere Schranke von M, ein Widerspruch. Wäre $f(c) < 0$, so würde ein $\delta > 0$ existieren, sodass $f(x) < 0$ $\forall x \in (c-\delta, c]$, d.h. c wäre nicht das Supremum von M, ebenfalls ein Widerspruch.

Bemerkung. Ebenso gilt: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) < 0 < f(b)$, so $\exists c \in (a,b) : f(c) = 0$. (Der Beweis verläuft analog oder durch Anwenden von Satz 49 auf $-f$.)

Korollar 50 (Zwischenwertsatz)**.** Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an. (D.h. ist $\min\{f(a), f(b)\} \leq y \leq \max\{f(a), f(b)\}$, so $\exists x \in [a,b] : f(x) = y$.)

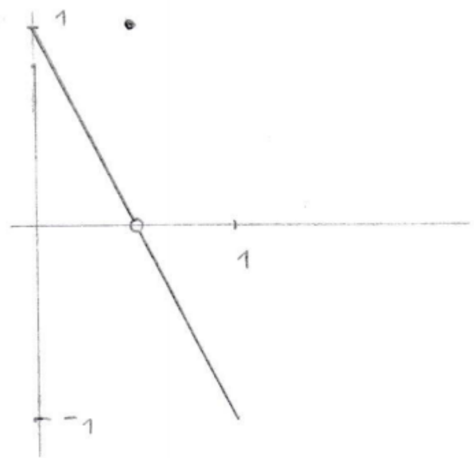
Beweis. Ist $f(a) = f(b)$, so muss $y = f(a) = f(b)$ gelten und man kann $x = a$ wählen.
Es sei nun $f(a) > f(b)$. Für $y = f(a)$ (bzw. $y = f(b)$) wähle $x = a$ (bzw. $x = b$).
Es sei nun $y_0 \in (f(b), f(a))$. Betrachte die Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) - y_0$. Dann ist g ebenfalls stetig, $g(a) = f(a) - y_0 > 0$ und $g(b) = f(b) - y_0 < 0$. Nach dem Nullstellensatz (d.h. Satz 49) $\exists x \in (a,b) : g(x) = 0$, d.h. $f(x) - y_0 = 0$ bzw. $f(x) = y_0$.

Ist $f(a) < f(b)$, so verläuft der Beweis analog oder durch Anwenden des bisher Gezeigten auf $-f$.

Bemerkung. Ist f nicht stetig, so sind die letzten beiden Aussagen falsch. Es sei z.B.

$$f(x) : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 - 2x \text{ für } x \in [0,1] \diagdown \{\frac{1}{2}\} \\ 1 \text{ für } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dann ist $f(0) = 1 > 0, f(1) = -1 < 0$ aber $\nexists x \in [0,1] : f(x) = 0$. Die Funktion f ist allerdings auf $[0,1]$ nicht stetig, da sie bei $\frac{1}{2}$ nicht stetig ist (denn $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = 0 \neq 1 = f(\frac{1}{2})$).



Satz 51. Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt. (D.h. $\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq f(x) \leq M \ \forall x \in [a,b]$.)

Beweis. Angenommen, f wäre nach oben unbeschränkt. Dann würde gelten:
$\forall n \geq 1 \ \exists x_n \in [a,b] : f(x_n) \geq n$. Die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ ist offenbar beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass (Satz 23) besitzt $(x_n)_{n\geq 1}$ daher eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\geq 1}$. Es sei $\xi := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Wegen Satz 20(i) ist $\xi \in [a,b]$. Wegen der Stetigkeit von f und Satz 45 muss $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi)$ gelten. Andererseits folgt aus $f(x_{n_k}) \geq n_k \geq k$, dass $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = +\infty$, ein Widerspruch.
Wäre f nach unten unbeschränkt, so wäre die (ebenfalls stetige) Funktion
$-f : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto -f(x)$ nach oben unbeschränkt, Widerspruch.

Bemerkung. Es ist von entscheidender Bedeutung, dass das Intervall $[a,b]$ beschränkt und abgeschlossen ist:
Die Funktion $f : (0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig und unbeschränkt - das Intervall $(0,1]$ ist allerdings nicht abgeschlossen.
Die Funktion $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ ist stetig und unbeschränkt - das Intervall $[0,+\infty)$ ist allerdings nicht beschränkt.

Satz 52. Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f auf $[a,b]$ Minimum und Maximum an, d.h. $\exists c, d \in [a,b] : f(d) \leq f(x) \leq f(c) \ \forall x \in [a,b]$.

Beweis. Nach Satz 51 ist f nach oben beschränkt, d.h. $\exists M := \sup\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$. Angenommen, es wäre $f(x) < M \ \forall x \in [a,b]$. Betrachte die Funktion
$g : [a,b] \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{M-f(x)}$
Die Funktion g ist stetig und $g > 0$. Nach Satz 51 ist g nach oben beschränkt, d.h. $\exists N > 0 : g(x) \leq N \ \forall x \in [a,b]$. Daraus folgt aber

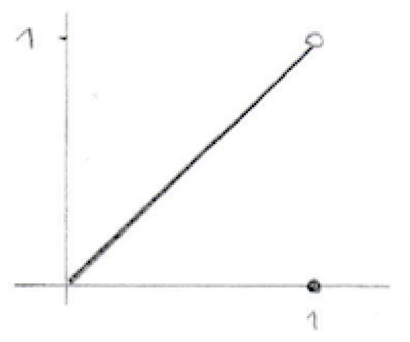
$$\frac{1}{M - f(x)} \leq N \ \forall x \in [a,b] \Rightarrow M - f(x) \geq \frac{1}{N} \ \forall x \in [a,b] \Rightarrow f(x) \leq M - \frac{1}{N} \ \forall x \in [a,b],$$

d.h. M wäre nicht $\sup f([a,b])$, Widerspruch. Also $\exists c \in [a,b] : f(c) = M$.
Die Funktion $-f : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto -f(x)$ ist ebenfalls stetig. Nach dem schon Bewiesenen $\exists d \in [a,b] : -f(x) \leq -f(d) \ \forall x \in [a,b]$ und daher $f(x) \geq f(d) \ \forall x \in [a,b]$.

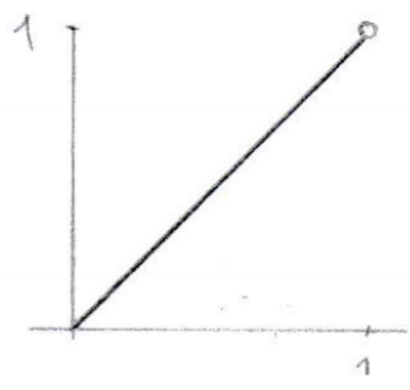
Bemerkung. Sowohl die Stetigkeit von f als auch die Gestalt des Intervalls sind von entscheidender Bedeutung:

1. Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) \begin{cases} x \text{ für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \text{ für } x = 1 \end{cases}$

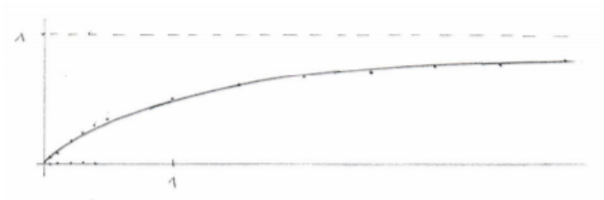
   Die Funktion f ist beschränkt, genauer ist $f([0,1]) = [0,1)$, es gilt aber $f(x) < 1 \ \forall x \in [0,1]$. Die Funktion f ist allerdings nicht stetig.

2. Es sei $f : [0,1) \to \mathbb{R}, f(x) = x$. Die Funktion f ist stetig und beschränkt, genauer ist $f([0,1)) = [0,1)$ und daher $\sup f([0,1)) = 1$, es gilt aber $f(x) < 1$ $\forall x \in [0,1)$. Das Intervall $[0,1)$ ist allerdings nicht abgeschlossen.

3. Es sei $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$. Die Funktion f ist stetig und beschränkt, genauer ist $f([0, +\infty)) = [0, 1) \Rightarrow sup\ f([0, \infty)) = 1$, es gilt aber $f(x) < 1\ \forall x \in [0, +\infty)$. Das Intervall $[0, +\infty)$ ist allerdings nicht beschränkt.



Korollar 53. Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f(I) ebenfalls ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall.

Beweis. Nach Satz 52 $\exists c, d \in I : f(d) \leq f(x) \leq f(c)\ \forall x \in I$, dh. $f(I) \subseteq [f(d), f(c)]$. Wegen Korollar 50 nimmt f jeden Wert $y \in [f(d), f(c)]$ an (dh. $\forall y \in [f(d), f(c)]$ $\exists x \in I : f(x) = y$) da gilt: Ist $f(d) \leq y \leq f(c)$, so $\exists x \in I$ mit $min\{c, d\} \leq x \leq max\{c, d\} : f(x) = y$. Daher gilt auch $[f(d), f(c)] \subseteq f(I)$.

Bemerkung. Ist die Funktion f konstant, dh. $f : [a, b] \to \mathbb{R},\ f(x) = c\ (\in \mathbb{R})\ \forall x \in [a, b]$, so gilt $f([a, b]) = \{c\} = [c, c]$

Satz 54. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend (bzw. fallend). Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f([a, b]) \to [a, b]$ ebenfalls stetig und streng monoton wachsend (bzw. fallend).

Beweis. Es sei f zunächst streng monoton wachsend. Dann ist f injektiv, dh. es existiert eine Umkehrfunktion f^{-1}. Nach Korollar 50 ist $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ und daher $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$.
Die Funktion f^{-1} ist ebenfalls streng monoton wachsend: Ist $f(a) \leq y_1 < y_2 \leq f(b)$, so $\exists x_1, x_2 \in [a, b] : f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$. Wäre $x_1 \geq x_2$, so würde $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$ gelten, ein Widerspruch. Also ist $f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$.
Zu zeigen bleibt die Stetigkeit von f^{-1}. Es sei $\xi \in (a, b)$. Wir zeigen die Stetigkeit von f^{-1} bei $f(\xi)$: Es sei $\varepsilon > 0$, wobei ε oBdA so klein gewählt werden kann, dass $a < \xi - \varepsilon < \xi < \xi + \varepsilon < b$ und daher $f(a) < f(\xi - \varepsilon) < f(\xi) < f(\xi + \varepsilon) < f(b)$.
Wähle ein $\delta < min\{f(\xi) - f(\xi - \varepsilon), f(\xi + \varepsilon) - f(\xi)\}$. Ist $|y - f(\xi)| < \delta$, so ist

$$y > f(\xi) - \delta > f(\xi) - (f(\xi) - f(\xi - \varepsilon)) = f(\xi - \varepsilon) > f(a)$$

und

$$y < f(\xi) + \delta < f(\xi) + (f(\xi + \varepsilon) - f(\xi)) = f(\xi + \varepsilon) < f(b)$$

dh. $y \in [f(a), f(b)]$ und

$$f(\xi - \varepsilon) < f(\xi) - \delta < y < f(\xi) + \delta < f(\xi + \varepsilon)$$

und daher $\xi - \varepsilon < f^{-1}(y) < \xi + \varepsilon$, dh. $|f^{-1}(y) - \xi| < \varepsilon$.

Falls $\xi = a$ oder $\xi = b$ zeigt man die Stetigkeit von f^{-1} in $f(a)$ bzw. $f(b)$ analog (durch eine ëinseitige”Überlegung).
Ist f streng monoton fallend, so zeigt man die Behauptung analog oder durch anwenden des bisher gezeigten auf $-f$.

Ammann Judith, Boubenizek Anna, Bredl Vanessa, Emsenhuber Klaudia, Grujić Dragan, Janisch Alexander, Karner Nora, Kohlmann Sara, Lang Clara, Langschwert Mohamed, Mayer Barbara, Moser Laura

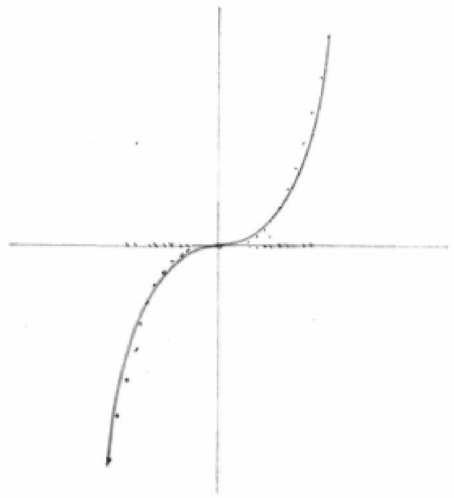
Korollar 55. Sei $b > 1$. Die Logarithmusfunktion $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) =_b \log x$ ist stetig.

Beweis. Es sei $\xi > 0$. Wähle y_1, y_2 mit $0 < y_1 < \xi < y_2$ und setze $x_1 =_b \log y_1$ und $x_2 =_b \log y_2$. Ist $f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}, f(x) = b^x$, so ist $f^{-1} : [y_1, y_2] \to [x_1, x_2]$,
$f^{-1}(y) =_b \log y$.Da f nach Korollar 46 stetig und nach Satz 36(i) streng monoton wachsend ist, ist $f^{-1} =_b \log$ nach Satz 54 ebenfalls stetig.

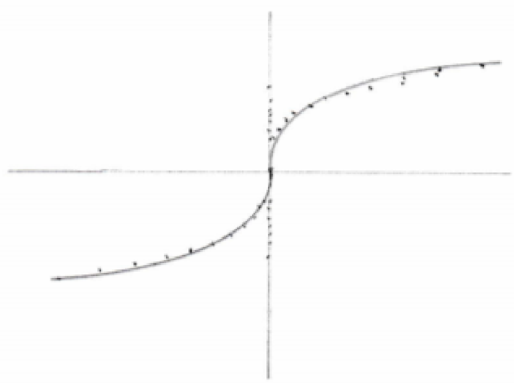
Korollar 56. Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Potenzfunktion $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^\alpha$ ist stetig.

Beweis. Es ist $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$. Nach Korolllar 55 ist die Funktion $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$,
$x \mapsto \log x$ stetig. Nach Satz 44(iii) ist daher auch die Funktion $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \alpha \log x$ stetig. Nach Korollar 46 ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(y) = e^y$ stetig. Aus Satz 47 folgt, dass die Potenzfunktion $x^\alpha = e^{\alpha \log x} = (g \circ f)(x)$ in jedem $x > 0$ stetig ist.

Beispiele. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$.
Für $x < 0$ folgt das aus $f(x) = x^3 = -(-x)^3\ \forall x < 0$ und dem schon bewiesenen Fall.
Sei schließlich $x = 0$. Ist $\varepsilon > 0$, so wähle $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon} > 0$. Aus $|x| < \delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$ folgt $|x^3| = |x|^3 < \varepsilon$.
Die Funktion ist streng monoton wachsend:
Ist $0 < x < y$, so wurde $x^3 < y^3$ in Lemma 11 bewiesen.
Ist $x < y < 0$, so $0 < -y < -x$, woruas $0 < -y^3 = (-y)^3 < (-x)^3 = -x^3$ und daher $x^3 < y^3 < 0$ folgt.
Schließlich folgt aus $x < 0 < y$, dass $x^3 < 0 < y^3$.
Aus Satz 54 folgt, dass die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch $f^{-1}(x) = (sgn\ x) \cdot \sqrt[3]{|x|}$ gegeben ist, ebenfalls stetig ist.
(Wie im Beweis von Korollar 55 kann man die Stetigkeit auf beliebig großen beschränkten, abgeschlossenen Intervallen zeigen, woraus sie für ganz $\mathbb{R}$ folgt.)



$f(x) = x^3$



$f^{-1}(x) = (sgn\ x) \cdot \sqrt[3]{|x|}$

Ammann Judith, Boubenizek Anna, Bredl Vanessa, Emsenhuber Klaudia, Grujić Dragan, Janisch Alexander, Karner Nora, Kohlmann Sara, Lang Clara, Langschwert Mohamed, Mayer Barbara, Moser Laura

3.6 Verschärfung des Stetigkeitsbegriffs

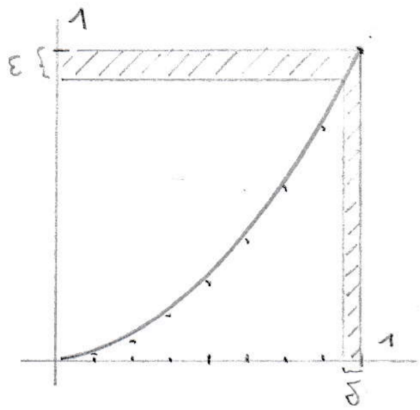
Erinnerung: $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig $\Leftrightarrow \forall x \in D : f$ ist stetig in x
$\Leftrightarrow \forall x \in D \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall y \in D : |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$
Dabei hängt δ sowohl von ε als auch von x ab, dh. $\delta = \delta(\varepsilon, x)$.

Def. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Dann heißt f gleichmäßig stetig (auf D), wenn gilt, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in D : |y - x| < \delta \;\; \Rightarrow \;\; |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Dabei darf δ nur von ε, nicht aber von x abhängen, dh. $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Beispiele. 1. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \; f(x) = x^2$ ist gleichmäßig stetig:
Es sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Aus $|x - y| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ folgt
$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y| \cdot |x + y| = |x - y| \cdot \underbrace{(x + y)}_{\leq 2} \leq 2\,|x - y| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$



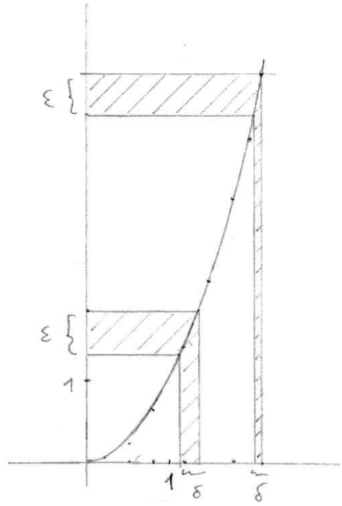
2. $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, \; f(x) = x^2$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig:
Angenommen, f wäre doch gleichmäßig stetig. Dann würde zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ existieren, derart dass $|x^2 - y^2| < 1$ wenn $x, y \geq 0$ nur $|x - y| < \delta$ erfüllen. Wähle nun ein $y_0 > 0$ mit der Eigenschaft $\delta y_0 > 1$ und $x_0 = y_0 + \frac{\delta}{2}$. Dann ist $|x_0 - y_0| = \frac{\delta}{2} < \delta$ aber $|x_0^2 - y_0^2| = |x_0 - y_0| \cdot |x_0 + y_0| = \frac{\delta}{2}(2y_0 + \frac{\delta}{2}) = \delta y_0 + \frac{\delta^2}{4} > \delta y_0 > 1$, Widerspruch.

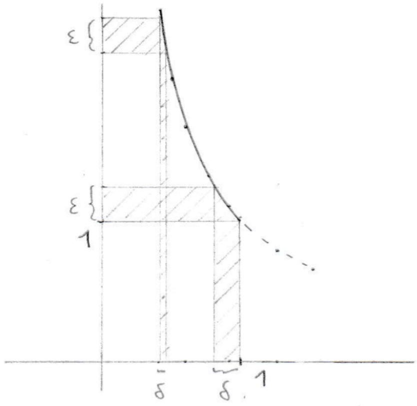
3. $f : (0, 1] \to \mathbb{R}, \; f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig:
Angenommen, f wäre doch gleichmäßig stetig. Dann würde zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ existieren, derartig dass $|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| < 1$ wenn $0 < x, y \leq 1$ und $|x - y| < \delta$ gelten. Wähle nun $x_0 \in (0, 1]$ mit $0 < x_0 < \min\{1, \delta\}$ und $y_0 = \frac{x_0}{2}$. Dann ist $|x_0 - y_0| = \frac{x_0}{2} < \frac{\delta}{2} < \delta$ aber $|\frac{1}{x_0} - \frac{1}{y_0}| = |\frac{1}{x_0} - \frac{2}{x_0}| = | - \frac{1}{x_0}| = \frac{1}{x_0} > 1$, Widerspruch.

Bemerkung. 1. Ist $f : D \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, so ist $f : D \to \mathbb{R}$ (trivialerweise) auch stetig. Die Umkehrung gilt aber nicht, wie Beispiele 2. und 3. zeigen.

2. Ob eine (stetige) Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist, hängt nicht nur von ihrer Abbildungsvorschrift, sondern auch vom Definitionsbereich D ab, wie Beispiele 1. und 2. zeigen.

Ammann Judith, Boubenizek Anna, Bredl Vanessa, Emsenhuber Klaudia, Grujić Dragan, Janisch Alexander, Karner Nora, Kohlmann Sara, Lang Clara, Langschwert Mohamed, Mayer Barbara, Moser Laura





Satz 57. Ist die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist sie bereits gleichmäßig stetig.

Beweis. Angenommen, f wäre nicht gleichmäßig stetig. Dann würde gelten:

$$\exists\, \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta \text{ aber } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Das müsste insbesondere gelten, wenn man $\delta = \frac{1}{n}$ (mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) wählt, dh.

$$\exists\, \varepsilon > 0\ \forall n \geq 1\ \exists x_n, y_n \in [a, b] : |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ aber } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.\ (*)$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass (Satz 23) besitzt $(x_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\geq 1}$. Es bezeichne $\xi := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} ((y_{n_k} - x_{n_k}) + x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} (y_{n_k} - x_{n_k}) + \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = 0 + \xi = \xi,$$

denn $|y_{n_k} - x_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \leq \frac{1}{k} \underbrace{\to}_{k\to\infty} 0$.

Wegen Satz 54 folgt $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(\xi)$ und daher $\lim\limits_{k\to\infty} (f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) - \lim\limits_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(\xi) - f(\xi) = 0$. Das heißt aber, es gibt ein $k_0 \geq 1$, derart dass $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| < \varepsilon\ \forall k \geq k_0$, was $(*)$ widerspricht.

Bemerkung. Wie Beispiele 2. und 3. oben zeigen, ist die Beschränktheit und Abgeschlossenheit des Intervalls, auf dem die stetige Funktion f definiert ist, von entscheidender Bedeutung in Satz 57.

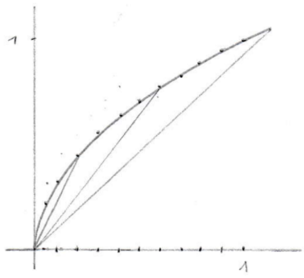
Def. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Man sagt, f sei (auf D) Lipschitz-stetig (oder auch: dehnungsbeschränkt), wenn es ein $L > 0$ gibt, sodass $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|\ \forall x, y \in D$.

Lemma 58. Ist die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, so ist sie bereits gleichmäßig stetig.

Beweis. Es sei $L > 0$, derart dass $|f(x) - f(x)| \leq L|x - y|\ \forall x, y \in D$. Es sei $\varepsilon > 0$. Setze $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$. Gilt $|x - y| < \delta = \frac{\varepsilon}{L}$, so folgt $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$.

Bemerkung. Die Umkehrung von Lemma 58 gilt nicht, wie das folgende Beispiel 1) zeigt.

Beispiele. 1) Es sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$.
Wir zeigen zunächst, dass f stetig ist. Für $0 < x \leq 1$ folgt die Stetigkeit von f im Punkt x aus Korollar 56 (mit $\alpha = \frac{1}{2}$). Zu zeigen bleibt die Stetigkeit im Punkt $x = 0$: Es sei $\varepsilon > 0$. Setze $\delta = \varepsilon^2$. Aus $0 \leq y < \delta = \varepsilon^2$ folgt $|f(y) - f(x)| = |\sqrt{y} - \sqrt{0}| = \sqrt{y} < \varepsilon$. Aus Satz 57 folgt sofort, dass $f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$ sogar gleichmäßig stetig ist. Sie ist allerdings nicht Lipschitz-stetig.
Angenommen, sie wäre doch Lipschitz-stetig, dh. $\exists\, L > 0\ \forall x, y \in [0, 1] : |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq L|x - y|$. Wähle $y = 0$ und $0 < x < \frac{1}{L^2}$. Dann wäre $\sqrt{x} = |\sqrt{x} - \sqrt{0}| \leq L|x - 0| = Lx$ und daher $\sqrt{x} \geq \frac{1}{L}$ und folglich $x \geq \frac{1}{L^2}$, ein Widerspruch.



$f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$

2) Wir haben oben tatsächlich bereits gezeigt, dass die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ Lipschitz-stetig ist, denn $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |(x - y)(x + y)| = |x - y| \cdot |x + y| = |x - y| \cdot \underbrace{(x + y)}_{\leq 2} \leq 2\ |x - y|$.

3) Allgemeiner gilt: Ist $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$, so ist die Funktion

$f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^n$ Lipschitz-stetig, denn

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= |x^n - y^n| = |(x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1})| \\ &= |x-y| \cdot |x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1}| \\ &= |x-y| \cdot \underbrace{(x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1})}_{\leq n} \leq n\ |x-y|.\end{aligned}$$

3.7 Erweiterung des Grenzwertbegriffs

Def. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Es möge ein $c \in \mathbb{R}$ existieren, sodass $(c, +\infty) \subseteq D$. Man sagt, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = a$ (für ein $a \in \mathbb{R}$), wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists M > 0 : x > M \text{ (und } x \in D) \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon.$$

Def. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Es möge ein $c \in \mathbb{R}$ existieren, sodass $(-\infty, c) \subseteq D$. Man sagt, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$ (für ein $a \in \mathbb{R}$), wenn gilt

$$\forall \epsilon > 0\ \exists M > 0 : x < -M \text{ (und } x \in D) \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon.$$

Bemerkung. Alle Aussagen der Sätze 41 und 42 bleiben mutatis mutandis (lat. "mit den nötigen Abänderungen") für Grenzwerte der Gestalt $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty}$ f(x) gültig. Die dort angegebenen Beweise können leicht adaptiert werden. Wir geben hier die analogen Sätze für Grenzwerte der Gestalt $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ohne Beweis an.

Satz 59. Es seien $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ Funktionen. Dann gelten:

(i) Wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existiert, ist er eindeutig bestimmt,

(ii) Gilt $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in D$, so ist $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \leq \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ (wenn beide Grenzwerte existieren),

(iii) Ist $f(x) \leq h(x) \leq g(x)\ \forall x \in D$ und gilt $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, dann existiert auch $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

Satz 60. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen und die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ mögen existieren. Dann gelten:

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+g(x))$ existiert und $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$,

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)\cdot g(x))$ existiert und $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)\cdot g(x)) = (\lim\limits_{x\to+\infty} f(x))\cdot(\lim\limits_{x\to+\infty} g(x))$,

(iii) Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, so existiert $\lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha \cdot f(x))$ und $\lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha \cdot f(x)) = \alpha \cdot \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$,

(iv) Ist $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) \neq 0$, so existiert $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to+\infty} f(x)}{\lim_{x\to+\infty} g(x)}$

Beispiele. 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ (Es sei $\varepsilon>0$. Wähle $M>\frac{1}{\varepsilon}>0$. Aus $x>M>0$ folgt dann $0<\frac{1}{x}<\frac{1}{M}<\varepsilon$. Dh. $0<\frac{1}{x}<\varepsilon$ und daher $|\frac{1}{x}-0|=\frac{1}{x}<\varepsilon$.)

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ (Es sei $\varepsilon>0$. Wähle $M>\frac{1}{\varepsilon}>0$. Aus $x<-M<0$ folgt $0>\frac{1}{x}>-\frac{1}{M}>-\varepsilon$. Dh. $-\varepsilon<\frac{1}{x}<0$ und daher $|\frac{1}{x}-0|=\frac{1}{|x|}<\varepsilon$.)

3) Ist $a>1$ so $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$ (Es sei $\varepsilon>0$. Wähle $M=\frac{\log\varepsilon}{\log a}\overset{\text{Satz 40(ii)}}{=}{}_a\!\log\varepsilon$. Beachte dabei, dass $M<0$ wenn $0<\varepsilon<1$. Dann ist $x<M=\frac{\log\varepsilon}{\log a}=_a\log\varepsilon$ äquivalent zu $a^x<\varepsilon$. Da $a^x>0$ (siehe Satz 36) gilt für $x<M$, dass $0<a^x<\varepsilon$ und daher $|a^x-0|=a^x<\varepsilon$.)

4) Für $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ ist $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$ (Das folgt aus Bsp. 1) und Satz 60(ii) wegen $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x})^n\overset{\text{Satz 60(ii)}}{=}(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x})^n=0^n=0$.)

5) Für $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ ist $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$ (Das folgt aus Bsp. 2) und dem Analogon von Satz 60(ii) für die Grenzwerte der Gestalt $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ wegen $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=(\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x})^n=0$.)

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-3}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}}\overset{\text{Satz 60}}{=}\frac{1-3\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}{1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}=\frac{1-3\cdot0}{1+0}=1$

7) Für $\rho<0$ ist $\lim\limits_{x\to+\infty}x^\rho=0$ (Aus Bsp. 3) folgt insbesondere $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$. Dh. $\exists M>0$ mit der Eigenschaft $y<-M\Rightarrow 0<e^y<\varepsilon$. Es folgt: $x>e^{-\frac{M}{\rho}}\Rightarrow \log x>-\frac{M}{\rho}\Rightarrow\rho\cdot\log x<-M\Rightarrow x^\rho=e^{\rho\log x}\in(0,\varepsilon)$.)

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}=0$ (Es sei o.B.d.A. $0<\varepsilon<1$. Beachte, dass daraus $\log\varepsilon<0$ folgt. Ist nun $|x|>\sqrt{-2\ \log\varepsilon}=\sqrt{2\ |\log\varepsilon|}$, so folgt $x^2>-2\ \log\varepsilon\Rightarrow -\frac{x^2}{2}<\log\varepsilon\Rightarrow 0<e^{-\frac{x^2}{2}}<\varepsilon$.)

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}=0$. (Dies folgt aus Bsp. 8) und Satz 60(ii) bzw. seinem Analogon für Grenzwerte der Gestalt $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.)

Def. Die Funktion $f:D\to\mathbb{R}$ sei auf $(\xi,\xi+c)$ $(\subseteq D)$ definiert für ein $c>0$.
Man sagt, dass $\lim\limits_{x\to\xi+f(x)}=+\infty$, wenn $\forall M>0\ \ \exists\delta>0,$ sodass $0<x-\xi<\delta,\ x\in D\Rightarrow f(x)>M$ Man sagt, dass $\lim\limits_{x\to\xi+f(x)}=-\infty$, wenn $\forall M>0\ \ \exists\delta>0,$ sodass $0<x-\xi<\delta,\ x\in D\Rightarrow f(x)<-M$

Def. Die Funktion $f:D\to\mathbb{R}$ sei auf $(\xi-c,\xi)$ $(\subseteq D)$ definiert für ein $c>0$
Man sagt, dass $\lim\limits_{x\to\xi-f(x)}=+\infty$, wenn $\forall M>0\ \ \exists\delta>0,$ sodass $0<\xi-x<\delta,\ x\in D\Rightarrow f(x)>M$ Man sagt, dass $\lim\limits_{x\to\xi-f(x)}=-\infty$, wenn $\forall M>0\ \ \exists\delta>0,$ sodass $0<\xi-x<\delta,\ x\in D\Rightarrow f(x)<-M$

Def. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei auf $(\xi - c, \xi + c) \setminus \{\xi\}$ $(\subseteq D)$ definiert für ein $c > 0$.
Man sagt, dass $\lim\limits_{x\to\xi f(x)} = +\infty$, wenn $\forall M > 0 \;\; \exists \delta > 0,$ sodass $0 < |x - \xi| < \delta,\; x \in D \Rightarrow f(x) > M$ Man sagt, dass $\lim\limits_{x\to\xi f(x)} = -\infty$, wenn $\forall M > 0 \;\; \exists \delta > 0,$ sodass $0 < |x - \xi| < \delta,\; x \in D \Rightarrow f(x) < -M$

Beispiele. (1) $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$ (Sei $M > 0$. Wähle $\delta = \frac{1}{M}$. Wenn $0 < x < \delta = \frac{1}{M}$, dann $\frac{1}{x} > M$.)

(2) $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$ (Sei $M > 0$. Wähle $\delta = \frac{1}{M}$. Wenn $-\delta < x < 0$, dann $\frac{1}{x} < -\frac{1}{\delta} < -M$.)

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ (Sei $M > 0$. Wähle $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$,. Wenn $0 < |x| = |x - 0| < \delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$, dann $x^2 < \frac{1}{M}$ und daher $\frac{1}{x^2} > M$.)

(4) Sei $b > 1$. Dann ist $\lim\limits_{x\to 0+} {}_b\log x = -\infty$. (Sei $M > 0$. Wähle $\delta = b^{-M}$: Wenn $0 < x < \delta = b^{-M}$, dann ${}_b\log x < -M$.)

Bemerkung. Für Grenzwerte der Gestalt $\lim\limits_{x\to\xi+} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to\xi-} f(x) = \pm\infty$ und $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = \pm\infty$ gelten Regeln, die zu Satz 28 analog sind. Wir geben sie hier ohne Beweis für Grenzwerte der Gestalt $\lim\limits_{x\to\xi+} f(x) = +\infty$ an.

Satz 61. Es seien $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ drei Funktionen mit den Eigenschaften $\lim\limits_{x\to\xi+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\xi+} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\xi+} h(x) = c$ $(\in \mathbb{R})$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

(i) $\lim\limits_{x\to\xi+} (f(x) + g(x)) = +\infty$,

(ii) $\lim\limits_{x\to\xi+} (f(x) + h(x)) = +\infty$,

(iii) $\lim\limits_{x\to\xi+} (\alpha f(x)) = \begin{cases} +\infty \text{ falls } \alpha > 0, \\ -\infty \text{ falls } \alpha < 0, \end{cases}$

(iv) $\lim\limits_{x\to\xi+} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$,

(v) $\lim\limits_{x\to\xi+} \frac{\alpha}{f(x)} = 0$.

Beispiele. 1) Für $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ ist $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ (denn $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x^n} = (\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x})^n \overset{\text{Satz 61(iv)}}{=} +\infty$)

2) Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^{2n}} = +\infty$ (denn $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^{2n}} = (\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2})^n = +\infty$)

3) Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty \text{ falls n gerade,} \\ -\infty \text{ falls n ungerade.} \end{cases}$ (Für $n = 1$ wurde das oben bewiesen. Für gerades n folgt es aus Bsp. 2). Für ungerades $n > 1$ folgt es z. B. aus der folgenden Regel, die nicht im Satz 61 angegeben wurde:

Aus $\lim\limits_{x \to \xi-} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to \xi-} g(x) = -\infty$ folgt $\lim\limits_{x \to \xi-} (f(x) \cdot g(x)) = -\infty$.
Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ folgt $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{x^{2n+1}} = \lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{x^{2n}} \cdot \frac{1}{x} = -\infty$.

Def. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei auf $(c, +\infty)$ $(\subseteq D)$ definiert für ein $c \in \mathbb{R}$.
Man sagt, dass $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, wenn $\forall M > 0 \;\; \exists N > 0$, sodass $x > N,\; x \in D \Rightarrow f(x) > M$.
Man sagt, dass $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, wenn $\forall M > 0 \;\; \exists N > 0$, sodass $x > N,\; x \in D \Rightarrow f(x) < -M$.

Def. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei auf $(-\infty, c)$ $(\subseteq D)$ definiert für ein $c \in \mathbb{R}$.
Man sagt, dass $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, wenn $\forall M > 0 \;\; \exists N > 0$, sodass $x < -N,\; x \in D \Rightarrow f(x) > M$.
Man sagt, dass $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, wenn $\forall M > 0 \;\; \exists N > 0$, sodass $x < -N,\; x \in D \Rightarrow f(x) < -M$.

Bemerkung. Für Grenzwerte der Gestalt $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$ gelten Regeln, die zu Satz 61 analog sind, die wir oben nicht angeben.

Beispiele. 1) Für $\rho > 0$ ist $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\rho = +\infty$ (Sei $M > 0$. Wähle $N = M^{\frac{1}{\rho}}$. Wenn $x > N = M^{\frac{1}{\rho}}$ dann $x^\rho > M$, wobei Satz 35 (i) verwendet wurde.)

2) Für $a > 1$ ist $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ (O.B.d.A. sei $M > 1$. Wähle $N = \frac{\log M}{log\ a} = {}_a\log M$. Wenn $x > N = \frac{\log M}{\log a}$, dann $a^x > M$, wobei Satz 36 (i) verwendet wurde.)

3) Für $b > 1$ ist $\lim\limits_{x \to +\infty} {}_b\log x = +\infty$ (Sei $M > 0$. Wähle $N = b^M$. Wenn $x > N = b^M$ dann ${}_b\log x > M$, wobei Satz 39 (vi) verwendet wurde.)

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ (Sei $M > 0$. Wähle $N = M$. Wenn $x < -N$, dann $x < -M$.)

5) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ (Sei $M > 0$. Wähle $N = \sqrt{M}$. Wenn $x < -N = -\sqrt{M}$, dann $|x| = -x > \sqrt{M}$ und daher $x^2 = |x|^2 > M$.)

6) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ falls } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ gerade,} \\ -\infty \text{ falls } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ ungerade.} \end{cases}$
(Für gerade Exponenten folgt das aus $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{2n} = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2)^n$, Bsp. 5) und einem Analogon zu Satz 61 (iv).
Für ungerade Exponenten folgt es aus $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{2n+1} = \lim\limits_{x \to \infty} x^{2n} \cdot x$ sowie den beiden Grenzwerten $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{2n} = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$.)

