Drei Ergebnisse über Martingale und Stoppzeiten

Hier sind drei Ergebnisse über Martingale und Stoppzeiten die zwar im Skript (von Beiglböck und Berestycki) stehen, aber ohne Beweis.

Definition 1 *Sei* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ *eine Filtration von Sub-*σ*-Algebren von* $\mathcal{F}$ *(meistens nehmen wir* $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$*). Ein stochastischer Prozess* $(M_n)_{n\geq 0}$ *auf einem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *heißt* Martingal*, falls es an* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq q0}$ adaptiert *ist (also* M_n *ist* $\mathcal{F}_n$*-messbar),* $\mathbb{E}(|M_n|) < \infty$ *für alle* $n \geq 0$ *und*

$$\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = M_n. \tag{1}$$

Wir verwenden die folgenden Eigenschaften (ohne Beweis):

- Turmeigenschaft 1: $\mathbb{E}(\mathbb{E}(M_n|\mathcal{G})) = \mathbb{E}(M_n)$ für jede Sub-σ-Algebra $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.
- Turmeigenschaft 2: Seien $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$ Sub-σ-Algebren von $\mathcal{F}$, dann $\mathbb{E}(\mathbb{E}(M_n|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(M_n|\mathcal{H})$.

Lemma 2 *Ein Martingal* $(M_n)_{n\geq 0}$ *erfüllt* $\mathbb{E}(M_0) = \mathbb{E}(M_n)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Mit vollständiger Induktion:

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(M_n) & = & \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_n)\mathbf{1}_\Omega) & \text{Erwartung einer konstanten ZV ist eine Konstante} \\
& = & \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_0)) & \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \text{ ist trivial} \\
& = & \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n)|\mathcal{F}_0) & \text{Martingaleigenschaft (1)} \\
& = & \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_0) & \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_n \text{ und Turmeigenschaft 2} \\
& = & \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_{n+1})\mathbf{1}_\Omega) & \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \text{ ist trivial} \\
& = & \mathbb{E}(M_{n+1}) & \text{Erwartung einer konstanten ZV ist eine Konstante.}
\end{array}$$

□

Definition 3 *Sei* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ *eine Filtration und* $(X_n)_{n\geq 0}$ *ein an* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ *adaptierter Prozess. Eine Zufallsvariable* $\tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *heißt* Stoppzeit *falls das Ereignis* $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$*. Sprich: um zu bestimmen ob* $\tau \leq n$*, braucht man die von* $\mathcal{F}_n$ *gegebene Information aber nicht mehr.*

Lemma 4 *Sei* $(M_n)_{n\geq 0}$ *ein Martingal und* $\tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *eine Stoppzeit. Wir schreiben* $n \wedge \tau = \min\{n, \tau\}$*. Dan gilt*

$$\mathbb{E}(M_{n\wedge\tau}) = \mathbb{E}(M_0).$$

Beweis. Sei $j < n$. Mit der Turmeigenschaft 2 erhalten wir

$$\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_j) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_{n-1})|\mathcal{F}_j) = \mathbb{E}(M_{n-1}|\mathcal{F}_j). \tag{2}$$

Jetzt die große Rechnung:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_0) &= \mathbb{E}(M_n) \qquad \text{wegen Lemma 2} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \mathbb{E}(M_n|\tau=j)\mathbb{P}(\tau=j) + \mathbb{E}(M_n|\tau>n)\mathbb{P}(\tau>n) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_j)|\tau=j)\mathbb{P}(\tau=j) + \mathbb{E}(M_n|\tau>n)\mathbb{P}(\tau>n) \quad \text{weil } \{\tau=j\}\in\mathcal{F} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_j|\mathcal{F}_j)|\tau=j)\mathbb{P}(\tau=j) + \mathbb{E}(M_n|\tau>n)\mathbb{P}(\tau>n) \quad \text{(2) mehrere Male} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \mathbb{E}(M_j|\tau=j)\mathbb{P}(\tau=j) + \mathbb{E}(M_n|\tau>n)\mathbb{P}(\tau>n) \quad M_j \text{ ist } \mathcal{F}_j\text{-messbar} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \mathbb{E}(M_\tau|\tau=j)\mathbb{P}(\tau=j) + \mathbb{E}(M_n|\tau>n)\mathbb{P}(\tau>n) \\
&= \mathbb{E}(M_\tau|\tau\le n)\mathbb{P}(\tau\le n) + \mathbb{E}(M_n|\tau>n)\mathbb{P}(\tau>n) \\
&= \mathbb{E}(M_{n\wedge\tau}|\tau\le n)\mathbb{P}(\tau\le n) + \mathbb{E}(M_{n\wedge\tau}|\tau>n)\mathbb{P}(\tau>n) = \mathbb{E}(M_{n\wedge\tau}).
\end{aligned}$$

□

Theorem 5 (Doob's Optional Stopping Time Theorem) *Sei $(M_n)_{n\ge 0}$ ein Martigal und $\tau : \Omega \to \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ eine Stoppzeit. Falls (i) $\mathbb{P}(\tau=\infty)=0$, (ii) $\mathbb{E}(|M_\tau|)<\infty$ und (iii) $\mathbb{E}(M_n|\tau>n)\mathbb{P}(\tau>n\}\to 0$ für $n\to\infty$. Dann gilt:*

$$\mathbb{E}(M_\tau) = \mathbb{E}(M_0).$$

Beweis. *Wegen der letzten Zeile in der vorausgegangeneen großen Rechnung im vorherigen Beweis und der Gleichheit $\mathbb{E}(M_{n\wedge\tau})=\mathbb{E}(M_0)$ von Lemma 4:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_\tau) &= \mathbb{E}(M_\tau|\tau\le n)\mathbb{P}(\tau\le n) + \mathbb{E}(M_\tau|\tau>n)\mathbb{P}(\tau>n) \\
&= \mathbb{E}(M_{n\wedge\tau}) + \mathbb{E}(M_\tau|\tau>n)\mathbb{P}(\tau>n) - \mathbb{E}(M_{n\wedge\tau}|\tau>n)\mathbb{P}(\tau>n) \\
&= \mathbb{E}(M_0) + \underbrace{\mathbb{E}(M_\tau|\tau>n)\mathbb{P}(\tau>n)}_{\textit{Term A}} - \underbrace{\mathbb{E}(M_n|\tau>n)\mathbb{P}(\tau>n)}_{\textit{Term B}},
\end{aligned}$$

für alle $n\in\mathbb{N}$.

Als nächster Schritt nehmen wir den Grenzwert $n\to\infty$, und zeigen, dass terme A und B gegen Null gehen.

Annahme (iii) sagt, dass $\mathbb{E}(M_n|\tau>n)\mathbb{P}(\tau>n)\to 0$, also Term B geht gegen Null im Grenzwert.

Für Term A verwenden wir Annahme (ii), dass $\mathbb{E}(|M_\tau|)<\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} |\mathbb{E}(M_\tau|\tau>n)\mathbb{P}(\tau>n)| \le \lim_{n\to\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} \mathbb{E}(|M_\tau||\tau=j)\mathbb{P}(\tau=j) = 0$$

weil es der Rest einer konvergenten Summe $\mathbb{E}(|M_\tau|)=\sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{E}(|M_\tau||\tau=j)\mathbb{P}(\tau=j)$ ist. □