Übungen zu Algebra 1, SS 2020

Christoph Baxa

1) Entscheiden Sie, ob es sich bei $(\mathbb{N}, \circ)$ um eine Halbgruppe, ein Monoid, eine Gruppe oder eine abelsche Gruppe handelt.

a) $a \circ b = a + b$ (d.h. die übliche Addition natürlicher Zahlen),
b) $a \circ b = a \cdot b$ (d.h. die übliche Multiplikation natürlicher Zahlen),
c) $a \circ b = \max\{a, b\}$,
d) $a \circ b = \min\{a, b\}$.

2) Es bezeichne $\mathbb{R}[X]$ die Menge aller Polynome mit reellen Koeffizienten und (für ein $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) sei $\mathcal{P}_d = \{p \in \mathbb{R}[X] \mid \operatorname{grad} p \leq d\}$. Weites bezeichnen $+$ bzw. $\cdot$ die übliche Addition bzw. Multiplikation von Polynomen. Handelt es sich bei

a) $(\mathbb{R}[X], +)$ b) $(\mathbb{R}[X], \cdot)$ c) $(\mathcal{P}_d, +)$ d) $(\mathcal{P}_d, \cdot)$

um eine Halbgruppe, ein Monoid, eine Gruppe oder eine abelsche Gruppe?

3) Handelt es sich bei $(\mathbb{R}^3, \times)$ (wobei $\times$ das Kreuzprodukt zweier Vektoren des $\mathbb{R}^3$ bezeichnen soll) um eine Halbgruppe, ein Monoid, eine Gruppe oder eine abelsche Gruppe?

4) Es sei $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b$ für gewisse $a, b \in \mathbb{R}$ wobei $a \neq 0\}$. Bildet G mit $\circ$ (d.h. der Komposition von Funktionen) eine Gruppe? Wenn ja, ist diese abelsch?

5) Es sei $G = \{+1, -1, +i, -i\}$. Beweisen Sie, dass $(G, \cdot)$ eine abelsche Gruppe bildet, wobei $\cdot$ die übliche Multiplikation komplexer Zahlen bezeichnet. Erstellen Sie zu diesem Zweck eine Verknüpfungstafel.

6) Gegeben sei das Quadrat mit den Eckpunkten $(1, 1), (1, -1), (-1, 1)$ und $(-1, -1)$ (im $\mathbb{R}^2$). Betrachten Sie die Menge $D_4^* = \{I, R, R^2, R^3, S_0, S_1, S_2, S_3\}$ von Bijektionen des Quadrats. Dabei bezeichne I die Identität, R die Drehung um $90°$ im Uhrzeigersinn um den Ursprung, S_0 die Spiegelung an der Gerade $y = x$, S_1 die Spiegelung an der y-Achse, S_2 die Spiegelung an der Gerade $y = -x$ und S_3 die Spiegelung an der x-Achse.

a) Schreiben Sie eine Verknüpfungstafel von D_4^*.
b) Beweisen Sie, dass D_4^*, versehen mit der Verknüpfung von Abbildungen, eine nicht-abelsche Gruppe bildet (die Symmetriegruppe des Quadrats).

7) Beweisen Sie, dass $(\mathcal{C}, \cdot)$ eine Gruppe bildet, wobei

$$\mathcal{C} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix} \right) \middle| a, b \in \mathbb{R}, (a,b) \neq (0,0) \right\}$$

und $\cdot$ die übliche Multiplikation von Matrizen bezeichne. Ist diese Gruppe abelsch?

8) Beweisen Sie, dass $(\mathcal{H}, \cdot)$ eine Gruppe bildet, wobei

$$\mathcal{H} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} w & -z \\ \bar{z} & \bar{w} \end{smallmatrix} \right) \middle| z, w \in \mathbb{C}, (z,w) \neq (0,0) \right\}$$

und $\cdot$ die übliche Multiplikation von Matrizen bezeichne. Ist diese Gruppe abelsch?

9) Beweisen Sie: Ist G eine abelsche Gruppe, $a_1, \ldots, a_n \in G$ und $\sigma \in S_n$ eine Permutation, so gilt

$$a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} = a_1 \cdots a_n.$$

10) Es sei G eine Gruppe. Beweisen Sie:

a) Erfüllt $a \in G$ die Beziehung $a \cdot a = a$, so ist $a = e$.
b) Für $a, b \in G$ existieren eindeutig bestimmte $x, y \in G$, derart dass $ax = b$ und $ya = b$.