3.8 Einige nichttriviale Grenzwerte

Satz 62. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$

Beweis. Wir zeigen zunächst $\lim x \to 0+(1+x)^{1/x} = e$.
Wir haben (als Anwendung von Satz 22) $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ definiert. Daraus folgen nun (vergleiche Übungsbeispiel 53)

$$\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})^{n+1} = \lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})^n \cdot (1+\tfrac{1}{n}) = (\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})^n) \cdot (\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})) = e \cdot 1 = e.$$

und

$$\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n+1})^n = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})} = \frac{e}{1} = e$$

Es sei $\varepsilon > 0$. Dann

$$\exists n_0 \geq 1\ \forall n \geq n_0 : |(1+\tfrac{1}{n})^{n+1} - e| < \varepsilon \text{ und } |(1+\tfrac{1}{n+1})^n - e| < \varepsilon.$$

Es sei $x \in (0, \frac{1}{n_0})$. Dann gibt es genau ein $n \geq n_0 : \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$ (und daher $n \leq \frac{1}{x} < n+1$). Daraus folgt $e - \varepsilon < (1+\frac{1}{n+1})^n < (1+x)^{\frac{1}{x}} < (1+\frac{1}{n})^{n+1} < e+\varepsilon$, dh $|(1+x)^{\frac{1}{x}} - e| < \varepsilon$. Damit ist $\lim\limits_{n\to 0+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ bewiesen.
Statt $\lim\limits_{n\to 0-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ zeigen wir die äquivalente Aussage $\lim\limits_{n\to 0+}(1-x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$.

Im Beweis der Existenz von e haben wir die folgende Relation bewiesen:

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}} = (1+\tfrac{1}{n})^{n+1}\ \forall n \geq 1$$

Daraus folgen

$$\lim_{n\to\infty}(1-\tfrac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty}(1-\tfrac{1}{n+1})^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}} = \frac{1}{e},$$

$$\lim_{n\to\infty}(1-\tfrac{1}{n})^{n+1} = \lim_{n\to\infty}(1-\tfrac{1}{n})^n \cdot (1-\tfrac{1}{n}) = (\lim_{n\to\infty}(1-\tfrac{1}{n})^n) \cdot (\lim_{n\to\infty}(1-\tfrac{1}{n})) = \frac{1}{e} \cdot 1 = \frac{1}{e}$$

und

$$\lim_{n\to\infty}(1-\tfrac{1}{n+1})^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-(\frac{}{1}n+1)^{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})} = \frac{\frac{1}{e}}{1} = \frac{1}{e}$$

Es sei $\varepsilon > 0$. Dann

$$\exists n_0 \geq 1\ \forall n \geq n_0 : |(1-\tfrac{1}{n})^{n+1} - \tfrac{1}{e}| < \varepsilon \text{ und } |(1-\tfrac{1}{n+1})^n - \tfrac{1}{e}| < \varepsilon.$$

Es sei wieder $x \in (0, \frac{1}{n_0})$ und $n \geq n_0$ durch $\frac{1}{n+1 < x \leq \frac{1}{n}}$ festgelegt. Dann ist $-\frac{1}{n} \leq -x < -\frac{1}{n+1}$ und $n \leq \frac{1}{x} < n+1$. Daraus folgt
$\frac{1}{e} - \varepsilon < (1-\frac{1}{n})^{n+1} < (1-x)^{\frac{1}{x}} < (1-\frac{1}{n+1}{}^n < \frac{1}{e} + \varepsilon$,
dh. $|(1-x)^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{e}| < \varepsilon$. Damit ist $\lim\limits_{n\to 0+}(1-x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$ bewiesen.

Daraus erhält man

$$\lim_{x\to 0+}(1-x)^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+}\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0+}(1-x)^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e$$

und somit

$$\lim_{x\to 0-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+}(1-x)^{-\frac{1}{x}} = e.$$

Korollar 63. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x \ \forall x \in \mathbb{R}$

Beweis. Für $x = 0$ ist die Aussage trivial, da in diesem Fall $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = \lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1 = e^0$ gilt. Es sei darum ab jetzt $x \neq 0$.
Es sei $\varepsilon > 0$. Dann

$$\exists \delta > 0, \text{ sodass } 0 < |y| < \delta \Rightarrow |(1+y)^{\frac{1}{y}} - e| < \varepsilon.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{n} = 0$ folgt: $\exists n_0 \geq 1\ \forall n \geq n_0 : 0 < |\frac{x}{n}| < \delta$ und daher $|(1+n)^{\frac{n}{x}} - e| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$, dh. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^{\frac{n}{x}} = e$.

Wegen der Stetigkeit der Potenzfunktion (Korollar 56) folgt mit Hilfe von Satz 45

$$\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{x}{n})^n = \lim_{n\to\infty}((1+\tfrac{x}{n})^{\frac{n}{x}})^x = (\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{x}{n})^{\frac{n}{x}})^x = e^x.$$

Korollar 64. (i) Für $b > 1$ gilt $\lim\limits_{x\to 0}\frac{{}_b\log(x+1)}{x} = \frac{1}{\log b}$. Insbesondere gilt $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x} = 1$.

(ii) Für $a > 0$ gilt $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \log a$. Insbesondere gilt $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

Beweis. (i) Wegen der Stetigkeit der Logarithmusfunktion (Korollar 55) folgt aus Satz 62

$$\lim_{x\to 0}\frac{{}_b\log(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot{}_b\log(x+1) \overset{\text{Satz 39(v)}}{=} \lim_{x\to 0}{}_b\log(x+1)^{\frac{1}{x}} =$$
$${}_b\log(\lim_{x\to 0}(x+1)^{\frac{1}{x}}) ={}_b \log e \overset{\text{Satz 40(ii)}}{=} \frac{\log e}{\log b} = \frac{1}{\log b}.$$

(ii) Die Behauptung ist trivial für $a = 1$, da in diesem Fall $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-1}{x} = 0 = \log 1 = \log a$. Es sei darum ab jetzt $a \neq 1$.

Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion (Korollar 46) gilt

$\lim\limits_{x\to 0}(a^x - 1) = a^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, woraus wegen (i)

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{\log((a^x-1)+1)} = \frac{1}{1} = 1$$

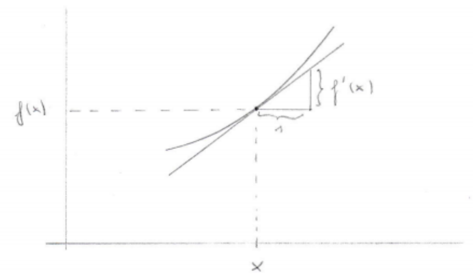
folgt und daher

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \log a\cdot\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x\log a} \overset{\text{Satz 39(v)}}{=} \log a\cdot\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{\log a^x} = \log a\cdot\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{\log((a^x-1)+1)} =$$
$$\log a\cdot 1 = \log a.$$

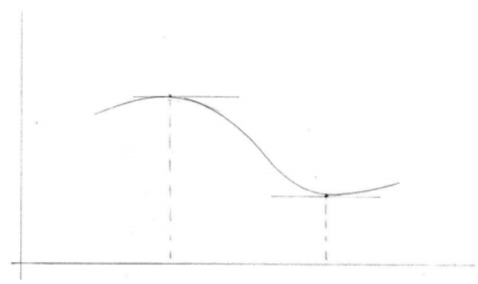
4 Differenzierbare Funktionen

4.1 Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion - Definition und grundlegende Eigenschaften

1) Berechnung der Steigung einer Tangente an den Graphen einer Funktion

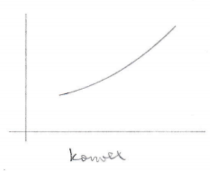


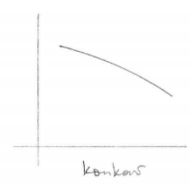
2) Verbunden mit 1): Die suche nach lokalen Extrema einer "glatten"Funktion. In solchen Punkten erwartet man wegen 1), dass $f'(x) = 0$, da die Tangenten dort Steigung 0 haben.



(Wenn $f'(x) = 0$ gilt, folgt aber nicht sofort, dass f an der Stelle x eine lokale Extremstelle hat - siehe später Wendestelle)

3) Ebenfalls verbunden mit 1): Bestimmen, ob eine ("glatte") Funktion in einem bestimmten Bereich konvex oder konkav ist. Ist die Funktion konvex, so wird die Steigung der Tangente in x mit wachsendem x zunehmen, ist sie konkav, so wird die Steigung der Tangente in x mit wachsendem x abnehmen.





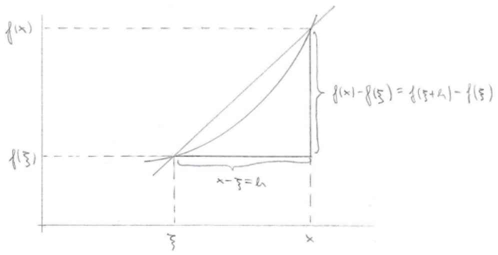
4) Physikalische Anwendungen wie z.B. die Momentangeschwindigkeit = Ableitung des Weges nach der Zeit.

Ammann Judith, Boubenizek Anna, Bredl Vanessa, Emsenhuber Klaudia, Grujić Dragan, Janisch Alexander, Karner Nora, Kohlmann Sara, Lang Clara, Langschwert Mohamed, Mayer Barbara, Moser Laura

Def. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\xi \in I$. Man sagt, die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei in Punkt ξ differenzierbar, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}$ existiert.
Der Grenzwert wird in diesem Fall mit $f'(\xi)$ bezeichnet und die Ableitung von f an der Stelle ξ genannt.

Def. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ wird differenzierbar genannt, wenn sie in jedem Punkt $\xi \in I$ differenzierbar ist.

Bemerkung. 1) Anschaulich beschreibt die Def. den Grenzübergang eines Differenzenquotienten, bei dem der Abstand $x - \xi = h \to 0$ geht:



2) Ist $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar (d.h. in jedem Punkt $x \in I$ differenzierbar), so erhält man eine neue Funktion $f' : I \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$, die Ableitung der Funktion f.

Beispiele. 1) Jede konstante Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = c$ $(\in \mathbb{R})$ ist differenzierbar und $f'(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$ (denn $\lim\limits_{x \to \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \underbrace{\lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{c-c}{x-\xi}}_{=0} = 0$)

2) Die Identität $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$ ist differenzierbar und $f'(x) = 1 \forall x \in \mathbb{R}$ (denn $\lim\limits_{x \to \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \underbrace{\lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{x-\xi}{x-\xi}}_{=1} = 1$).

3) Ist $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, so ist die Potenzfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^n$ differenzierbar und $f'(x) = nx^{n-1}\ \forall x \in \mathbb{R}$
denn $\lim\limits_{x \to \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim\limits_{x \to \xi} \frac{x^n-\xi^n}{x-\xi} = \lim\limits_{x \to \xi} \frac{(x-\xi)(x^{n-1}+x^{n-2}\xi+...+x\xi^{n-2}+\xi^{n-1})}{x-\xi} = \lim\limits_{x \to \xi} x^{n-1} + x^{n-2}\xi + ... + x\xi^{n-2} + \xi^{n-1} = n\xi^{n-1}$ (Dabei wurde im letzten Schritt die Stetigkeit von Polynomfunktionen verwendet).

Korollar 65. (i) Es sei $a > 0$. Die Exponentialfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a^x$ ist differenzierbar und $f'(x) = \log a \cdot a^x (\forall x \in \mathbb{R})$.
Insbesondere ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x$ differenzierbar und $f'(x) = e^x = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$.

(ii) Es sei $b > 1$. Die Logarithmusfunktion $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) =_b \log x$ ist differenzierbar und $f'(x) = \frac{1}{\log b \cdot x}$ $(\forall x > 0)$
Insbesondere ist die Funktion $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \log x$ differenzierbar und $f'(x) = \frac{1}{x}$ $(\forall x > 0)$

Beweis. (i) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h}-a^x}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} \overset{\text{Korrolar 64(ii)}}{=} a^x \cdot \log a$$

(ii) Für festes $x > 0$ gilt $\lim\limits_{h\to 0} \frac{h}{x} = 0$ und daher

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{{}_b\log(a+h) - {}_b\log x}{h} \overset{\text{Satz 39(iv)}}{=} \frac{1}{x} \lim_{h\to 0} \frac{{}_b\log(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} \overset{\text{Korollar 64 (i)}}{=} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log b}$$

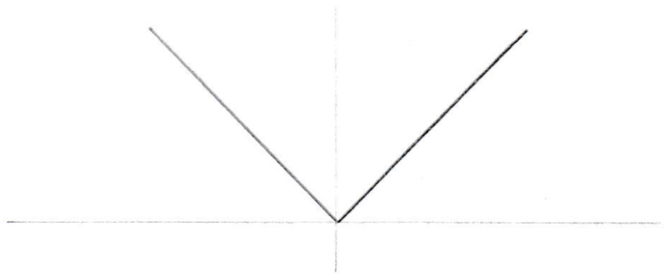
Satz 66. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\xi \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$. Ist die Funktion f in einem Punkt ξ differenzierbar, so ist f im Punkt ξ stetig.

Beweis. $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = \lim\limits_{x\to\xi}(f(\xi) + \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \cdot (x-\xi)) = f(\xi) + (\lim\limits_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}) \cdot \lim\limits_{x\to\xi}(x-\xi) = f(\xi) + f'(\xi) \cdot 0 = f(\xi)$

Bemerkung. 1) Die Umkehrung von *Satz* 66 gilt nicht. Wir betrachten als Bsp. die Betragsfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$ im Punkt $\xi = 0$. Diese Funktion ist in allen Punkten $x \neq 0$ differenzierbar:
Ist $x > 0$, so ist $f'(x) = 1$. Für hinreichend kleines h ist auch $x + h > 0$ und daher $f(x+h) = x + h$.
Daraus folgt $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$

Ist $x < 0$, so ist $f'(x) = -1$. Für hinreichend kleines h ist auch $x + h < 0$ und daher $f(x+h) = -(x+h) = -x - h$.
Daraus folgt $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-x-h-(-x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-x-h+x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} -\frac{h}{h} = -1$

Im Punkt $x = 0$ ist f stetig aber nicht differenzierbar, denn
$\lim\limits_{h\to 0+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0+} \frac{0+h-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0+} \frac{h}{h} = 1$ aber
$\lim\limits_{h\to 0-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0-} \frac{-(0+h)-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0-} \frac{h}{h} = -1$



2) Es gibt (schwer vorstellbare) Funktionen, die in jedem Punkt stetig, aber nirgends differenzierbar sind.

Ammann Judith, Boubenizek Anna, Bredl Vanessa, Emsenhuber Klaudia, Grujić Dragan, Janisch Alexander, Karner Nora, Kohlmann Sara, Lang Clara, Langschwert Mohamed, Mayer Barbara, Moser Laura

Satz 67. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\xi \in I$ und $f, g : I \to \mathbb{R}$ beide in ξ differenzierbar. Dann gelten:

(i) $f + g : I \to \mathbb{R}$ ist in ξ differenzierbar und $(f+g)'(\xi) = f'(\xi) + g'(\xi)$

(ii) $f - g : I \to \mathbb{R}$ ist in ξ differenzierbar und $(f-g)'(\xi) = f'(\xi) - g'(\xi)$

(iii) $\alpha f : I \to \mathbb{R}$ ist in ξ differenzierbar (mit $\alpha \in \mathbb{R}$) und $(\alpha f)'(\xi) = \alpha \cdot f'(\xi)$

(iv) $f \cdot g : I \to \mathbb{R}$ ist in ξ differenzierbar und $(f \cdot g)'(\xi) = f'(\xi) \cdot g(\xi) + f(\xi) \cdot g'(\xi)$ (Produktregel)

(v) Ist $g(\xi) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ in ξ differenzierbar und $(\frac{f}{g})'(\xi) = \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g(\xi)^2}$ (Quotientenregel)

Beweis.

(i) $\frac{(f+g)(x)-(f+g)(\xi)}{x-\xi} = \frac{f(x)+g(x)-(f(\xi)+g(\xi))}{x-\xi} = \underbrace{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}_{\to f'(\xi)} + \underbrace{\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}}_{\to g'(\xi)} \xrightarrow[x\to\xi]{} f'(\xi) + g'(\xi)$

(iv) $\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(\xi)}{x-\xi} = \frac{f(x)\cdot g(x) - f(\xi)\cdot g(\xi)}{x-\xi} = \frac{f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(\xi) + f(x)\cdot g(\xi) - f(\xi)\cdot g(\xi)}{x-\xi}$
$= \frac{(f(x)-f(\xi))\cdot g(\xi) + f(x)\cdot(g(x)-g(\xi))}{x-\xi} = \underbrace{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}_{\to f'(\xi)} \cdot g(\xi) + \underbrace{f(x)}_{\to f(\xi)} \cdot \underbrace{\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}}_{\to g'(\xi)} \xrightarrow[x\to\xi]{}$
$f'(\xi)\cdot g(\xi) + f(\xi)\cdot g'(\xi)$
Dabei wurde bei $f(x) \xrightarrow[x\to\xi]{} f(\xi)$ Satz 66 verwendet.

(iii) $(\alpha \cdot f)'(\xi) \overset{\text{(iv)}}{=} 0 \cdot f(\xi) + \alpha \cdot f'(\xi) = \alpha \cdot f'(\xi)$

(ii) $(f-g)'(\xi) = (f + (-1)\cdot g)'(\xi) \overset{\text{(i),(iii)}}{=} f'(\xi) + (-1)\cdot g'(\xi) = f'(\xi) - g'(\xi)$

(v) Wir zeigen zunächst $(\frac{1}{g})'(\xi) = -\frac{g'(\xi)}{g(\xi)^2}$
$\frac{1}{x-\xi}\cdot(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(\xi)}) = -\underbrace{\frac{1}{g(x)\cdot g(\xi)}}_{\to \frac{1}{g(\xi)^2}} \cdot \underbrace{\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}}_{\to g'(\xi)} \xrightarrow[x\to\xi]{} -\frac{1}{g(\xi)^2}\cdot g'(\xi)$
Dabei wurde verwendet, dass (nach Satz 66) die Funktion g bei ξ stetig ist. Daraus folgt (mit Hilfe von Satz 44), dass auch die Funktion $x \mapsto \frac{1}{g(x)\cdot g(\xi)}$ bei ξ stetig ist. Aus (iv) folgt nun
$(\frac{f}{g})'(\xi) = (f\cdot\frac{1}{g})'(\xi) = f'(\xi)\cdot\frac{1}{g(\xi)} + f(\xi)\cdot(\frac{1}{g})'(\xi) = f'(\xi)\cdot\frac{1}{g(\xi)} + f(\xi)\cdot(-\frac{g'(\xi)}{g(\xi)^2})$
$= \frac{f'(\xi)\cdot g(\xi) - f(\xi)\cdot g'(\xi}{g(\xi)^2}$.

Korollar 68. (i) Es sei $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ ist differenzierbar und $f'(x) = n \cdot x^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

(ii) Es seien $k, d \in \mathbb{R}$ und $k \neq 0$. Die lineare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = k \cdot x + d$ ist differenzierbar und $f'(x) = k \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

(iii) Es seien $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ (und $a_n \neq 0$). Die Polynomfunktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ ist differenzierbar und $p'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ... + 2a_2 x + a_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} ka_k x^{k-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

(iv) Es sei $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Die Funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$ ist differenzierbar und $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Beweis. (i) Induktion nach n. Der Fall $n = 1$ wurde bereits als Bsp. bewiesen. Für $f(x) = x^1 = x$ ist ja $f'(x) = 1 = 1 \cdot x^0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
Ist die Behauptung für $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ bereits bewiesen, so folgt für $f(x) = x^{n+1} = x \cdot x^n$ wegen Satz 67 (iv) und der Induktionsvoraussetzung
$f'(x) = 1 \cdot x^n + x \cdot nx^{n-1} = x^n + nx^n = (n+1)x^n$

(ii) Aus Satz 67 (i) und (iii) folgt $f'(x) = k \cdot 1 + 0 = k$

(iii) Aus Satz 67 (i) und (iii) folgt:

$$\begin{aligned} p'(x) &= a_n \cdot nx^{n-1} + a_{n-1} \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} + ... + a_2 \cdot 2x + a_1 \cdot 1 + 0 \\ &= na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ... + 2a_2 x + a_1 \\ &= \sum_{k=1}^{n} ka_k x^{k-1}. \end{aligned}$$

(iv) Aus Satz 67 (v) und (i) folgt $f'(x) = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}$

Bemerkung. 1) Korollar 68 (i) wurde bereits einmal in einem Bsp. direkt bewiesen.

2) Korollar 68 (i) und (ii) sind (wichtige) Spezialfälle von Korollar 68 (iii).

3) Korollar 68 (iii) und Satz 67 (v) ermöglichen es, alle rationalen Funktionen zu differenzieren.

Beispiele. 1) Ist $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$, so ist $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2) Ist $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x+2}$, so ist

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x+2)-(x^2-2x+1)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x^2-2x+4x-4-x^2+2x-1}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

3) Ist $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^2} - 3 + 5x$, so ist

$$f'(x) = 2 \cdot (-\frac{3}{x^4}) + 4 \cdot (-\frac{2}{x^3}) + 0 + 5 = -\frac{6}{x^4} - \frac{8}{x^3} + 5 \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

4) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^4 e^x$, so ist $f'(x) = 4x^3 \cdot e^x + x^4 \cdot e^x = (x^4 + 4x^3) \cdot e^x \forall x \in \mathbb{R}$

5) Ist $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x \log x$, so ist $f'(x) = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1 \forall x > 0$

6) Ist $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\log x-x$, so ist $f'(x)\overset{\text{Bsp. 5)}}{=}\log x+1-1=\log x\forall x>0$

7) Ist $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\log x}{x}$, so ist

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}\forall x>0$$

8) Ist $f:(0,+\infty)\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{\log x}$, so ist

$$f'(x)=\frac{0\cdot\log x-1\cdot\frac{1}{x}}{(\log x)^2}=-\frac{1}{x\cdot(\log x)^2}\forall x\in(0,+\infty)\setminus\{1\}$$

Satz 69. Es sei $I\subseteq\mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\xi\in I$ und $f:I\to\mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist in ξ differenzierbar,

(ii) es gibt ein $\alpha\in\mathbb{R}$ und eine Funktion $r:I\to\mathbb{R}$, derart dass

$$f(x)=f(\xi)+\alpha\cdot(x-\xi)+r(x)\forall x\in I \text{ und } \lim_{x\to\xi}\frac{r(x)}{x-\xi}=0.$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) Es sei $\alpha:=f'(\xi)$ und $r:I\to\mathbb{R}$ sei definiert durch $r(x):=f(x)-f(\xi)-f'(\xi)\cdot(x-\xi)$. Dann ist (aufgrund dieser Definition) $f(x)=f(\xi)+f'(\xi)\cdot(x-\xi)+r(x)\forall x\in I$ und

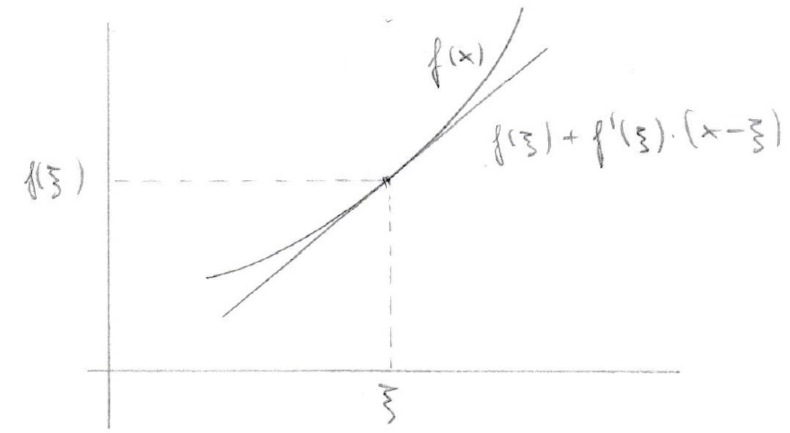
$$\lim_{x\to\xi}\frac{r(x)}{x-\xi}=\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)-f'(\xi)\cdot(x-\xi)}{x-\xi}=\lim_{x\to\xi}\left(\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}-f'(\xi)\right)=$$
$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}-f'(\xi)=f'(\xi)-f'(\xi)=0.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Es ist

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=\lim_{x\to\xi}\frac{\alpha\cdot(x-\xi)+r(x)}{x-\xi}=\lim_{x\to\xi}\left(\alpha+\frac{r(x)}{x-\xi}\right)=\alpha+\lim_{x\to\xi}\frac{r(x)}{x-\xi}=\alpha+0=\alpha,$$

d.h. f ist bei ξ differenzierbar und $f'(\xi)=\alpha$.

Bemerkung. 1) Ist die Funktion $f:I\to\mathbb{R}$ im Punkt ξ differenzierbar, so ist die Tangente von f im Punkt ξ durch die Funktion $t:I\to\mathbb{R}$ mit $t(x)=f(\xi)+f'(\xi)\cdot(x-\xi)$ gegeben. Offenbar ist t ja eine lineare Funktion, die im Punkt ξ den selben Wert annimmt wie f (denn $t(\xi)=f(\xi)+f'(\xi)\cdot(\xi-\xi)=f(\xi)+f'(\xi)\cdot 0=f(\xi)$) und die im Punkt ξ die selbe Steigung hat (denn $t'(x)=0+f'(\xi)\cdot 1=f'(\xi)\forall x\in I$).



2) Satz 69 besagt, dass sich die Funktion f an der Stelle ξ sehr gut durch ihre Tangente $x \to f(\xi) + f'(\xi) \cdot (x - \xi)$ approximieren lässt.

3) Satz 69 zeigt auch, dass die Differenzierbarkeit einer Funktion f in einem Punkt ξ eine wesentlich stärkere Bedingung ist als die Stetigkeit von f im Punkt ξ. Ist $f(x) = f(\xi) + \alpha \cdot (x - \xi) + r(x)$, so ist die Stetigkeit von f bei ξ zur (wesentlich schwächeren) Bedingung $\lim\limits_{x \to \xi} r(x) = 0$ äquivalent. Ist f hingegen differenzierbar bei ξ, muss sogar $\lim\limits_{x \to \xi} \frac{r(x)}{x-\xi} = 0$ gelten, d.h. $r(x)$ geht für $x \to \xi$ wesentlich schneller gegen 0 als $x - \xi$.

4) Satz 69 ist auch von großer Bedeutung, um die Ableitung einer Funktion im Mehrdimensionalen zu definieren (wo man nicht mehr mit Differenzenquotienten arbeiten kann).

Satz 70. (Kettenregel) Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ zwei offene Intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$, $f(I) \subseteq J$ und $\xi \in I$. Ist f in ξ differenzierbar und g in $f(\xi)$ differenzierbar, so ist auch die Verknüpfung $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in ξ differenzierbar und es gilt $(g \circ f)'(\xi) = g'(f(\xi)) \cdot f'(\xi) = (g' \circ f)(\xi) \cdot f'(\xi)$.

Beweis. Da g in $f(\xi)$ differenzierbar ist, gibt es eine Funktion s, derart dass $g(y) = g(f(\xi)) + g'(f(\xi)) \cdot (y - f(\xi)) + s(y)$ und $\lim\limits_{y \to f(\xi)} \frac{s(y)}{y - f(\xi)} = 0$.
Setzt man nun

$$\bar{s}(y) = \begin{cases} \frac{s(y)}{y-f(\xi)} & \text{für } y \neq f(\xi) \\ 0 & \text{für } y = f(\xi) \end{cases}$$

so ist $s(y) = \bar{s}(y) \cdot (y - f(\xi))$ und $\lim\limits_{y \to f(\xi)} \bar{s}(y) = 0$, d.h. $\bar{s}$ ist bei $f(\xi)$ stetig.
Es folgt

$$\begin{aligned} g(y) &= g(f(\xi)) + g'(f(\xi)) \cdot (y - f(\xi)) + \bar{s}(y) \cdot (y - f(\xi)) \\ &= g(f(\xi)) + (g'(f(\xi)) + \bar{s}(y)) \cdot (y - f(\xi)) \end{aligned}$$

und daher $g(f(x)) - g(f(\xi)) = (g'(f(\xi)) + \bar{s}(f(x))) \cdot (f(x) - f(\xi))$ und somit $\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(\xi)}{x - \xi} = (g'(f(\xi)) + \bar{s}(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$.

Da f bei ξ differenzierbar ist, ist f bei ξ stetig. D.h. $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$ und daher $\lim\limits_{x\to\xi} \bar{s}(f(x)) = \lim\limits_{y\to f(\xi)} \bar{s}(y) = 0$. Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\xi} \frac{(g\circ f)(x) - (g\circ f(\xi))}{x-\xi} &= \lim_{x\to\xi}(g'(f(\xi)) + \underbrace{\bar{s}(f(x))}_{\to 0}) \cdot \underbrace{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}_{\to f'(\xi)} \\ &= (g'(f(\xi)) + 0)\cdot f'(\xi) = g'(f(\xi))\cdot f'(\xi)\end{aligned}$$

Bemerkung. Der wesentlich einfachere "Beweis"

$\frac{g(f(x))-g(f(\xi))}{x-\xi} = \frac{g(f(x))-g(f(\xi))}{f(x)-f(\xi)} \cdot \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \underbrace{\to}_{x\to\xi} g'(f(\xi))\cdot f'(\xi)$

ist leider nicht völlig korrekt, da $f(x) = f(\xi)$ für $x \neq \xi$ möglich ist. In diesem Fall hätter der Bruch $\frac{g(f(x))-g(f(\xi))}{f(x)-f(\xi)}$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$.

Korollar 71. (i) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^\alpha$ ist differenzierbar und $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}\ \forall x > 0$.

(ii) Die Funktion $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$ ist differenzierbar und $f'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} \forall x > 0$.

(iii) Es sei $n \in \mathbb{N}\diagdown\{0, 1\}$. Die Funktion $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[n]{x}$ ist differenzierbar und $f'(x) = \frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}} \forall x > 0$

Beweis. (i) Aus $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha\cdot\log x}$ folgt $f'(x) = e^{\alpha\log x}\cdot\frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{x}\cdot x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$

(ii) Wegen $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ folgt die Behauptung aus (i) mit $\alpha = \frac{1}{2}$:
$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(iii) Wegen $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ folgt die Behauptung aus (i) mit $\alpha = \frac{1}{n}$:
$f'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

Bemerkung. In Korollar 71 ist also (iii) ein Spezialfall von (i) (mit $\alpha = \frac{1}{n}$) und (ii) ein Spezialfall von (iii) (mit $n = 2$).

Beispiele. 1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (2x^2 + 3x)^2$. Die Ableitung f' kann wegen $f(x) = 4x^4 + 12x^3 + 9x^2$ mit Hilfe von Korollar 68(iii) berechnet werden:
$f'(x) = 16x^3 + 36x^2 + 18x$.
Es ist aber auch möglich, die Kettenregel zu verwenden:
$f'(x) = 2(2x^2+3x)\cdot(4x+3) = 2(8x^3+12x^2+6x^2+9x) = 2(8x^3+18x^2+9x) = 16x^3 + 36x^2 + 18x$

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ (Wegen $x^2+2x+3 = (x+1)^2+2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ ist der Definitionsbereich ganz $\mathbb{R}$.) Hier ist (wegen Korollar 71(ii)):
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+2x+3}}\cdot(2x+2) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2^{4x^2-x-7}$. Es ist $f'(x) = \log 2 \cdot 2^{4x^2-x-7} \cdot (8x-1)$.

4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\log(x^2+2)}$
(Wegen $x^2 + 2 \geq 2 > 1 \forall x \in \mathbb{R}$ ist $\log(x^2+2) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ und der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.)
Hier kann man f als Verknüpfung $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$ der drei Funktionen $f_1(x) = x^2 + 2, f_2(y) = \log y$ und $f_3(z) = \frac{1}{z}$ auffassen und die Kettenregel zweimal anwenden:
$f'(x) = -\frac{1}{(\log(x^2+2))^2} \cdot \frac{1}{x^2+2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(x^2+2)(\log(x^2+2))^2}$
(Man kann natürlich auch $f = \log$ mit $g(x) = x^2+2$ und $h(y) = \frac{1}{\log y}$ auffassen und verwenden, da $h'(y) = -\frac{1}{y(\log y)^2}$ in Bsp. 8 oben bereits berechnet wurde.)

5) Es sei $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \log|x|$. Dann ist $f'(x) = \frac{1}{x}\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
1. Fall: $x > 0$. Dann ist $f(x) = \log x$ und $f'(x) = \frac{1}{x}$ nach Korollar 65(ii).
2. Fall: $x < 0$. Dann ist $f(x) = \log(-x)$ und daher (nach Korollar 65(ii) und der Kettenregel):
$f'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$

Satz 72. Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton, $\xi \in (a,b)$, f bei ξ differenzierbar und $f'(\xi) \neq 0$. Dann ist $g = f^{-1} : f([a,b]) \to [a,b]$ bei $y := f(\xi)$ differenzierbar und es gilt
$g'(y) = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(\xi)} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y)}$

Beweis. Für $y \in f([a,b])$ sei $x := f^{-1}(y) = g(y)$. Wegen Satz 54 ist g ebenfalls stetig, d.h. aus $y \to \eta$ folgt $x \to \xi$. Aus
$\frac{g(y)-g(\eta)}{y-\eta} = \frac{x-\xi}{f(x)-f(\xi)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}$ folgt $\lim\limits_{y \to \eta} \frac{g(y)-g(\eta)}{y-\eta} = \lim\limits_{x \to \xi} \frac{1}{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}} = \frac{1}{f'(\xi)}$

Beispiele. 1. Es sei $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $f : (0,+\infty) \to (0,+\infty), f(x) = x^n$. Dann ist $f'(x) = nx^{n-1}$ und $g(y) = \sqrt[n]{y} \overset{\text{Satz 72}}{\Rightarrow} g'(y) = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n(y^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{y^{n-1}}}$

2. Sei $f : \mathbb{R} \to (0,+\infty), f(x) = e^x$. Dann ist $f'(x) = e^x$ und $g(y) = \log y \overset{\text{Satz 72}}{\Rightarrow} g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$

3. Sei $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \log x$. Dann ist $f'(x) = \frac{1}{x}$ und $g(y) = e^y \overset{\text{Satz 72}}{\Rightarrow} g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x = e^y$.

Bemerkung. 1. Ist bekannt, dass $g = f^{-1}$ bei $f(\xi)$ differenzierbar ist, so folgt die Formel für $g'(\eta)$ aus der Kettenregel. Aus $g(f(x)) = x\ \forall x \Rightarrow g'(f(\xi) \cdot f'(\xi)) = 1$, dh $g'(\eta)f'(\xi) = 1$. Im Beweis von Satz 72 ist die Differenzierbarkeit von g bei η allerdings bewiesen worden.

2. In Satz 72 war f auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall definiert, in den Beispielen aber nicht. Das ist kein Problem, da man die Funktion immer auf ein passendes Intervall $[a,b]$ mit $\xi \in (a,b)$ einschränken kann.

Bemerkung.

Statt f'(x) werden auch andere Schreibweisen für die Ableitung verwendet, z.B. die von LEIBNIZ stammende $\frac{df}{dx}, \frac{df(x)}{dx}$, bzw. $\frac{d}{dx}f(x)$. Setzt man $y = f(x), z = g(y)$, so wird die Kettenregel zu $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$ und Satz 72 zu $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$. Diese Schreibweise ist sehr suggestiv, da man scheinbar wie mit Brüchen rechnen kann. (Tatsächlich sind derartige Rechnungen nicht immer korrekt.)

Def. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist die Funktion $f' : I \to \mathbb{R}$ in Punkt $\xi \in I$ differenzierbar, so schreibt man $f''(\xi)$ (bzw. $\frac{d^2f}{dx^2}(\xi)$ in Leibnitz'scher Notation) für die Ableitung von f' an der Stelle ξ und spricht von der 2. Ableitung von f im Punkt ξ. Ist die Funktion $f' : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar (dh. existiert $f''(\xi)\ \forall\, \xi \in I$), so erhält man eine Funktion $f'' : I \to \mathbb{R}$. Man kann nun weiter so verfahren und erhält (sofern sie existieren) Ableitungen $f'(x), f''(x), f'''(x), ...,$ allgemein $f^{(n)}(x)$ mit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ (bzw. $\frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2f(x)}{dx^2}, \frac{d^3f(x)}{dx^3}, ..., \frac{d^nf(x)}{dx^n}$ in der Leibnitzschen Notation).

Beispiele.

1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f''(x) = 4 \cdot 3x^2 = 12x^2 \Rightarrow f'''(x) = 12 \cdot 2x = 24x \Rightarrow f^{(4)}(x) = 24 \Rightarrow f^{(n)}(x) = 0\ \forall\ n \geq 5$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x\ \forall\ n \geq 1$
3. Es sei $a > 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$. Dann ist $f^{(n)}(x) = (\log a)^n \cdot a^x\ \forall\ n \geq 1$. (Induktion nach n: $n = 1$ wurde in Korrolar 65(i) bewiesen und $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)\prime}(x) = (\log a)^n \cdot (\log a) \cdot a^x = (\log a)^{n+1} \cdot a^x$.
4. Es sei $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log x$. Dann ist $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n}$ (Induktion nach n: $n = 1$ wurde in Korollar 65 (ii) bewiesen, denn $f'(x) = \frac{1}{x} = (-1)^2\frac{0!}{x}$ und $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!(-n)x^{-n-1} = (-1)^{n+2}\frac{n!}{x^{n+1}}$

Bemerkung.

