Analysis in einer Variablen

Eine Vorlesung für das

Lehramtsstudium

Franz Hofbauer

Oktober 2020

Vorwort

Die Lehramtsausbildung sollte sich an der Berufsrealität der Lehrer orientieren. Deshalb wird in diesem Skriptum ein Zugang zur Analysis gewählt, der nahe an der Mathematik im Schulunterricht bleibt. Die reellen Zahlen werden als Dezimalzahlen eingeführt, die auf der Zahlengerade angeordnet sind. Es ist dann nicht schwer, die Intervallschachtelungseigenschaft zu beweisen. Diese Version der Vollständigkeit der reellen Zahlen hat den Vorteil, dass man keine Grenzwertdefinition benötigt. Außerdem kann man sie unmittelbar anwenden, zum Beispiel zum Berechnen der Wurzel einer positiven reellen Zahl oder zur Bestimmung der Fläche des Einheitskreises.

Mit Hilfe einer Intervallhalbierungsmethode kann man auch relativ einfach den Zwischenwertsatz, den Satz von Bolzano-Weierstraß und den Satz über das Supremum einer beschränkten Menge beweisen. Diese Beweise sind in einem eigenen Kapitel zusammengefasst.

Grenzwert, Stetigkeit und Differenzierbarkeit werden wie üblich behandelt. Als zusätzliche Anwendungsmöglichkeit der Ableitung werden einige wichtige Ungleichungen bewiesen.

Die trigonometrischen Fuktionen werden am Einheitskreis definiert. Geometrische Überlegungen helfen dann, die Summensätze zu beweisen und die Ungleichungen zu finden, die für die Berechnung der Ableitung gebraucht werden.

Die Exponentialfunktion beschreibt kontinuierliches Wachstum. Ist x der jährliche Zinssatz und unterteilt man das Jahr in n gleich lange Perioden, an deren Enden die Zinsen gutgeschrieben werden, dann wächst das Startkapital um den Faktor $(1+\frac{x}{n})^n$ in einem Jahr. Im Grenzwert $n \to \infty$ erhält man kontinuierliches Wachstum. Das ergibt die Definition der Exponentialfunktion. Mit Hilfe von entsprechenden Ungleichungen kann die Existenz dieses Grenzwertes bewiesen werden. Ebenso findet man Rechenregeln und die Ableitung der Exponentialfunktion.

Die Umkehrfunktion von $x \mapsto (1+\frac{x}{n})^n$ ist $x \mapsto n(\sqrt[n]{x}-1)$. Als Grenzwert dieser Funktionen ergibt sich der Logarithmus.

Das Riemannintegral wird wie üblich mit Hilfe von Ober- und Untersummen eingeführt und dann der Hauptsatz bewiesen. Aus den Rechenregeln für die Ableitung erhält man die für das Integral. Schließlich wird noch die Taylorformel behandelt, um dann die oben genannten Funktionen und einige andere in Potenzreihen entwickeln zu können.

Potenzreihen sind für diesen Zugang zur Analysis nicht notwendig. Sie werden im letzten Kapitel dieses Skriptums behandelt.

Im Anhang findet man einige interessante Anwendungen und Ergänzungen.

I. Reelle Zahlen und stetige Funktionen

Wir führen die reellen Zahlen als Dezimalzahlen ein, die wir uns auf der Zahlengerade angeordnet vorstellen. Dadurch ist auch eine Ordnungsrelation festgelegt. Wir zeigen dann, dass die Intervallschachtelungseigenschaft erfüllt ist. Sie wird später zum Beweis der grundlegenden Sätze wie Zwischenwertsatz, Satz von Bolzano-Weierstraß und Satz über die Existenz von Inmum und Supremum einer beschränkten Menge verwendet.

Der Begriff des Grenzwerts spielt die Hauptrolle in der Analysis. Deshalb untersuchen wir zuerst Folgen und deren Grenzwerte und beschäftigen uns dann mit den Funktionen. Wir untersuchen stetige Funktionen, für die der Zwischenwertsatz gilt. Damit beweisen wir unter anderem die Existenz der Umkehrfunktion, die zur Einführung der Wurzelfunktion und der Potenzfunktion verwendet wird.