11) Beweisen Sie, dass $(G, \cdot)$ genau dann eine Gruppe ist, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

a) $\forall\, a, b, c \in G:\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
b) $\exists\, e \in G\ \ \forall\, a \in G:\ e \cdot a = a$ (d.h. e ist linksneutrales Element),
c) $\forall\, a \in G\ \ \exists\, x \in G: x \cdot a = e$ (d.h. x ist linksinverses Element von a).

12) Es sei G eine Gruppe. Beweisen Sie: Gilt $a^2 = e$ für alle $a \in G$, so ist G abelsch. Welche Gruppen mit dieser Eigenschaft kennen Sie? Gilt die Umkehrung?

13) Es sei G eine Gruppe. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) G ist genau dann abelsch, wenn $(ab)^2 = a^2 b^2$ für alle $a, b \in G$ gilt.
b) G ist genau dann abelsch, wenn $(ab)^{-1} = a^{-1} b^{-1}$ für alle $a, b \in G$ gilt.

14) Es seien $G_1, \ldots, G_n$ Gruppen. Beweisen Sie, dass $G_1 \times \cdots \times G_n$ mit der Verknüpfung $(a_1, \ldots, a_n)(b_1, \ldots, b_n) = (a_1 b_1, \ldots, a_n b_n)$ eine Gruppe ist. Wann ist $G_1 \times \cdots \times G_n$ abelsch?

15) Es sei $(G, \cdot)$ ein Monoid. Beweisen Sie: Setzt man $G^* = \{a \in G \mid a \text{ ist invertierbar}\}$, so ist $(G^*, \cdot)$ eine Gruppe.

16) Es sei $(G, \cdot)$ eine endliche Gruppe der Ordnung n. Beweisen Sie: Ist $G = \{a_1, \dots, a_n\}$ und $x \in G$, so gilt

$$G = \{x \cdot a_1, \dots, x \cdot a_n\} = \{a_1 \cdot x, \dots, a_n \cdot x\}.$$

Was folgt daraus für die Zeilen und Spalten der Verknüpfungstafel von G?

17) Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe der Ordnung 3. Verwenden Sie das vorangegangene Beispiel, um folgendes zu beweisen: Ist $G = \{e, a, b\}$, so muss die Verknüpfungstafel von G die Gestalt

$\circ$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

haben. Folgern Sie daraus, dass die Verknüpfungstafel eine Gruppe der Ordnung 3 stets die folgende Gestalt hat:

$\circ$	e	a	a^2
e	e	a	a^2
a	a	a^2	e
a^2	a^2	e	a

Bemerkung: Damit ist (auf nicht sehr elegante Weise) bewiesen worden, dass eine Gruppe der Ordnung 3 stets zyklisch ist.

18) a) Es sei $G = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $H = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $a \circ b = \max\{a, b\}$. Beweisen Sie, dass $(G, \circ)$ und $(H, \circ)$ Monoide sind und vergleichen Sie ihre neutralen Elemente.
b) Es sei $G = \mathbb{Z}^2$, $H_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{Z}\}$, $H_2 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{Z}\}$ und

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2)$$

(d.h. komponentenweise Multiplikation). Beweisen Sie, dass $(G, \circ)$, $(H_1, \circ)$ und $(H_2, \circ)$ Monoide sind und vergleiche Sie ihre neutralen Elemente.

Bemerkung: Dieses Beispiel zeigt folgendes: Ist $(G, \circ)$ eine Monoid, $H \subseteq G$, $H \neq \varnothing$ und $(H, \circ)$ ebenfalls ein Monoid, so ist es möglich, dass die neutralen Elemente von G und H nicht übereinstimmen. (Aus diesem Grund setzt man bei der Definition eines Untermonoids H eines Monoids G in der Regel voraus, dass die neutralen Elemente von G und H übereinstimmen.)

19) a) Es sei p eine Primzahl. Beweisen Sie, dass $\{a/p^n \mid a, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ ist.
b) Es sei p eine Primzahl. Beweisen Sie, dass $\{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, p \nmid b\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ ist.
c) Beweisen Sie, dass $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = 1\right\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist.

20) a) Es sei $G = \{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid f \text{ ist bijektiv}\}$ und

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2) = \{f \in G \mid f \text{ ist eine Isometrie}\},$$

d.h.