1. Aus der Differenzierbarkeit einer Funktion f folgt nicht, dass ihre Ableitung f' wieder differenzierbar ist. Es sei z.B.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ für } x \geq 0 \\ -x^2 \text{ für } x < 0 \end{cases}$$

Dann ist $f'(x) = 2x\ \forall x > 0$ und $f'(x) = -2x\ \forall x < 0$ und $f'(0) = 0$, denn

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^2-0}{x-0} = \lim_{x\to 0+} x = 0$$

und

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x^2-0}{x-0} = \lim_{x\to 0-} (-x) = 0.$$

Dh $f'(x) = 2|x|$ und f' ist im Punkt $x = 0$ nicht differenzierbar. (Wäre f' im Punkt 0 differenzierbar, so wäre $x \to |x| = \frac{1}{2} \cdot 2|x|$ im Punkt 0 differenzierbar, Widerspruch)

2. Allgemein folgt aus der n-maligen Differenzierbarkeit einer Funktion nicht, dass sie $(n+1)$-mal differenzierbar ist. Es sei z.B.

   $$g(x) = \begin{cases} x^3 \text{ für } x \geq 0 \\ -x^3 \text{ für } x < 0 \end{cases}$$

   Dann ist $g'(x) = 3x^2 \ \forall\ x > 0, g'(x) = -3x^2 \ \forall\ x < 0$ und $g'(0) = 0$, denn $\lim\limits_{x\to 0\pm} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0\pm} \frac{\pm(x^3)-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0\pm} (\pm x^2) = 0.$

   Dh. $g'(x) = 3f(x), \forall\ x \in \mathbb{R}$ (mit f wie in der vorangegangenen Bemerkung). Daher ist g' differenzierbar und $g''(x) = 3 \cdot f'(x) = 3 \cdot 2|x| = 6|x|$ und g'' ist im Punkt $x = 0$ nicht differenzierbar.

4.2 Mittelwerte und lokale Extrema

Def. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ und $\xi \in D$. Man sagt, f nimmt bei ξ ein lokales Maximum an, wenn gilt, dass $\exists\ \delta > 0 \ \ \forall\ x \in D : |x - \xi| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(\xi)$.
Man sagt, f nimmt bei ξ ein lokales Minimum an, wenn gilt, dass
$\exists\ \delta > 0\ \forall\ x \in D : |x - \xi| < \delta \Rightarrow f(x) \geq f(\xi)$.
Man sagt, f besitzt bei ξ ein lokales Extremum, wenn sich bei ξ entweder ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum befindet.

Satz 73. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $\xi \in I$ und f bei ξ differenzierbar. Wenn f bei ξ ein lokales Extremum besitzt, gilt $f'(\xi) = 0$.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, f besitzt bei ξ ein lokales Maximum. Es sei $\delta > 0$ derart, dass $f(x) \leq f(\xi)$ für $|x - \xi| < \delta$ und $x \in I$.
Ist $x < \xi$ mit $|x - \xi| < \delta$ und $x \in I$, so gilt $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0$ und daher
$f'(\xi) = \lim\limits_{x\to\xi-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0.$
Ist $x > \xi$ mit $|x - \xi| < \delta$ und $x \in I$, so gilt $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$ und daher
$f'(\xi) = \lim\limits_{x\to\xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0.$
Insgesamt muss also $f'(\xi) = 0$ gelten. Besitzt f bei ξ ein lokales Minumum, so besitzt $-f$ bei ξ ein lokales Maximum. Aus dem bisher Bewiesenen folgt $-f'(\xi) = 0$ und damit auch $f'(\xi) = 0$.

Bemerkung. Die Umkehrung von Satz 73 gilt nicht.
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$. Dann ist $f'(x) = 3x^2$ und daher $f'(0) = 0$.
Bei 0 befindet sich aber kein lokales Extremum, da $f(x) < 0 = f(0)$ für $x < 0$ und $f(x) > 0 = f(0)$ für $x > 0$.

Satz 74. (Satz von Rolle) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und f auf (a, b) differenzierbar. Ist $f(a) = f(b)$, so $\exists\ \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$.

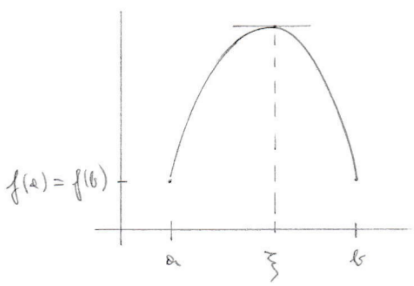
Beweis. Ist f auf $[a, b]$ konstant, so gilt $f'(\xi) = 0 \quad \forall\ \xi \in (a, b)$.
Sei also f nun nicht konstant. Nach Satz 52 nimmt f auf $[a, b]$ Minimum und Maximum an, d.h. $\exists\ c.d \in [a, b]$, sodass $f(c) \leq f(x) \leq f(d) \quad \forall\ x \in [a, b]$. Da f nicht

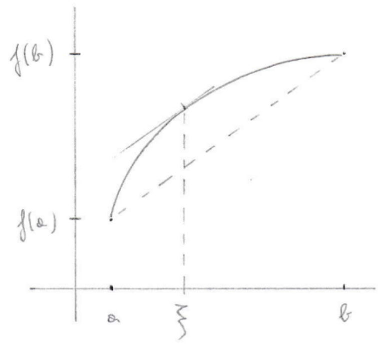
konstant ist. ist $c \neq d$ und $f(c) < f(d)$. Da $f(a) = f(b)$, muss mindestens einer der beiden Punkte c, d in (a, b) liegen. Sei dieser ξ (bzw. der kleinere der beiden, falls beide in (a, b) liegen). Wegen Satz 73 folgt $f'(\xi) = 0$.

Satz 75. (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und f auf (a, b) differenzierbar. Dann
$\exists\ \xi \in (a, b) : f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (bzw. $f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a)$).

Beweis. Betrachte die Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R},\ g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$. Dann ist g ebenfalls stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) und es gilt
$g(a) = g(b) = f(a)$. Nach dem Satz von Rolle (Satz 74)
$\exists\ \xi \in (a, b) : 0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ und daher $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Bemerkung. Die Sätze 74 und 75 beschreiben beide einen sehr anschaulichen Sachverhalt:





Satz 76. (Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung)
Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und f und g auf (a, b) differenzierbar. Dann $\exists\ \xi \in (a, b) : \Big(f(b) - f(a)\Big)g'(\xi) = \Big(g(b) - g(a)\Big)f'(\xi)$.

Beweis. Die Funktion $h : [a, b] \to \mathbb{R},\ h(x) := f(x)\Big(g(b) - g(a)\Big) - g(x)\Big(f(b) - f(a)\Big)$ ist ebenfalls stetig und auf (a, b) differenzierbar und es gilt
$h(a) = h(b) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$. Nach dem Satz von Rolle (Satz 74)
$\exists\ \xi \in (a, b) : 0 = h'(\xi) = f'(\xi)\Big(g(b) - g(a)\Big) - g'(\xi)\Big(f(b) - f(a)\Big)$.

Bemerkung. Setzt man in Satz 76 $g(x) = x$, so erhält man $f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a)$. D.h. der Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz 75) ist (wie der Name sagt) ein Spezialfall des Verallgemeinerten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung (Satz 76). Man könnte also auch Satz 75 beweisen und Satz 76 als Korollar folgern.

Satz 77. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und f auf (a, b) differenzierbar. Gilt
$f'(x) = 0 \quad \forall\ x \in (a, b)$, so ist $f(x) = f(a) \quad \forall\ x \in [a, b]$, d.h. f ist konstant.

Beweis. Es sei $x \in (a,b]$. Dann ist f auf dem Intervall $[a,x]$ stetig und auf (a,x) differenzierbar. Aus Satz 75 folgt: $\exists\ \xi \in (a,x) : \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi) = 0$, woraus man sofort $f(x) = f(a)$ erhält.

Satz 78. Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und f auf (a,b) differenzierbar. Dann gelten:

(i) f ist auf $[a,b]$ monoton wachsend $\Leftrightarrow\ f'(x) \geq 0 \quad \forall\ x \in (a,b)$,

(ii) f ist auf $[a,b]$ streng monoton wachsend $\Leftrightarrow\ f'(x) \geq 0 \quad \forall\ x \in (a,b)$ und es gibt kein (nichtleeres) Intervall $(c,d) \subseteq (a,b)$ sodass $f'(x) = 0 \quad \forall\ x \in (c,d)$,

(iii) Wenn $f'(x) > 0 \quad \forall\ x \in (a,b)$ dann ist f auf (a,b) streng monoton wachsend.

Beweis. (i) ($\Rightarrow$) Es sei $x \in (a,b)$. Ist $y \in [a,b] \setminus \{x\}$, so gilt $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$ und daher $f'(x) = \lim\limits_{y \to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$.
($\Leftarrow$) Es seien $x, y \in [a,b]$ und $x < y$. Nach Satz 75
$\exists\ \xi \in (x,y) : \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(\xi) \geq 0$ und daher $f(y) \geq f(x)$.

(ii) ($\Rightarrow$) Wegen (i) gilt $f'(x) \geq 0 \quad \forall\ x \in (a,b)$. Würde es ein nichtleeres Teilintervall $(c,d) \subseteq (a,b)$ geben, sodass $f'(x) = 0 \quad \forall\ x \in (c,d)$, so wäre f nach Satz 77 auf $[c,d]$ konstant und daher nicht streng monoton wachsend.
($\Leftarrow$) Wegen (i) ist f monoton wachsend. Angenommen, f wäre nicht streng monoton wachsend. Dann würden $\exists\ c, d \in [a,b]$ sodass $c \neq d$ und $f(c) = f(d)$. Folglich wäre f auf $[c,d]$ konstant und $f'(x) = 0 \quad \forall\ x \in (c,d)$.

(iii) Folgt sofort aus (ii).

Bemerkung. Die Umkehrung von Satz 78 (iii) gilt nicht. Es sei z.B.
$f : [-1,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$. Dann ist $f'(x) = 3x^2$. Die Funktion f ist streng monoton wachsend, obwohl $f'(0) = 0$.

Korollar 79. Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und f auf (a,b) differenzierbar. Dann gelten:

(i) f ist auf $[a,b]$ monoton fallend $\Leftrightarrow\ f'(x) \leq 0 \quad \forall\ x \in (a,b)$,

(ii) f ist auf $[a,b]$ streng monoton fallend $\Leftrightarrow\ f'(x) \leq 0 \quad \forall\ x \in (a,b)$ und es gibt kein (nichtleeres) Intervall $(c,d) \subseteq (a,b)$ sodass $f'(x) = 0 \quad \forall\ x \in (c,d)$,

(iii) Wenn $f'(x) < 0 \quad \forall x \in a, b$ dann ist f auf (a,b) streng monoton fallend.

Beweis. Wende Satz 78 auf die Funtktion $-f : [a,b] \to \mathbb{R}$ an.

Beispiele. 1) Es sei $a > 0$. Die Exponentialfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = a^x$ ist streng monoton wachsend, wenn $a > 1$ und streng monoton fallend wenn, $0 < a < 1$. Das wurde bereits in Satz 36 bewiesen. Es folgt aber auch aus Satz 78(iii) bzw. Korollar 79(iii). Nach Satz 39(vii) ist $\log a < 0$ wenn $0 < a < 1$ und $\log a > 0$ wenn $a > 1$. Nach Korollar 65(i) ist
$$f'(x) = \log a \cdot a^x \begin{cases} > 0 & \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \text{falls } a > 1 \\ < 0 & \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \text{falls } 0 < a < 1 \end{cases}$$

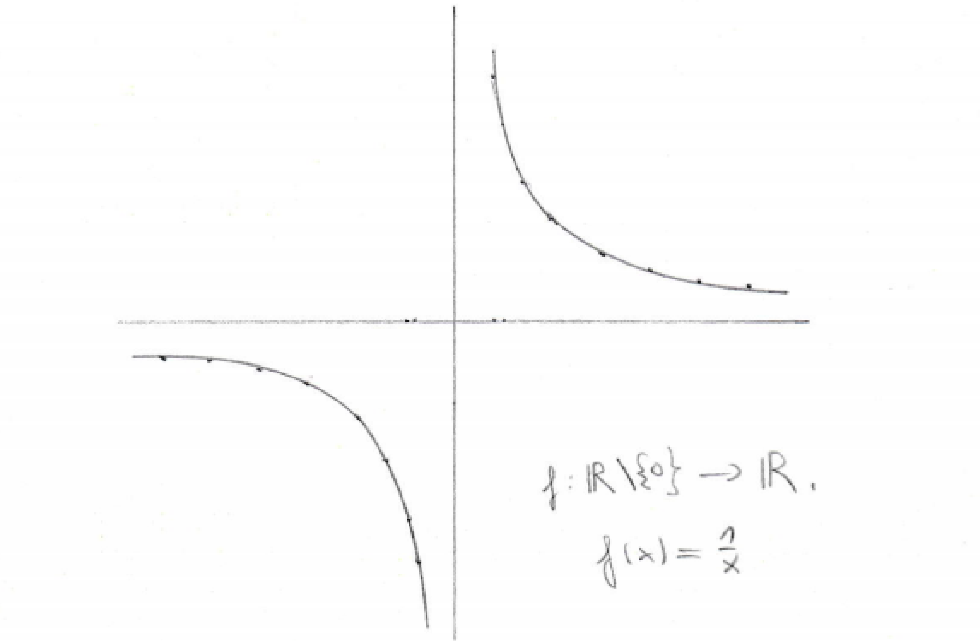
2) Es sei $b > 1$ Die Logarithmusfunktion $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = {}_b\log x$ ist streng monoton wachsend. Das wurde bereits in Satz 39(vi) bewiesen, es folgt aber auch aus Satz 78(iii). Nach Satz 39(vii) ist $\log b > 0$. Nach Korollar 65(ii) ist $f'(x) = \frac{1}{\log b \cdot x} > 0 \quad \forall\, x > 0$.

3) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Potenzfunktion $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^\alpha$ ist streng monoton wachsend, wenn $\alpha > 0$ und streng monoton fallend wenn $\alpha < 0$. Das wurde bereits im Satz 35 bewiesen, es folgt aber auch aus Satz 78(iii) bzw. Korollar 79(iii). Nach Korollar 71(i) ist
$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \begin{cases} > 0 & \forall\, x > 0 \quad \text{falls } \alpha > 0, \\ < 0 & \forall\, x > 0 \quad \text{falls } \alpha < 0 \end{cases}$$

4) Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ungerade. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^n$ ist streng monoton wachsend. Nach Korollar 68(i) ist
$$f'(x) = nx^{n-1} \begin{cases} > 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ (da } x \neq 0 \text{ und } n-1 \text{ gerade ist),} \\ = 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$
Die Behauptung folgt nun aus Satz 78(ii).

5) Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gerade. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^n$ ist streng monoton fallend auf $(-\infty, 0)$ und streng monoton wachsend auf $(0, +\infty)$. Nach Korollar 68(i) ist
$$f'(x) = nx^{n-1} \begin{cases} < 0 & \text{für } x < 0 \\ > 0 & \text{für } x > 0 \end{cases} \text{(da } n-1 \text{ ungerade ist).}$$

6) Es sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$. Dann ist f streng monoton fallend auf $(-\infty, 0)$ und f ist streng monoton fallend auf $(0, +\infty)$. Beides folgt daraus, dass $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Beachte, dass daraus aber nicht folgt, dass $f(x) > f(y)$, wenn $x < 0 < y$, da 0 nicht im Definitionsbereich liegt. Tatsächlich ist ja z.B. $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$ oder allgemein $f(x) < 0 < f(y)$ für $x < 0 < y$.



7) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 4$. Dann ist $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x^2 - x - 6) = 6(x-3)(x+2)$. Folglich ist f streng monoton wachsend auf $(-\infty, -2)$ und $(3, +\infty)$ (da $f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$) und f ist streng monoton fallend auf $(-2, 3)$ (da $f'(x) < 0 \quad \forall\, x \in (-2, 3)$).

8) Es sei $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\log x}{x}$. Wir haben weiter oben berechnet, dass $f'(x) = \frac{1-\log x}{x^2} \quad \forall\, x > 0$. Da die Logarithmusfunktion streng monoton wächst, ist $\log x < \log e = 1$ für $x < e$. D.h. $f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in (0, e)$ und f ist streng monoton wachsend auf $(0, e)$. Ebenso ist $\log x > \log e = 1$ für $x > e$. Daher ist $f'(x) < 0 \quad \forall\, x \in (e, +\infty)$ und f ist streng monoton fallend auf $(e, +\infty)$.

Def. Es sei $D \subseteq \mathbb{R},\ f : D \to \mathbb{R}$ und $\xi \in D$. Man sagt, f nimmt bei ξ ein striktes lokales Maximum (bzw. striktes lokales Minimum) an, wenn gilt, dass
$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D : 0 < |x - \xi| < \delta \Rightarrow f(x) < f(\xi)$
(bzw. $\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D : 0 < |x - \xi| < \delta \ \Rightarrow\ f(x) > f(\xi)$).

Satz 80. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $c \in (a, b)$ und f auf $(a, b) \setminus \{c\}$ differenzierbar. Wenn $f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in (a, c)$ und $f'(x) < 0 \quad \forall\, x \in (c, b)$, besitzt f bei c ein striktes lokales Maximum.

Beweis. Anwenden von Satz 78(iii) auf $[a, c]$ ergibt, dass f auf $[a, c]$ streng monoton wächst, d.h. $f(x) < f(c) \quad \forall\, x \in [a, c)$. Anwenden von Korollar 79(iii) auf $[c, b]$ ergibt, dass f auf $[c, b]$ streng monton fällt, d.h. $f(c) > f(x) \quad \forall\, x \in (c, b]$.

Korollar 81. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $c \in (a, b)$ und f auf $(a, b) \setminus \{c\}$ differenzierbar. Wenn $f'(x) < 0 \quad \forall\, x \in (a, c)$ und $f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in (c, b)$, besitzt f bei c ein striktes lokales Minimum.

Beweis. Wende Satz 80 auf $-f : [a, b] \to \mathbb{R}$ an.

Beispiele. 1) Es sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$. Dann ist f stetig auf $[-1, 1]$ und $f'(x) = 2x \quad \forall\ x \in (-1, 1)$. D.h. $f'(x) < 0 \quad \forall\ x \in (-1, 0)$ und $f'(x) > 0 \quad \forall\ x \in (0, 1)$. Aus Korollar 81 folgt, dass f bei 0 ein striktes lokales Minimum besitzt. (Das ist natürlich offensichtlich, da $x^2 > 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.)

2) Es sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^4$. Dann ist f stetig auf $[-1, 1]$ und $f'(x) = 4x^3 \quad \forall\ x \in (-1, 1)$. D.h. $f'(x) < 0 \quad \forall\ x \in (-1, 0)$ und $f'(x) > 0 \quad \forall\ x \in (0, 1)$. Aus Korollar 81 folgt, dass f bei 0 ein striktes lokales Minimum besitzt. (Auch das ist offensichtlich, da $x^4 > 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.)

3) Es sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$. Dann ist f stetig auf $[-1, 1]$, $f'(x) = -1 < 0 \quad \forall\ x \in (-1, 0)$ und $f'(x) = 1 > 0 \quad \forall\ x \in (0, 1)$. (Auch das ist offentsichtlich, da $|x| > 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.)

Bemerkung. Beachte, dass in Satz 80 bzw. Korollar 81 nicht vorausgesetzt wird, dass f in c differenzierbar ist. Man kann daher mit Hilfe von Satz 80 bzw. Korollar 81 lokale Extrema in Punkten finden, in denen f nicht differenzierbar ist (wie in Beispiel 3) oben). Aber auch bei zweimal differenzierbaren Funktionen ist es oft einfacher Satz 80 bzw. Korollar 81 anzuwenden, als das Vorzeichen von $f''(c)$ zu untersuchen.

Korollar 82. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\xi \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar.

(i) Ist $f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) < 0$, so besitzt f bei ξ ein striktes lokales Maximum

(ii) Ist $f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) > 0$, so besitzt f bei ξ ein striktes lokales Minimum.

Beweis. (i) Aus $f''(\xi) = \lim\limits_{x \to \xi} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} = \lim\limits_{x \to \xi} \frac{f'(x)}{x - \xi} < 0$ folgt:
$\exists\ \delta > 0 : 0 < |x - \xi| < \delta,\ x \in I \ \Rightarrow \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} = \frac{f'(x)}{x - \xi} < 0$. Daher ist $f'(x) > 0$ für $0 < \xi - x < \delta,\ x \in I$ (d.h. für $\xi - \delta < x < \xi,\ x \in I$) und $f'(x) < 0$ für $0 < x - \xi < \delta,\ x \in I$ (d.h. $\xi < x < \xi + \delta, x \in I$). Die Behauptung folgt aus Satz 80.

(ii) Betrachte die Funktion $-f : I \to \mathbb{R}$. Da $-f'(\xi) = 0$ und $-f''(\xi) < 0$, besitzt $-f$ nach (i) bei ξ ein striktes lokales Maximum. Daher besitzt f bei ξ ein striktes lokales Minimum.

Bemerkung. 1) Korollar 82 wird in vielen Extremwertaufgaben verwendet. Sind lokale Extrema der zweimal differenzierbaren Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ gesucht, so sucht man zunächst die "kritischen Punkte" $\xi \in I$ (d.h. jene Punkte $\xi \in I$, die

$f'(\xi) = 0$ erfüllen). Danach entscheidet man mit Hilfe der zweiten Ableitung, ob in den kritischen Punkten ein lokales Minimum oder Maximum vorliegt.

2) Die Umkehrung von Korollar 82(i) bzw. (ii) gilt nicht. Z.B. besitzt die Funktion $f(x) = x^4$ im Punkt 0 ein lokales Minimum. (Das ist trivial, wir haben es oben aber auch mit Hilfe von Korollar 81 bewiesen.) Nun gilt aber $f'(x) = 4x^3$ und $f''(x) = 12x^2$. Nun ist $f'(0) = f''(0) = 0$ und Korollar 82 daher nicht anwendbar. Man könnte sagen, Korollar 82 " sei zu schwach, um das Minimum zu erkennen". Tatsächlich gibt es stärkere Versionen von Korollar 82, mit deren Hilfe man überprüfen kann, dass $f(x) = x^4$ bei 0 ein lokales Minimum besitzt.

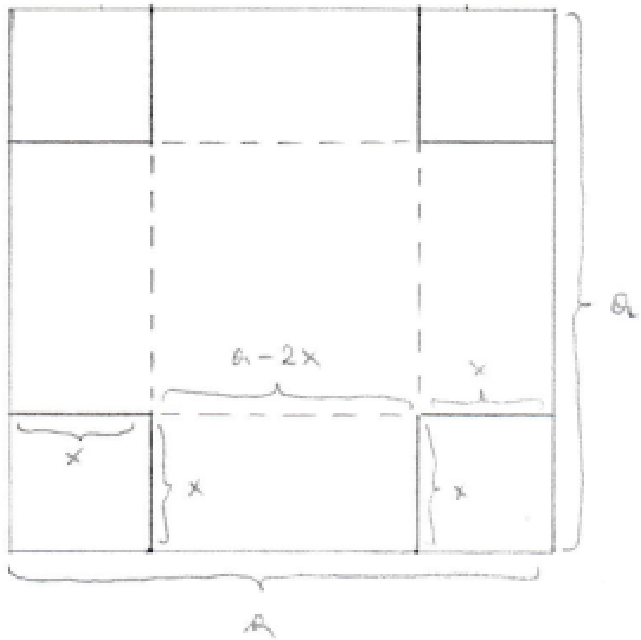
Beispiele. 1) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Dann ist $f'(x) = 2x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ und $f''(x) = 2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$. Da $f'(x) = 2x = 0$ nur für $x = 0$, ist $x = 0$ der einzige kritische Punkt. Wegen $f''(0) = 2 > 0$ besitzt f bei 0 ein striktes lokales Minimum (was aber offensichtlich ist).

2) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 4$. Wir haben oben bereits $f'(x) = 6(x-3)(x+2)$ berechnet. Aus Satz 80 bzw. Korollar 81 folgt bereits, dass f bei -2 ein striktes lokales Maximum und bei 3 ein striktes lokales Minimum besitzt. Wir überprüfen das nochmals mit Hilfe von Korollar 82. Es ist $f'(x) = 6(x^2 - x - 6)$ und daher $f''(x) = 6(2x-1)$. Die kritischen Punkte sind in diesem Fall -2 und 3. Wegen $f''(-2) = 6 \cdot (-5) = -30 < 0$ und $f''(3) = 6 \cdot 5 = 30 > 0$ folgt nochmals, dass f bei -2 ein striktes lokales Maximum und bei 3 ein striktes lokales Minimum besitzt.

3) Es sei $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\log x}{x}$. Wir haben oben bereits $f'(x) = \frac{1-\log x}{x^2}$ berechnet. Aus Satz 80 folgt bereits, dass f bei e ein striktes lokales Maximum besitzt. Wir überprüfen das nochmals mit Hilfe von Korollar 82. Wegen $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \log x = 1 \Leftrightarrow x = e$ ist der einzige kritische Punkt bei e. Es ist nun $f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - (1-\log x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{-x-2x(1-\log x)}{x^4} = \frac{-1-2(1-\log x)}{x^3} = \frac{2\log x - 3}{x^3}$
Wegen $f''(e) = \frac{2-3}{e^3} = -\frac{1}{e^3} < 0$ besitzt f bei e ein striktes lokales Maximum.

Beispiele. für Extremwertaufgaben:

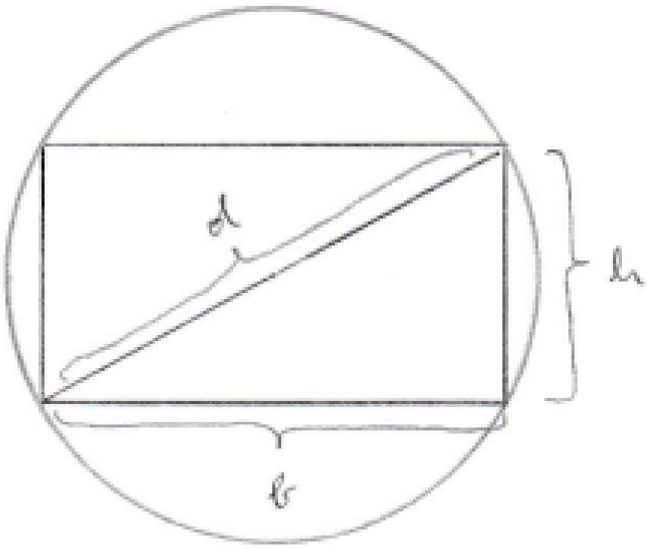
1) Aus einem quadratischen Blech mit Seitenlänge a werden an den Ecken Quadrate weggeschnitten. Aus dem Rest wird eine (quaderförmige) Schachtel (ohne Deckel) gebildet. Für welche Seitenlänge der ausgeschnittenen Quadrate entsteht eine Schachtel mit maximalem Volumen?



Gesucht ist das Maximum der folgenden Funkion:
$V : [0, \frac{a}{2}] \to \mathbb{R},\ V(x) = (a-2x)^2 x = (4x^2 - 4ax + a^2)x = 4x^3 - 4ax + a^2 x.$
Es ist nicht sinnvoll, die Funktion für $x > \frac{a}{2}$ zu betrachten, da man dann mehr Blech wegschneiden würde als vorhanden ist. Darum ist V nur auf dem Intervall $[0, \frac{a}{2}]$ definiert.
Man muss bei Extremwertaufgaben auch immer die Möglichkeit berücksichtigen, dass das Extremum am Rand des Definitionsbereichs angenommen wird. Im vorliegenden Beispiel ist das wegen $V(0) = V(\frac{a}{2}) = 0$ aber sicher nicht der Fall.
Die Ableitung von V ist $V'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2$. Die Nullstellen von V' (d.h. die kritischen Punkte) sind $x_{1,2} = \frac{8a \pm \sqrt{64a^2 - 48a^2}}{24} = \frac{8a \pm \sqrt{16a^2}}{24} = \frac{8a \pm 4a}{24} = \frac{2a \pm a}{6}$
D.h. $x_1 = \frac{a}{6}$ und $x_2 = \frac{a}{2}$.
Man hätte bei der Berechnung der Ableitung V' und ihren Nullstellen auch von der Formel $V(x) = (a-2x)^2 x$ ausgehen können und die Produktregel anwenden können:
$V'(x) = 2(a-2x)\cdot(-2)x + (a-2x)^2 = (a-2x)(-4x+a-2x) = (a-2x)(a-6x)$
Der Vorteil ist, dass man die Nullstellen $x_1 = \frac{a}{6}$ und $x_2 = \frac{a}{2}$ sofort ablesen kann. Außerdem erkennt man, dass die Funktion auf dem Intervall $[0, \frac{a}{6}]$ streng monoton wächst und auf dem Intervall $[\frac{a}{6}, \frac{a}{2}]$ streng monoton fällt. Die Funktion V nimmt ihr Maximum auf dem Intervall $[0, \frac{a}{2}]$ daher bei $x = \frac{a}{6}$ an (wegen Satz 80).
Man kann das auch mittels Korollar 82 beweisen. Es ist $V''(x) = 24x - 8a = 8(3x - a)$. Also ist $V''(\frac{a}{6}) = 8 \cdot (-\frac{a}{2}) = -4a < 0$ und $V''(\frac{a}{2}) = 8 \cdot \frac{a}{2} = 4a > 0$. Man sieht wieder, dass V bei $\frac{a}{6}$ ein Maximum annimmt (und bei $\frac{a}{2}$ ein Minimum). Man erhält $V(\frac{a}{6}) = (\frac{2a}{3})^2 \cdot \frac{a}{6} = \frac{2a^3}{27}$.

2) Aus einem Baumstamm mit kriesförmigen Querschnitt mit Durchmesser d soll ein Balken mit rechteckigen Querschnitt (und Breite b und Höhe h) ausgesägt

werden. Der Balken soll dabei so ausgesägt werden, dass er möglichst tragfähig ist. Die Statik lehrt, dass zu diesem Zweck $b \cdot h^2$ möglichst groß sein soll. Wie müssen die Abmessungen des Balkens gewählt werden?



Da $b^2 + h^2 = d^2$ ist $h^2 = d^2 - b^2$ und gesucht ist das Maximum der Funktion $f : [0, d] \to \mathbb{R}$, $f(b) = b(d^2 - b^2) = d^2 b - b^3$. Es ist $f'(b) = d^2 - 3b^2 = (d - \sqrt{3}b)(d + \sqrt{3}b)$ und $f''(b) = -6b$. Man sieht, dass $f'(b) = 0$ genau dann, wenn $b \in \{\frac{d}{\sqrt{3}}, -\frac{d}{\sqrt{3}}\}$. Bei $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$ nimmt die Funktion f ein Maximum an. Das folgt aus Korollar 82, da $f''(\frac{d}{\sqrt{3}}) = -\frac{6d}{\sqrt{3}} < 0$. Es folgt aber auch aus Satz 80, da f auf dem Intervall $[0, \frac{d}{\sqrt{3}}]$ streng monoton wächst und auf dem Intervall $[\frac{d}{\sqrt{3}}, d]$ streng monoton fällt.

Man erhält also $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$ ($\Rightarrow h^2 = \frac{2d^2}{3} \;\Rightarrow\; h = \sqrt{\frac{2}{3}}d = \frac{\sqrt{6}}{3}d$) und als maximalen Funktionswert $f(\frac{d}{\sqrt{3}}) = d^2 \cdot \frac{d}{\sqrt{3}} - \frac{d^3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 - \frac{1}{3})d^3 = \frac{2}{3\sqrt{3}}d^3 = \frac{2\sqrt{3}}{9}d^3$.

Def. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wir sagen,

- f ist konvex auf I, wenn f' auf I monoton wächst,
- f ist streng konvex auf I, wenn f' auf I streng monoton wächst,
- f ist konkav auf I, wenn f' auf I monoton fällt,
- f ist streng konkav auf I, wenn f' auf I streng monoton fällt.

Ammann Judith, Boubenizek Anna, Bredl Vanessa, Emsenhuber Klaudia, Grujić Dragan, Janisch Alexander, Karner Nora, Kohlmann Sara, Lang Clara, Langschwert Mohamed, Mayer Barbara, Moser Laura

Bemerkung. Es gibt allgemeinere (und bessere) Definitionen der Begriffe (streng) konvex und (streng) konkav, die auch für nicht differenzierbare Funktionen verwendet werden können.

Korollar 83. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gelten:

(i) f ist konvex auf $I \;\Leftrightarrow\; f''(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in I$,

(ii) Ist $f''(x) > 0 \quad \forall\, x \in I$, so ist f auf I streng konvex,

(iii) f ist konkav auf $I \;\Leftrightarrow\; f''(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in I$,

(iv) Ist $f''(x) < 0 \quad \forall\, x \in I$, so ist f auf I streng konkav.

Beweis. (i) f ist konvex auf $I \Leftrightarrow f'$ wächst monoton auf $I \overset{\text{Satz 78(ii)}}{\Longleftrightarrow}$ $f''(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in I$

(ii) $f''(x) > 0 \quad \forall\, x \in I \overset{\text{Satz 78 (iii)}}{\Longrightarrow} f'$ wächst streng monoton auf $I \;\Rightarrow\; f$ ist streng konvex auf I

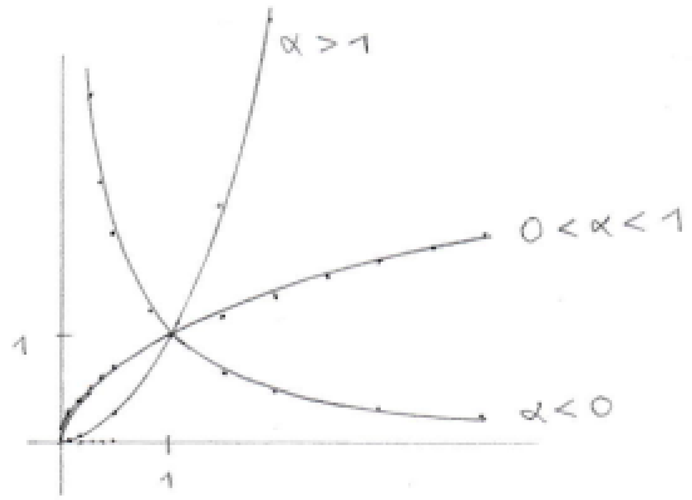
(iii) f ist konkav auf $I \;\Leftrightarrow\; f'$ fällt monoton auf $I \overset{\text{Kor. 79(i)}}{\Longleftrightarrow} f''(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in I$

(vi) $f''(x) < 0 \quad \forall\, x \in I \overset{\text{Kor. 79(iii)}}{\Longrightarrow} f'$ fällt streng monoton auf $I \;\Rightarrow\; f$ ist streng konkav auf I.

Beispiele. 1) Es sei $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$. Die Exponentialfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ ist streng konvex auf $\mathbb{R}$, da $f''(x) = (\log a)^2 \cdot a^x > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist die Exponentialfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; f(x) = e^x$ auf $\mathbb{R}$ streng konvex.

2) Es sei $b > 1$. Die Logarithmusfunktion $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\; f(x) = {}_b\log x$ ist streng konkav auf $(0, +\infty)$, denn $f'(x) = \frac{1}{\log b \cdot x} \quad \forall\, x > 0$ und daher
$f''(x) = -\frac{1}{\log b \cdot x^2} < 0 \quad \forall\, x > 0$.

3) Es sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir betrachten die Potenzfunktion $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$. Aus $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ und $f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$ und Korollar 83(ii) bzw. (iv) folgt: Die Potenzfunktion f ist streng konvex auf $(0, +\infty)$, wenn $\alpha < 0$ oder $\alpha > 1$ und streng konkav auf $(0, +\infty)$ wenn $0 < \alpha < 1$.



4) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ ist streng konvex auf $\mathbb{R}$, da ihre Ableitung $f'(x) = 2x$ streng monoton wächst (bzw. $f''(x) = 2 > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$).

5) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$ ist streng konkav auf $(-\infty, 0)$ und streng konvex auf $(0, +\infty)$, da ihre Ableitung $f'(x) = 3x^2$ auf $(-\infty, 0)$ streng monoton fällt bzw. auf $(0, +\infty)$ streng monoton wächst (bzw. $f''(x) = 6x < 0 \quad \forall\, x < 0$ und $f''(x) = 6x > 0 \quad \forall\, x > 0$).

6) Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$ ist streng konkav auf $(-\infty, 0)$ und streng konvex auf $(0, +\infty)$. Aus $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ folgt $f''(x) = \frac{2}{x^3}$. Daher ist $f''(x) = \frac{2}{x^3} < 0 \quad \forall\, x < 0$ und $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0 \quad \forall\, x > 0$.

Bemerkung. Man kann Bsp. 1) verwenden, um sich den Unterschied zwischen konvex und konkav zu merken: Die **Ex**pontentialfunktion ist konv**ex**.

Korollar 84. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

(i) Ist f konvex auf I, so ist $f(x) \geq f(a) + f'(a) \cdot (x - a) \quad \forall\, a, x \in I$,

(ii) Ist f streng konvex auf I, so ist $f(x) > f(a) + f'(a) \cdot (x - a) \quad \forall\, a, x \in I$ mit $x \neq a$,

(iii) Ist f konkav auf I, so ist $f(x) \leq f(a) + f'(a) \cdot (x - a) \quad \forall\, a, x \in I$,

(iv) Ist f streng konkav auf I, so ist $f(x) < f(a) + f'(a) \cdot (x - a) \quad \forall\, a, x \in I$ mit $x \neq a$.