1. Dezimalzahlen

Durch Zählen erhält man die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Fügt man auch noch die Null und die negativen Zahlen hinzu, so erhält man die ganzen Zahlen

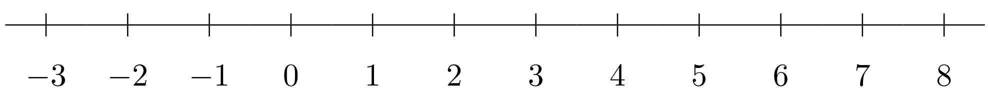
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Ganze Zahlen kann man addieren und multiplizieren und erhält dadurch wieder ganze Zahlen. Die Rechenregeln für Addition und Multiplikation sind

Assoziativgestze: $a + (b + c) = (a + b) + c$ und $a(bc) = (ab)c$
Kommutativgesetze: $a + b = b + a$ und $ab = ba$
Distributivgesetz: $(a + b)c = ac + bc$

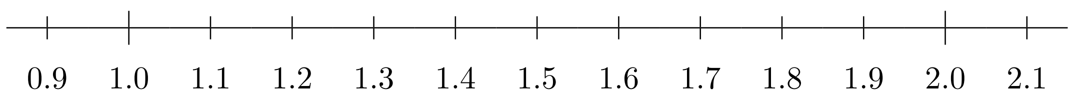
Diese Gesetze garantieren, dass man so addieren und multiplizieren darf, wie man es gewohnt ist. Die Subtraktion wird als Umkehroperation der Addition aufgefasst. Die Subtraktion einer Zahl n ist die Addition der Zahl $-n$, das ist die Zahl mit geändertem Vorzeichen, zum Beispiel gilt $-(-3) = 3$.

Neben den Rechenoperationen gibt es auch eine Ordnungsrelation $<$ auf $\mathbb{Z}$. Zwei ganze Zahlen sind immer vergleichbar, das heißt, wenn a ungleich b ist, dann gilt entweder $a < b$ oder $b < a$. Man kann $\mathbb{Z}$ als die ganzzahligen Punkte auf der Zahlengeraden anordnen.

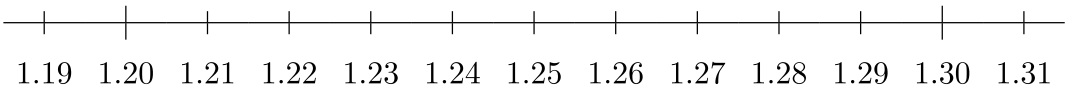


Wir wollen uns nicht weiter mit den ganzen Zahlen beschäftigen, sondern gleich zu den reellen Zahlen übergehen.

In $\mathbb{Z}$ kann man die Subtraktion, also die Umkehroperation zur Addition ausführen, nicht aber die Division, die Umkehroperation zur Multiplikation. Will man zum Beispiel 9 durch 7 dividieren, so erhält man 1 als Ergebnis und 2 als Rest. Das Divisionsergebnis liegt also zwischen 1 und 2. Um die Division genauer ausführen zu können, gehen wir über zu einer genaueren Skala, indem wir die Längeneinheit in zehn Teile unterteilen.



Jetzt kann man die Division auf eine Dezimalstelle genau ausführen. Das Divisionsergebnis auf eine Dezimalstelle genau ist 1.2 mit 6 als Rest. Das exakte Divisionsergebnis liegt also zwischen 1.2 und 1.3. Man kann dieses Verfahren fortsetzen. Unterteilt man die Abstände zwischen aufeinanderfolgenden einstelligen Dezimalzahlen jeweils wieder in zehn gleiche Teile, so erhält man eine zweistellige Dezimalskala.



Jetzt kann man die Division auf zwei Dezimalstellen genau ausführen. Das Divisionsergebnis auf zwei Dezimalstellen genau ist 1.28 mit 4 als Rest. Das exakte Divisionsergebnis liegt also zwischen 1.28 und 1.29.

Das kann man immer weiter fortsetzen außer es kommt einmal der Rest 0, womit die Division endet. Als exaktes Divisionsergebnis erhält man eine Dezimalzahl. Eine Dezimalzahl besteht aus einem ganzzahligen Teil (mit Vorzeichen) und nach dem Dezimalpunkt aus einer endlichen oder unendlichen Folge von Ziffern, den Dezimalstellen. Die Menge aller Dezimalzahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{R}$ und nennen sie die Menge der reellen Zahlen, wobei wir später noch eine geringfügige Modifikation vornehmen.

Es gibt viele Dezimalzahlen, die nicht als Ergebnis einer Division einer ganzen Zahl durch eine natürliche Zahl auftreten. Diejenigen, die auftreten, bilden die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen, also $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$. Bekanntlich sind das die Dezimalzahlen, die nur endlich viele Dezimalstellen haben oder deren Dezimalstellen sich ab einer gewissen Stelle periodisch wiederholen. In $\mathbb{Q}$ rechnet man üblicherweise mit Brüchen anstatt mit Dezimalzahlen. Jedoch ist $\mathbb{Q}$ für die Analysis nicht geeignet, da die Intervallschachtelungseigenschaft nicht erfüllt ist. Wir brauchen daher die Menge $\mathbb{R}$ aller Dezimalzahlen.