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2) = \left\{f \in G \,\middle|\, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ eine Untergruppe von $(G, \circ)$ ist (wobei $\circ$ die Verknüpfung von Abbildungen bezeichnet).
b) Für $v \in \mathbb{R}^2$ bezeichne $T_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T_v(x) = x + v$ die Translation um den Vektor v. Zeigen Sie, dass $\mathcal{T} = \{T_v \mid v \in \mathbb{R}^2\}$ eine Untergruppe von $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ ist.
c) Zeigen Sie, dass die orthogonale Gruppe $O(2)$ eine Untergruppe von $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ ist.

21) Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, $H \leq G$ und $a \in G$. Beweisen Sie, dass

$$aHa^{-1} = \{aha^{-1} \mid h \in H\}$$

eine Untergruppe von G ist und dieselbe Kardinalität wie H hat.

Bemerkung: Eine Untergruppe der Gestalt aHa^{-1} wird eine zu H konjugierte Untergruppe genannt.

22) Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $H \subseteq G$, $H \neq \varnothing$ sei endlich. Beweisen Sie, dass H genau dann eine Untergruppe von G ist, wenn $ab \in H$ für alle $a, b \in H$ gilt.

23) Beweisen Sie, dass die Gruppe D_4^* (aus Beispiel 6) von R und S_0 erzeugt wird. Zeigen Sie zu diesem Zweck

$$D_4^* = \left\{R^j S_0^i \mid i \in \{0, 1\}, j \in \{0, 1, 2, 3\}\right\}.$$

24) Es bezeichne, analog zu Beispiel 6, D_3^* die Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks (d.h. die Menge aller Isometrien, die das Dreieck deckungsgleich auf sich selbst abbilden). Finden Sie alle Elemente von D_3^* und beweisen Sie die zu den in den Beispielen 6 und 23 für D_4^* bewiesenen Eigenschaften analogen.

Kennen Sie eine Gruppe mit gleich viel Elementen, deren Strukur der von D_3^* gleicht?

25) Die *Quaternionengruppe* $Q_8 := \langle A, B\rangle$ sei die von den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

a) Zeigen Sie $A^2 = B^2 = -I_2$ und folgern Sie $A^2B^2 = A^4 = B^4 = I_2$, wobei I_2 die 2×2-Einheitsmatrix bezeichnet,

b) Zeigen Sie $BA = A^3B$ und folgern Sie $Q_8 = \big\{A^iB^j \;\big|\; i \in \{0,1,2,3\}, j \in \{0,1\}\big\}$,

c) Zeigen Sie, dass Q_8 eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung 8 ist.

26) Bestimmen Sie die Ordnung aller Elemente der Gruppen

a) $(\mathbb{Z}_{12}, +)$, b) $(\mathbb{Z}_{12}^*, \cdot)$, c) $(S_3, \circ)$.

27) Betrachten Sie die prime Restklassengruppe $(\mathbb{Z}_{32}^*, \cdot)$. Beweisen Sie:

a) $\operatorname{ord}\big(\overline{5}\big) = 8$,

b) $\mathbb{Z}_{32}^* = \big\{\big(\overline{-1}\big)^i\overline{5}^j \,\big|\, i \in \{0,1\}, 0 \le j \le 7\big\}$,

c) $\mathbb{Z}_{32}^* = \big\langle \overline{-1}, \overline{5}\big\rangle$.

Bemerkungen: 1) Das vorangegangene Beispiel lässt sich geschickter (und mit mehr Erkenntnisgewinn) lösen, wenn man die nachfolgend beschriebenen Kongruenzen verwendet. Für Teil a) hilft es, zuerst folgendes (mit Induktion) zu zeigen: Für $k \ge 3$ ist

$$5^{2^{k-3}} \equiv 1 \pmod{2^{k-1}} \quad \text{aber} \quad 5^{2^{k-3}} \not\equiv 1 \pmod{2^k}.$$

Für Teil b) hilft folgendes: Für $k \ge 3$ gilt die Implikation

$$(-1)^i 5^j \equiv (-1)^m 5^n \pmod{2^k} \quad \Longrightarrow \quad (-1)^i \equiv (-1)^m \pmod 4.$$

2) Tatsächlich gilt für die prime Restklassengruppe $(\mathbb{Z}_{2^k}^*, \cdot)$ mit $k \ge 3$ allgemeiner, dass $\operatorname{ord}\big(\overline{5}\big) = 2^{k-2}$ und

$$\mathbb{Z}_{2^k}^* = \big\{\big(\overline{-1}\big)^i\overline{5}^j \,\big|\, i \in \{0,1\}, 0 \le j < 2^{k-2}\big\} = \big\langle \overline{-1}, \overline{5}\big\rangle.$$

Die in Bemerkung 1) beschriebenen Hilfsmittel reichen aus, um diese Verallgemeinerung zu zeigen.