Beweis. (i) Es seien $x, a \in I$. Ist $x \neq a$, so gibt es nach Satz 75 ein $\xi \in I$ zwischen x und a, derart, dass $f(x) = f(a) + f'(\xi) \cdot (x - a) \geq f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$ (Ist $x < a$, so ist $f'(\xi) \leq f'(a)$ und $x - a < 0$. Ist $x > a$, so ist $f'(\xi) \geq f'(a)$ und $x - a > 0$. In beiden Fällen ist $f'(\xi) \cdot (x - a) \geq f'(a) \cdot (x - a)$.)

(ii) Es seien $x, a \in I$ und $x \neq a$. Wie im Beweis von (i) gibt es ein ξ zwischen x und a, derart, dass $f(x) = f(a) + f'(\xi) \cdot (x-a) > f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$ (Ist $x < a$, so ist $f'(\xi) < f'(a)$ und $x - a < 0$. Ist $x > a$, so ist $f'(\xi) > f'(a)$ und $x - a > 0$. In beiden Fällen $f'(\xi) \cdot (x-a) > f'(a) \cdot (x-a)$.)

(iii) und (iv) Analog oder durch Anwenden von (i) und (ii) auf $-f : I \to \mathbb{R}$. (Ist f' (streng) monoton wachsend (bzw. fallend), so ist $-f'$ (streng) monoton fallend (bzw. wachsend).)

Bemerkung. Korollar 84 bringt zum Ausdruck, dass bei einer konvexen (bzw. konkaven) Funktion, die Tangenten stets unterhalb (bzw. oberhalb) des Funktionsgraphen liegen.

Beispiele. 1) $e^x > x + 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x$ ist streng konvex auf $\mathbb{R}$, da $f''(x) = e^x > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$. Aus Korollar 84(ii) folgt $e^x = f(x) > \underbrace{f(0)}_{=1} + \underbrace{f'(0)}_{=1} \cdot (x - 0) = 1 + x \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.)

2) $(1+x)^n > 1 + nx \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \quad \forall\, x \in (-1, +\infty) \setminus \{0\}$ (Bernoullische Ungleichung). Ist $f(x) = (1+x)^n$, so ist $f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} > 0$ für $n \geq 2$ und $x > -1$, d.h. f ist streng konvex auf dem Intervall $(-1, +\infty)$. Aus Korollar 84(ii) folgt $(1+x)^n = f(x) > \underbrace{f(0)}_{<1} + \underbrace{f'(0)}_{n} \cdot (x - 0) = 1 + nx \quad \forall\, x \in (-1, +\infty) \setminus \{0\}$.

4.3 Die Regel von de l'Hospital

Satz 85. Es seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $g'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$ und $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} g(x) = 0$. Existiert $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \alpha$, so existiert auch $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ und $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$. Dabei ist außer $\alpha \in \mathbb{R}$ auch $\alpha = \pm\infty$ zulässig.

Beweis. Setze $f(a) = g(a) = 0$. Dann sind f und g auf $[a,b)$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Ist $x \in (a,b)$, so sind f und g auf $[a,x]$ stetig und auf (a,x) differenzierbar. Nach Satz 76 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung) $\exists\, \xi \in (a,x) : f(x)g'(\xi) = \big(f(x) - f(a)\big)g'(\xi) = \big(g(x) - g(a)\big)f'(\xi) = g(x)f'(\xi)$.
Nach Voraussetzung ist dabei $g'(\xi) \neq 0$. Es muss aber auch $g(x) \neq 0$ gelten, denn sonst wäre $g(x) = g(a) = 0$ und nach dem Satz von Rolle (Satz 74) würde ein $\eta \in (a,x)$ mit der Eigenschaft $g'(\eta) = 0$ existieren, ein Widerspruch.
Daher ist $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Wenn nun $x \longrightarrow a+$, so gilt auch $\xi \to a+$ (da $a < \xi < x$) und daher $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \underset{x \to a+}{\longrightarrow} \alpha$, woraus $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a+}{\longrightarrow} \alpha$ folgt.

Bemerkung. Völlig anaolog zeigt man: Sind $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $g'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in (a, b)$, $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = \lim\limits_{x\to b-} g(x) = 0$ und existiert $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so existiert auch $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ und $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
Aus Satz 85 und der analogen Aussage für linksseitige Grenzwerte ergibt sich auch einen analoge Aussage für beidseitige Grenzwerte.

Beispiele. 1) Für $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ und $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ gilt $1+x+x^2+...+x^n = \frac{x^{n+1}}{x-1}$. Aus der Stetigkeit von Polynomfunktionen folgt sofort $\lim\limits_{x\to 1}(1 + x + x^2 + ... + x^n) = n+1$. Da $\lim\limits_{x\to 1}(x^{n+1} - 1) = \lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0$, kann man dises Ergebnis auch durch Anwenden der Regel von de l'Hospital auf $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ erhalten:
$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{n+1}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(n+1)x^n}{1} = \lim\limits_{x\to 1}(n+1)x^n = n+1.$

2) Bei vielen Berechnungen von Grenzwerten wird die Regel von de l'Hospital mehrmals angewandt. Wichtig dabei ist, dass man nicht vergisst, vor jeder Anwendung zu überprüfen, dass die dafür nötigen Voraussetzungen erfüllt sind. In der Rechnung
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{x^2} \overset{1.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}-2e^{-2x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{x} \overset{2.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}+2e^{-2x}}{1} =$$
$$= \lim_{x\to 0}(2e^{2x} + 2e^{-2x}) = 4$$
wurde die Regel von de l'Hospital bei 1. und 2. angewandt. Das war bei 1. möglich, weil $\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x} - e^{-2x} - 2) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ und es war bei 2. möglich, weil $\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x} - 2e^{-2x}) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$ ist. D.h. die doppelte Anwendung der Regel von de l'Hospital war nur möglich, weil zweimal die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ auftrat.

Korollar 86. Es seien $f, g : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $g'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in (a, +\infty)$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Existiert $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \alpha$, so exisitiert auch $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$. Dabei sind außer $\alpha \in \mathbb{R}$ auch $\alpha = \pm\infty$ zulässig.

Beweis. O.B.d.A. sei $a > 0$. Es sei $\tilde{f} : (0, \frac{1}{a}) \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(t) := f(\frac{1}{t})$ und $\tilde{g} : (0, \frac{1}{a}) \to \mathbb{R}$, $\tilde{g}(t) := g(\frac{1}{t})$. Aus $\lim\limits_{t\to 0+} \frac{1}{t} = +\infty$ folgt $\lim\limits_{t\to 0+} \tilde{f}(t) = \lim\limits_{t\to 0+} f(\frac{1}{t}) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ und analog $\lim\limits_{t\to 0+} \tilde{g}(t) = 0$.
Weiters ist $\tilde{g}'(t) = \frac{d}{dt} g(\frac{1}{t}) = -\frac{1}{t^2} g'(\frac{1}{t}) \neq 0 \quad \forall\, t \in (0, \frac{1}{a})$ und analog
$\tilde{f}'(t) = -\frac{1}{t^2} f'(\frac{1}{t}) \quad \forall\, t \in (0, \frac{1}{a})$. Daraus folgt
$$\lim_{t\to 0+} \frac{\tilde{f}'(t)}{\tilde{g}'(t)} = \lim_{t\to 0+} \frac{-\frac{1}{t^2} f'(\frac{1}{t})}{-\frac{1}{t^2} g'(\frac{1}{t})} = \lim_{t\to 0+} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha.$$
Wegen Satz 85 exisitert $\lim\limits_{t\to 0+} \frac{\tilde{f}(t)}{\tilde{g}(t)}$ und $\lim\limits_{t\to 0+} \frac{\tilde{f}(t)}{\tilde{g}(t)} = \lim\limits_{t\to 0+} \frac{\tilde{f}'(t)}{\tilde{g}'(t)} = \alpha$. Daraus erhält man
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0+} \frac{\tilde{f}(t)}{\tilde{g}(t)} = \lim_{t\to 0+} \frac{\tilde{f}'(t)}{\tilde{g}'(t)} = \alpha.$$

Bemerkung. Völlig analog zeigt man: Sind $f, g : (-\infty, a) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $g'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in (-\infty, a)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$ und existiert $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so existiert auch $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ und $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Satz 87. Es seien $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ differenzierbar, $g'(x)\neq 0 \quad \forall\, x\in(a,b)$ und $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a+}g(x)=+\infty$. Existiert $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=:\alpha$, so existiert auch $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}$ und $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$. Dabei sind $\alpha\in\mathbb{R}$ und $\alpha=+\infty$ zulässig.

Beweis. (Beweisskizze) Es sei zunächst $\alpha\in\mathbb{R}$. Es sei $c\in(a,b)$. Ist x hinreichend nache bei a, so gelten $f(x)-f(c)>0,\ g(x)-g(c)>0,\ f(x)>0$, und $g(x)>0$ und in der Gleichung $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}\cdot\frac{f(x)}{f(x)-f(c)}\cdot\frac{g(x)-g(c)}{g(x)}$ sind im Ausdruck auf der rechten Seite alle Zähler und Nenner positiv. Nun ist

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\alpha=\underbrace{\Bigg(\underbrace{\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}}_{=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}}-\alpha\Bigg)}_{\to\ 0}\cdot\underbrace{\frac{f(x)}{f(x)-f(c)}}_{\to\ 1}\underbrace{\frac{g(x)-g(c)}{g(x)}}_{\to\ 1}+\alpha\underbrace{\Bigg(\underbrace{\frac{f(x)}{f(x)-f(c)}}_{\to\ 1}\underbrace{\frac{g(x)-g(c)}{g(x)}}_{\to\ 1}-1\Bigg)}_{\to\ 0}$$

Dabei ist $\xi\in(x,c)\subseteq(a,c)$. Wählt man c hinreichend nahe bei a, so ist (für ein $\varepsilon>0$ beliebig fest gewählt) $\left|\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}-\alpha\right|=\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-\alpha\right|<\varepsilon$ (bzw. ein passender Bruchteil von ε)
Wählt man ein solches c von Anfang an, so kann man $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\alpha\right|<\varepsilon$ erreichen.
Es sei nun $\alpha=+\infty$, d.h. $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$. Dann ist $f'(x)\neq 0$ für x hinreichend nahe bei a und $\lim\limits_{x\to a+}\frac{g'(x)}{f'(x)}=\lim\limits_{x\to a+}\frac{1}{\frac{f'(x)}{g'(x}}=0$, woraus $\lim\limits_{x\to a+}\frac{g(x)}{f(x)}=0$ folgt. Wegen $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a+}g(x)=+\infty$ ist $f(x)>0$ und $g(x)>0$ für x hinreichend nahe bei a und daher $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a+}\frac{1}{\frac{g(x)}{f(x)}}=+\infty$

Bemerkung. 1) Es gelten wieder zu Satz 87 analoge Aussagen für Grenzwerte der Gestalt $\lim\limits_{x\to b-}\frac{f(x)}{g(x)}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ und $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$, wenn diese von der unbestimmten Form $\frac{+\infty}{+\infty}$ sind (d.h. wenn $\lim\limits_{x\to b-}f(x)=\lim\limits_{x\to b-}g(x)=+\infty$ bzw. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ bzw. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$.)

2) Die in Satz 85, Korollar 86 und Satz 87, sowie den Bemerkungen danach beschriebenen Aussagen werden alle als "Regel von de l'Hospital" bezeichnet.

Korollar 88. (i) Es sei $\alpha,\beta>0$. Dann ist $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\beta}{e^{\alpha x}}=0$,

(ii) Es sei $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine Polynomfonktion und $\alpha>0$. Dann ist $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{p(x)}{e^{\alpha x}}=0$,

(iii) Es sei $\alpha>0$. Dann ist $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}=0$

(iv) Es sei $\alpha>0$. Dann ist $\lim\limits_{x\to 0+}x^\alpha\log x=0$,

(v) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = 1$.

Beweis. (i) Bezeichnet $f(x) = x^\beta$ und $g(x) = e^{\alpha x}$, so ist

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^\beta}{e^{\alpha x}},\ \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\beta x^{\beta-1}}{\alpha e^{\alpha x}},\ \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{\beta(\beta-1)x^{\beta-2}}{\alpha^2 e^{\alpha x}},\ \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)x^{\beta-3}}{\alpha^3 e^{\alpha x}},\ldots$$

Allgemein ist (was man auch leicht mit Induktion überprüft)

$$\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-n+1)x^{\beta-n}}{\alpha^n e^{\alpha x}}$$

Ist $\beta > n$, so gilt $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(n)}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \beta(\beta-1)\cdots(\beta-n+1)x^{\beta-n} = +\infty$. (Das folgt aus Bsp. 1) am Ende von Abschnitt 3.7 und einem Analogon zu Satz 61(iii).)
Außerdem ist $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^n e^{\alpha x} = +\infty$. (Das folgt aus Bsp. 2) am Ende von Abschnitt 3.7 und einem Analogon zu Satz 61(iii).) Wir wenden die Regel von de l' Hospital nun n-mal an, solange bis $\beta \le n$. Dann ist $\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-n+1)}{\alpha^n x^{n-\beta} e^{\alpha x}}$, wobei $n-\beta \ge 0$. Nun ist $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{n-\beta} = +\infty$ (falls $\beta < n$) bzw. $x^{n-\beta} = 1$ (falls $\beta = n$) und $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\alpha x} = +\infty$. Falls $\beta < n$ folgt $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^n x^{\beta-n} e^{\alpha x} = +\infty$ aus analogen Aussagen zu Satz 61(iv) und (iii).
Ist $\beta = n$, so ist $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^n x^{\beta-n} e^{\alpha x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^n e^{\alpha x} = +\infty$. In beiden Fällen erhält man (für das kleinste $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $\beta \le n$)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-n+1)}{\alpha^n x^{n-\beta} e^{\alpha x}} = 0.$$

(ii) Es sei $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ mit $a_n \neq 0$. Dann ist $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{e^{\alpha x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{\alpha x}} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k = \lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a_k x^k}{e^{\alpha x}} = \sum\limits_{k=0}^{n} \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{a_k x^k}{e^{\alpha x}}}_{=0} = 0.$

(iii) Es ist $\lim\limits_{x\to+\infty} \log x = \lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ (wegen Bsp 1) bzw. 3) am Ende von Abschnitt 3.7) und daher (da $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha x^\alpha = +\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

(iv) Da $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha = 0$ und $\lim\limits_{x\to 0+} \log x = -\infty$ (Bsp 4.) von Satz 61 in Abschnitt 3.7) handelt es sich hier um die unbestimmte Form $0\cdot(-\infty)$ und man kann die Regel von de l'Hospital nicht direkt anwenden. Dies ist allerdings möglich, wenn man verwendet, dass $x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}}$ und $\lim\limits_{x\to 0+} x^{-\alpha} = +\infty$. Dann erhält man

$$\lim_{x\to 0+} x^\alpha \log x = \lim_{x\to 0+} \frac{\log x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} =$$
$$\lim_{x\to 0+} \big(-\frac{1}{\alpha}\frac{x^{\alpha+1}}{x}\big) = \lim_{x\to 0+} \big(-\frac{1}{\alpha}x^\alpha\big) = 0.$$

Dass die unbestimmte Form bei $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\log x}{x^{-\alpha}}$ von der Gestalt $\frac{-\infty}{+\infty}$ ist (und nicht $\frac{+\infty}{+\infty}$) ist kein Problem. Man kann z.B. argumentieren, dass $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha \log x = -\lim\limits_{x\to 0+} \frac{-\log x}{x^{-\alpha}}$. Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{-\log x}{x^{-\alpha}}$ hat dann die unbestimmte Form $\frac{+\infty}{+\infty}$ und eine zur obigen Rechnung analoge zeigt $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{-\log x}{x^{-\alpha}} = \lim\limits_{x\to 0+} \big(\frac{1}{\alpha}x^\alpha\big) = 0$.

(v) Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion ist

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\log x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\log x} \overset{Bsp.4)}{=} e^0 = 1.$$

4.4 Der Satz von Taylor

Satz 89. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ sei n-mal differenzierbar in a. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Polynomfunktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit grad $p \leq n$, die die Eigenschaft $f^{(k)}(a) = p^{(k)}(a)$ für $0 \leq k \leq n$ besitzt nämlich

$$p(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Beweis. Eindeutigkeit: Angenommen, die Polynomfunktion

$$p(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + ... + c_n(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k$$

besitzt die geforderte Eigenschaft. Für $0 \leq k \leq n$ ist

$$p^{(k)}(x) = k!c_k + (k+1)\cdot k...2c_{k+1}(x-a) + ... + n(n-1)...(n-k+1)c_n(x-a)^{n-k}$$

Daher muss $f^{(k)}(a) = p^{(k)}(a) = k!c_k$ und daher $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ (für $0 \leq k \leq n$) gelten.

Existenz: Nach der oben durchgeführten Rechnung besitzt das Polynom $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ die Eigenschaft $p^{(k)}(a) = k! \cdot \frac{f^{(k)}(a)}{k!} = f^{(k)}(a)$ für $0 \leq k \leq n$.

Def. Gelten die Voraussetzungen von Satz 89, so wird das Polynom $T_{n,a}(f) := \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ als das n-te Taylorpolynom von f an der Stelle a bezeichnet.

Beispiele. 1) Es sei $f(x) = e^x$ und $a = 0$. Dann ist $f^{(k)}(x) = e^x \quad \forall k \geq 0$ und daher $f^{(k)}(0) = e^0 = 1 \quad \forall\, k \geq 0$. Daher ist $T_{n,0}(f) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

2) Es sei $f(x) = \log(1+x)$ und $a = 0$. Dann ist $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}\frac{(k+1)!}{(1+x)^k}$ $\forall\, k \geq 1$ (wie in Bsp 4) am Ende von Abschnitt 4.1) und daher $f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)! \quad \forall\, k \geq 1$. Da $f(0) = 0$ ist $T_{n,0}(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{k!}x^k = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$.

Satz 90. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $x \in I$ und die beiden Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ seien beide in x n-mal differenzierbar. Dann ist auch $f \cdot g : I \to \mathbb{R}$ in x n-mal differenzierbar und es gilt
$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$.

Beweis. Induktion nach n
Der Fall $n = 1$ ist gerade die Produktregel (Satz 67(iv)), denn

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \binom{1}{0} f^{(1-0)}(x) \cdot g^{(0)}(x) + \binom{1}{1} f^{(1-1)}(x) \cdot g^{(1)}(x).$$

Induktionsschritt

$$(f \cdot g)^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\big((f \cdot g)^{(n)}(x)\big) = \frac{d}{dx}\Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x)\Big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d}{dx}\big(f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x)\big) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k+1)}(x) \cdot g^{(k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k+1)}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k+1)}(x) \cdot g^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(n+1-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x) =$$

$$f^{(n+1)}(x) \cdot g(x) + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) f^{(n+1-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x) + f(x) \cdot g^{(n+1)}(x) =$$

$$\binom{n+1}{0} f^{(n+1)}(x) \cdot g(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x) + \binom{n+1}{n+1} f(x) \cdot g^{(n+1)}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x).$$

Satz 91. Es sei $I \in \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a \in I$ und die beiden Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ seien beide in a n-mal differenzierbar. Gilt $f(x) = p(x) + (x-a)^n g(x) \quad \forall\, x \in I$, wobei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion mit grad $p \leq n$ ist und g die Bedingung $g(a) = 0$ erfüllt, so ist $p = T_{n,a}(f)$.

Beweis. Aus der Gleichung $f(x) = p(x) + (x-a)^n \cdot g(x)$ folgt dür $0 \leq k \leq n$ mit Hilfe von Satz 90
$f^{(k)}(x) = p^{(k)}(x) + \sum\limits_{j=0}^{k} \binom{k}{j} g^{(k-j)}(x) \cdot n(n-1)...(n-j+1)(x-a)^{n-j}$ und daher

$$f^{(k)}(x) = p(k)(a) + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} g^{(k-j)}(a) \cdot n(n-1)...(n-j+1) \cdot (a-a)^{n-j}$$

Für $0 \leq j \leq k-1$ ist (wegen $k-1 \leq n-1$) auch $0 \leq j \leq n-1$ und daher $n-1 \geq 1$. Also ist $(a-a)^{n-j} = 0$ und damit

$$\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} g^{(k-j)}(a) \cdot n(n-1)...(n-j+1) \cdot (a-a)^{n-j} = 0.$$

Für $j = k$ ist $g^{(k-j)}(a) = g(a) = 0$. Also ist

$$\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} g^{(k-j)}(a) \cdot n(n-1)... \cdot (n-j+1)(a-a)^{n-j} = 0$$

und daher $f^{(k)}(a) = p^{(k)}(a)$ (für $0 \leq k \leq n$). Aus Satz 89 folgt, dass $p = T_{n,a}(f)$.

Beispiele. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ist $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$. Wendet man nun Satz 91 mit $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $a = 0$ und $g(x) = \frac{x}{1-x}$ an, so erhält man $T_{n,0}(f) = 1 + x + x^2 + ... + x^n$.

Satz 92. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ sei n-mal differenzierbar. Die Ableitung von $T_{n,a}(f)$ ist $T_{n-1,a}(f')$.

Beweis. Aus $T_{n,a}(f)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ folgt

$$\frac{d}{dx} T_{n,a}(f)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k(x-a)^{k-1} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = T_{n-1,a}(f')(x).$$

Beispiele. Für $f(x) = \log(1-x)$ ist $T_{n+1,a}(f) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - +... + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1}$ (siehe oben). Wendet man Satz 92 an, erhält man sofort das n-te Taylorpolynom von $f'(x) = \frac{1}{1-x}$ an der Stelle 0.

$$T_{n,0}(f') = \frac{d}{dx}(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - +... + (-1)^{n+2}\frac{x^{n+1}}{n+1}) = 1 - x + x^2 - +... + (-1)^n x^n.$$

Def. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$. Man sagt f sei (auf I) stetig differenzierbar, wenn die Ableitung f' von f auf I existiert und f' stetig ist. Allgemein heißt f n-mal stetig differenzierbar, wenn die n-te Ableitung $f^{(n)}$ auf I existiert und $f^{(n)}$ stetig ist.

Bemerkung. Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion muss nicht stetig sein. Z.B. ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

differenzierbar, ihre Ableitung f' ist im Punkt $x = 0$ aber nicht stetig.

Satz 93. Die Funktion $f : [a,x] \to \mathbb{R}$ (bzw. $f : [x,a] \to \mathbb{R}$) sei n-mal stetig differenzierbar und ihre $(n+1)$-te Ableitung $f^{(n+1)}$ möge auf (a,x) (bzw. (x,a)) existieren. Weiters sei $p \in \{1,2,...,n+1\}$. Dann $\exists\ \xi \in (a,x)$ (bzw. $\exists\ \xi \in (x,a)$), derart, dass

$$f(x) - T_{n,a}(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p}(x-a)^p(x-\xi)^{n+1-p}.$$

Bemerkung. Der Ausdruck auf der rechten Seite wird als Schlömilchsches Restglied bezeichnet.

Beweis. Es seien $F, G : [a,x] \to \mathbb{R}$ (bzw. $F, G : [x,a] \to \mathbb{R}$) definiert als
$F(t) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$ und $G(t) = (x-t)^p$. Dann gelten
$F(a) = f(x) - T_{n,a}(f)(x),\ F(x) = G(x) = 0,\ G'(t) = -p(x-t)^{p-1}$ und

$$F'(t) = -f'(t) - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}\right) =$$
$$= -f'(t) - \left(\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - f'(t)\right) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

$\forall\ t \in (a,x)$ (bzw. $\forall\ t \in (x.a)$).
Da F und G auf $[a,x]$ (bzw. $[x,a]$) stetig und auf (a,x) (bzw. (x,a)) differenzierbar sind, kann man den Verallgemeinerten Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz

76) anwenden. D.h. Es gibt ein ξ zwischen a und x, derart dass

$$\Big(T_{n,a}\big(f\big)(x)-f(x)\Big)\cdot\Big(-p(x-\xi)^{p-1}\Big)=\Big(F(x)-F(a)\Big)\cdot G'(\xi)=$$
$$=\Big(G(x)-G(a)\Big)\cdot F'(\xi)=-(x-a)^p\cdot\left(-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\right)$$

bzw.

$$\Big(f(x)-T_{n,a}\big(f\big)(x)\Big)\cdot p(x-\xi)^{p-1}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-a)^p(x-\xi)^n.$$

Daraus folgt sofort
$f(x)-T_{n,a}\big(f\big)(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p}(x-a)^p(x-\xi)^{n-p+1}$.

Korollar 94. Die Funktion $f:[a,x]\to\mathbb{R}$ (bzw. $f:[x,a]\to\mathbb{R}$) sei n-mal stetig differenzierbar und ihre $(n+1)$-te Ableitung $f^{(n+1)}$ möge auf (a,x) (bzw. (x,a)) existieren.

(i) $\exists\,\xi\in(a,x)\ \big((\text{bzw. }\exists\,\xi\in(x,a)\big):f(x)-T_{n,a}\big(f\big)(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-a)(x-\xi)^n$, (Cauchysches Restglied)

(ii) $\exists\,\xi\in(a,x)\ \big((\text{bzw. }\exists\,\xi\in(x,a)\big):f(x)-T_{n,a}\big(f\big)(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ (Lagrangesches Restglied)

Beweis. (i) Setze $p=1$ in Satz 93.

(ii) Setze $p=n+1$ in Satz 93.

Bemerkung. 1) Am häufigsten wird das Lagrangesche Restglied $\big($Korollar 94(ii)$\big)$ verwendet, d.h.

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

2) Eine weitere Darstellung des Restglieds (das Integralrestglied) folgt später.

Beispiele. Es sei $f(x)=e^x$ und $a=0$. Dann folgt sofoert aus Korollar 94(ii):
Für jedes $x\in\mathbb{R}$ gibt es ein ξ zwischen 0 und x, derart dass

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Korollar 95.

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}\right)\ \left(=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\right)$$

Beweis. Wählt man im vorangegangenen Beispiel $x = 1$, so erhält man $\forall\, n \geq 1 \quad \exists\, \xi_n \in (0,1) : e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}$ und daher

$$\left|1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} - e\right| = \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!} \leq \frac{e}{n+1} \leq \frac{4}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Korollar 96. Die Zahl e ist irrational (d.h. $e \notin \mathbb{Q}$).

Beweis. Angenommen, es wäre $e = \frac{p}{q}$ (mit $p, q \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$). Setzt man $n := \max\{q, 3\}$, so wäre $\frac{p}{q} = e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}$ für ein $\xi \in (0,1)$. Daraus folgt,

$$\underbrace{\frac{pn!}{p}}_{\in\mathbb{Z}} = \underbrace{n!\Big(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\Big)}_{\in\mathbb{Z}} + \frac{e^{\xi}}{n+1}$$

und daher

$$\frac{e^{\xi}}{n+1} = \frac{pn!}{q} - n!\Big(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\Big) \in \mathbb{Z}.$$

Nun gilt aber $0 < \xi < 1 \;\Rightarrow 0 < e^{\xi} < e \leq 4 \;\Rightarrow 0 < \frac{e^{\xi}}{n+1} < \frac{4}{n+1} \leq 1$, d.h. $\frac{e^{\xi}}{n+1} \in (0,1)$, ein Widerspruch.

5 Integrierbare Funktionen

5.1 Definition des Riemann - Integrals

Def. Eine Zerlegung Z des Intervalls $[a,b]$ ist eine endliche Menge $Z = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \subseteq [a,b]$ mit der Eigenschaft $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. Die Punkte $x_0, x_1, ..., x_n$ werden Teilungspunkte der Zerlegung Z genannt, die Intervalle $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]$ werden Teilungsintervalle der Zerlegung Z genannt.

Def. Sind Z_1 und Z_2 zwei Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$, so heißt Z_2 feiner als Z_1, wenn $Z_1 \subseteq Z_2$. (D.h. Z_2 hat mindestens so viele Teilungspunkte wie Z_1.)

Lemma 97. Die Relation feiner zu sein ist eine Ordnungsrelation auf der Menge der Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$.

Beweis. Offenbar gilt $Z \subseteq Z$ für jede Zernelgung Z von $[a,b]$.
Sind Z_1 und Z_2 Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$ und $Z_1 \subseteq Z_2$ und $Z_2 \subseteq Z_1$, so folgt $Z_1 = Z_2$.
Sind Z_1, Z_2 und Z_3 Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$ und $Z_1 \subseteq Z_2$ und $Z_2 \subseteq Z_3$, so folgt $Z_1 \subseteq Z_3$.

Bemerkung. 1) Die Relation feiner zu sein ist keine Totalordnung, da zwei Zerlegungen möglicherweise nicht vergleichbar sind. Z.B. sind $Z_1 = \{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{3}, 1\}$ und $Z_2 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, 1\}$ zwei Zerlegungen des Intervalls $[0,1]$, für die weder $Z_1 \subseteq Z_2$ noch $Z_2 \subseteq Z_1$ gilt.

2) Zu zwei Zerlegungen Z_1 und Z_2 gibt es aber immer die gemeinsame Verfeinerung $Z_1 \cup Z_2$, die feiner als Z_1 und Z_2 ist. Im Bsp. in Bemerkung 1 wäre das $Z_1 \cup Z_2 = \{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, 1\}$.

Def. Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $Z = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$, so definiert man die Untersumme

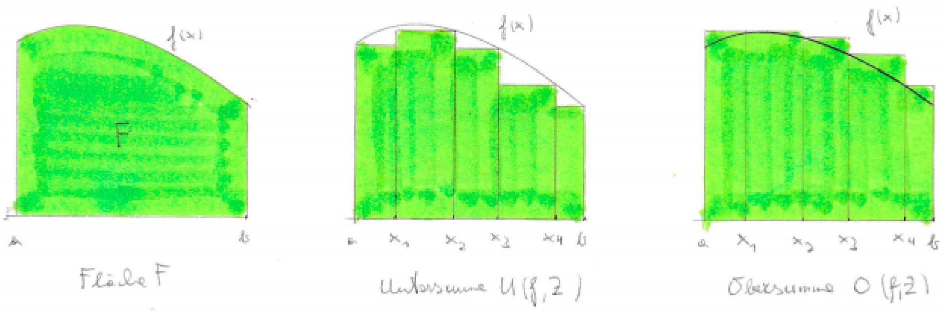
$$U(f,Z) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + ... + m_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

wobei $m_i = \inf\limits_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) = \inf\{f(x) | x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = \inf f\big([x_{i-1}, x_i]\big)$
und die Obersumme

$$O(f,Z) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + ... + M_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

wobei $M_i = \sup\limits_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) = \sup\{f(x) | x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = \sup f\big([x_{i-1}, x_i]\big)$.

Bemerkung. Ist die Fläche F unter dem Graphen der beschränkten Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gesucht, so entsprechen Unter- und Obersumme der Approximation der Fläche durch Rechtecke von unten und oben:



Offenbar gilt dabei $U(f, Z) \leq F \leq O(f, Z)$ für jede Zerlegung Z und die Approximation wird umso besser sein, je feiner die Zerlegung Z ist.

Lemma 98. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, Z_1 und Z_2 zwei Zerlegungen von $[a, b]$ und Z_2 feiner als Z_1. Dann gilt

$$U(f, Z_1) \leq U(f, Z_2) \leq O(f, Z_2) \leq O(f, Z_1).$$

Beweis. 1. Ungleichung: Ist $Z_1 = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ und $y \in Z_2 \setminus Z_1$ mit $x_{i-1} < y < x_i$, so ist

$$\begin{aligned}(x_i - x_{i-1}) \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) &= (y - x_{i-1}) \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_1} f(x) + (x_i - y) \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \\ &\leq (y - x_{i-1}) \inf_{x_{i-1} \leq x \leq y} f(x) + (x_i - y) \inf_{y \leq x \leq x_i} f(x)\end{aligned}$$

Ist $Z_2 \setminus Z_1 = \{y\}$, so ist der Beweis der ersten Ungleichung fertig (da die übrigen Summanden gleich bleiben). Ansonsten verwende Induktion nach $|Z_2 \setminus Z_1|$, d.h. füge einen Teilungspunkt nach dem anderen hinzu.

2. Ungleichung: Für $1 \leq i \leq n$ ist $m_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \leq \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) = M_i$ und daher

$$U(f, Z) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = O(f, Z).$$

3. Ungleichung: Analog zur 1. Ungleichung.

Korollar 99. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, Z_1 und Z_2 zwei Zerlegungen von $[a, b]$ und $Z = Z_1 \cup Z_2$ die gemeinsame Verfeinerung von Z_1 und Z_2. Dann gilt

$$U(f, Z_1) \leq U(f, Z) \leq O(f, Z) \leq O(f, Z_2).$$

Beweis. Folgt sofort aus Lemma 98.

Def. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Die Funktion f heißt (Riemann-) integrierbar, wenn es genau eine Zahl $I \in \mathbb{R}$ gibt, derart dass $U(f, Z_1) \leq I \leq O(f, Z_2)$ für alle Zerlegungen Z_1, Z_2 gilt. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so wird diese Zahl I das (bestimmte) Integral der Funktion f von a bis b genannt und man schreibt dafür $\int_a^b f(x)\, dx$.

Def. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, so seien

$\underline{\int_a^b} f(x)dx = sup\{U(f, Z)|\text{Z ist Zerlegung von } [a, b]\}$,

$\overline{\int_a^b} f(x)dx = inf\{O(f, Z)|\text{Z ist Zerlegung von } [a, b]\}$

Lemma 100. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, so ist $\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$

Beweis. Ang., es gäbe eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\underline{\int_a^b} f(x)dx > \overline{\int_a^b} f(x)dx$. Es sei $\delta := \underline{\int_a^b} f(x)dx - \overline{\int_a^b} f(x)dx > 0$. Dann gibt es wegen Satz 5 Zerlegungen Z_1 und Z_2 von $[a, b]$ derart, dass $\underline{\int_a^b} f(x)dx - \frac{\delta}{2} < U(f, Z_1) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx$ und $\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq O(f, Z_2) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{\delta}{2}$. Bezeichnet Z die gemeinsame Verfeinerung von Z_1 und Z_2, so folt $O(f, Z) \leq O(f, Z_2) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{\delta}{2} = \underline{\int_a^b} f(x)dx - \frac{\delta}{2} < U(f, Z_1) \leq U(f, Z)$ ein Widerspruch.

Satz 101. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann sind äquivalent

(i) f ist integrierbar

(ii) $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$

Beweis.

(i)⇒(ii) Ist $\underline{\int_a^b} f(x)dx < \overline{\int_a^b} f(x)dx$, so gibt es unendlich viele I mit der Eigenschaft $\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq I \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$ und daher $U(f, Z_1) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq I \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq O(f, Z_2)$ für alle Zerlegungen Z_1, Z_2 von $[a, b]$, dh f ist nicht integrierbar.

(ii)⇒(i) Sei $I := \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$. Dann ist $U(f, Z_1) \leq I \leq O(f, Z_2)$ für alle Zerlegungen Z_1, Z_2 von $[a, b]$ und I ist die einzige Zahl mit dieser Eigenschaft.

Bemerkung. Der Beweis von Satz 101 zeigt auch: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so ist $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)\, dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$

Satz 102. Sei $f : [a, b] \to R$ beschränkt. Dann sind äquivalent:

(i) f ist integrierbar

(ii) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists$ Zerlegungen Z_1, Z_2 von $[a, b]$, sodass $O(f, Z_2) - U(f, Z_1) < \varepsilon$

(iii) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists$ Zerlegung Z von $[a, b]$, sodass $O(f, Z) - U(f, Z) < \varepsilon$

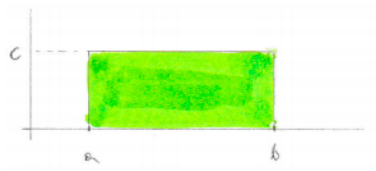
Beweis.

(i)⇒(ii) Nach Satz 102 ist $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$ und es gibt Zerlegungen Z_1, Z_2 von $[a, b]$, sodass $\int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} < U(f, Z_1) \leq \int_a^b f(x)dx$ bzw.
$\int_a^b f(x)dx \leq O(f, Z_2) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$
$\Rightarrow\ O(f, Z_2) - U(f, Z_1) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

(ii)⇒(iii) Sind Z_1, Z_2 Zerlegungen von $[a, b]$, sodass $O(f, Z_2) - U(f, Z_1) < \varepsilon$, so sei Z die gemeinsame Verfeinerung. Dann ist $O(f, Z) - U(f, Z) \leq O(f, Z_2) - U(f, Z_1) < \varepsilon$.

(iii)⇒(i) Ist f nicht integrierbar, so muss wegen Lemma 100 und Satz 101 $\underline{\int_a^b} f(x)dx < \overline{\int_a^b} f(x)dx$ gelten. Dann ist aber $O(f, Z) - U(f, Z) \geq \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx > 0$ für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ und Bedingung (iii) kann für $\epsilon > 0$ mit $\epsilon < \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx$ nicht erfüllt werden.

Beispiele. 1. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f(x) = c (\in \mathbb{R})\ \forall\ x \in [a, b]$. Dann ist f auf dem Intervall $[a, b]$ integrierbar und $\int_a^b f(x)dx = c \cdot (b - a)$
Sei $Z = \{a, b\}$ (dh $x_0 = a, x_1 = b)$). Dann ist $m_1 = inf f(x) = c$ und $M_1 = sup f(x) = c$ und daher $U(f, Z) = O(f, Z) = c \cdot (b - a)$



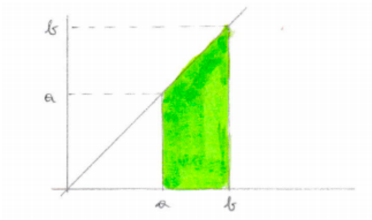
2. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f(x) = x$. Dann ist f integrierbar und $\int_a^b f(x)dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$.
Es sei Z_n die Zerlegung $Z_n = \{x_0, ..., x_n\}$ mit $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ für $0 \leq i \leq n$. Dann ist $m_i = min\{f(x) | x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = min\{x | x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = x_{i-1} = a + i\frac{b-a}{n}$, $M_i = max\{f(x) | x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = max\{x | x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ und $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ für $1 \leq i \leq n$. Daraus folgt

$U(f, Z_n) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (a + (i-1)\frac{b-a}{n}) \cdot \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}(na + \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n-1} i) = \frac{b-a}{n}(na + \frac{b-a}{n}\frac{n(n-1)}{2}) = ab - a^2 + \frac{(b-a)^2(n-1)}{2n} = ab - a^2 + \frac{(b-a)^2}{2}(1 - \frac{1}{n}) = \frac{2ab - 2a^2 + a^2 - 2ab + b^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2n} = \frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2n}$ und

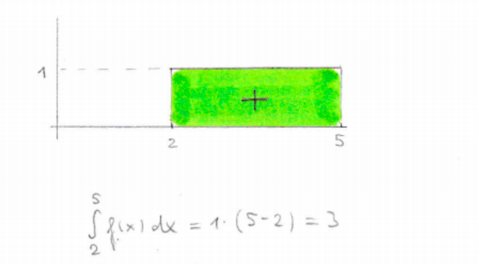
$O(f, Z_n) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (a + i\frac{b-a}{n}) \cdot \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}(na + \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n i) = \frac{b-a}{n}(na + \frac{b-a}{n}\frac{n(n+1)}{2}) = ab - a^2 + \frac{(b-a)^2(n+1)}{2n} = ab - a^2 + \frac{(b-a)^2}{2}(1 + \frac{1}{n}) = \frac{2ab - 2a^2 + a^2 - 2ab + b^2}{2} + \frac{(b-a)^2}{2n} = \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{(b-a)^2}{2n}$

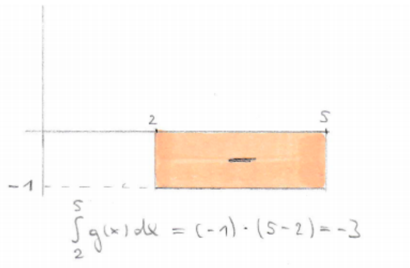
Man erhält $O(f, Z_n) - U(f, Z_n) = \frac{(b-a)^2}{n} \underbrace{\to}_{n \to \infty} 0$. Ist $\varepsilon > 0$, so gibt es ein $n \in$

$\mathbb{N}\backslash\{0\}$ mit der Eigenschaft $\frac{(b-a)^2}{n} < \varepsilon$. Für dieses n ist $O(f, Z_n) - U(f, Z_n) < \varepsilon$ und f ist integrierbar nach Satz 102. Da $\lim\limits_{n\to\infty} O(f, Z_n) = \lim\limits_{n\to\infty} U(f, Z_n) = \frac{b^2-a^2}{2}$, ist $I = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ die einzige Zahl mit der Eigenschaft $U(f, Z_n) \leq I \leq O(f, Z_n)$ und $\int_a^b f(x)dx = \frac{b^2-a^2}{2}$.

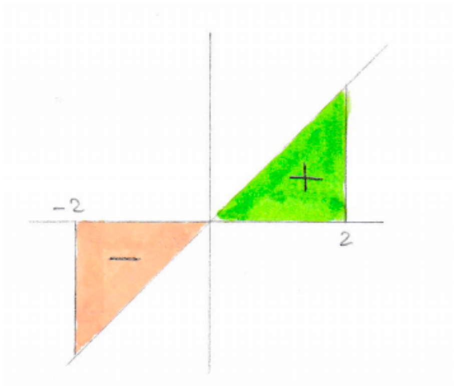


Bemerkung. 1. Das Integral einer Funktion f berechnet zwar anschaulich die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion f, es versieht den Flächeninhalt aber mit einem Vorzeichen - je nachdem, ob diese Fläche oberhalb oder unterhalb der x-Achse liegt. In Bsp. 1. oben ist für $f(x) = 1$ z.B. $\int_2^5 f(x)dx = 3$, aber für $g(x) = -1$ ist $\int_2^5 g(x)dx = -3$.





Die Werte für Flächenstücke ober- und unterhalb der x-Achse können sich dabei auch gegenseitig aufheben. In Bsp. 2. oben wäre z.B. $\int_{-2}^2 xdx = \frac{2^2-(-2)^2}{2} = 0$



2. Es gibt beschränkte Funktionen, die nicht (Riemann-)integrierbar sind, z.B. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ falls } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 \text{ falls } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ Es sei $Z = x_0, x_1, ...x_n$ irgendeine Zerlegung des Intervalls $[0, 1]$. Wegen Satz 3 ist $[x_{i+1}, x_1] \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ und daher $M_i = 1$ für $1 \leq i \leq n$. Daraus ergibt sich $O(f, Z) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) =$

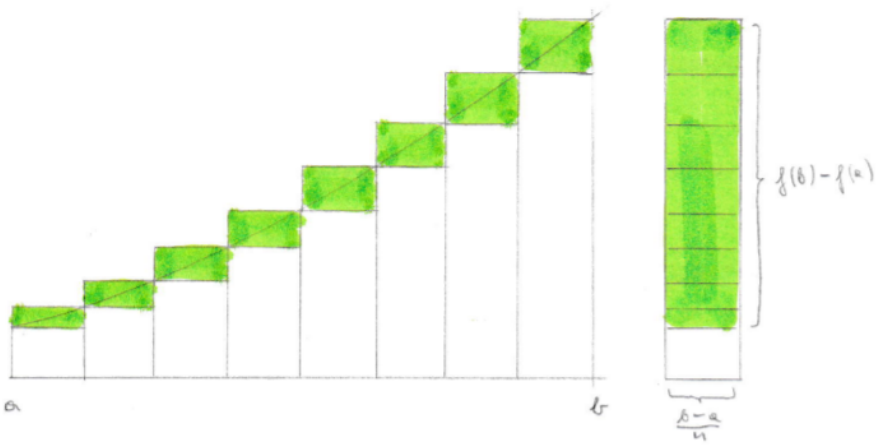
$x_n - x_0 = 1$. Nun kann man leicht $[x_{i+1}, x_1] \backslash \mathbb{Q} \neq \emptyset$ zeigen, woraus $m_i = 0$ und $U(f, Z) = 0$ folgt. In diesem Bsp. erfüllt jedes $I \in [0, 1]$ die Bedingung $U(f, Z) \leq I \leq O(f, Z)$ für alle Zerlegungen des Intervalls $[0, 1]$ und es gilt $\underline{\int_0^1} f(x)dx = 0 < 1 = \overline{\int_0^1} f(x)dx$.

5.2 Eigenschaften des Riemann-Integrals

Satz 103. Jede monotone Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Beweis. Es sei f zunächst monoton wachsend. Sei $\varepsilon > 0$: Wähle ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $n > \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon}$ und die Zerlegung $Z_n = \{x_0, ..., x_n\}$ mit $x_i = a + i\frac{b-a}{n}(0 \leq i \leq n)$. Dann ist $f(x_{i-1}) \leq f(x) \leq f(x_i)\ \forall\ n \in [x_i - 1, x_i]$ und daher $m_i = f(x_{i-1}), M_i = f(x_i)$ für $1 \leq i \leq n$.
Es folgt $O(f, Z_n) - U(f, Z_n) = \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))(\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\frac{1}{n}(b-a)}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}) = \frac{b-a}{n}(f(x_n) - f(x_0)) = \frac{1}{n}(b-a)(f(b) - f(a)) < \varepsilon$

Die Behauptung folgt aus Satz 102.
Ist die Funktion f monoton fallend, kann der Beweis analog geführt werden.



Veranschaulichung des Beweises von Satz 103. Die grüne Fläche (links in Stücken, rechts zu einem Rechteck zusammengesetzt) entspricht gerade $O(f, Z_n) - U(f, Z_n) = \frac{1}{b}(b-a)(f(b) - f(a)$. Durch entsprechende Wahl von n kann man die grüne Sänke rechts beliebig schmal und die Fläche dadurch beliebig klein machen.

Satz 104. Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 57 ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sogar gleichmäßig stetig. Dh $\exists\ \delta > 0$, sodass $\forall\ x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.
Wähle nun eine Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ von $[a, b]$ mit der Eigenschaft $x_i - x_{i-1} < \delta$ für $1 \leq i \leq n$.
Sind nun $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ für ein $i \in 1, .., n$, so muss $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ gelten. Da die stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nach Satz 52 auf $[x_{i-1}, x_i]$ ihr Minimum m_i und

ihr Maximum M_i annimmt, folgt $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$ für $1 \leq i \leq n$. Daraus erhält man $O(f,Z) - U(f,Z) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(M_i - m_i)}_{<\frac{\varepsilon}{b-a}}(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(x_n - x_0) = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$.
Die Behauptung folgt nun aus Satz 102.

Satz 105. (Linearität des Integrals) Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei beschränkte Funktionen und $c \in \mathbb{R}$.

(i) Sind $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, dann ist auch $f + g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

(ii) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, dann ist auch $cf : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\int_a^b (cf(x))dx = c\int_a^b f(x)dx$

Beweis. (i) Es sei $\varepsilon > 0$. Da $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar sind, gibt es nach Satz 102 Zerlegungen Z_1, Z_2 von $[a,b]$ derart dass $O(f,Z_1) - U(f,Z_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ und $O(g,Z_2) - U(g,Z_2) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Bezeichnet $Z = Z_1 \cup Z_2 = x_0, x_1, ..., x_n$ die gemeinsame Verfeinerung von Z_1 und Z_2, so gelten wegen Lemma 98 $O(f,Z) - U(f,Z) < \frac{\varepsilon}{2}$ und $O(g,Z) - U(g,Z) < \frac{\varepsilon}{2}$
Aus $f(y) + g(y) \leq \underbrace{\sup}_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) + \underbrace{\sup}_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} g(x) \ \forall y \in [x_{i-1}, x_i]$
folgt
$\underbrace{\sup}_{x_{i-1} \leq y \leq x_i} (f(y) + g(y)) \leq \underbrace{\sup}_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) + \underbrace{\sup}_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} g(x)$ für $1 \leq i \leq n$. Daraus erhält man (durch Multiplikation mit $x_i - x_{i-1}$ und anschließenden aufsummieren) $O(f+g,Z) \leq O(f,Z) + O(g,Z)$
Analog dazu zeigt man $U(f+g,Z) \geq U(f,Z) + U(g,Z)$. Daraus erhält man $O(f+g,Z) - U(f+g,Z) \leq O(f,Z) - U(f,Z) + O(g,Z) - U(g,Z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
und nach Satz 102 ist $f + g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Aus
$U(f,Z) + U(g,Z) \leq \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \leq O(f,Z) + O(g,Z)$
und
$U(f,Z) + U(g,Z) \leq U(f+g,Z) \leq \int_a^b (f(x) + g(x))dx \leq O(f+g,Z) \leq O(f,Z) + O(g,Z)$
folgt
$|\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx - \int_a^b (f(x) + g(x))dx| \leq O(f,Z) - U(f,Z) + O(g,Z) - U(g,Z) < \varepsilon$.
Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, muss $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ gelten.

(ii) Ist $c = 0$, so ist $cf = 0$ integrierbar und die Behauptung ist trivialerweise erfüllt, da $\int_a^b (cf(x))dx = 0 = c\int_a^b f(x)dx$
Es sei nun $c > 0$. Da $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ intigrierbar ist, gibt es nach Satz 102 eine Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ von $[a,b]$, derart dass $O(f,Z) - U(f,Z) < \frac{\varepsilon}{c}$.
Wegen Satz 8(ii) ist $\underbrace{\sup}_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} (cf(x)) = c \underbrace{\sup}_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$
und daher (Multiplikation mit $x_i - x_{i-1}$ und aufsummieren) $O(cf,Z) = cO(f,Z)$.
Analog kann man $U(cf,Z) = cU(f,Z)$ zeigen und erhält

$O(cf,Z)-U(cf,Z)=c(O(f,Z)-U(f,Z))<c\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$
Nach Satz 102 ist $c\cdot f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar. Aus
$cU(f,Z)\le c\int_a^b f(x)dx\le cO(f,Z)$
und
$cU(f,Z)=U(cf,Z)\le\int_a^b(cf(x))dx\le O(cf,Z)=cO(f,Z)$
folgt
$|\int_a^b(cf(x))dx-c\int_a^b f(x)dx|\le c(O(f,Z)-U(f,Z))<\varepsilon$. Da $\varepsilon>0$ beliebig war, muss $\int_a^b(cf(x))dx=c\int_a^b f(x)dx$ gelten.
Es sein nun $c=-1$. Da $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar ist, gibt es nach Satz 102 eine Zerlegung $Z=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ von $[a,b]$, derart dass $O(f,Z)-U(f,Z)<\varepsilon$.
Wegen eines Analogons zu Korollar 9 ist
$\underbrace{\sup}_{x_{i-1}\le x\le x_i}(-f(x))=-\underbrace{\inf}_{x_{i-1}\le x\le x_i}f(x),$
woraus man (Multiplikation mit x_i-x_{i-1} und aufsummieren) $O(-f,Z)=-U(f,Z)$. Analog zeigt man $U(-f,Z)=-O(f,Z)$.
Also ist $O(-f,Z)-U(-f,Z)=O(f,Z)-U(f,Z)<\varepsilon$ und $-f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist integrierbar nach Satz 102. Aus
$-O(f,Z)\le-\int_a^b f(x)dx\le-U(f,Z)$
und
$-O(f,Z)=U(-f,Z)\le\int_a^b(-f(x))dx\le O(-f,Z)=-U(f,Z)$
folgt
$|\int_a^b(-f(x))dx+\int_a^b f(x)dx|\le O(z,Z)-U(f,Z)<\varepsilon$.
Da $\varepsilon>0$. beliebig war, muss $\int_a^b(-f(x))dx=-\int_a^b f(x)dx$ gelten.
Ist $c<0$, so folgt die Behauptung aus den bisherigen Fällen. Die Funktion $c\cdot f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist intigrierbar, da $cf=(-1)\cdot|c|\cdot f$ und $\int_a^b(c(fx))dx=\int_a^b(-|c|f(x))dx=-\int_a^b(|c|f(x))dx=-|c|\int_a^b f(x)dx=c\int_a^b f(x)dx$.

Satz 106. Seien $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt.

(i) Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar, $\Phi:D\to\mathbb{R}$ Lipschitz-stetig und $f([a,b])\subseteq D$, dann ist auch $\Phi\circ f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar.

(ii) Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar, so ist auch $|f|:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar.

(iii) Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar, so ist auch $f^2:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar.

(iv) Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar und $\exists\,\delta>0:|f(x)|\ge\delta\ \forall x\in[a,b]$, so ist auch $\frac{1}{f}:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar.

(v) Sind $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ beide integrierbar, so ist auch $f\cdot g:[a,b]\to\mathbb{R}$, integrierbar.

vi Sind $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ beide integrierbar, so sind auch $\max\{f,g\}\to\mathbb{R}$ und $\min\{f,g\}:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar.

Beweis. (i) Da Φ Lipschitz-stetig ist, $\exists L>0:|\Phi(y_1)-\Phi(y_2)|\le L|y_1-y_2|\ \forall\, y_1,y_2\in D$. Es sei $\varepsilon>0$ Da $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar ist, gibt es eine Zerlegung $Z=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ von $[a,b]$, sodass $O(f,Z)-U(f,Z)<\frac{\varepsilon}{L}$. Für $x',x''\exists[x_{i-1},x_i$

ist $|\Phi(f(x'))-\Phi(f(x''))| \leq L|f(x')-f(x'')| \leq L(\underbrace{\sup}_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x)- \underbrace{\inf}_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x))$
und daher
$\underbrace{\sup}_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} (\Phi(f(x)) - \underbrace{\inf}_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} \Phi(f(x)) \leq L(\underbrace{\sup}_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x) - \underbrace{\inf}_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x))$ für
$1 \leq i \leq n$
Durch Multiplikation mit $x_i - x_{i-1}$ und aufsummieren erhält man $O(\Phi\circ f, Z) - U(\Phi \circ f, Z) \leq L(O(f, Z) - U(f, Z)) < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$.
Nach Satz 102 ist $\Phi \circ f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar.

(ii) Die Funktion $\Phi(y) = |y|$ ist Lipschitz-stetig, da $||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2|$
Die Behauptung folgt aus (i).

(iii) Da $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränke Funktion ist, ist $D := f([a, b])$ eine beschränkte Menge. Die Funktion $\Phi : D \to \mathbb{R}, \Phi(y) = y^2$ ist Lipschitz-stetig, da $|y_1^2 - y_2^2| = |y_1 + y_2| \cdot |y_1 - y_2| \leq (|y_1| + |y_2|) \cdot |y_1 - y_2| \leq \underbrace{\underbrace{2 \sup |y|}_{y\in D}} \cdot |y_1 - y_2|$
$\forall y_1, y_2 \in D$
mit $L = 1 + 2\underbrace{2 \sup |y|_{y\in D}} > 0$. Die Behauptung folgt aus (i).

(iv) Die Funktion $\Phi : \{y \in \mathbb{R}||y| \geq \delta\} \to \mathbb{R}, \Phi(y) = \frac{1}{y}$ ist Lipschitz-stetig, da $|\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2}| = \frac{|y_1-y_2|}{|y_1y_2|} \leq \frac{1}{\delta^2}|y_1 - y_2| = L \cdot |y_1 - y_2| \forall y_1, y_2 \in D$ mit $L = \frac{1}{\delta^2}$ die Behauptung folgt aus (i).

(v) Die Behauptung folgt aus der Darstellung $f \cdot g = \frac{1}{4}((f + g)^2 - (f - g)^2)$, Satz 105 und (iii).

vi Die Behauptung folgt aus der Darstellung $\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ und $\min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$, Satz 105 und (ii).

Satz 107. Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen.

(i) Ist $f \geq 0$ (dh. $f(x) \geq 0 \; \forall \; x \in [a, b]$), so ist $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

(ii) ist $f \geq g$ (dh $f(x) \geq g(x) \; \forall \; x \in [a, b]$), so ist $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ (Monotonie des Integrals)

(iii) $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ (Dreiecksungleichung für Integrale)

Beweis. (i) Ist $Z = \{x_0, ..., x_n\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$, so ist
$m_i = \inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x) \geq 0$ für $1 \leq i \leq n$
und daher $U(f, Z) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \geq 0$.
Daraus folgt $\int_a^b f(x)dx \geq U(f, Z) \geq 0$.

(ii) Aus $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a,b]$ folgt sofort $f(x) - g(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$ und daraus (mittels (i) und Satz 105)

$$0 \leq \int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx,$$

woraus sofort die Behauptung folgt.

(iii) Nach Satz 106(ii) ist auch $|f| : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar.
Aus $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \in [a,b]$ folgt wegen (ii) und Satz 105 $-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$ und daraus (wegen Folgerung 4) in Abschnitt 1.3) $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Satz 108 (1. Mittelwertsatz der Integralrechnung)**.** Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so $\exists\ \xi \in [a,b]$, sodass $\int_a^b f(x)dx = f(\xi) \cdot (b-a)$.

Beweis. Da die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, ist sie nach Satz 104 integrierbar und nach Satz 52 $\exists\ x_0, x_1 \in [a,b] : f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)\ \forall x \in [a,b]$.
Setzt man $m := f(x_0)$ und $M := f(x_1)$, so ist $m \leq f(x) \leq M\ \forall x \in [a,b]$.
Mit Hilfe von Satz 107(ii) erhält man daraus

$$m(b-a) = \int_a^b m\ dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a)$$

und daher

$$f(x_0) = m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M = f(x_1).$$

Aus dem Zwischenwertsatz (Korollar 50) erhält man, dass $\exists\ \xi \in [a,b] : f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ (woraus sofort die Behauptung folgt).

Satz 109. Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $a < c < b$. Dann sind äquivalent:

(i) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar,

(ii) Die beiden Einschränkungen $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ und $f : [c,b] \to \mathbb{R}$ sind integrierbar.

Gilt eine der beiden (und damit beide) Bedingungen, so ist

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Beweis. 1. Es gilt $\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \sup\{U(f,Z)|Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\}$
$= \sup\{U(f,\bar{Z}|\bar{Z} \text{ ist eine Zerlegung von } [a,b] \text{ und } c \in \bar{Z}\}$. ★
Einseits ist $\{\bar{Z}|\bar{Z}$ ist eine Zerlegung von $[a,b]$ und $c \in \bar{Z}\} \subseteq \{Z|Z$ ist eine Zerlegung von $[a,b]\}$, woraus
$\{u(f,\bar{Z})|\bar{Z}$ ist eine Zerlegung von $[a,b]$ und $c \in \bar{Z} \subseteq \{U(f,Z)|Z$ ist eine Zerelgung von $[a,b]\}$ und daher

$\sup\{U(f,\bar{Z})|\bar{Z}$ ist eine Zerlegung von $[a,b], c \in \bar{Z}\} \leq \sup\{U(f,Z)|Z$ ist eine Zerlegung von $[a,b]$ $\}$

folgt. Ist andererseits Z eine Zerlegung von $[a,b]$, so ist $\bar{Z} = Z \cup \{c\}$ eine (feinere) Zerlegung von $[a,b]$ und daher $U(f,Z) \leq U(f,\bar{Z})$ nach Lemma 98. Daraus folgt

$\sup\{U(f,Z)|Z$ ist eine Zerlegung von $[a,b]\} \leq \sup\{u(f,\bar{Z})|\bar{Z}$ ist eine Zerelgung von $[a,b], c \in \bar{Z}\}$, womit die Gleichung ★ bewiesen ist. Analog zeigt man

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \inf\{O(f,\bar{Z})|\bar{Z}$$

ist Zerlegung von $[a,b], c \in \bar{Z}\}$

Sind Z_1 und Z_2 Zerlegungen von $[a,c]$ bzw. $[c,b]$, so ist $\bar{Z} := Z_1 \cup Z_2$ eine Zerlegung von $[a,b]$, die $c \in \bar{Z}$ erfüllt. Ist $\bar{Z}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ mit $c \in \bar{Z}$, so sind $Z_1 := \bar{Z} \cap [a,c]$ und $Z_2 := \bar{Z} \cap [c,b]$ Zerlegungen von $[a,c]$ bzw. $[c,b]$. In beiden Situationen gilt $U(f,\bar{Z}) = U(f|_{[a,c]}, Z_1) + U(f|_{[c,b]}, Z_2)$, wobei $f|_{[a,c]}$ und $f|_{[c,b]}$ die Einschränkungen von f auf $[a,c]$ bzw. $[c,b]$ bezeichnen sollen. Daraus folgt

$\{U(f,\bar{Z})|\bar{Z}$ ist Zerlegung von $[a,b], c \in \bar{Z}\} = \{U(f|_{[a,c]}, Z_1|Z_1$ ist Zerlegung von $[a,c]\} + \{U(f|_{[c,b]}, Z_2)|Z_2$ ist Zerlegung von $[c,b]\}$

woraus man wegen Satz 8(i) $\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^c} f(x)\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\mathrm{d}x$ erhält.

Analog zeigt man, dass $\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^c} f(x)\mathrm{d}x + \overline{\int_c^b} f(x)\mathrm{d}x$

2. (i) $\Rightarrow$ (ii) Aus

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^c} f(x)\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^c} f(x)\mathrm{d}x + \overline{\int_c^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

folgen $\underline{\int_a^c} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^c} f(x)\mathrm{d}x$ und $\underline{\int_c^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_c^b} f(x)\mathrm{d}x$, woraus wegen Satz 101 die Behauptung folgt.

3. (ii) $\Rightarrow$ (i) Aus

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^c} f(x)\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \\ = \overline{\int_a^c} f(x)\mathrm{d}x + \overline{\int_c^b} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

erhält man $\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$, woraus wegen Satz 101 die Behauptung folgt.

Gelten (i) und (ii), so ist $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^c}(x)\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

Def. Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so setzt man $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Bemerkung. 1) In der vorangegangenen Definition ist (wie bisher stets in diesem Kapitel) $a < b$ vorausgesetzt worden.

2) Direkt aus der Definition des Riemann-Integrals folgt $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$. (Dabei ist $a \in \mathbb{R}$ beliebig und $f : [a,a] = \{a\} \to \mathbb{R}$ beliebig.)

3) Verwendet man die vorangegangene Definition (und Bemerkung 2), so gilt die Gleichung $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ für $a, b, c \in \mathbb{R}$ in beliebiger Reihenfolge. In Satz 109 wurde der Fall $a < c < b$ behandelt. Ist jetzt $c < a < b$ (oder $a < b < c$) so folgt aus Satz 109
$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x = \int_c^a f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (bzw. $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$)
und daher $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_c^a f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$
(bzw. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$).
Der Fall, dass zwei der drei Punkte a, b, c zusammenfallen (also $a = b, a = c$ oder $c = b$) kann leicht bewiesen werden. (Man muss bei all denm aber natürlich voraussetzen, dass $f : [m, M] \to \mathbb{R}$, mit $m = \min\{a, b, c\}$ und $M = \max\{a, b, c\}$, integrierbar ist.)

Lemma 110. Es sei $\{a_1, ...a_n\} \subseteq [a,b]$ eine endliche Menge und die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ besitze die Eigenschaft, dass $f(x) = 0 \quad \forall\ x \in [a,b] \setminus \{a_1, ..., a_n\}$. Dann ist die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Beweis. O.B.d.A sei $(a \leq) a_1 < a_2 < ... < a_n (\leq b)$. Weiters sei
$M := \max\{|f(a_1)|,\ |f(a_2)|, ..., |f(a_n)|\} = \max\limits_{1\leq i\leq n}|f(a_i)| = \max\limits_{a\leq x\leq b}|f(x)|$.
Es sei $\varepsilon > 0$. Wähle nun ein $\delta > 0$ mit den beiden Eigenschaften $2\delta < a_{i+1} - a_i$ (d.h. $\delta < \frac{1}{2}(a_{i+1} - a_i)$) für $1 \leq i \leq n-1$ und $4Mn\delta < \varepsilon$ (d.h. $\delta < \frac{\varepsilon}{4Mn}$). D.h. $\delta < \min\{\frac{a_2-a_1}{2}, \frac{a_3-a_2}{2}, ..., \frac{a_n-a_{n-1}}{2}, \frac{\varepsilon}{4Mn}\}$.
Die Zerlegung Z habe (außer a und b) die Teilungspunkte $\max\{a, a_1-\delta\}, a_1+\delta, a_2-\delta, a_2+\delta, ..., a_n-\delta, \min\{b, a_n+\delta\}$. (Diese Teilungspunkte werden immer größer, da $a_i + \delta < a_{i+1} - \delta$ zur Bedingung $a_{i+1} - a_i > 2\delta$ äquivalent ist.) Aus
$\sup\limits_{a_i-\delta\leq x\leq a_i+\delta} f(x) \leq 2\delta M$ bzw. $\inf\limits_{a_i-\delta\leq x\leq a_i+\delta} f(x) \geq -2\delta M$

für $1 \leq i \leq n$ (bzw. analogen Aussagen für a_1 und a_n, falls $a > a_1 - \delta$ bzw. $b < a_n + \delta$ sein sollte) folgt nun $O(f,Z) \leq n \cdot 2\delta M$ und $U(f,Z) \geq -n \cdot 2\delta M$ und damit $O(f,Z) - U(f,Z) \leq 4Mn\delta < \varepsilon$. Also ist f integrierbar. Aus $-\varepsilon < U(f,Z) \leq \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq O(f,Z) < \varepsilon$ für beliebiges $\varepsilon > 0$ folgt $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$

Satz 111. Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq [a,b]$ eine endliche Menge und die Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ besitze die Eigenschaft, dass $g(x) = f(x) \quad \forall\, x \in [a,b] \setminus \{a_1, ..., a_n\}$. Dann ist die Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Beweis. Die Funktion $g - f : [a,b] \to \mathbb{R}$ besitzt die Eigenschaft, dass $(g-f)(x) = g(x) - f(x) = 0 \quad \forall\, x \in [a,b] \setminus \{a_1, ..., a_n\}$. Nach Lemma 110 ist $g - f$ integrierbar und $\int\limits_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x = 0$. Wegen Satz 105(i) ist daher auch $g = (g-f) + f$ integrierbar und es gilt $\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b (g(x) - f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Beispiele. 1) Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f(x) = c\ (\in \mathbb{R})$ eine konstante Funktion und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, derart, dass $g(x) = c \quad \forall\, x \in (a,b)$ und $g(a), g(b) \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist g nach Satz 111 integrierbar und $\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = c \cdot (b-a)$.

2) Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion. D.h. es gibt eine Partition $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ und $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$, derart, dass $f(x) = c_i \quad \forall\, x \in (x_{i-1}, x_i)$. Zusätzlich seien $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n) \in \mathbb{R}$ beliebig. Aus Satz 109 und Beispiel 1) folgt, dass f integrierbar ist und $\int\limits_a^b f(x)\mathbb{R} = \sum\limits_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x = \sum\limits_{i=1}^n c_i \cdot (x_i - x_{i-1})$.

3) Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, derart dass $g(x) = f(x) \quad \forall\, x \in (a,b)$ und $g(a), g(b) \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist g nach Satz 111 integrierbar und $\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$. (Dieses Beispiel verallgemeinert Beispiel 1).)

4) Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stückweise stetige Funktion. D.h. es gibt eine Partition $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ und stetige Funktionen $f_1 : [x_0, x_1] \to \mathbb{R},\ f_2 : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}, ..., f_n : [x_{n-1}, x_n] \to \mathbb{R}$, derart, dass $f(x) = f_i(x) \quad \forall\, x \in (x_{i-1}, x_i)$ für $1 \leq i \leq n$. Aus Satz 109 und Beispiel 3) folgt, dass f integrierbar ist und $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum\limits_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x)\mathrm{d}x$.

1. Ist also etwa $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^4 + 1 & \text{für } -2 < x < -1 \\ |x| & \text{für } -1 < x < 1 \\ 7x & \text{für } 1 < x < 2 \end{cases} \qquad \text{und } f(-2), f(-1),$$

$f(1), f(2) \in \mathbb{R}$ beliebig, so ist f integrierbar und
$\int\limits_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{-1}(x^4+1)\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{1}|x|\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2}(7x)\mathrm{d}x.$

5.3 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Lemma 112. Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert als $F(x) := \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. Dann ist F stetig.

Beweis. Da f integrierbar ist, $\exists\ M > 0 : |f(t)| \leq M\ \forall t \in [a,b]$. Sei $\varepsilon > 0$ und $x, y \in [a,b]$. Ist $|x-y| < \frac{\varepsilon}{M}$ und $y \leq x$, so

$|F(x) - F(y)| = |\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int_a^y f(t)\mathrm{d}t| \overset{\text{Satz 109}}{=} |\int_y^x f(t)\mathrm{d}t| \overset{\text{Satz 107(iii)}}{\leq} \int_y^x \underbrace{|f(t)|}_{\leq M}\mathrm{d}t$

$\overset{\text{Satz 107(ii)}}{\leq} M|x-y| < M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \varepsilon.$

Völlig analog zeigt man $|F(x) - F(y)| < \varepsilon$ falls $y > x$.

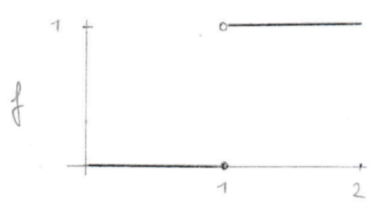
Bemerkung. Es folgt sofort: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und
$F : [a,b] \to \mathbb{R}, F(x) = \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$, so is F stetig, da $F(x) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ nach Satz 112 stetig ist.

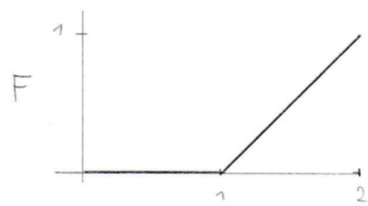
Beispiele. Die Funktion $f : [0,2] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 \text{ falls } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \text{ falls } 1 < x \leq 2 \end{cases}$
ist nach Beispiel 2) oben integrierbar und $F : [0,2] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \begin{cases} 0 \text{ falls } 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 \text{ falls } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

(denn für $0 \leq x \leq 1$ ist $F(x) = 0 \cdot (x-0) = 0$ und für $1 < x \leq 2$ ist

$$F(x) = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt = 0 + (1-0) + 1(x-1) = x-1.$$





Satz 113 (Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung, 1. Teil)**.** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F : [a,b] \to \mathbb{R}, F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Dann ist F auf (a,b) differenzierbar und $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a,b)$.

Beweis. Ist $a < x < y < b$. Nach Satz 108 (1.Mittelwertsatz der Integralrechnung) $\exists\ \xi \in [x,y] : F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)dt = f(\xi) \cdot (y-x)$. Wenn $y \to x+$, dann auch $\xi \to x+$ und (wegen der Stetigkeit von f) auch $f(\xi) \to f(x)$. Da f bei x stetig ist,

Ammann Judith, Boubenizek Anna, Bredl Vanessa, Emsenhuber Klaudia, Grujić Dragan, Janisch Alexander, Karner Nora, Kohlmann Sara, Lang Clara, Langschwert Mohamed, Mayer Barbara, Moser Laura

$\exists\, \delta > 0$, sodass $|y-x| < \delta,\ y \in [a,b] \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$.
Ist nun $0 < y - x < \delta$ so $|\xi - x| < \delta$ und daher $|f(\xi) - f(x)| < \varepsilon$ und schließlich

$$|\frac{F(y)-F(x)}{y-x} - f(x)| = |f(\xi) - f(x)| < \varepsilon, \text{ dh. } \lim_{y \to x+} \frac{F(y)-F(x)}{y-x} = f(x).$$

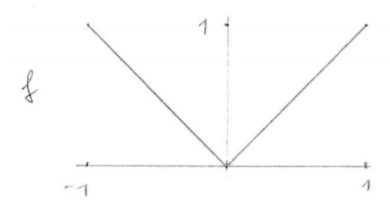
Analog zeigt man $\lim\limits_{y \to x-} \frac{F(y)-F(x)}{y-x} = f(x)$.

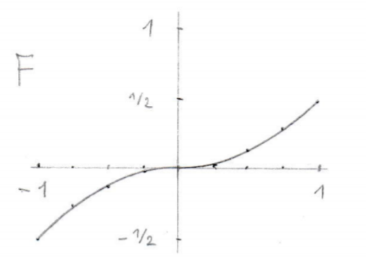
Bemerkung. Es folgt sofort: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_x^b f(t)dt$, so ist F differenzierbar und $F'(x) = -f(x)\ \forall x \in (a,b)$, was aus Satz 113 durch ableiten der Gleichung $F(x) = \int_a^b f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$ folgt.

Beispiele. Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$ und

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x |t|dt = \begin{cases} \int_0^x |t|dt = \frac{1}{2} \cdot x^2 \text{ falls } 0 \le x \le 1 \\ -\int_x^0 |t|dt = -\frac{1}{2} \cdot x^2 \text{falls } -1 \le x < 0 \end{cases}$$

Dann ist $F(x) = \int_0^x |t|dt = \int_0^x tdt = \frac{1}{2}(x^2 - 0^2) = \frac{1}{2}x^2$, falls $0 \le x \le 1$ und $F(x) = -\int_x^0 |t|dt = -\int_x^0 (-t)dt = \int_x^0 (t)dt = \frac{1}{2}(0^2 - x^2) = -\frac{1}{2}x^2$ falls $-1 \le x < 0$.





Beachte: Die Ableitung F'(0) existiert und F'(0)=0.

Def. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein (offenes) Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$. Dann heißt $F : I \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von f (auf I), wenn F differenzierbar ist und $F' = f$.

Lemma 114. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein (offenes) Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$.

(i) Ist $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, so ist auch $F + c$ eine Stammfunktion von f für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$.

(ii) Sind $F, G : I \to \mathbb{R}$ zwei Stammfunktionen von f, so unterscheiden sie sich nur um eine Konstante, dh. $\exists x \in \mathbb{R} : F - G = c$.

Beweis. (i) $\frac{d}{dx}(F(x) + c) = F'(x) + 0 = f(x)\ \forall x \in I$.

(ii) Aus $\frac{d}{dx}(F(x) - G(x)) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0\ \forall x \in I$ folgt wegen Satz 77: $\exists c \in \mathbb{R} : F(x) - G(x) = c\ \forall x \in I$.

Bemerkung. 1. Statt Stamfunktion sagt man auch unbestimmtes Integral oder (seltener) Antiderivierte oder Primitive.

2. Ist F Stammfunktion von f, so schreibt man dafür $\int f(x)dx = F(x) + C$. Der Summand "$+C$"bringt zum Ausdruck, dass Stammfunktionen nur bis auf eine Konstante bestimmt sind. Die Notation $\int f(x)dx$ wird durch Satz 115 verständlich und bezeichnet die Menge aller Stammfunktionen der Funktion f.

3. Aus Satz 113 folgt sofort, dass stetige Funktionen (auf Intervallen) stets eine Stammfunktion besitzen.

Satz 115 (Hauptsatz der Differenzial-und Integralrechnung, 2. Teil)**.** Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. (Genauer sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit der Eigenschaft $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a, b)$.) Dann gilt

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

.

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ von $[a, b]$, derart dass $\int_a^b f(x)dx \geq U(f, Z) > \int_a^b f(x)dx - \varepsilon$. Nach Satz 75 gilt für $1 \leq i \leq n$: $\exists\ \xi_i \in [x_{i-1}, x_1]$, sodass

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Verwendet man wieder die Bezeichnung $m_i = \inf\limits_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$, so folgt

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} (F(x_i)) - F(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = U(f, Z) > \int_a^b f(x)dx - \varepsilon$$

Da dabei $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $F(b) - F(a) \geq \int_a^b f(x)dx$.
Analog zeigt man mit Hilfe von Obersummen die umgekehrte Ungleichung
$F(b) - F(a) \leq \int_a^b f(x)dx$.