28) Es sei G eine Gruppe und $a, b \in G$. Beweisen Sie

a) $\operatorname{ord}(a^{-1}) = \operatorname{ord}(a)$, b) $\operatorname{ord}(ab) = \operatorname{ord}(ba)$, c) $\operatorname{ord}(bab^{-1}) = \operatorname{ord}(a)$.

29) Es sei G eine abelsche Gruppe. Beweisen Sie, dass $H := \{a \in G \mid \operatorname{ord}(a) \text{ ist endlich}\}$ eine Untergruppe von G ist. Wie sieht die Untergruppe H aus, wenn $G = \big\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = 1\big\}$ mit der Multiplikation komplexer Zahlen ist?

30) a) Betrachten Sie die Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ mit der Matrizenmultiplikation und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie, dass $\mathrm{ord}(A) = 4$ und $\mathrm{ord}(B) = 3$ gilt, aber AB unendliche Ordnung besitzt.
b) Finden Sie $a, b \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$, die beide unendliche Ordnung besitzen, aber deren Summe $a + b$ endliche Ordnung $\neq 1$ hat.

31) a) Es sei G die Gruppe $(\mathbb{Z}_8, +)$. Bestimmen Sie die Zerlegung von G in Nebenklassen bezüglich der Untergruppe $H = \{\overline{0}, \overline{4}\}$.
b) Es sei G die Gruppe $\{1, i, -1, -i\}$ mit der Multiplikation komplexer Zahlen. Bestimmen Sie die Zerlegung von G in Nebenklassen bezüglich der Untergruppe $H = \{1, -1\}$.

32) Die Abbildungen $\sigma, \tau \in S_3$ seien gegeben durch $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$ und $\sigma(3) = 1$ bzw. $\tau(1) = 2$, $\tau(2) = 1$ und $\tau(3) = 3$. (Für alle, die die Zyklenschreibweise kennen: Es sei also $\sigma = (1\ 2\ 3)$ und $\tau = (1\ 2)$.) Betrachten Sie die Untergruppen $H = \{\varepsilon, \tau\}$ und $K = \{\varepsilon, \sigma, \sigma^2\}$ der Gruppe S_3 (wobei ε das neutrale Element von S_3 bezeichnen soll). Bestimmen Sie die Zerlegung von S_3 in Links- bzw. Rechtsnebenklassen nach H und K.

33) Es sei K ein Körper und $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Beweisen Sie, dass die Links- und Rechtsnebenklasse bezüglich der Untergruppe $\mathrm{SL}_n(K)$, in der A liegt, durch

$$A \cdot \mathrm{SL}_n(K) = \mathrm{SL}_n(K) \cdot A = \{B \in \mathrm{GL}_n(K) \mid \det B = \det A\}$$

gegeben sind.

34) Finden Sie alle Untergruppen der Gruppe $(D_3^*, \circ)$ aus Bsp. 24. Sie sollten beweisen, dass Sie tatsächlich alle Untergruppen gefunden haben.

35) Welche der Untergruppen aus den Beispielen 31, 32 und 33 sind Normalteiler? Begründen Sie Ihre Behauptung mit Hilfe der Resultate aus diesen Beispielen.

36) Es sei G eine Gruppe und $H \leq G$ habe die Eigenschaft $[G : H] = 2$. Zeigen Sie $H \trianglelefteq G$.

37) Es sei G eine Gruppe, $I \neq \varnothing$ eine (Index)Menge und $N_i \trianglelefteq G\ \forall i \in I$. Beweisen Sie, dass dann auch $\bigcap\limits_{i \in I} N_i \trianglelefteq G$.

38) Es sei G eine Gruppe, $H \leq G$ und $K \leq G$. Beweisen Sie, dass die Relation $\approx$, die durch $a \approx b :\Longleftrightarrow \exists h \in H\, \exists k \in K : b = hak$ gegeben ist, eine Äquivalenzrelation auf G ist, deren Äquivalenzklassen die *Doppelnebenklassen* $HaK = \{hak \mid h \in H, k \in K\}$ sind.