Bemerkung. 1. Die übliche Methode, ein Integral $\int_a^b f(x)dx$ zu berechnen, ist, eine Stammfunktion F von f zu finden und Satz 115 anzuwenden. Der schwierige Teil dabei ist eine Stammfunktion zu finden. Tabellen und Computerprogramme können dabei sehr hilfreich sein. Zwar besagt Satz 113, dass man für eine stetige Funktion stets eine Stammfunktion finden kann, allerdings heißt das noch nicht, dass man sie auch mit Hilfe der üblichen Funktionen schreiben kann. (Tatsächlich gibt es relativ einfache Funktionen, für die man zeigen kann, dass das unmöglich ist.)

2. Man kann Satz 113 auch so umformulieren: Ist die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und ihre Ableitung $f' : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so gilt $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$. Tatsächlich gilt sogar, dass $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt\ \forall x \in [a, b]$. Dass gilt insbesondere, wenn die Ableitung $f' : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, dh. f stetig differenzierbar ist.

3. Für die Differenz $F(b) - F(a)$, die bei Anwendung des Hauptsatzes auftritt, schreibt man $[F(x)]_{x=a}^{b}$ (oder $[F(x)]_a^b$ oder $F(x)|_{x=a}^{b}$ oder $F(x)|_a^b$), dh. $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_{x=a}^{b}$.

4. Integrierbarkeit einer Funktion und Existenz einer Stammfunktion dafür sind durch den Hauptsatz eng verknüpft, trotzdem impliziert keine der beiden Eigenschaften die andere! Dh. eine Funktion kann integrierbar sein aber keine Stammfunktion besitzen und umgekehrt.

5. Sind $F, G : [a, b] \to \mathbb{R}$ Stammfunktionen von $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ (dh. $F' = f$ und $G' = g$) und $c \in \mathbb{R}$, so folgt sofort aus Satz 67(i) bzw. (iii), dass $F + G$ Stammfunktion von $f + g$ ist bzw. cF Stammfunktion von cf ist. Man kann dafür auch $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ und $\int (cf(x))dx = c \int f(x)dx$ schreiben.

6. Aus den Ergebnissen von Kapitel 4 erhält man sofort die folgenden wichtigen Stammfunktionen:

   - Ist $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, so ist $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \ \forall x \in \mathbb{R}$
   - Ist $n \in \{-2, -3, -4, ...\}$, so ist $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
   - $\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{dx}{x} = \log|x| + C \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
     (Das wurde in Bsp. 5) von Satz 72 bewiesen.)
   - Ist $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, so ist $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} \ \forall x > 0$
   - Ist $a > 0$, so ist $\int a^x dx = \frac{1}{\log a}a^x + C \ \forall x \in \mathbb{R}$
   - $\int e^x dx = e^x + C \ \forall x \in \mathbb{R}$ (Spezialfall $a = e$ des vorangegangenen Punkts)
   - $\int \log x \ dx = x \log x - x + C = x(\log x - 1) + C \ \forall x > 0$
     (Das wurde in Bsp. 6) von Satz 69 bewiesen.)

Beispiele. 1. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f(x) = c (\in \mathbb{R})$, so ist $\int_a^b cdx = [cx]_{x=a}^{b} = cb - ca = c(b - a)$.

2. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f(x) = x$, so ist $\int_a^b xdx = [\frac{x^2}{2}]_{x=a}^{b} = \frac{b^2-a^2}{2}$

3. Ist $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$, so ist $\int_0^1 x^2 dx = [\frac{x^3}{3}]_{x=0}^{1} = \frac{1^3-0^3}{3} = \frac{1}{3}$

4. Ist allgemeiner $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f(x) = x^n$, so ist $\int_a^b x^n dx = [\frac{1}{n+1}x^{n+1}]_{x=a}^{b} = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$.

5. $\int_1^2 \frac{dx}{x} = [\log|x|]_{x=1}^{2} = \log 2 - \log 1 = \log 2$

6. Ist allgemeiner $0 < a < b$, so ist $\int_a^b \frac{dx}{x} = [\log|x|]_{x=a}^{b} = \log b - \log a = \log \frac{b}{a}$

7. $\int_0^1 (\frac{1}{2}x + 1)dx = [\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + x]_{x=0}^{1} = [\frac{x^2}{4} + x]_{x=0}^{1} = (\frac{1}{4} + 1) - (0 + 0) = \frac{5}{4}$

8. Sind allgemeiner $c_0, c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ und $p(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + ... + c_1 x + c_0$ so ist
$$\int_a^b p(x)dx = \int_a^b (c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + ... + c_1 x + c_0)dx$$

$$= [c_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + c_{n-1}\frac{x^n}{n} + ... + c_1\frac{x^2}{2} + c_0 x]_{x=a}^b$$

$$= (c_n\frac{b^{n+1}}{n+1} + c_{n-1}\frac{b^n}{n} + ... + c_1\frac{b^2}{2} + c_0 b) - (c_n\frac{a^{n+1}}{n+1} + c_{n-1}\frac{a^n}{n} + ... + c_1\frac{a^2}{2} + c_0 a)$$

$= \frac{c_n}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}) + \frac{c_{n-1}}{n}(b^n - a^n) + ... + \frac{c_1}{2}(b^2 - a^2) + c_0(b-a)$

9. $\int_5^7 e^{3x}dx = [\frac{1}{3}e^{3x}]_{x=5}^7 = \frac{1}{3}e^{21} - \frac{1}{3}e^{15} = \frac{1}{3}(e^{21} - e^{15}) = \frac{1}{3}e^{15}(e^6 - 1)$
   Man kann die Stammfunktion $\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$ durch ein Verfahren, das wir im nächsten Kapitel besprechen werden (Substitution) finden. Es ist allerdings klar, was passiert: Da $\frac{d}{dx}e^{3x} = 3e^{3x}$, benötigt man den Faktor $\frac{1}{3}$, um die innere Ableitung 3 auszugleichen.

10. $\int_4^5 \frac{1}{x-2}dx = \int_4^5 \frac{dx}{x-2} = [\log|x-2|]_{x=4}^5 = \log 3 - \log 2 = \log\frac{3}{2}$
    Auch in diesem Beispiel könnte man die Stammfunktion $\int \frac{dx}{x-2} = \log|x-2| + C$ durch Substitution finden, allerdings sollte man auch hier besser verstehen, was passiert. Beobachten Sie, dass die Integrationsgrenzen 4 und 5 beide größer als 2 sind - das Integral $\int_0^4 \frac{dx}{x-2}$ wäre gar nicht definiert, da die Funktion $f : [0,4] \setminus \{2\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x-2}$ unbeschränkt ist. (Man kann das auch nicht retten, indem man z.B. $f(2) = 0$ setzt.)

5.4 Integrationstechniken (Partielle Integration und Substitution)

Satz 116. (Partielle Integration) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein (offenes) Intervall und $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gelten:

(i) $\int f'(x)g(x) = f(x)\ g(x) - \int f(x)\ g'(x)\mathrm{d}x$ (mit $x \in I$),

(ii) Ist $[a,b] \subseteq I$, so ist $\int\limits_a^b f'(x)\ g(x)\mathrm{d}x = [f(x)\ g(x)]_{x=a}^b - \int\limits_a^b f(x)\ g'(x)\mathrm{d}x$.

Beweis. (i) Es sei F eine Stammfunktion von $f' \cdot g$ (d.h. $F'(x) = f'(x)\ g(x)\ \forall\ x \in I$) und G eine Stammfunktion von $f \cdot g'$ (d.h. $G'(x) = f(x) \cdot g'(x)\ \forall\ x \in I$). Aus der Produktregel (Satz 67 (iv)) folgt

$$\frac{d}{dx}\Bigg(f(x)\ g(x) - G(x)\Bigg) = f'(x)\ g(x) + f(x)\ g'(x) = f'(x)\ g(x)\ \forall\ x \in I,$$

d.h. $f \cdot g - G$ ist ebenfalls eine Stammfunktion von $f' \cdot g$. Nach Lemma 114 unterscheiden sich F und $f \cdot g - G$ nur um eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ (d.h. $F(x) = f(x) \cdot g(x) - G(x) + c\ \forall\ x \in I$). Geht man zur jeweiligen Menge aller Stammfunktionen über (d.h. $\int f'(x)\ g(x)\mathrm{d}x$ bzw. $\int f(x)\ g'(x)\mathrm{d}x$ ist die Menge aller Stammfunktionen von $f'g$ bzw. fg'), so erhält man die angegebene Gleichung. (D.h. $\int f'(x)\ g(x)\mathrm{d}x = F(x) + c_1$ und $\int f(x)\ g'(x)\mathrm{d}x = G(x) + c_2$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Die Konstanten c_1 und c_2 werden "von der Notation geschluckt".)

(ii) Hat G dieselbe Bedeutung wie im Beweis von (i), so folgt aus Satz 115

$$\int_a^b f'(x)\ g(x)\mathrm{d}x = [f(x)\ g(x) - G(x)]_{x=a}^b = [f(x)\ g(x)]_{x=a}^b - [G(x)]_{x-a}^b =$$

$$[f(x)\ g(x)]_{x=a}^b - \int_a^b f(x)\ g'(x)\mathrm{d}x$$

Beispiele. 1) $\int \log x\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \log x\mathrm{d}x = \int (\frac{d}{dx}x) \cdot \log x\mathrm{d}x =$
$x \cdot \log x - \int x \cdot (\frac{d}{dx}\log x)\mathrm{d}x = x\log x - \int x\frac{1}{x}\mathrm{d}x = x\log x - \int \mathrm{d}x = x\log x - x + c$ (für $x > 0$)

2) $\int \frac{\log x}{x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} \cdot \log x\mathrm{d}x = \int (\frac{d}{dx}\log x) \cdot \log x\mathrm{d}x =$
$\log x \cdot \log x - \int \log x \cdot (\frac{d}{dx}\log x)\mathrm{d}x = (\log x)^2 - \int \log x \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x = (\log x)^2 - \int \frac{\log x}{x}\mathrm{d}x$
$\Rightarrow 2\int \frac{\log x}{x}\mathrm{d}x = (\log x)^2 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\log x}{x} = \frac{1}{2}(\log x)^2$ (für $x > 0$).
Dass die Rechnung in der letzten Zeile korrekt ist, kann man sich überlegen, indem man $\int \frac{\log x}{x}\mathrm{d}x$ als die Menge aller Stammfunktionen von $\frac{\log x}{x}$ auffasst. Allerdings hat man auf diese Weise offensichtlich eine Stammfunktion von $\frac{\log x}{x}$ gefunden, da $\frac{d}{dx}\big(\frac{1}{2}(\log x)^2\big) = \frac{1}{2} \cdot 2\log x \cdot \frac{1}{x} = \frac{\log x}{x}$

3) $\int x\ e^x\mathrm{d}x = \int (\frac{d}{dx}e^x) \cdot x\mathrm{d}x = e^x \cdot x - \int e^x \cdot (\frac{d}{dx}x)\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x \cdot 1\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\mathrm{d}x = xe^x - e^x + c = (x-1)e^x + c \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$

4) $\int x^2e^x\mathrm{d}x = \int (\frac{d}{dx}e^x) \cdot x^2\mathrm{d}x = e^x\ x^2 - \int e^x \cdot (\frac{d}{dx}x^2)\mathrm{d}x = x^2e^x - \int e^x \cdot 2x\mathrm{d}x = x^2e^x - 2\int xe^x\mathrm{d}x \overset{\text{Bsp 3)}}{=} x^2e^x - 2(x-1)e^x + c = (x^2 - 2x + 2)e^x + c \quad \forall x \in \mathbb{R}$

5) Ist allgemein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so ist $\int x^ne^x\mathrm{d}x = x^ne^x - n\int x^{n-1}e^x\mathrm{d}x$ (Rekursionsformel für die Berechnung von $\int x^ne^x\mathrm{d}x$), denn
$\int x^ne^x\mathrm{d}x = \int (\frac{d}{dx}e^x)x^n\mathrm{d}x = e^x \cdot x^n - \int e^x(\frac{d}{dx}x^n)\mathrm{d}x = x^ne^x - \int e^x \cdot nx^{n-1}\mathrm{d}x = x^ne^x - n\int x^{n-1}e^x\mathrm{d}x$

6) Verwendet man partielle Integration, um z.B. das Integral $\int_1^2 xe^x\mathrm{d}x$ zu berechnen, so hat man zwei Möglichkeiten:
1. Man findet die Stammfunktion von xe^x und setzt danach die Grenzen ein:
$\int_1^2 xe^x\mathrm{d}x = [(x-1)e^x]_{x=1}^2 = 1 \cdot e^2 - 0 \cdot e = e^2$
Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, dass man die Korrektheit der Stammfunktion vor dem Einsetztn durch Differenzieren überprüfun kann.
2. Man verwendet Satz 116(ii):
$\int_1^2 xe^x\mathrm{d}x = [xe^x]_{x=1}^2 - \int_1^2 e^x\mathrm{d}x = 2e^2 - e - [e^x]_{x=1}^2 = 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2.$

Satz 117. (Satz von Taylor mit Integralrestglied) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein (offenes) Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ sei $(n+1)$-mal stetig differenzierbar und $a, x \in I$. Dann gilt:
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

Ammann Judith, Boubenizek Anna, Bredl Vanessa, Emsenhuber Klaudia, Grujić Dragan, Janisch Alexander, Karner Nora, Kohlmann Sara, Lang Clara, Langschwert Mohamed, Mayer Barbara, Moser Laura

Bemerkung. Der Ausdruk $\frac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$ wird (aus offensichtlichen Gründen) als Integralrestglied bezeichnet. Satz 117 ergänzt Satz 93 bzw. Korollar 94.

Beweis. Induktion nach n:
$n = 0$: Aus Satz 115 folgt $f(x) = f(a) + \int\limits_a^x f'(t)\mathrm{d}t = f(a) + \frac{1}{0!}\int\limits_a^x (x-t)^0 \cdot f^{(0+1)}\mathrm{d}t$.
Ist die Behauptung für $n-1$ schon bewiesen, so gilt:

$$f(x) - f(a) - f'(a)\cdot(x-a) - \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 - ... - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} =$$

$$\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\mathrm{d}t = -\int\limits_a^x \frac{d}{dt}(\frac{(x-t)^n}{n!})f^{(n)}(t)\mathrm{d}t$$

$$\overset{\text{Satz 116(ii)}}{=} [-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)]_{t=a}^x + \int\limits_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int\limits_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t,$$

woraus die Behauptung folgt.

Satz 118. (Substitutionsregel) Es seien $i, J \subseteq \mathbb{R}$ (offene) Intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $\varphi : J \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\varphi(J) \subseteq I$. Dann gelten:

(i) $\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int f(x)\mathrm{d}x\big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$
D.h. ist F Stammfunktion von f auf I, so ist $F\circ\varphi$ Stammfunktion von $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ auf J.

(ii) Gilt zusätzlich $\varphi'(t) > 0 \;\; \forall\, t \in J$ oder $\varphi'(t) < 0 \;\; \forall\, t \in J$ (woraus folgt, dass φ streng monoton ist) und ist $\varphi(J) = I$, so $\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t\big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$
D.h. ist G Stammfunktion von $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ auf J, so ist $G\circ\varphi$ Stammfunktion von f auf I.

(iii) Sind $a, b \in I,\; a = \varphi(\alpha)$ und $b = \varphi(\beta)$, so ist $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

Beweis. (i) Es sei F eine Stammfunktion von f auf I (d.h. $F'(x) = f(x) \;\; \forall\, x \in I$)
Aus der Kettenregel folgt

$$(F\circ\varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) \quad \forall\, t \in J$$

d.h. $F\circ\varphi$ ist Stammfunktion von $(f\circ\varphi)\varphi'$ auf J.

(ii) Es sei G eine Stammfunktion von $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ auf J (d.h. $G'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) \;\; \forall\, t \in J$). Wegen der zusätzlichen Vorraussetzung, dass $\varphi'(t) > 0 \;\; \forall\, t \in J$ oder $\varphi' < 0 \quad \forall\, t \in j$ ist φ nach Satz 78(iii) bzw. Korollar 79(iii) streng monoton und es existiert die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : J \to I$. Nach Satz 72 ist φ^{-1} differenzierbar und

$$(G\circ\varphi^{-1})'(x) = G'(\varphi^{-1}(x))\cdot(\varphi^{-1})'(x) = f(\underbrace{\varphi(\varphi^{-1}(x))}_{=x})\cdot\underbrace{\varphi'(\varphi^{-1}(x))\cdot\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}}_{=1} =$$

$$f(x) \quad \forall\, x \in I,$$

d.h. $G \circ \varphi^{-1}$ ist Stammfunktion von f auf I.

(iii) Ist F Stammfunktion von f auf I (d.h. $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$), so ist $F \circ \varphi$ Stammfunktion von $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ auf J und

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = [F(\varphi(t))]_{t=\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = [F(x)]_{x=\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}$$

$$= \int\limits_{var\phi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

Bemerkung. 1) In der Praxis überprüft man bei Anwendung der Substitutionsregel die Vorraussetzungen von Satz 118 in der Regel nicht, sondern "rechnet einfach drauf los". Hat man auf diese Weise eine Stammfunktion gefunden, so kann man sich ja durch differenzieren von der Korrektheit überzeugen.

2) In der Praxis kann man auf folgende Weise "mechanisch "rechnen (wodurch keine Probleme entstehen): $x = \varphi(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$

Beispiele. 1) Zu berechnen ist das Integral $\int\limits_3^6 e^{\frac{t}{3}}\mathrm{d}t \ \ (= 3\int\limits_3^6 e^{\frac{t}{3}} \cdot \frac{1}{3}\mathrm{d}t)$. Setze $x = \frac{t}{3}$
$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = 3\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \int e^{\frac{t}{3}}\mathrm{d}t = 3\int e^x\mathrm{d}x\big|_{x=\frac{t}{3}} = e^x\big|_{x=\frac{t}{3}} = 3e^{\frac{t}{3}} + c$
Auch hier hat man wieder zwei Möglichkeiten, das Integral zu brechnen:
1. Man findet die Stammfunktion (mit Hilfe von Substitution) und setzt dann die Grenzen ein : $\int\limits_3^6 e^{\frac{t}{3}}\mathrm{d}t = [3e^{\frac{t}{3}}]_{t=3}^6 = 3(e^2 - e) = 3e(e-1)$
2. Man transformiert die Grenzen mit (wobei man $x = \frac{t}{3}$ verwendet):
$\int\limits_3^6 e^{\frac{t}{3}}\mathrm{d}t = 3\int_1^2 e^x\mathrm{d}x = 3[e^x]_{x=1}^2 = 3(e^2 - e) = 3e(e-1).$

2) $\int te^{t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}e^{t^2} + c \ (t \in \mathbb{R})$, denn $x = t^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = 2t \quad \Rightarrow \quad t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{d}x$
$\Rightarrow \int te^{t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int e^x dx\big|_{x=t^2} = \frac{1}{2}e^x\big|_{x=t^2} = \frac{1}{2}e^{t^2} + c$

3) $\int \frac{t^3}{\sqrt{t^4+2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{t^4+2} + c \ (t \in \mathbb{R})$, denn $x = t^4 + 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = 4t^3 \quad \Rightarrow \quad t^3\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\mathrm{d}x$
$\Rightarrow \int \frac{t^3}{\sqrt{t^4+2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}\big|_{x=t^4+2} = \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{x}\big|_{x=t^4+2} = \frac{1}{2}\sqrt{x}\big|_{x=t^4+2} = \frac{1}{2}\sqrt{t^4+2} + c$

4) $\int \frac{dt}{t\log t} = \log(\log t) + c \ (t > 1)$, denn $x = \log t \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{t} = \mathrm{d}x$
$\Rightarrow \int \frac{dt}{t\log t} = \int \frac{dx}{x}\Big|_{x=\log t} = \log x\Big|_{x=\log t} = \log(\log t) + c$

5) $\int \sqrt{2x+3}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(2x+3)^{\frac{3}{2}} + c \ (\ x > -\frac{3}{2})$,
denn $x = \frac{t^2-3}{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2x+3} = \sqrt{t^2} = t$ sowie $\frac{dx}{dt} = t \ (\Rightarrow \mathrm{d}x = t\mathrm{d}t)$ und daher

$$\int \sqrt{2x+3}\mathrm{d}x = \int t \cdot t\mathrm{d}t\Big|_{t=\sqrt{2x+3}} = \int t^2\mathrm{d}t\Big|_{t=\sqrt{2x+3}} = \frac{t^3}{3}\Big|_{x=\sqrt{2x+3}} =$$
$$= \frac{1}{3}\sqrt{2x+3}^3 = \frac{1}{3}(2x+3)^{\frac{3}{2}} + c$$

5.5 Uneigentliche Integrale

Def. Die Funktion $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ sei auf $[a,x]$ integrierbar $\forall \ x > a$ und der Grenzwert $\lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$ möge existieren. Dann sagt man, das uneigentliche Integral $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ würde existieren und setzt $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Bemerkung. Erfüllt $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ die Voraussetzungen dieser Definition und ist $b > a$, so gilt für $x \geq b$, dass $\int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_b^x f(t)\mathrm{d}t$. Daher existiert $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$ genau dann, wenn $\int\limits_b^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_b^x f(t)\mathrm{d}t$ existiert und in diesem Fall ist $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_b^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

Beispiele. 1) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = 1$, denn $\int\limits_0^x e^{-t}\mathrm{d}t = [-e^{-t}]_{t=0}^x = -e^{-x} + 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ existiert genau dann, wenn $\alpha > 1$ und $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$ für $\alpha > 1$ (z.B. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1$), denn

$$\int\limits_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} [\frac{1}{1-\alpha}t^{1-\alpha}]_{t=1}^x = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{für } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{für } \alpha < 1 \end{cases} \\ [\log t]_{t=1}^x = \log x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \qquad \text{für } \alpha = 1 \end{cases}$$

Def. Die Funktion $f : (-\infty,a] \to \mathbb{R}$ sei auf $[x,a]$ integrierbar $\forall \ x < a$ und der Grenzwert $\lim\limits_{x\to-\infty} \int\limits_x^a f(t)\mathrm{d}t$ möge existieren. Dann sagt man, das uneigentliche Integral $\int\limits_{-\infty}^a f(t)\mathrm{d}t$ würde existieren und setzt $\int\limits_{-\infty}^a f(t)\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to-\infty} \int\limits_x^a f(t)\mathrm{d}t$.

Def. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Man sagt, das uneigentliche Integral $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ existiert, wenn für irgendein $a \in \mathbb{R}$ die beiden uneigentlichen Integrale $\int\limits_{-\infty}^{a} f(t)\mathrm{d}t$ und $\int\limits_{a}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ beide existieren. In diesem Fall setzt man $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{a} f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_{a}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

Bemerkung. 1) Eine Überlegung analog zur Bemerkung oben zeigt, dass die Existenz und der Wert des Integrals $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}$ nicht von der Wahl von a abhängen.

2) Es kann, muss aber nicht gelten, dass $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t$. Z.B. ist $\int\limits_{-x}^{x} t\mathrm{d}t = [\frac{t^2}{2}]_{-x}^{x} = \frac{x^2-x^2}{2} = 0$ und daher $\lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_{-x}^{x} t\mathrm{d}t = 0$. Das uneigentliche Integral $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{d}t$ existiert aber gar nicht.

3) Das wichtigste uneigentliche Integral der Gestalt $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ ist wahrscheinlcih das Gaußsche Fehlerintegral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$. Seine Bedeutung beruht darauf, dass es für die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung benötigt wird. Aus zeitlichen Gründen beweisen wir diese Gleichung hier nicht.

Def. Die Funktion $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ sei auf dem Intervall $[a,x]$ integrierbar für jedes $x \in (a,b)$ und der Limies $\lim\limits_{x\to b-} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ möge existieren. Dann sagt man, das uneigentliche Integral $\int\limits_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t$ würde existieren und setzt $\int\limits_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to b-} \int\limits_{a}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.

Bemerkung. 1) In dieser Definition wird vorausgesetzt, dass f für jedes $x \in (a,b)$ auf dem Intervall $[a,x]$ beschränkt ist, aber nicht, dass f auf $[a,b)$ beschränkt ist. (D.h. f kann auf $[a,b)$ unbeschränkt sein.)

2) Ist in der obigen Situation $a < c < b$, so überlegt man sich leicht analog zu oben: $\int\limits_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t$ existiert genau dann, wenn $\int\limits_{c}^{b} f(t)\mathrm{d}t$ existiert. Falls beide uneigentlichen Integrale existieren, so gilt $\int\limits_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{a}^{c} f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_{c}^{b} f(t)\mathrm{d}t$.

Def. Die Funktion $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ sei auf dem Intervall $[x,b]$ integrierbar für jedes $x \in (a,b)$ und der Limes $\lim\limits_{x\to a+} \int\limits_{x}^{b} f(t)\mathrm{d}t$ möge existieren. Dann sagt man, das uneigentliche Integral $\int\limits_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t$ würde existieren und setzt $\int\limits_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to a+} \int\limits_{x}^{b} f(t)\mathrm{d}t$.

Def. Die Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ sei auf jedem Teilintervall $[x,y] \subseteq (a,b)$ (mit $a < x < y < b$) integrierbar. Existieren für irgendein $c \in (a,b)$ die beiden (uneigentlichen) Integrale $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ und $\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$, so sagt man, dass uneigentliche Integral $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ würde existieren und setzt $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$.

Bemerkung. Man kann die beiden Arten uneigentlicher Integrale auch "mischen". Ist z.B. die Funktion $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[x, y]$ (mit $a < x < y$) integrierbar und existieren für irgendein $c > a$ die beiden (uneigentlichen) Integrale $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ und $\int_c^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$, so sagt man, das uneigentliche Integral $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ würde existieren und setzt $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

Beispiele. 1) $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ existiert genau dann, wenn $\alpha < 1$ und $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$ für $\alpha < 1$ (also z.B. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$), denn

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} [\frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha}]_{t=x}^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \underset{x\to 0+}{\longrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{für } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{für } \alpha > 1 \end{cases} \\ [\log t]_{t=x}^1 = -\log x \underset{x\to 0+}{\longrightarrow} +\infty \qquad \text{für } \alpha = 1 \end{cases}$$

(Beachte: Dabei handelt es sich nur für $\alpha > 0$ um ein uneigentliches Integral. Für $\alpha \leq 0$ handelt es sich um ein ganz gewöhnliches Integral.)

2) $\int_0^1 \log t\mathrm{d}t = -1$, denn $\int_x^1 \log t\mathrm{d}t = [t \log t - t]_{t=x}^1 = -1 - \underbrace{(x \log x - x)}_{\underset{x\to 0+}{\to 0}} \underset{x\to 0+}{\longrightarrow} -1$

(Dabei wurde verwendet, dass in Korollar 88(iv) $\lim\limits_{x\to 0+} x \log x = 0$ bewiesen wurde.)

3) Die uneigentlichen Integrale $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ und $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ existieren. wir zeigen zunächst $\frac{d}{dx}(x\sqrt{1-x^2}) = 2\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für $-1 < x < 1$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x\sqrt{1-x^2}) &= \sqrt{1-x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= 2\sqrt{1-x^2} - (\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}) = 2\sqrt{1-x^2} - \frac{1-x^2+x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &\qquad 2\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{d}{dx}(x\sqrt{1-x^2}) + 2\sqrt{1-x^2}$.
Für $-1 < a < b < 1$ erhält man

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [-x\sqrt{1-x^2}]_{x=a}^b + 2\int_a^b \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = a\sqrt{1-a^2} - b\sqrt{1-b^2} + 2\int_a^b \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

Also ist

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{x\to 1-} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 1-} (-x\sqrt{1-x^2} + 2\int_0^x \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$$

Beschte, dass die Funktion $t \mapsto \sqrt{1-x^2}$ auf $[0,1]$ stetig und daher integrierbar ist.
Völlig analog zeigt man $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\int\limits_{-1}^{0} \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$.
Da die Funktionen $(-1,1) \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ (bzw. $[-1,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \sqrt{1-t^2}$) gerade sind, gilt $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int\limits_{0}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-x^2}}$ (bzw. $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{1} \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$), was man auch leicht durch Substitution überprüft.

Def. Die reelle Zahl π sei definiert als $\pi := \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Bemerkung. Aus den obigen Überlegungen folgen sofort $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$ und $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$.
Dabei besagt die zweite Gleichung, dass der halbe Einheitskreis Fläche $\frac{\pi}{2}$ hat. Aber auch unsere Definition von π hat eine sehr anschauliche Bedeutung: Sie besagt, dass der halbe Einheitskreis Bogenlänge π besitzt (was im folgenden Abschnitt begründet werden wird.)

5.6 Die Winkelfunktionen

Def. Es sei$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Die Bogenlänge des Graphen $[a,b] \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto (x, f(x))$ wird definiert als $\int\limits_{a}^{b} \sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x$.

Bemerkung. Als Motivation dieser Definition geben wir zwei heuristische Argumente:

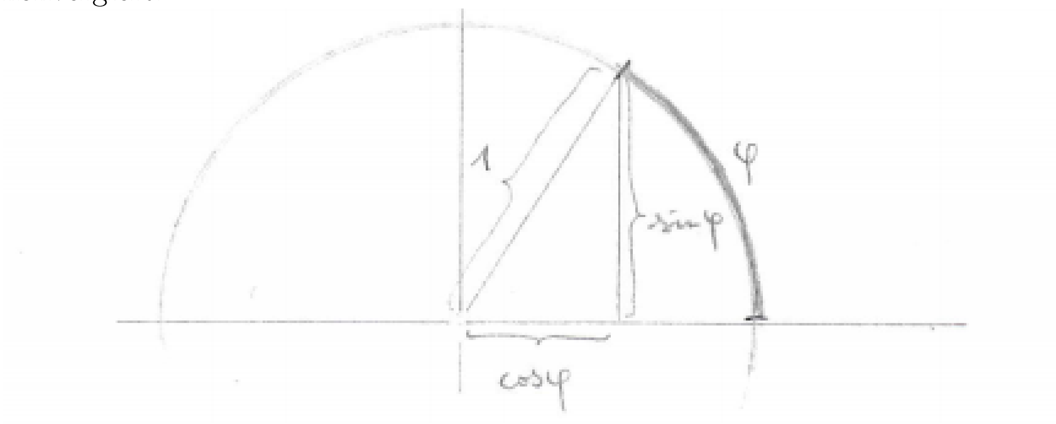
1. In der "Physikerherleitung"wird der Satz des Pythagoras auf infinitesimal kleine Strecken dx und dy angewandt. Die Bogenlänge ergibt sich zu

$$\int_a^b \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \int_a^b \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x.$$

2. Mathematisch exakter ist die folgende Überlegung. Ist $a = x_0 < x_1 < ... < x : n = b$ eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$, so approximiert man die Bogenlänge des Graphen der Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch die Länge des Polygonzugs mit den Eckpunkten $(x_i, f(x_1))$ mit $0 \le i \le n$. Diese ist

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) + f(x_{i-1}))^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_1 - x_{i-1}})^2 (x_i - x_{i-1})}$$

Wendet man den Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz 75) auf die Funktion $f : [x_{i-1}, x_i] \to \mathbb{R}$ an, so erhält man $\frac{f(x_1)-f(x_{i-1})}{x_1+x_{i-1}} = f'(\xi_i)$ für ein $\xi_i \in (x_{i-1}, x_1)$ (wobei $1 \leq i \leq n$). Lässt man nun $x_i - x_{i-1} \longrightarrow 0$ gehen, so ist anschaulich zu erwarten, dass dieser Ausdruck gegen $\int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x$ konvergiert.



Def. Die Funktion Arcus cosinus wird definiert als $\arccos : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ \arccos x = \int\limits_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Bemerkung. 1) Nach der obigen Definition erhält man für die Bogenlänge des Graphen der Funktion $[x, 1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ den Wert

$$\int\limits_x^1 \sqrt{1+(\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}})^2}\mathrm{d}t = \int\limits_x^1 \sqrt{1+\frac{t^2}{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int\limits_x^1 \sqrt{\frac{1}{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int\limits_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

2) Nach Bespiel 3) am Ende des vorangegangenen Abschnitts ist $\arccos x = \int\limits_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = x\sqrt{1-x^2} + 2\int\limits_x^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$. (Insbesondere existiert das uneigentliche Integral.)

3) Aus der Definition des Arcus cosinus folgen sofort:
$\arccos(-1) = \int\limits_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi,\ \arccos(0) = \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2}$ und $\arccos(1) = 0$.

Lemma 119. Die Funktion arccos ist stetig auf $[-1, 1]$, differenzierbar auf $(-1, 1)$ mit Ableitung $\frac{d}{dx}(\arccos) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ und streng monoton fallend.

Beweis. Die Stetigkeit folgt aus Satz 112 (bzw. der Bemerkung danach). Die Differenzierbarkeit folgt aus Satz 113 (bzw. der Bemerkung danach), ebenso, dass

$$\frac{d}{dx}(\arccos x) = \frac{d}{dx}(\int\limits_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} < 0 \quad \text{für } x \in (-1, 1)$$

Daraus folgt (wegen Korollar 79(iii), dass die Funktion arccos streng monoton fällt.

Ammann Judith, Boubenizek Anna, Bredl Vanessa, Emsenhuber Klaudia, Grujić Dragan, Janisch Alexander, Karner Nora, Kohlmann Sara, Lang Clara, Langschwert Mohamed, Mayer Barbara, Moser Laura

Def. Die Funktion Cosinus wird auf dem Intervall $[0, \pi]$ als Umkehrfunktion des arccos definiert, d.h. $\cos : [0, \pi] \to \mathbb{R}$.

Def. Die Funktion Sinus wird auf dem Intervall $[0, \pi]$ definiert durch $\sin : [0, \pi] \to \mathbb{R},\ \sin\varphi := \sqrt{1 - (\cos\varphi)^2}$.

Bemerkung. 1) Wir werden die beiden Funktonen sin und cos sehr rasch auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen.

2) Aus der obigen Bemerkung 3) folgen sofort $\cos(0) = 1,\ \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ und $\cos(\pi) = -1$.

3) Aus Bemerkung 2) folgen sofort $\sin(0) = \sqrt{1 - 1^2} = 0,\ \sin(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{1 - 0^2} = 1$ und $\sin(\pi) = \sqrt{1 - (-1)^2} = 0$.

Lemma 120. Die Funktionen sin und cos sind auf $[0, \pi]$ differenzierbar (wobei in den Randpunkten 0 und π einseitige Ableitungen gemeint sein sollen) und ihre Ableitungen sind dort $\frac{d}{d\varphi}\cos\varphi = -\sin\varphi$ und $\frac{d}{d\varphi}\sin\varphi = \cos\varphi$.