39) Beweisen Sie, dass die folgenden Abbildungen Homomorphismen $\varphi : G \to H$ sind und bestimmen Sie, welche davon Monomorphismen, Epimorphismen bzw. Isomorphismen sind:

a) Die Gruppen G und H seien $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +)$ und $\varphi(x) = \log x$ (wobei $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$).

b) Die Gruppen G und H seien $\big(M_n(K), +\big)$ und $(K, +)$ und $\varphi(A) = \operatorname{Spur}(A)$ (wobei K einen Körper und $M_n(K)$ die Menge der $n \times n$-Matrizen mit Eintragungen aus K bezeichnet).

c) Die Gruppen G und H seien $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ und

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix} \right) \middle| \, a, b \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0) \right\} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix} \right) \middle| \, a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$$

mit der Matrizenmultiplikation und $\varphi(a + bi) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix} \right)$.

40) Es sei G eine Gruppe. Beweisen Sie:

a) $\varphi : G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$ ist genau dann ein Automorphismus wenn G abelsch ist,

b) $\varphi : G \to G$, $x \mapsto x^2$ ist genau dann ein Endomorphismus wenn G abelsch ist.

41) Finden Sie ein Gegenbeispiel, das zeigt, dass Lemma 25 (iii) ohne die Voraussetzung der Surjektivität falsch ist. (D.h. finden Sie Gruppen G und H, einen Normalteiler $N \trianglelefteq G$ und einen Homomorphismus $\varphi : G \to H$, derart dass $\varphi(N)$ kein Normalteiler von H ist.)

Definition: Es seien $G_0, G_1, \ldots, G_n$ Gruppen und $\varphi_i : G_{i-1} \to G_i$ ein Gruppenhomomorphismus für $1 \leq i \leq n$. Man sagt, die Folge

$$G_0 \xrightarrow{\varphi_1} G_1 \xrightarrow{\varphi_2} G_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_{n-1} \xrightarrow{\varphi_n} G_n$$

sei exakt bei G_i, wenn $\operatorname{Im} \varphi_i = \ker \varphi_{i+1}$. Man sagt, die Folge sei exakt, wenn sie bei $G_1, \ldots, G_{n-1}$ exakt ist, d.h. wenn $\operatorname{Im} \varphi_i = \ker \varphi_{i+1}$ für $1 \leq i \leq n-1$.

42) Es seien G und H Gruppen und $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus. Beweisen Sie:

a) φ ist injektiv $\iff \{e\} \longrightarrow G \xrightarrow{\varphi} H$ ist eine exakte Folge,

b) φ ist surjektiv $\iff G \xrightarrow{\varphi} H \longrightarrow \{e\}$ ist eine exakte Folge,

c) φ ist bijektiv $\iff \{e\} \longrightarrow G \xrightarrow{\varphi} H \longrightarrow \{e\}$ ist eine exakte Folge.

Hinweis. Homomorphismen, deren Abbildungsvorschrift sich zwingend ergibt, erhalten in exakten Folgen oft keine Bezeichnung.

43) a) Beweisen Sie: Ist G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$, so ist

$$\{e\} \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} G/N \longrightarrow \{e\}$$

eine exakte Folge, wobei $\iota : N \to G$ die Einbettung bezeichnet und $\pi : G \to G/N$, $x \mapsto xN$ die übliche Projektion.
b) Ist

$$\{e\} \longrightarrow G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2 \xrightarrow{\psi} G_3 \longrightarrow \{e\}$$

eine exakte Folge, so gibt es ein $N \trianglelefteq G_2$ mit $N \cong G_1$. Identifiziert man G_1 mit N, so gilt $G_2/G_1 \cong G_3$.

44) Es seien $G_1, \dots, G_k$ Gruppen und $N_i \trianglelefteq G_i$ für $1 \le i \le k$. Beweisen Sie, dass $N_1 \times \cdots \times N_k \trianglelefteq G_1 \times \cdots \times G_k$ und dass

$$(G_1 \times \cdots \times G_k)/(N_1 \times \cdots \times N_k) \cong (G_1/N_1) \times \cdots \times (G_k/N_k).$$

Hinweis. Betrachten Sie die Abbildung

$$\varphi : G_1 \times \cdots \times G_k \to (G_1/N_1) \times \cdots \times (G_k/N_k),\ (a_1, \dots, a_k) \mapsto (a_1N_1, \dots, a_kN_k).$$

45) a) Es sei G eine Gruppe, $H \le G$ und $a \in G$. Beweisen Sie $aHa^{-1} \cong H$.
b) Es sei G eine Gruppe und $H \le G$ eine Untergruppe mit endlicher Ordnung $|H| = n$. Beweisen Sie, dass $H \trianglelefteq G$, wenn H die einzige Untergruppe der Ordnung n von G ist.