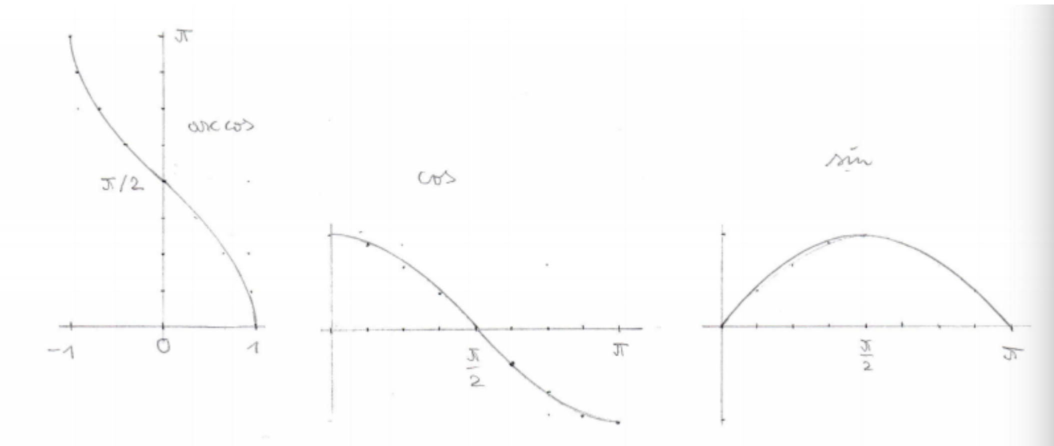
Beweis. Aus Satz 72 folgt für $0 < \varphi < \pi$, dass

$$\frac{d}{d\varphi}\cos\varphi = \frac{1}{\frac{d}{dx}(\arccos x)} = -\sqrt{1 - x^2} = -\sqrt{1 - (\cos\varphi)^2} = -\sin\varphi$$

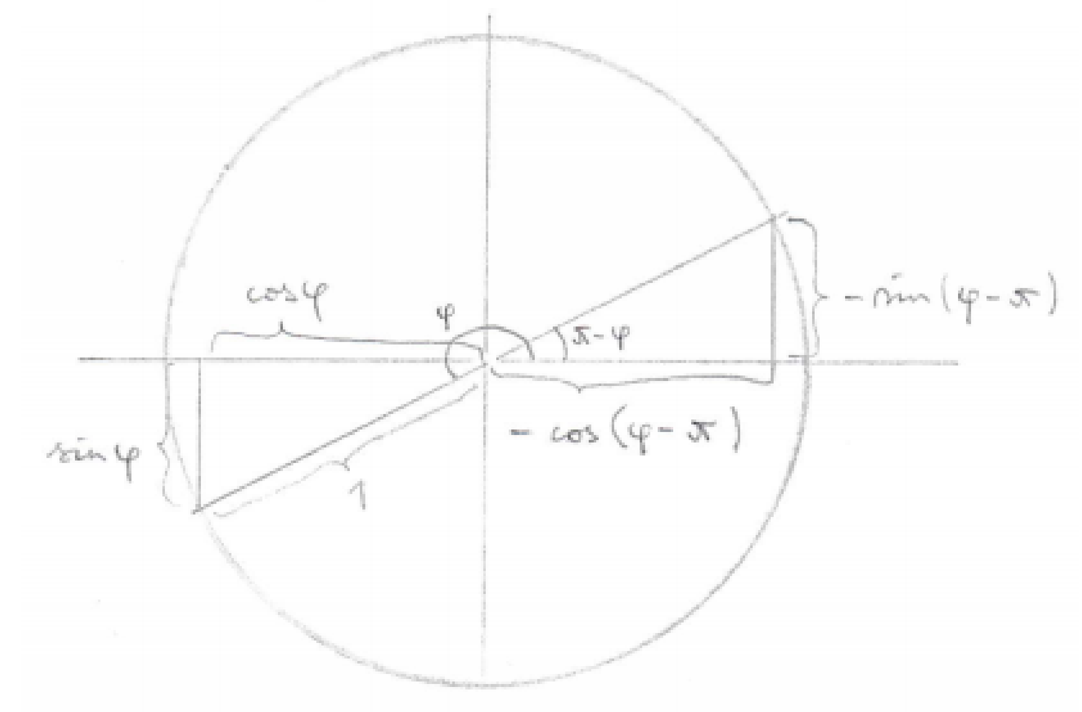
und daher

$$\frac{d}{d\varphi}\sin\varphi = \frac{d}{d\varphi}\sqrt{1 - (\cos\varphi)^2} = \frac{1}{\cancel{2\sqrt{1 - (\cos\varphi)^2}}}(-\cancel{2}\cos\varphi) \cdot (-\cancel{\sin\varphi}) = \cos\varphi$$

Schließlich erhält man unter Verwendung der Regel von de l'Hospital
$\lim\limits_{\varphi\to 0+} \frac{\cos\varphi - 1}{\varphi - 0} = \lim\limits_{\varphi\to 0+} (-\sin\varphi) = 0$ und $\lim\limits_{\varphi\to\pi-} \frac{\cos\varphi + 1}{\varphi - \pi} = \lim\limits_{\varphi\to\pi-} (-\sin\varphi) = 0$
sowie
$\lim\limits_{\varphi\to 0+} \frac{\sin\varphi - 0}{\varphi - 0} = \lim\limits_{\varphi\to 0+} \cos\varphi = 1$ und $\lim\limits_{\varphi\to\pi-} \frac{\sin\varphi - 0}{\varphi - \pi} = \lim\limits_{\varphi\to\pi} \cos\varphi = -1$.



Def. Für $\pi < \varphi \leq 2\pi$ sei $\cos\varphi := -\cos(\varphi - \pi)$ und $\sin\varphi := -\sin(\varphi - \pi)$.



Lemma 121. Die Funktionen sin und cos sind auf $[0, 2\pi]$ differenzierbar (wobei in den Randpunkten 0 und 2π einseitige Ableitungen gemeint sein sollen) und ihre Ableitungen sind dort $\frac{d}{d\varphi}\cos\varphi = -\sin\varphi$ und $\frac{d}{d\varphi}\sin\varphi = \cos\varphi$. weiters gilt $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \quad \forall\, \varphi \in [0, 2\pi]$ (mit $\sin^2\varphi = (\sin\varphi)^2$ und $\cos^2\varphi = (\cos\varphi)^2$).

Beweis. Für $\pi < \varphi < 2\pi$ ist $\frac{d}{d\varphi}\cos\varphi = -\frac{d}{d\varphi}\cos(\varphi - \pi) = \sin(\varphi - \pi) = -\sin\varphi$ und $\frac{d}{d\varphi}\sin\varphi = -\frac{d}{d\varphi}\sin(\varphi - \pi) = -\cos(\varphi - \pi) = \cos\varphi$.
Die Funktionen cos und sin sind bei π stetig, da
$\lim\limits_{\varphi\to\pi+}\cos\varphi = -\lim\limits_{\varphi\to\pi+}\cos(\varphi - \pi) = -\lim\limits_{\varphi\to 0+}\cos\varphi = -1$ und
$\lim\limits_{\varphi\to\pi+}\sin\varphi = -\lim\limits_{\varphi\to\pi+}\sin(\varphi - \pi) = -\lim\limits_{\varphi\to 0+}\sin\varphi = 0$
Weiters gelten
$\lim\limits_{\varphi\to\pi+}\frac{\cos\varphi+1}{\varphi-\pi} = \lim\limits_{\varphi-\pi+}(-\sin\varphi) = 0$ und $\lim\limits_{\varphi\to\pi+}\frac{\sin\varphi-0}{\varphi-\pi} = \lim\limits_{\varphi\to\pi+}\cos\varphi = -1$
(d.h. cos und sin sind bei π differenzierbar, $\frac{d}{d\varphi}\Big|_{\varphi=\pi}\cos\varphi = 0$ und $\frac{d}{d\varphi}\Big|_{\varphi=\pi} = \sin\varphi = -1$) sowie $\lim\limits_{\varphi\to 2\pi-}\frac{\cos\varphi-1}{\varphi-2\pi} = \lim\limits_{\varphi\to 2\pi-}(-\sin\varphi) = 0$ und $\lim\limits_{\varphi\to 2\pi-}\frac{\sin\varphi-0}{\varphi-2\pi} = \lim\limits_{\varphi\to 2\pi-}\cos\varphi = 1$
Für $0 \le \varphi \le \pi$ folgt $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ direkt aus der Definition des Sinus.
Für $\pi < \varphi \le 2\pi$ ist $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = \sin^2(\varphi - \pi) + \cos^2(\varphi - \pi) = 1$.

Def. Auf $\mathbb{R} \setminus [0, 2\pi]$ seien cos und sin durch periodische Fortsetzung definiert, d.h. man fordert $\cos(\varphi + 2\pi) = \cos\varphi$ und $\sin(\varphi + 2\pi) = \sin\varphi \quad \forall\varphi \in \mathbb{R}$. Etwas genauer kann man dabei so vorgehen: Ist $\varphi \in \mathbb{R} \setminus [0, 2\pi]$, so gibt es ein eindeutig bestimmtes $k \in \mathbb{Z}$, derart dass $\varphi + 2k\pi \in [0, 2\pi)$. Man setzt nun $\cos\varphi := \cos(\varphi + 2k\pi)$ und $\sin\varphi := (\varphi + 2k\pi)$.

Satz 122. Die Funktionen sin und cos sind auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitungen $\frac{d}{d\varphi}\cos\varphi = -\sin\varphi$ und $\frac{d}{d\varphi}\sin\varphi = \cos\varphi$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$. Weiters gilt $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \quad \forall\, \varphi \in \mathbb{R}$.

Beweis. (skizze): Das folgt nun leicht aus Lemma 121, da $\cos(0) = \cos(2\pi) = 1$, $\sin(0) = \sin(2\pi) = 0$

$$\lim_{\varphi\to 0+} \frac{\cos\varphi - 1}{\varphi - 0} = \lim_{\varphi\to 2\pi-} \frac{\cos\varphi - 1}{\varphi - 2\pi} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\varphi\to 0+} \frac{\sin\varphi - 0}{\varphi - 0} = \lim_{\varphi\to 2\pi} \frac{\sin\varphi - 0}{\varphi - 2\pi} = 1.$$

Bemerkung. 1) Wir haben en passant bewiesen, dass $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (was man auch leicht mit Hilfe der Regel von de l'Hospital zeigt: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$.

2) Offenbar sind die Funktionen sin und cos beliebig oft differenzierbar und es gelten

$$\frac{d^n}{dx^n} \sin x = \begin{cases} \sin x & \text{wenn } n = 4k \\ \cos x & \text{wenn } n = 4k+1 \\ -\sin x & \text{wenn } n = 4k+2 \\ -\cos x & \text{wenn } n = 4k+3 \end{cases} \quad \text{und} \quad \frac{d^n}{dx^n} \cos x = \begin{cases} \cos x & \text{wenn } n = 4k \\ -\sin x & \text{wenn } n = 4k+1 \\ -\cos x & \text{wenn } n = 4k+2 \\ \sin x & \text{wenn } n = 4k+3 \end{cases}$$

für ein $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3) Aus Bemerkung 2) folgt, dass sin und cos die Differentialgleichung $f''(x) + f(x) = 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$ erfüllen. Tatsächlich gilt das für jede Linearkombination dieser beiden Funktionen. Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = a\cos x + b\sin x$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, so folgt $f'(x) = -a\sin x + b\cos x$ und daher $f''(x) = -a\cos x - b\sin x$.

Satz 123. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei zweimal differenzierbar und erfülle die Differentialgleichung $f''(x) + f(x) = 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$. Dann hat f die Gestalt $f(x) = f(0) \cdot \cos x + f'(0) \cdot \sin x \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Es sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = (f(x))^2 + (f'(x))^2$. Dann ist $h'(x) = 2f(x)\ f'(x) + 2f'(x)\ f''(x) = 2f'(x) \underbrace{(f(x) + f''(x))}_{=0} = 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$

Nach Satz 77 ist h eine konstante Funktion, d.h. $h(x) = h(0) = (f(0))^2 + (f'(0))^2 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$. Ist $f(0) = f'(0) = 0$, so ist $h(x) = 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$ und daher $f(x) = 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$ und die Behauptung ist erfüllt.
Sind $f(0)$ und $f'(0)$ nicht beide $= 0$, so betrachte die Funktion
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = f(x) - f(0) \cdot \cos x - f'(0) \cdot \sin x$.
Nach Voraussetzung und Bemerkung 3) oben gilt $g''(x) + g(x) = 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$, $g(0) = f(0) - f(0) = 0$ und aus $g'(x) = f'(x) + f(0)\sin x - f'(0)\cos x$ folgt $g'(0) = f'(0) - f'(0) = 0$ Aus dem schon bewiesenen Fall folgt $g(0) = 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$ d.h. $f(x) = f(0) \cdot \cos x + f'(0)\sin x \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$.

Satz 124. (i) $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \forall\ x, y \in \mathbb{R}$,

(ii) $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad \forall\ x, y \in \mathbb{R}$.

Beweis. (i) Für festes $y \in \mathbb{R}$ sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x+y)$. Dann gilt offenbar $f''(x) + f(x) = 0 \quad \forall\ \in \mathbb{R}$. Aus Satz 123 folgt

$$\sin(x + y) = f(x) = f(0)\cos x + f'(0)\sin x = \sin y \cos x + \cos y \sin x.$$

(ii) Für festes $y \in \mathbb{R}$ sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x+y)$. Dann gilt offenbar $f''(x) + f(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$. Aus Satz 123 folgt

$$\cos(x+y) = f(x) = f(0) \cdot \cos x + f'(0) \cdot \sin x = \cos y \cos x - \sin y \sin x$$

Korollar 125. (i) Die Funktion cos ist gerade, d.h. $\cos(-x) = \cos x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$,

(ii) Die Funktion sin ist ungerade, d.h. $\sin(-x) = -\sin x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$,

(iii) $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

(iv) $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

(v) $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

(vi) $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

(vii) $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

(viii) $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

(ix) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

(x) $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

(xi) $\sin(x + \pi) = -\sin x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

(xii) $\cos(x + \pi) = -\cos x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

Beweis. (i) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(-x)$ erfüllt $f'(x) = \sin(-x)$ und $f''(x) + f(x) = -\cos(-x) + \cos(-x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$. Aus Satz 123 folgt $\cos(-x) = f(x) = \underbrace{f(0)}_{=1} \cdot \cos x + \underbrace{f'(0)}_{=0} \cdot \sin x = \cos x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

(ii) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(-x)$ erfüllt $f'(x) = -\cos(-x)$ und $f''(x) + f(x) = -\sin(-x) + \sin(-x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$. Aus Satz 123 folgt $\sin(-x) = f(x) = \underbrace{f(0)}_{=0} \cdot \cos x + \underbrace{f'(0)}_{=-1} \cdot \sin x = -\sin x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

(iii) $\sin(x-y) = \sin(x + (-y)) \overset{Satz 124(i)}{=} \sin x \cdot \cos(-y) + \cos x \cdot \sin(-y) \overset{(i),(ii)}{=} \sin x \cdot \cos y - \cos y \cdot \sin y$

(iv) $\cos(x-y) = \cos(x + (-y)) \overset{Satz 124(ii)}{=} \cos x \cos(-y) - \sin x \sin y \overset{(i),(ii)}{=} \cos x \cdot cosy + \sin x \cdot \sin y$

(v) Durch Subtraktion von

$$\sin x = \sin(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}) \overset{Satz 124(i)}{=} \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

und

$$\sin y = \sin(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}) \overset{(iii)}{=} \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y}{2} - \sin \frac{x-y}{2}$$

erhält man $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$.

(vi) Durch Subtraktion von

$$\cos x = \cos\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) \overset{Satz124(ii)}{=} \cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

und

$$\cos y = \cos\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) \overset{(iv)}{=} \cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

erhält man $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

(vii) Folgt aus Satz 124(i) wenn man $x = y$ setzt.

(viii) Folgt aus Satz 124(ii) wenn man $x = y$ setzt.

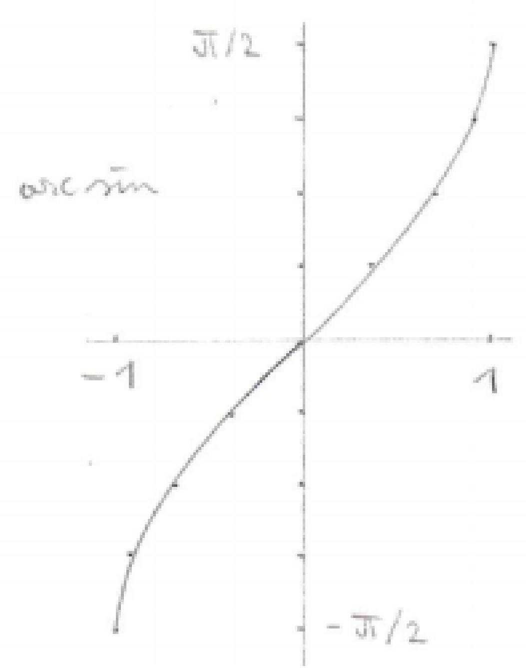
(ix) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) \overset{Satz124(i)}{=} \cos x \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} - \sin x \cdot \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} = \cos x$

(x) $\cos(x + \frac{\pi}{2}) \overset{Satz124(ii)}{=} \cos x \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} - \sin x \cdot \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} = -\sin x$

(xi) $\sin(x + \pi) \overset{Satz124(i)}{=} \sin x \underbrace{\cos\pi}_{=1} + \cos x \cdot \underbrace{\sin\pi}_{=0} = -\sin x$

(xii) $\cos(x + \pi) \overset{Satz124(ii)}{=} \cos x \underbrace{\cos\pi}_{=1} - \sin x \cdot \underbrace{\sin\pi}_{=0} = -\cos x$

Def. Die Einschränkung der Funktion sin auf das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist eine streng monoton wachsende Funktion, da $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x > 0 \quad \forall\, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ mit Werten von $-1 (= \sin(\frac{\pi}{2}))$ bis $1 (= \sin\frac{\pi}{2})$. Ihre Umkehrfunktion wird als Arcus sinus bezeichnet, d.h. $\arcsin : [-1, 1] \to \mathbb{R}$.



Ammann Judith, Boubenizek Anna, Bredl Vanessa, Emsenhuber Klaudia, Grujić Dragan, Janisch Alexander, Karner Nora, Kohlmann Sara, Lang Clara, Langschwert Mohamed, Mayer Barbara, Moser Laura

Lemma 126. Die Funktion arcsin ist stetig auf $[-1,1]$, differenzierbar auf $(-1,1)$ mit Ableitung $\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ und streng monoton wachsend.

Beweis. Dass arcsin streng monoton wachsend ist , folgt aus Satz 54 (da die Einschränkung von $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ stetig und streng monoton wachsend ist). Für $-1 \leq x \leq 1$ folgt aus Satz 72

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\frac{d}{dy}\sin y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Lemma 127. (i) Die Nullstellen der Funktion $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind genau die Zahlen $\frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

(ii) Die Nullstellen der Funktion $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind genau die Zahlen $k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. 1. Es ist $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$. Daher ist $\frac{\pi}{2}$ die einzige Nullstelle von cos im Intervall $[0,\pi]$. Für $\pi < x \leq 2\pi$ ist $\cos x = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos(x-\pi) = 0 \;\Leftrightarrow\; x - \pi = \frac{\pi}{2} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{2} + \pi$. D.h. cos besitzt im Intervall $[0, 2\pi]$ genau die beiden Nullstellen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2} + \pi$. Die Behauptung folgt nun daraus, dass cos auf $\mathbb{R}$ durch periodische Fortsetzung definiert wird.

(ii) Aus Korollar 125(x) folgt $\sin x = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos(x + \frac{\pi}{2}) = 0 \;\Leftrightarrow\; x + \frac{pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; x = k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Def. Die Funktion Tangens wird für $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ definiert durch $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Def. Die Funktion Cotangens wird für $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ definiert durch $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Lemma 128. (i) $\tan(x+\pi) = \tan(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$,

(ii) $\cot(x+\pi) = \cot x \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$,

(iii) $\tan(-x) = -\tan(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$,

(iv) $\cot(-x) = -\cot x \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$

(v) $\cot x = \frac{1}{\tan x} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus (\{k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\})$,

(vi) tan ist auf seinem gesamten Definitionsbereich differenzierbar und $\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$,

(vii) cot ist auf seinem gesamten Definitionsbereich differenzierbar und $\frac{d}{dx} \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Beweis. (i) $\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} \overset{Kor.125(xi),(xii)}{=} \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

(ii) $\cot(x+\pi) = \frac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)} \overset{Kor.125(xi),(xii)}{=} \frac{-\cos x}{-\sin x} = \cot x$

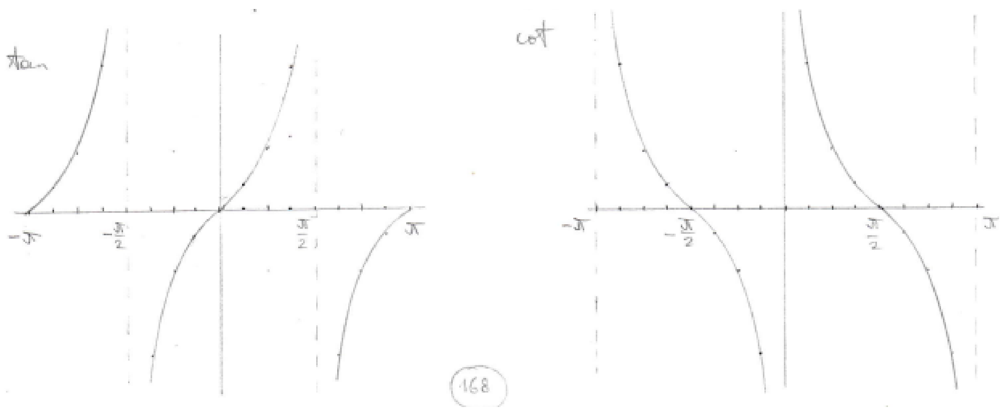
(iii) $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} \overset{Kor125(i),(ii)}{=} \frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$

(iv) $\cot(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} \overset{Kor.125(i),(ii)}{=} \frac{\cos x}{-\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = -\cot x$

(v) $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{\tan x}$

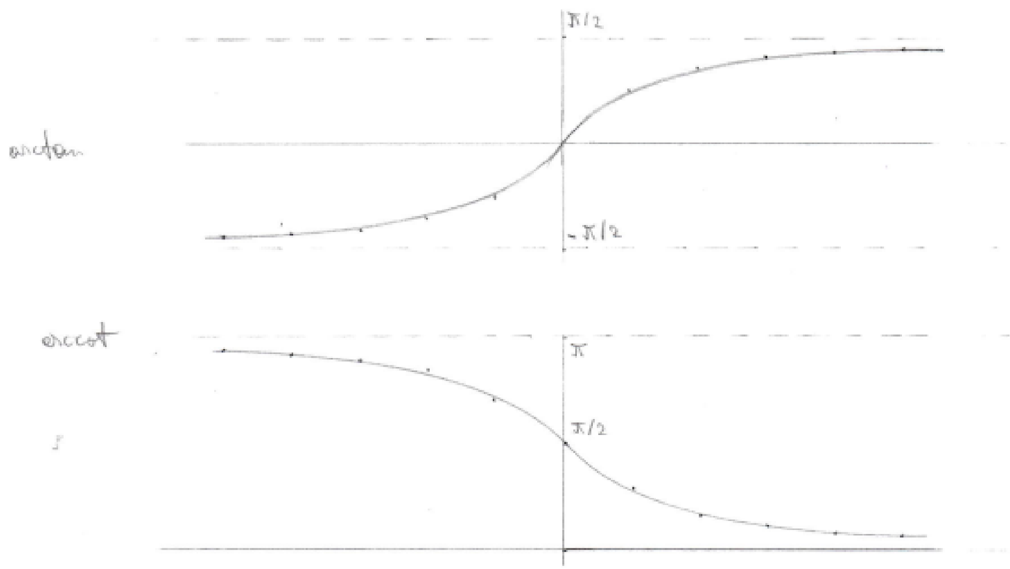
(vi) $\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$, was man leicht auf eine der beiden angegeben Gestalten bringen kann.

(vii) $\frac{d}{dx}\cot x = \frac{d}{dx}\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$, was man leicht auf eine der beiden angegeben Gestalten bringen kann.



Def. Die Einschränkung von tan auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist streng monoton wachsend (mit ganz $\mathbb{R}$ als Bild). Die Umkehrfunktion wird als Arcus Tangens bezeichnet, d.h. arctan : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Def. Die Einschränkung von cot auf $(0, \pi)$ ist streng monoton fallend (mit ganz $\mathbb{R}$ als Bild). Die Umkehrfunktion wird als Arcus Cotangens bezeichnet, d.h. arccot : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



Lemma 129. (i) Die Funktion arctan : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit Ableitung $\frac{d}{dx} \arctan = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

(ii) die Funktion arccot:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit Ableitung $\frac{d}{dx}$ arccot $x = -\frac{1}{1+x^2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Beweis. (i) $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{\frac{d}{dx}\tan x} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = -\frac{1}{1+x^2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

(ii) $\frac{d}{dx}$ arccot $x = \frac{1}{\frac{d}{dx}\cot y} = -\frac{1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{1+x^2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

Bemerkung. Aus den Resultaten dieses Abschnitts erhält man sofort die folgenden Stammfunktionen:

- $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + c \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
- $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + c \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
- $\int \tan x \mathrm{d}x = -\log|\cos x| + c \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
- $\int \cot x \mathrm{d}x = \log|\sin x| + c \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c \quad \forall\, x \in (-1,1)$
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

Beispiele. 1) Für $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ ist $\int \sin^n x \mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\cos x \cdot \sin^{n-1} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x \mathrm{d}x$, denn

$$\int \sin^n x \mathrm{d}x = \int \sin^{n-1} \cdot \sin x \mathrm{d}x$$
$$= \sin^{n-1} x \cdot (-\cos x) - (n-1)\int \sin^{n-2} x \cdot \cos x \cdot (-\cos x)\mathrm{d}x$$
$$= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} \cdot \cos^2 x \mathrm{d}x$$
$$= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cdot (1 - \sin^2 x)\mathrm{d}x$$
$$= -\cos \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \mathrm{d}x - (n-1)\int \sin^n x \mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow \; n\int \sin^n x \mathrm{d}x = -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow \; \int \sin^n x \mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\cos x \cdot \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x \mathrm{d}x$$

2) $\int \sin^2 x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + c \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ (Setze $n = 2$ in Bsp 1)

3) $\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)+c$ für $x\in(-1,1)$
Verwende Substitution mit $x=\sin t \quad\Rightarrow\quad \frac{dx}{dt}=\cos t \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$

$$\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \int\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\mathrm{d}t = \int\cos^2 t\mathrm{d}t = \int(1-\sin^2 t)\mathrm{d}t$$
$$= t-\frac{1}{2}(t-\sin t\cos t) = \frac{1}{2}(t+\sin t\cos t) = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)$$

(Beachte: Ist $-1<x<1$, so kann man $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ wählen. Für diese t ist $\cos t>0$. Deshalb ist es korrekt, $\sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t$ zu rechnen.)

5.7 Integration rationaler Funktionen (Partialbruchzerlegung)

Beispiele. $\int\frac{dx}{1-x^2} = \int\frac{dx}{(1-x)(1+x)} = \int\frac{1}{2}(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x})\mathrm{d}x =$
$= \frac{1}{2}(-\log|1-x|+\log|1+x|) = \log\sqrt{|\frac{1+x}{1-x}|}+c \quad \forall\ x\mathbb{R}\setminus\{1,-1\}$
Wir wollen daraus eine Methode machen, die für alle rationale Funktionen funktioniert.

1) Division mit Rest für Polynome: Es seien p_1,p_2 zwei Polynome, $p_1\neq 0$ und grad$p_2\geq 1$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome q und r mit den Eigenschaften $p_1=qp_2+r$ und grad$r<$ gradp_2 (und daher $\frac{p_1}{p_2}=q+\frac{r}{p_2}$)

Beweis. Existenz: Ist grad$p_1<$ gradp_2, so ist $p_1=\underbrace{0}_{=:q}\cdot p_2+\underbrace{p_1}_{=:r}$.
Es sei also grad$p_1\geq$ gradp_2. Nach Voraussetzung ist grad$p_1\neq 0$. (Wäre grad$p_1=0$, so wäre grad$p_2\leq 0$, Widerspruch.) Verwende Induktion nach grad$p_1\geq 1$.
Ist grad$p_1=1$, so ist $1=$ grad$p_1\geq$ grad$p_2\geq 1$, also grad$p_2=1$. Sind nun $p_1(x)=a_1x+a_0$ und $p_2(x)=b_1x+b_0$ mit $a_1,b_1\neq 0$, so ist $p_1(x)=a_1x+a_0=\frac{a_1}{b_1}+(a_0-\frac{a_1b_0}{b_1}$.
Induktionsschritt: Es seien $p_1=\sum_{i=0}^{n}a_1x^1$ und $p_2(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j$ mit $a_n,b_m\neq 0$ (wobei $1\leq$ grad$p_2=m\leq$ grad$p_1=n$). Dann ist grad$(p_1(x)-\frac{a_n}{b_m}p_2(x)x^{n-m})<$ grad$p_1(x)$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es Polynome $\bar{q},r$, derart dass $p_1(x)-\frac{a_n}{b_m}p_2(x)x^{n-m}=\bar{q}(x)p_2(x)+r(x)$ und grad$r<$gradp_2 und daher
$p_1(x)=\underbrace{(\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}+\bar{q}(x))}_{=:q(x)}p_2(x)+r(x).$
Eindeutigkeit: Angenommen, $p_1(x)=q(x)p_2(x)+r(x)=\bar{q}(x)p_2(x)+\bar{r}(x)$ für Polynome $q,\bar{q},r$ und $\bar{r}$, die grad$r<$gradp_2 und grad$\bar{r}<$ gradp_2 erfüllen. Dann ist $r-\bar{r}=(\bar{q}-q)p_2$. Wäre $q\neq\bar{q}$, so würde folgen, dass grad$(r-\bar{r})<$ grad$p_2\leq$ grad$(\bar{q}-q)+$ grad$p_2=$ grad$((\bar{q}-q)p_2)=$ grad$(\bar{r}-r)$, ein Widerspruch. Also ist $q=\bar{q}$ und daher $r=\bar{r}$.

2) Ist p ein Polynom (mit reellen Koeffizienten) mit grad$p\geq 1$ und $x_1(\in\mathbb{C})$ eine Nullstelle von p (d.h. $p(x_1)=0$), so gibt es ein Polynom q (mit komplexen Koeffiezienten) und grad$q=$ grad$p-1$, derart dass $p(x)=(x-x_1)q(x)$.

Beweis. Nach 1) gibt es Polynome q und r, derart dass $p(x)=(x-x_1)q(x)+r(x)$ und grad $r<1$. Aus $0=p(x_1)=(x_1-x_1)q(x_1)+r(x_1)$ folgt $r=0$ und daher $p(x)=(x-x_1)q(x)$ und grad$q=$ grad$p-1$.

3) Fundamentalsatz der Algebra: Ist $p(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j x^j$ ein Polynom mit $\underline{\text{komplexen}}$ Koeffizienren (d.h. $a_j \in \mathbb{C}$ für $0 \leq j \leq n$) und grad$p \geq 1$, so besitzt p eine $\underline{\text{komplexe}}$ Nullstelle (d.h. $\exists\ z_1 \in \mathbb{C} \quad p(z_1) = 0$) (Ohne Beweis).

4) Ist $z = a + ib \in \mathbb{C}$, so heißt $\bar{z} = a - ib$ komplex Konjugierte zu z. Es gelten $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ und $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} \ \ \forall\ z, w \in \mathbb{C}$ und $\bar{z} = z \ \ \forall\ z \in \mathbb{R}$.

Beweis. Ist $z = a + ib,\ w = c + id$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so ist $z + w = a + c + i(b + d)$
$\Rightarrow \ \ \overline{z+w} = a+c-i(b+d) = (a-ib)+(c-id) = \bar{z}+\bar{w}$ und $zw = ac-bd+i(ad+bc)$
$\Rightarrow \ \ \overline{zw} = ac - bd - i(ad + bc) = (a - ib)(c - id) = \bar{z} \cdot \bar{w}$.
Ist $z \in \mathbb{R}$, so ist $\bar{z} = \overline{z + i \cdot 0} = z - i \cdot 0 = z$.

5) Ist $p(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j x^j$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten (d.h. $a_j \in \mathbb{R}$ für $0 \leq j \leq n$) und $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist Nullstelle von p, so ist auch $\bar{z_1} (\in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ Nullstelle von p.

Beweis. $p(\bar{z_1}) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j \cdot \bar{z_1}^j = \sum\limits_{j=0}^{n} \bar{a_j} \cdot \bar{z_1}^j = \overline{\sum\limits_{j=0}^{n} a_j z_1^j} = \overline{p(z_1)} = \bar{0} = 0$

6)Ist $p(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j x^j$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und sind $z_1, \bar{z_1} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ Nullstellen von p, so ist $p(x) = (x^2 + A_1 + B_1) \cdot q(x)$ für gewisse $A_1, B_1 \in \mathbb{R}$ und ein Polynom q mit $\underline{\text{reellen}}$ Koeffizienten und grad$q$ = grad$p - 2$.

Beweis. Da z_1 Nullstelle von p ist, ist $p(x) = (x - z_1) \cdot q_1(x)$ für ein Polynom q_1 mit komplexen Koeffizienten und gradq_1 = grad$p - 1$. Wegen $0 = p(\bar{z_1}) = (\bar{z_1} - z_1) \cdot q_1(\bar{z_1}$ und $\bar{z_1} \neq z_1$ ist $q_1(\bar{z_1}) = 0$. Daher ist $q_1(x) = (x - \bar{z_1}) \cdot q_2(x)$ für ein Polynom q_2 mit komplexen Koeffizienten und gradq_2 = grad$q_1 - 1$ = grad$p - 2$. Offensichtlich ist $p(x) = (x - z_1) \cdot (x - \bar{Z}_1) q_2(x)$.
Es ist nun $(x - z_1) \cdot (x - \bar{z_1}) = x^2 - (z_1 + \bar{z_1})x + z_1\bar{z_1}$. Ist $z_1 = a_1 + ib_1$ mit $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, so ist $z_1 + \bar{z_1} = 2a_1 \in \mathbb{R}$ und $z_1\bar{z_1} = a_1^2 + b_1^2 \in \mathbb{R}$. Setzt man $A_1 = -(z_1 + \bar{z_1})$ und $B_1 = z_1\bar{z_1}$, so ist $(x - z_1) \cdot (x - \bar{z_1}) = x^2 + A_1x + B_1$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Wendet man Polynomdivision mit Rest nun auf p und $x^2 + A_1x + B_1$ an, so folgt: Es gibt Polynome q und r (mit reellen Koeffizienten), derart dass $p(x) = (x^2 + A_1x + B_1)q(x) + r(x)$ und grad$r < 2$. Genau dasselbe würde man erhalten, wenn man alle auftretenden Polynome als Polynome mit komplexen Koffizienten auffasst. Aus der Eindeutigkeit folgen nun $q = q_2$ (und $q_2 = q$ besitzt daher reelle Koeffizienten) und $r = 0$

7) Aus dem bisherigen folgt: Ist q ein Polynom mit reellen Koeffizienten und grad$q \geq 1$, so besitzt q eine Darstellung der folgenden Gestalt:

$$q(x) = a(x - x_1)^{m_1} ... (x - x_k)^{m_k} (x^2 + A_1x + B_1)^{s_1} ... (x^2 + A_lx + B_l)^{s_l}$$

Dabei ist $a \in \mathbb{R}$ der Leitkoeffizient von q (d.h. der Koeffizient der höchsten im Polynom auftretenden Potenz), $x_1, ... x_k \in \mathbb{R}$ die paarweise verschiedenen reellen Nullstellen von q mit Vielfachheiten $m_1, ... m_k$ und bezeichnen $z_1, \bar{z_1}, ... z_l, \bar{z_l} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ die paarweise verschiedenen nicht reellen Nullstellen von q mit Vielfachheiten $s_1, ... s_l$

so gilt $x^2 + A_j x + B_j = (x + z_j)(x - \bar{z}_j)$ für $1 \leq j \leq l$.

8) Es seien p_1, p_2 zwei Polynome (mit grad$p_1 \geq 1$ und grad$p_2 \geq 1$) mit reellen Koeffizienten ohne gemeinsame komplexe Nullstelle. Dann gibt es für jedes Polynom q (mit reellen Koeffizienten) Polynome f_1, f_2 (mit reellen Koeffizienten), derart dass $q = f_1 p_1 + f_2 p_2$

Beweis. Es sei $I = \{f_1 p_1 + f_2 p_2 | f_1, f_2$ sin Polynome mit reellen Koeffizienten$\}$. Dann enthält I das konstante Polynom 0, (da $0 = 0 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2$) und I enthält sicher Polynome $\neq 0$ (z.B. p_1, da $p_1 = 1 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2$).
Wir behaupten, dass I ein konstantes Polynom $\neq 0$ enthält. Daraus folgt die Bahauptung. Ist nämlich $f_1 p_1 + f_2 p_2 = a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so gilt $(\frac{1}{a} q f_1) p_1 + (\frac{1}{a} q f_2) p_2 = q$ für jedes beliebige Polynom q.
Angenommen, I würde als einziges konstantes Polynom das Polynom 0 enthalten. Es sei nun $q_0 \in I \setminus \{0\}$ ein Polynom mit grad$q_0 \geq 1$ minimal. Dann gibt es Polynome s_1, t_1, derart dass $p_1 = s_1 q_0 + t_1$ und grad$t_1 <$ gradq_0. Da $t_1 = p_1 - s_1 q_0 \in I$ und grad$t_1 <$ gradq_0, muss $t_1 = 0$ gelten, d.h. $p_1 = s_1 q_0$. Völlig analog kann man zeigen, dass $p_2 = s_2 q_0$ für ein Polynom s_2. Da grad$q_0 \geq 1$ besitzt q_0 eine komplexe Nullstelle, die gemeinsame Nullstelle von p_1 und p_2 wäre, ein Widerspruch zur Voraussetzung.

9) Sind p_1, p_2 zwei Polynome wie in 8) (mit reellen Koeffizienten ohne gemeinsame komplexe Nullstelle), so kann man in der Darstellung $q = f_1 p_1 + f_2 p_2$, die nach 8) für jedes Polynom q existiert, verlangen, dass grad$f_2 <$ gradp_1 gilt.

Beweis. Ist $q = \tilde{f}_1 p_1 + \tilde{f}_2 p_2$ irgendeine solche Darstellung und ist $\tilde{f}_2 = s p_1 + t$ für Polynome s, t mit grad$t <$ gradp_1, so ist

$$q = \tilde{f}_1 p_1 + \tilde{f}_2 p_2 = \tilde{f}_1 p_1 + (s p_1 + t) p_2 = \underbrace{(\tilde{f}_1 + s p_2)}_{=: f_1} p_1 + \underbrace{t}_{=: f_2} p_2$$

10) Partialbruchzerlegung: Sind p und q zwei Polynome mit reellen Koeffizietnen und $0 \leq$ grad$p <$ grad$q$ und besitzt q eine Faktorisierung, wie in 7) beschrieben wurde, so besitzt die rationale Funktione $\frac{p}{q}$ eine Darstellung folgender Gestalt:

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_{11}}{x - x_1} + \frac{a_{12}}{(x - x_1)^2} + ... + \frac{a_{1m_1}}{(x - x_1)^{m_1}} \\ +... \\ + \frac{a_{k1}}{x - x_k} + \frac{a_{k2}}{(x - x_k)^2} + ... + \frac{a_{km_k}}{(x - x_k)^{m_k}} \\ + \frac{b_{11} x + c_{11}}{x^2 + A_1 x + B_1} + \frac{b_{12} x + c_{12}}{(x^2 + A_1 x + B_1)^2} + ... + \frac{b_{1s_1} x + c_{1s_1}}{(x^2 + A_1 x + B_1)^{s_1}} \\ +... \\ + \frac{b_{l1} x + c_{l1}}{x^2 + A_l x + B_l} + \frac{b_{l2} x + c_{l2}}{(c^2 + A_l x + B_l)^2} + ... + \frac{b_{ls_l} x + c_{ls_l}}{(x^2 + A_l s + B_l)^{s_l}} \end{aligned}$$

Dabei sind $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (für $1 \geq i \geq k,\ 1 \geq j \geq m_i$) und $b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{R}$ (für $1 \leq i \leq l,\ 1 \leq j \leq s_i$).