46) Beweisen Sie: Ist p eine Primzahl und G eine Gruppe der Ordnung $|G| = p$, so ist G eine zyklische Gruppe (und daher isomorph zur Gruppe $(\mathbb{Z}_p, +)$).

47) Beweisen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 4 entweder zu $(\mathbb{Z}_4, +)$ oder zu $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ isomorph ist.

Hinweis. Unterscheiden Sie die beiden Fälle, dass die Gruppe ein Element der Ordnung 4 enthält bzw. dass sie das nicht tut. Es kann hilfreich sein, zuvor eine Verknüpfungstafel der Gruppe $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ zu erstellen.

Bemerkung: Gruppen, die zu $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ isomorph sind, werden als *Kleinsche Vierergruppe* bezeichnet.

48) Beweisen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung ≤ 5 abelsch ist. Gibt es eine Gruppe der Ordnung 6, die nicht abelsch ist?

49) a) Finden Sie alle Elemente der Gruppe Q_8 (aus Bsp. 25), die Ordnung 2 besitzen.
b) Beweisen Sie, dass jede Untergruppe der Gruppe Q_8 Normalteiler von Q_8 ist.
c) Bestimmen Sie (die Struktur von) Q_8/N für alle $N \trianglelefteq Q_8$ (d.h. geben Sie eine bekannte Gruppe G mit der Eigenschaft $Q_8/N \cong G$ an).

Hinweis. Beachten Sie, dass in b) und c) nicht verlangt wird, dass Sie alle Untergruppen der Gruppe Q_8 bestimmen.

Bemerkung: Nichtabelsche Gruppen mit der Eigenschaft, dass jede ihrer Untergruppen bereits Normalteiler ist, werden als *Hamiltonsche Gruppen* bezeichnet.

50) Schreiben Sie die folgenden Permutationen aus S_9 als Produkt elementfremder Zyklen und bestimmen Sie ihr Signum.

$$\text{a) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 & 8 & 9 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 8 & 9 & 2 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \sigma = (4\,5\,6) \circ (5\,6\,7) \circ (6\,7\,1) \circ (1\,2\,3) \circ (2\,3\,4) \circ (3\,4\,5)$$

$$\text{d) } \sigma = (1\,4\,7\,6\,2) \circ (2\,4\,3) \circ (4\,5\,8\,1)$$

51) Es sei $(i_1 \dots i_r) \in S_n$ ein Zyklus und $\sigma \in S_n$ beliebig. Beweisen Sie, dass
$$\sigma \circ (i_1 \dots i_r) \circ \sigma^{-1} = \big(\sigma(i_1) \dots \sigma(i_r)\big).$$

52) Zeigen Sie, dass $S_n = \big\langle (1\,2), (1\,2 \dots n) \big\rangle$ für alle $n \geq 3$.

53) Die Permutation $\sigma \in S_n$ habe die Zyklendarstellung
$$\sigma = (i_{11}\ i_{12}\ \dots\ i_{1,r_1})(i_{21}\ i_{22}\ \dots\ i_{2,r_2})\ \cdots\ (i_{s1}\ i_{s2}\ \dots\ i_{s,r_s}).$$
Beweisen Sie $\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^{r_1 + \dots + r_s - s}$.

54) a) Bestimmen Sie $Z(S_1)$ und $Z(S_2)$.
b) Beweisen Sie, dass $Z(S_n) = \{\varepsilon\}$ für alle $n \geq 3$.
c) Bestimmen Sie (die Struktur von) $\operatorname{Inn}(S_n)$ für alle $n \geq 1$.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass $\operatorname{Aut}(S_n) = \operatorname{Inn}(S_n)$ für alle $n \neq 6$. Überraschenderweise gilt aber $\operatorname{Aut}(S_6)/\operatorname{Inn}(S_6) \cong \mathbb{Z}_2$.

55) Beweisen Sie, dass $N := \big\{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\big\}$ Normalteiler der Gruppen S_4 und A_4 ist und bestimmen Sie die Struktur von N und A_4/N. Folgern Sie, dass A_4 keine einfache Gruppe ist.

56) Es sei $n \geq 3$ und $\alpha = (1\,2\ldots n) \in D_n$ wie in Satz 47. Beweisen Sie, dass $\langle\alpha\rangle \trianglelefteq D_n$ und bestimmen Sie (die Struktur von) $D_n/\langle\alpha\rangle$.

57) Es sei $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$ quadratfrei (d.h. es gibt keine Primzahl p mit der Eigenschaft $p^2 \mid d$). Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \,|\, a,b \in \mathbb{Z}\}$, versehen mit der üblichen Addition und Multiplikation komplexer Zahlen, ein kommutativer Ring mit 1 ist. (Für $d < 0$ bezeichne dabei $\sqrt{d} = i\sqrt{|d|}$.)

58) Es sei

$$R := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) \,\middle|\, a,b,c,d \in 2\mathbb{Z} \right\} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbb{Z} \text{ sind gerade} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass R, versehen mit der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen, ein Ring ist, der nicht kommutativ ist und kein Einselement besitzt.

59) Es sei

$$\mathbb{H} := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} w & -z \\ \overline{z} & \overline{w} \end{smallmatrix} \right) \,\middle|\, z,w \in \mathbb{C} \right\}.$$

Beweisen Sie, dass $\mathbb{H}$, versehen mit der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen, einen Schiefkörper, aber keinen Körper bildet.

60) Beweisen Sie, dass die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ überabzählbar unendlich viele Lösungen $x \in \mathbb{H}$ besitzt. (Dabei bezeichnet 1 das Einselement von $\mathbb{H}$.)

Bemerkung: Bei dem in Beispiel 59 definierten Schiefkörper $\mathbb{H}$ handelt es sich um eine Möglichkeit, die sogenannten *Hamiltonschen Quaternionen* einzuführen.

61) Es sei $(G,+)$ eine abelsche Gruppe. Beweisen Sie: Setzt man $a \cdot b = 0$ für alle $a,b \in G$, so ist $(G,+,\cdot)$ ein kommutativer Ring.

62) Es sei R ein Ring, $a,b \in R$ mit $ab = ba$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung des *binomischen Lehrsatzes:*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Welche Probleme würden sich ergeben, wenn man im ersten bzw. letzten Summanden auf der rechten Seite a^nb^0 und a^0b^n (statt a^n und b^n) schreiben würde? Was erhält man z.B. für $R = M_2(\mathbb{R})$,

$$A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \text{ und } B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right)?$$

63) Zeigen Sie $\mathbb{Z}[i]^* = \{1, -1, i, -i\}$. Was ist die Struktur der Gruppe $\big(\mathbb{Z}[i]^*, \cdot\big)$?

64) a) Zeigen Sie, dass $\pm(1+\sqrt{2})^n \in \mathbb{Z}\big[\sqrt{2}\big]^*$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.
b) Man kann zeigen, dass $\mathbb{Z}\big[\sqrt{2}\big]^* = \big\{\pm(1+\sqrt{2})^n \,\big|\, n \in \mathbb{Z}\big\}$. Folgern Sie (unter Verwendung dieser unbewiesenen Tatsache) $\big(\mathbb{Z}\big[\sqrt{2}\big]^*, \cdot\big) \cong \big(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}, +\big)$.

65) Es seien $R_1, \ldots, R_n$ Ringe. Beweisen Sie:

a) Definiert man auf $R_1 \times \cdots \times R_n$ eine Addition und eine Multiplikation durch

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) := (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$
$$\text{und} \quad (a_1, \ldots, a_n) \cdot (b_1, \ldots, b_n) := (a_1 b_1, \ldots, a_n b_n),$$

so wird $R_1 \times \cdots \times R_n$ dadurch zu einem Ring.

b) Sind $R_1, \ldots, R_n$ alles Ringe mit Eins, so ist auch $R_1 \times \cdots \times R_n$ ein Ring mit Eins.

c) Sind $R_1, \ldots, R_n$ alle kommutativ, so ist auch $R_1 \times \cdots \times R_n$ kommutativ.

d) Sind $R_1, \ldots, R_n$ alles Ringe mit Eins, so gilt $(R_1 \times \cdots \times R_n)^* = R_1^* \times \cdots \times R_n^*$.