Beweis. (skizze) Ist $q = q_1^m \cdot q_2$, wobei $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und q_1 und q_2 Polynome mit reellen Koeffizienten, grad$q_1 \geq 1$ und grad $q_2 \geq 1$ und ohne gemeinsame komplexe Nullstelle sein sollen, so gibt es nach 8) und 9) Polynome f_1 und f_2 mit den Eigenschaften $p = f_1q_1 + f_2q_2$ und grad$f_2 <$ gradq_1. Daraus folgt

$$\frac{p}{q} = \frac{f_1q_1 + f_2q_2}{q_1^m q_2} = \frac{f_1q_1}{q_1^m q_2} + \frac{f_2q_2}{q_1^m q_2} = \frac{f_1}{q_1^{m-1}q_2} + \frac{f_2}{q_1^m}.$$

Fortwährende Anwendung mit $q_1(x) = x - x_j$ (mit $1 \leq j \leq k$) bzw. $q_1(x) = x^2 + A_jx + B_j$ (mit $1 \leq j \leq l$) ergibt die obige Darstellung.

11) Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Koeffizienten a_{ij}, b_{ij} und c_{ij} zu berechnen, die wir anhand des Beispiels $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$ demonstrieren:

1. Koeffizientenvergleich: $\frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+b(x-1)}{x^2-1} = \frac{(a+b)x+a-b}{x^2-1}$
   Koeffizietenvergleich im Zähler führt auf das lineare Gleichungssystem
   $\left.\begin{array}{l} a+b=0 \\ a-b=1 \end{array}\right\}$ dessen Lösung $a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{1}{2}$ man berechnet.

2) Einsetzen spezieller Werte: Setzt man etwa $x = 2$ bzw. $x = -2$, so erhält man das lineare Gleichungsystem
   $\left.\begin{array}{l} a+\frac{b}{3}=\frac{1}{3} \\ -\frac{a}{3}-b=\frac{1}{3} \end{array}\right\}$ dessen Lösung $a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{1}{2}$ man wieder berechnet.

3) Grenzwerte: $\frac{x-1}{x^2-1} = a+\frac{b(x-1)}{x+1} \quad\Rightarrow\quad a = \lim\limits_{x\to1}(a+\frac{b(x-1)}{x+1}) = \lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$
   bzw. $\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{a(x+1)}{x-1}+b \quad\Rightarrow\quad b = \lim\limits_{x\to-1}(\frac{a(x+1)}{x-1}+b) = \lim\limits_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to-1}\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$

Beispiele. Man kann und soll die verschiedenen Verfahren mischen :

$$\frac{x^2+1}{x^3-1} = \frac{x^2+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1} = \frac{a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$
$$= \frac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+a-c}{x^3-1}$$

Koeffizientenvergleich liefert das Gleichungssystem $\left.\begin{array}{r} a+b=1 \\ a-b+c=0 \\ a-c=1 \end{array}\right\}$

Die Zahl a kann mit Hilfe von Grenzwerten berechnet werden: Aus $\frac{(x^3+1)(x-1)}{x^3-1} = a + \frac{(bx+c)(x-1)}{x^2+x+1}$ folgt

$$a = \lim_{x\to1}(a + \frac{(bx+c)(x-1)}{x^2+x+1}) = \lim_{x\to1}\frac{(x^2+1)(x-1)}{x^3-1} = \lim_{x\to1}\frac{x^2+1}{x^2+x+1} = \frac{2}{3}$$

Aus der ersten und dritten Gleichung folgt $b = \frac{1}{3}$ und $c = -\frac{1}{3}$, also
$\frac{x^2+1}{x^3-1} = \frac{2}{3(x-1} + \frac{x-1}{3(x^2+x+1)}$

„Algorithmus“ für Anwendung der Partialbruchzerlegung

1. Falls der Grad des Zählerpolynoms nicht kleiner ist als der Grad des Nennerpolynoms, führe Polynomdivision mit Rest durch. Man erhält eine Summe aus einem Polynom (leicht zu integrieren) und einer rationalen Funktion, bei der der Grad des Zählerpolynoms kleiner ist als der Grad des Nennerpolynoms.

2. Faktorisiere das Nennerpolynom in lineare und quadratische Faktoren (wie in 7) oben). Achtung: Das ist im Allgemeinen ganz und gar nicht trivial!

3. Berechne die Partialbruchzerlegung (wie in 10) oben)

4. Wende die folgenden Formeln an (mit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $a, \alpha, \beta, A, B \in \mathbb{R}$ und $A^2 < 4B$)
   - $\int \frac{dx}{x-a} = \log|x-a| + c$
   - $\int \frac{dx}{(x-a)^m} = -\frac{1}{m-1}\ \frac{1}{(x-a)^{m-1}} + c,$
   - $\int \frac{dx}{x^2+Ax+B} = \frac{2}{\sqrt{4B-A^2}}\ \arctan\ \frac{2x+A}{\sqrt{4B-A^2}} + c,$
   - $\int \frac{dx}{(x^2+Ax+B)^m} = \frac{2x+A}{(m-1)(4B-A^2)(x^2+Ax+B)^{m-1}} + \frac{2(2m-3)}{(m-1)(4B-A^2)}\ \int \frac{dx}{(x^2+Ax+B)^{m-1}}$
   - $\int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+Ax+B}\mathrm{d}x = \frac{\alpha}{2}\log(x^2+Ax+B) + (\beta - \frac{\alpha A}{2})\ \int \frac{dx}{x^2+Ax+B}$
   - $\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+Ax+B)^m}\mathrm{d}x = -\frac{\alpha}{2(m-1)(x^2+Ax+B)^{m-1}} + (\beta - \frac{\alpha A}{2})\ \int \frac{dx}{(x^2+Ax+B)^m}$

Zahlreiche verwandte Integrale lassen sich durch Substitution auf die Integration rationaler Funktionen zurückführen. In den folgenden Beispielen soll R stets eine rationale Funktion (in ein oder zwei Variablen) bezeichnen.

1) $\int R(e^x)\mathrm{d}x$. Durch die Substitution $t = e^x \quad\Rightarrow\quad x = \log t \quad\Rightarrow\quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \quad\Rightarrow$ $\mathrm{d}x = \frac{dt}{t}$ erhält man $\int R(e^x)\mathrm{d}x = \int R(t)\cdot\frac{1}{t}\mathrm{d}t\ |_{t=e^x}$.

2) $\int R(\sqrt[n]{x}\mathrm{d}x$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Die Substitution $t = \sqrt[n]{x} \quad\Rightarrow\quad x = t^n \quad\Rightarrow$ $\frac{dx}{dt} = nt^{n-1} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}x = nt^{n-1}\mathrm{d}z$ führt auf $\int R(\sqrt[n]{x}\mathrm{d}x = n\int R(t)\cdot t^{n-1}\mathrm{d}t\ |_{t=\sqrt[n]{x}}$

3) $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$ (wobei R jetzt eine rationale Funktion in zwei Variablen sein kann). Hier kann man die Substitution $t = \tan\frac{x}{2}$ verwenden. Dann ist $x = 2\arctan t \quad\Rightarrow\quad \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$. Um $\sin x$ und $\cos x$ mittels t auszudrücken, verwendet man

$$\begin{aligned}
\cos^2\frac{x}{2} &= \frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{1+t^2}\\
\Rightarrow \sin^2\frac{x}{2} &= 1-\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+t^2-1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}\\
\cos x = \cos(2\cdot\frac{x}{2}) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} &= \frac{1}{1+t^2-\frac{t^2}{1+t^2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}
\end{aligned}$$

und $\sin x = \sin(2\cdot\frac{x}{2}) = 2\sin\frac{x}{2}\ \cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\ \cos^2\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$
Insgesamt ist $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \in R(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t\ |_{t=\tan\frac{x}{2}}$

Beispiele. 1) $\int \frac{dx}{2+e^{2x}}$ (Verwende die Substitution $t = e^{2x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}\log t \quad \Rightarrow$ $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2t} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2t}\mathrm{d}t$
$\int \frac{dx}{2t+e^{2x}} = \int \frac{1}{2+t}\cdot\frac{1}{2t}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int(\frac{1}{t} - \frac{1}{2+t})\mathrm{d}t = \frac{1}{4}(\log t - \log(2+t)) = \frac{1}{4}(2x - \log(2+e^{2x})) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\log(2+e^{2x}) + c$

2) $\int \frac{\cot x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$ (Verwende die Substitution $t = \tan\frac{x}{2}$, die oben beschrieben wurde)

$$\int \frac{\cot x}{1+\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x = \int \frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{2t}\,\frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{1-t^2}{2t}\frac{2}{\underbrace{1+t^2+1-t^2}_{=1}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\frac{1-t^2}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int(\frac{1}{t} - t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\log|t| - \frac{t^2}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\log|\tan\frac{x}{2}| - \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2} + c$$

6 Reihen

6.1 Definitionen und einfache Eigenschaften

Def. Es sei $a_n \in \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wir betrachten die Folge $(s_n)_{n\geq 1}$, die folgendermaßen definiert ist:
$s_1 = a_1$
$s_2 = a_1 + a_2$,
$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$s_n = a_1 + ... + a_n, ...$
Die s_n werden Partialsummen genannt. Für die Folge der Patialsummen $(s_n)_{n\geq 1}$ schreibt man $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und bezeichnet sie als Reihe.
Ist die Folge $(s_n)_{n\geq 1}$ konvergent (bzw. divergent), so wird die Reihe konvergent (bzw. divergent) genannt. Ist $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, so bezeichnet man auch diesen mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, dh man schreibt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

Bemerkung. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hat also zwei Bedeutungen: Die Folge der Partialsummen und ihr Grenzwert(, falls er existiert)

2) Wie bei den Folgen muss der Index, mit dem die Reihe beginnt, nicht 1 sein. Er ist oft 0, kann aber auch ein anderes $p \in \mathbb{Z}$ sein. (also $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bzw. $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$).

Beispiele. 1) Ist $|q| < 1$, so ist $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{(n+1)}}{1-q} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1-q}$. D.h. $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert für $|q| < 1$ und $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ **(geometrische Reihe)**
(Das wurde bereits in Bsp.) 5) am Ende von Abschnitt 2.2. bewiesen.)

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert **(harmonische Reihe)**, da die Folge $(s_n)_{n\geq 1}$ der Partialsummen keine Cauchyfolge ist. Genauer wurde in Bsp.) 2) nach Satz 24 bewiesen, dass $s_{2n} - s_n \geq \frac{1}{2}$. Da die Folge $(s_n)_{n\geq 1}$ streng monoton wächst, ist sie (wegen Satz 22) unbeschränkt (weil sie nicht konvergiert) und daher $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergiert, da die Folge der Partialsummen eine Cauchyfolge ist. (Das wurde in Bsp.) 3) nach Satz 24 bewiesen.)

4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ divergiert, da $s_n = \begin{cases} 0 & \text{falls n gerade ist} \\ -1 & \text{falls n ungerade ist} \end{cases}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergiert und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$, denn $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und daher $s_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = (1 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1$. Dh. bei s_n handelt es sich um eine sogenannte Teleskopsumme (vgl. Übungsbsp. 44a)

Satz 130. (i) Sind $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent und $c, d \in \mathbb{R}$, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n + db_n)$ und es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n + db_n) = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n + d \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent, so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$

(iii) Werden in einer konvergenten (bzw. divergenten) Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nur endlich viele Summatinsglieder a_n abgeändert, so ist auch die neu entstandene Reihe konvergent (bzw. divergent).

(iv) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so gelten $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = 0$.

(v) Ist $a_n \geq 0 \forall n \geq 1$, so gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Leftrightarrow (s_n)_{n\geq 1}$ ist beschränkt

(vi) Wenn $\exists c > 0 : 0 \leq a_n \leq cb_n \forall n \geq 1$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Man nennt in diesem Fall $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine konvergente Majorante für $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(vii) Wenn $\exists\ c > 0 : a_n \geq cb_n \geq 0\ \forall n \geq 1$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergiert, dann divergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Man nennt in diesem Fall $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine divergente Minorante für $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(viii) (Cauchy- Kriterium für Reihen) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \geq 1$ sodass $|a_{n+1} + ... + a_{n+p}| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0 \forall p \geq 1$

Beweis. (i) $\sum_{k=1}^{n}(ca_k + db_k) = c\sum_{k=1}^{n} a_k + d\sum_{k=1}^{n} b_k \xrightarrow{n\to\infty} c\sum_{k=1}^{\infty} a_k + d\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ (wegen Satz 22 (i),(iv)

(ii) Wäre $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ konvergent, so wäre nach (i) auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}((a_n + b_n) - a_n)$ konvergent, ein Widerspruch

(iii) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ die Reihe, in der endlich viele Summanden abgeändert wurden, dh. $\exists n_0 \geq 1\ \forall n > n_0 : b_n = a_n$
Es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + (b_n - a_n))$. Für $n > n_0$ ist $b_n - a_n = 0$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$ ist daher konvergent und $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) = \sum_{n=1}^{n_0}(b_n - a_n)$. Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent (bzw. divergent), so ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ daher nach (i) (bzw. (ii)) ebenfalls konvergent (bzw. divergent).

(iv) Ist $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, so gilt $a_n = s_n - s_{n-1} \xrightarrow{n\to\infty} s - s = 0$ bzw. $\sum_{k=n}^{\infty} a_k = s - s_{n-1} \xrightarrow{n\to\infty} s - s = 0$

(v) Da $a_n \geq 0\ \forall n \geq 1$ ist die Folge $(s_n)_{n\geq}$ monoton wachsend und die Behauptung folgt aus Satz 22.

(vi) $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq c\sum_{k=1}^{n} b_k \leq c\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, dh. die Folge $(s_n)_{n\geq 1}$ ist beschränkt und daher wegen (v) konvergent.

(vii) Wäre $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so wäre wegen $b_n \leq \frac{1}{c}a_n\ \forall n \geq 1$ und (vi) auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, Widerspruch

(viii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Leftrightarrow (s_n)_{n\geq 1}$ konvergiert $\overset{Satz24}{\Leftrightarrow} (s_n)_{n\geq 1}$ ist Cauchy-Folge $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \geq 1$, sodass $\forall m, n \geq n_0$ gilt $|s_m - s_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \geq 1$, sodass $\forall n \geq n_0\ \forall p \geq 1$ gilt $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \geq 1$, sodass $\forall n \geq n_0\ \forall p \geq 1$ gilt $|a_{n+1} + ... + a_{n+p}| < \varepsilon$

Bemerkung. Die Umkehrung von Teil 1 von Satz 130 (iv) gilt nicht, da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ aber $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

Korollar 131. Es seien $a_n, b_n > 0\ \forall n \geq 1$ und es existiere $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$. Dann sind $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ entweder beide konvergent oder beide divergent.

Beweis. Sei $\alpha := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$. Wählt $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$, so $\exists n_0 \geq 1$ sodass $|\frac{a_n}{b_n} - \alpha| < \frac{\alpha}{2} \Rightarrow -\frac{\alpha}{2} < \frac{a_n}{b_n} - \alpha < \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3\alpha}{2}\ \forall n \geq n_0$. Die Behauptung folgt aus Satz 130 (vi) und (vii).

Beispiele. 1) Ist $|q| \geq 1$, so ist $(q^n)_{n\geq 0}$ keine Nullfolge (da $|q^n| = |q|^n \geq 1\ \forall n \geq 0$). Aus Satz 130 (iv) folgt daher,$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ dass divergiert.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1} = +\infty$, denn $3n + 1 \leq 4n \Rightarrow \frac{1}{3n+1} \geq \frac{1}{4n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n}\ \forall n \geq 1$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ (d.h. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergente Minorante) oder $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3}$ und die Behauptung folgt aus Kor. 131 und der Divergenz der harmonischen Reihe.

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergiert, denn $n! \geq 2^{n-1}\ \forall n \geq 0$ (Induktion nach n: $n = 0$ $0! = 1 \geq \frac{1}{2} = 2^{-1}$, n=1: $1! = 1 \geq 1 = 2^0$ und für $n \geq 1$ ist $n + 1 \geq 2$ und daher $(n + 1)! = n!(n + 1) \geq 2^{n-1} \cdot 2 = 2^n$) $\Rightarrow \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2}{2^n}\ \forall n \geq 0$. Da $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ eine konvergente Majorante. (Tatsächlich haben wir in Korollar 95 bereits bewiesen, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.)

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, denn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n-1)}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n-1)}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n}) = 1$. Nach oben ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergent $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert. (Tatsächlich ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.)

5) Ist $\alpha \geq 2$, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, denn $n^\alpha \geq n^2\ \forall n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}\ \forall n \geq 1$, dh. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergente Majorante.

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$ divergiert. Aus $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1$. Die Behauptung folgt nun aus der Divergenz der harmonischen Reihe und Korollar 131.

6.2 Konvergenz- und Divergenzkriterien

Def. Eine Reihe, bei der die Vorzeichen der Summanden abwechseln, heißt alternierend.
Formal: Ist $a_n > 0\ \forall n \geq 1$, so heißen Reihen der Gestalt $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ $(=a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + -....)$ oder $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ $(= -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - +...)$ alternierend.

Satz 132. (**Leibniz-Kriterium**) Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$.

Beweis. Es gelten $s_{2k+2} - s_{2k} = a_{2k+1} - a_{2k+2} \geq 0$ und $s_{2k+3} - s_{2k+1} = a_{2k+3} - a_{2k+2} \leq 0$, dh. die Folge $(s_{2k})_{k\geq 1}$ ist monoton wachsend und $(s_{2k-1})_{k\geq 1}$ monoton fallend. Da $s_2 \leq s_{2k} \leq s_{2k+1} \leq s_1\ \forall k \geq 1$ ist die Folge $(s_{2k})_{k\geq 1}$ nach oben beschränkt (durch s_1)

und die Folge $(s_{2k+1})_{k\geq 0}$ nach unten beschränkt (durch s_2). Wegen Satz 23 existieren $s^- := \lim\limits_{k\to\infty} s_{2k}$ und $s^+ := \lim\limits_{k\to\infty} s_{2k+1}$. Wegen $s^+ - s^- = \lim\limits_{k\to\infty} s_{2k+1} - \lim\limits_{k\to\infty} s_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty}(s_{2k+1} - s_{2k}) = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = 0$ ist $s^+ = s^- = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$.

Beispiele. 1) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium, da $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. (Man kann zeigen, dass $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = log\ 2$)

2) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + -...$ konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium, da $(\frac{1}{2n+1})_{n\geq 0}$, eine monoton fallende Nullfolge ist. (Man kann zeigen, dass $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$)

3) Dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ divergiert, zeigt, dass nicht jede alternierende Reihe konvergiert.

Def. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konvergiert.

Satz 133. Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

Beweis. Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so ist nach Voraussetzung die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konvergent. Sei $\varepsilon > 0$. Aus dem Cauchy-Kriterium (Satz 34(viii)) für $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ folgt:
$\exists n_0 \geq 1\ \forall n \geq n_0\ \forall p \geq 1 : ||a_{n+1}| + ... + |a_{n+p}|| < \varepsilon$
$\Rightarrow \forall n \geq n_0\ \forall p \geq 1 : |a_{n+1} + ... + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + ... + |a_{n+p}| = ||a_{n+1}| + ... + |a_{n+p}|| < \varepsilon$
und wieder nach dem Cauchy-Kriterium folgt die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Bemerkung. Die Umkehrung von Satz 133 gilt nicht, dh. es gibt konvergente Reihen, die nicht absolut konvergieren. Z.B. konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ nach dem Leibniz-Kriterium, aber die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}|\frac{(-1)^{n+1}}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergiert.

Lemma 134. Sind die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergent und $c, d \in \mathbb{R}$, so ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(ca_n + db_n)$ absolut konvergent

Beweis. Es ist $|ca_n + db_n| \leq |c||a_n| + |d||b_n|\ \forall n \geq 1$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(|c||a_n| + |d||b_n|)$ konvergiert nach Satz 130 (i) und ist daher eine konvergente Majorante für $\sum_{n=1}^{\infty}|ca_n + db_n|$.

Satz 135. (Wurzelkriterium, 1. Version)

(i) Gibt es ein $q \in (0,1)$, sodass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für fast alle n (d.h. für alle bis auf endlich viele n), so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

(ii) Gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n, so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beweis. (i) Es gibt $n_0 \geq 1$, derart dass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| \leq q^n\ \forall n \geq n_0$
$\Rightarrow$ Die geometrische Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n$ ist konvergente Majorante für $\sum_{n=n_0}^{\infty}|a_n|$. Also konvergiert $\sum_{n=n_0}^{\infty}|a_n|$ und daher (wegen Satz 130(iii)) auch $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

(ii) $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n $\Rightarrow |a_n| \geq 1$ für unendlich viele n $\Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ ist keine Nullfolge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Korollar 136. (Wurzelkriterium, 2. Version) Es sei $\alpha := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ (≥ 0). Dann gelten:

(i) Ist $\alpha < 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(ii) Ist $\alpha > 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Beweis. (i) Da $\alpha < 1$, ist $\varepsilon := \frac{1-\alpha}{2} > 0$. Wegen Satz 32 ist $\sqrt[n]{|a_n|} < \alpha + \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1+\alpha}{2} < 1$ für fast alle n, dh. die Voraussetzung von Satz 135 (i) ist mit $q = \frac{1+\alpha}{2}$ erfüllt.

(ii) Da $\alpha > 1$, ist $\varepsilon = \frac{\alpha-1}{2} > 0$. Wegen Satz 32 ist $\sqrt[n]{|a_n|} > \alpha - \frac{\alpha-1}{2} = \frac{1+\alpha}{2} > 1$ für unendlich viele n, dh. die Voraussetzung von Satz 135 (ii) ist erfüllt.

Bemerkung. 1) Existiert $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ (was in vielen Anwendungsbeispielen der Fall ist), so ist $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ und man kann Kor. 135 in folgender Form anwenden:

(i) Ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(ii) Ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

2) Es reicht in Satz 135(i) <u>nicht</u>, dass $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$ für fast alle n.
z.B. $\sqrt[n]{n} > 1 \ \forall n \geq 2 \Rightarrow \sqrt[n]{|\frac{1}{n}|} < 1 \ \forall n \geq 2$, aber die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

3) Ist $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$(dh. $\alpha = 1$ in Kor. 136), so kann man keine Aussage machen.
z.B.: gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n} = (\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}) \cdot (\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}) = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1$. Nun divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, während die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

Beispiele. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ konvergiert. Das Summationsglied kann man schreiben als $(1+\frac{1}{1})^1(1+\frac{1}{2})^2(1+\frac{1}{3})^3...(1+\frac{1}{n-1})^{n-1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3^2}{2^2} \cdot \frac{4^3}{3^3} \cdot \ldots \cdot \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} = \frac{n^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)} = \frac{n^n}{n!}$
Nun gilt $(1+\frac{1}{n})^n \geq 2 \ \forall n \geq 1$. (Das ist trivial für n=1 und folgt für $n \geq 2$ mit Hilfe der Bernoullie-Ungleichung in Satz 18: $(1+\frac{1}{n})^n > 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2$.) Zusammen erhält man $\frac{n^n}{n!} \geq 2^{n-1} \Rightarrow \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2}{2^n} \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} \leq \frac{\sqrt[n]{2}}{2} \ \forall n \geq 1$
Die Folge $(\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}})_{n\geq 1}$ ist beschränkt (da $0 \leq \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} \leq \frac{\sqrt[n]{2}}{2} \leq \frac{2}{2} = 1$) und daher existiert $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$. Wendet man Satz 20(i) auf die gegen $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$ konvergierende Teilfolge von $(\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}})_{n\geq 1}$ an, so erhält man $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2}}{2} = \frac{1}{2} < 1$ und die Behauptung folgt aus Kor. 136(i). (Tatsächlich konvergiert die Folge $(\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}})_{n\geq 1}$ und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}$.)

Satz 137. (Quotientenkriterium, 1. Version) Es sei $a_n \neq 0$ fast alle $n \geq 1$.

(i) Gibt es ein $q \in (0,1)$ sodass $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q$ für fast alle n, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(ii) Gilt $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$ für fast alle n, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Beweis. (i) Ist $n_0 \geq 1$ derart dass $a_n \neq 0$ und $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q \ \forall n \geq n_0$, so gilt $|a_{n_0+p} \leq q^p|a_{n_0}| \ \forall p \geq 0$ (Induktion nach p: $p = 0$ trivial und $|a_{n_0+p+1}|\frac{a_{n_0+p+1}}{a_{n_0+p}}| \cdot |a_{n_0+p}| \leq q \cdot q^p \cdot |a_{n_0}| = q^{p+1}|a_{n_0}|$.)
$\Rightarrow$ Die geometrische Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n$ ist eine konvergente Majorante für $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$. Also konvergiert $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ und daher auch $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

(ii) Ist $n_0 \geq 1$ derart dass $a_n \geq 0$ und $|\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \ \forall n \geq n_0$, so gilt $|a_n| \geq |a_{n-1}| \geq ... \geq |a_{n_0+1}| \geq |a_{n_0}|$, dh. $|a_n| \geq |a_{n_0}| > 0 \ \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ ist keine Nullfolge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.

Korollar 138. (Quotientenkriterium, 2. Version) Es sei $a_n \neq 0$ für fast alle n ≥ 1.

(i) Ist $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(ii) Ist $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Beweis. (i) Sei $\alpha := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$. Wählt man wieder $\varepsilon := \frac{1-\alpha}{2} > 0$, so ist wegen Satz 32 $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < \alpha + \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1+\alpha}{2} < 1$ für fast alle n, dh. die Voraussetzung von Satz 137(i) ist mit $q = \frac{1+\alpha}{2}$ erfüllt.

(ii) Sei $\beta := \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1$. Wählt man $\epsilon = \frac{\beta-1}{2}$, so ist wegen der Bemerkung nach Satz 32 $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < \beta - \frac{\beta-1}{2} = \frac{1+\beta}{2} > 1$ für fast alle n, dh. die Voraussetzung von Satz 137 (ii) ist erfüllt.

Bemerkung. 1) Existiert $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ (was in vielen Anwendungsbeispielen der Fall ist), so ist $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ und man kann Kor. 138 in folgender Form anwenden:

(i) Ist $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent

(ii) Ist $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent

2) Es reicht in Satz 137(i) nicht, dass $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$ für fast alle n z.B. gilt $|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}| = \frac{n}{n+1} < 1 \ \forall n \geq 1$, aber die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

3) Ist $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 1$, so kann man mit Hilfe des Quotientenkriteriums keine Aussage machen. Z.B. gilt $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{n}{n+1}| = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{n^2}{(n+1)^2}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{n^2}{n^2+2n+1}| = 1$. Aber die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

Beispiele. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ konvergiert, denn $\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e} < 1$

Bemerkung. 1) Wurzel- und Quotientenkriterium entstehen durch Vergleich der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ mit der geoemtrischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$.

2) Man kann zeigen: Kann man die (absolute) Konvergenz einer Reihe mit dem Quotientenkriterium beweisen, so kann man sie auch mit dem Wurzelkriterium beweisen. Es gibt aber Reihen, deren Konvergenz man mit dem Wurzelkriterium aber nicht mit dem Quotientenkriterium zeigen kann.

3) **Faustregel:** Das Wurzelkriterium ist stärker als das Quotientenkriterium, das Quotientenkriterium ist aber oft einfacher in der Handhabung. (Wie zum Beispiel im Fall der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$).

Bemerkung. Der nachfolgende Satz und das darauffolgende Korollar sind Nachträge zu den Abschnitten 3.7 bzw. 5.5. Sie sind Analoge zu den Sätzen 22 (für Folgen) und 130(v) für Reihen.

Satz 139. Die Funktion $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ sei monoton. Dann sind äquivalent:

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existiert,

(ii) f ist beschränkt

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$ Es sei $\alpha := \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Dann $\exists x_0 \geq a \forall x \geq x_0 : |f(x) - \alpha| < 1$. Daraus folgt $|f(x)| - |\alpha| \leq ||f(x)| - |\alpha|| \leq |f(x) - \alpha| < 1$ und daher $|f(x)| \leq |\alpha| + 1 \forall x \geq x_0$. Auf dem Intervall $[a, x_0]$ ist f beschränkt, da $f(a) \leq f(x) \leq f(x_0) \forall x \in [a, x_0]$ (falls f monoton wächst) bzw. $f(x_0) \leq f(x) \leq f(a) \forall x \in [a, x_0]$ (falls f monoton fällt). In beiden Fällen ist $|f(x)| \leq \max\{|f(x_0)|, |f(a)|\} \forall x \in [a, x_0]$. Insgesamt ist $|f(x)| \leq \max\{|\alpha| + 1, |f(x_0)|, |f(a)|\} \forall x \geq a$, dh. f ist beschränkt.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Es sei zunächst f monoton wachsend. Es sei $\alpha := \sup\limits_{x\geq a} f(x)$. Behauptung: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \alpha$. Es sei $\epsilon > 0$. Wegen Satz 5 gibt es ein $x_0 \geq a$, derart, dass $\alpha - \epsilon < f(x_0) \leq \alpha$ und daher $\alpha - \epsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq \alpha < \alpha + \epsilon \quad \forall x \geq x_0$. Daraus folgt $|f(x) - \alpha| < \epsilon \quad \forall x \geq x_0$ und damit die Behauptung. Falls f monton fällt, folgt die Behauptung durch Anwenden des bisher Gezeigten auf -f.

Korollar 140. Es sei $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrierbar auf $[a, x] \forall x \geq a$ und $f \geq 0$. Dann sind äquivalent:

(i) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ existiert,

(ii) $\exists k > 0 : \int_a^x f(t)dt \leq k \, \forall x \geq a$

Beweis. Für $x \geq a$ sei $F(x) := \int_a^x f(t)dt$. Dann ist $F \geq 0$ und die Funktion F ist monoton wachsend. (Ist $x < y$, so gilt $F(x) = \int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x f(t)dt + \int_x^y f(t)dt = \int_a^y f(t)dt = F(y)$). Also gilt $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ existiert $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ existiert $\Leftrightarrow F(x)$ ist beschränkt.

Satz 141. (**Integralkriterium**) Die Funktion $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ erfülle $f > 0$ und sei monoton fallend. Dann sind äquivalent:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergiert

(ii) $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ existiert

Beweis. Es sei $s_n = f(1)+...+f(n)$. Daher gilt offenbar $s_n - f(1) = f(2)+...+f(n) \leq \int_1^2 f(x)dx + ... + \int_{n-1}^n f(x)dx \leq f(1) + ... + f(n-1) = s_{n-1}$. Daraus folgt sofort, dass $s_n - f(1) \leq \int_1^n f(x)dx \leq s_{n-1}$.
Nun gilt $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergiert
$\Leftrightarrow s_n$ ist beschränkt
$\Leftrightarrow$ Die Folge $(\int_1^n f(t)dt)_{n\geq 1}$ ist beschränkt
$\Leftrightarrow$ Die Abbildung $[1, +\infty) \to \mathbb{R}\ x \mapsto \int_1^x f(t)dt$ ist beschränkt
$\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx$ existiert

Korollar 142. Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert genau dann wenn $\alpha > 1$.

Beweis. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert $\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ existiert $\Leftrightarrow \alpha > 1$ (siehe Abschnitt 5.5)

Bemerkung. Für $\alpha > 1$ erhält man so die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. Da sie die Produktdarstellung $\zeta(\alpha) = \prod\limits_{pPrimzahl} \frac{1}{1-p^{-\alpha}}$ (Produkt über alle Primzahlen) besitzt, wird sie in der analytischen Zahlentheorie verwendet, um die Verteilung der Primzahlen zu untersuchen. Man kann sie auf die ganze komplexe Ebene (mit Ausnahme des Punktes 1) fortsetzen. Sie ist auch Gegenstand der berühnten Riemannschen Vermutung, die sich mit der Lage ihrer nicht-trivialen Nullstellen beschäftigt.

Satz 143. Die Funktion $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ erfülle $f > 0$ und sei monoton fallend. Dann existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x)dx) \in [0, f(1)]$

Beweis. Für $n \geq 1$ sei $t_n := \int_1^n f(x)dx - (f(2) + ... + f(n))$. Die Folge $(t_n)_{n\geq 1}$ ist monoton wachsend, denn $t_{n+1} = \int_1^{n+1} f(x)dx - (f(2) + ... + f(n+1)) = \int_1^n f(x)dx - (f(2) + ... + f(n)) + \int_n^{n+1} f(x)dx - f(n+1) \geq t_n$.
Weiters gilt $0 \leq t_n \leq f(1) - f(n)$ für $n \geq 1$, denn $0 \leq (\int_1^2 f(x)dx - f(2)) + ... + (\int_{n-1}^n f(x)dx - f(n)) = \int_1^n f(x)dx - (f(2) + ... + f(n)) = t_n \leq (f(1) - f(2)) + ... + (f(n-1) - f(n)) = (f(1) + ... + f(n-1)) - (f(2) + ... + f(n)) = f(1) - f(n)$. Also ist die Foge $(t_n)_{n\geq 1}$ monoton wachsend und durch $f(1)$ nach oben beschränkt. Daher existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} t_n$ (nach Satz 22) und $\lim\limits_{n\to\infty} t_n \in [0, f(1)]$ (wegen Satz 20(i)). Bezeichnet $s_n = \sum_{k=1}^n f(k)$, so folgt $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n - \int_1^n f(x)dx) = \lim\limits_{n\to\infty}(f(1) - t_n) = f(1) - \lim\limits_{n\to\infty} t_n \in [0, f(1)]$.

Bemerkung. Beachten Sie, dass wir weder vorausgesetzt haben, dass $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergiert, noch, dass $\int_1^{\infty} f(x)dx$ existiert.

Beispiele. Anwendung von Satz 143 auf die Funktion $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ ergibt, dass de Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{1}{x}dx)$
$= \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - log(n)) =: \gamma$ existiert. Die Zahl γ wird Euler-Mascheroni-Konstante genannt. Es ist nicht bekannt, ob γ rational oder irrational ist.

6.3 Potenzreihen und Taylorreihen

Def. Eine Reihe der Gestalt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ...,$ wird Potenzreihe (um a) genannt

Bemerkung. 1) Genaugenommen handelt es sich bei einer Potenzreihe also um eine Reihe bei der Potenzen aufsummiert werden (nämlich die Abbildung $x \to a_k(a-x)^k$)

2) Häufig wählt man $a = 0$, dh man betrachtet Reihen der Gestalt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

Def. Für eine gegebene Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ definiert man den Konvergenzradius R durch die Formel $R := 1\backslash \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}$, wobei man $\frac{1}{+\infty} = 0$ und $\frac{1}{0} = \infty$ setzt (Formel von Cauchy-Madamerd).

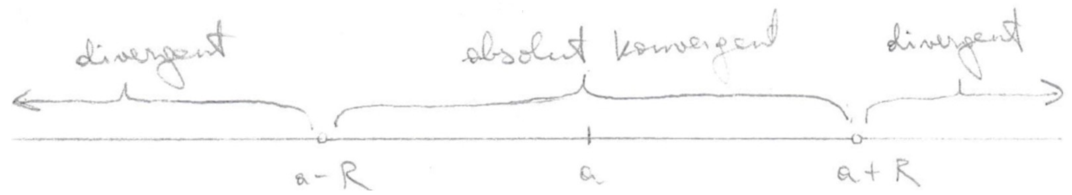
Satz 144. Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ möge Konvergenzradius besitzen

(i) Ist $R = 0$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ nur für $x = a$ und divergiert für $x \neq a$

(ii) Ist $R = \infty$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ absolut $\forall x \in \mathbb{R}$

(iii) Ist $R \in (0, +\infty)$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ absolut für alle $x \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $|x-a| < R$ und divergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $|x-a| > R$

Bemerkung. Man kann diesen Satz folgendermaßen veranschaulichen:



Beweis. (i) Ist $R = 0$, so folgt $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = +\infty$ und daher $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k(x-a)^k|} = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} (\sqrt[k]{|a_k|} \cdot |x-a|) = +\infty \, \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{a\}$.
Also ist $\sqrt[k]{|a_k(x-a)^k|} \geq 1$ für unendlich viele k und die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ daher divergent für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{a\}$ (nach Satz 135(ii)).

(ii) Ist $R=\infty$, so folgt $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|}=0$ und daher $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k(x-a)^k|}=\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}(\sqrt[k]{|a_k|}\cdot |x-a|)=0\,\forall x\in\mathbb{R}$
Also konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k$ absolut für alle $x\in\mathbb{R}$ nach Korrolar 136(i).

(iii) Für $R\in(0,+\infty)$ ist (unter Verwendung von Übungsbeispiel 63a) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k(x-a)^k|}=$
$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}(|x-a|\cdot\sqrt[k]{|a_k|})\overset{Bsp.63a}{=}|x-a|\cdot\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|}=\frac{|x-a|}{R}$
Für $|x-a|>R$ ist nun $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k(x-a)^k|}=\frac{|x-a|}{R}<1$ und die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k$ ist wegen Korollar 136 (i) absolut konvergent.
Für $|x-a|>R$ ist $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k(x-a)^k|}=\frac{|x-a|}{R}>1$ und die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k$ ist wegen Korollar 136(ii) divergent.