Eine Dezimalzahl bestimmt die Position eines Punktes auf der Zahlengeraden. Durch jede Dezimalstelle wird die Position genauer festgelegt. Üblicherweise werden Punkte und Zahlen identifiziert. Dadurch sind die Dezimalzahlen auch geordnet. Sind x und y zwei Dezimalzahlen, dann gilt $x < y$, wenn der Punkt x auf der Zahlengeraden links vom Punkt y liegt. Wir schreiben $x \le y$, wenn $x < y$ oder $x = y$ gilt. Die Ordnungsrelation ermöglicht es auch, Intervalle zu definieren. Mit (a, b) bezeichnen wir die Menge aller Dezimalzahlen, die zwischen a und b liegen, das heißt $(a, b) = \{x : a < x < b\}$. Man nennt (a, b) das offene Intervall mit Endpunkten a und b. Das abgeschlossene Intervall enthält auch die Endpunkte. Es wird mit $[a, b]$ bezeichnet. Es gilt $[a, b] = \{x : a \le x \le b\}$. Weiters definieren wir $[a, b) = \{x : a \le x < b\}$ und $(a, b] = \{x : a < x \le b\}$. Das sind halboffene Intervalle.

Man muss bei der Darstellung der Zahlen durch Dezimalzahlen allerdings ein bisschen aufpassen. Eine Dezimalzahl, bei der ab einer Stelle nur mehr 9 auftritt, fällt nämlich auf der Zahlengeraden immer mit der Dezimalzahl zusammen, die man erhält, wenn man die Neuner weglässt und die letzte Stelle vor den Neunern um 1 erhöht. Wir sehen uns dieses Problem genauer an. Seien x und y zwei Dezimalzahlen. Wir suchen die erste Dezimalstelle, an der sie sich unterscheiden. Sagen wir, es ist die zweite. Wenn sich die Ziffern an dieser Stelle um mehr als 1 unterscheiden, dann bestimmen x und y verschiedene Punkte auf der Zahlengeraden. Gilt zum Beispiel $x = 1.23\dots$ und $y = 1.25\dots$, dann liegt x in $[1.23, 1.24]$ und y in $[1.25, 1.26]$. Da diese beiden Intervalle keinen gemeinsamen Punkt haben, müssen x und y verschieden sein. Unterscheiden sich die Ziffern an dieser Stelle jedoch nur um 1, zum Beispiel $x = 1.23\dots$ und $y = 1.24\dots$, dann liegt x in $[1.23, 1.24]$ und y in $[1.24, 1.25]$. Diese beiden Intervalle haben genau einen Punkt gemeinsam, nämlich 1.24. Wenn also x und y denselben Punkt darstellen, dann kann das nur 1.24 sein. Durch y wird der Punkt 1.24 nur dann dargestellt, wenn alle weiteren Dezimalstellen 0, das heißt nicht vorhanden sind. Ist 9 die nächste Ziffer in x, also $x = 1.239\ldots$, dann liegt x in $[1.239, 1.24]$. Kommt dann noch eine 9, dann liegt x in $[1.2399, 1.24]$. Sind alle weiteren Ziffern von x gleich 9, also $x = 1.239999\ldots$, dann liegt x in den Intervallen $[1.2399\ldots 9, 1.24]$, sodass x ebenfalls den Punkt 1.24 auf der Zahlengeraden darstellt. Ist eine dieser weiteren Ziffern nicht 9, dann stellt x auch nicht den Punkt 1.24 dar.

Daraus sieht man, dass eine Dezimalzahl, bei der ab einer Stelle nur mehr 9 auftritt, auf der Zahlengeraden immer mit der Dezimalzahl zusammenfällt, die man erhält, wenn man die Neuner weglässt und die letzte Stelle vor den Neunern um 1 erhöht. Man sieht daraus auch, dass das die einzige Möglichkeit für das Zusammenfallen von zwei verschiedenen Dezimalzahlen auf der Zahlengeraden ist. Um zu erreichen, dass jeder Punkt auf der Zahlengeraden genau einer Dezimalzahl entspricht, verbieten wir Dezimalzahlen, bei denen ab einer Stelle nur mehr 9 auftritt. Sollte eine Zahl wie $1.239999\ldots$ vorkommen, zum Beispiel als Ergebnis einer Rechnung, dann denken wir sie uns automatisch durch die entsprechende endliche Dezimalzahl ersetzt. Für $1.239999\ldots$ ist das 1.24.

Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist die Menge aller Dezimalzahlen, wobei wir jetzt Dezimalzahlen, bei denen ab einer Stelle nur mehr 9 auftritt, nicht mehr zulassen. So entsprechen die reellen Zahlen in eindeutiger Weise den Punkten auf der Zahlengeraden.

Auf der Menge $\mathbb{R}$ müssen wir Addition und Multiplikation einführen. Dazu verwenden wir gerundete Dezimalzahlen. Ist x eine Dezimalzahl, dann bezeichnen wir mit x_n die auf n Stellen gerundete Zahl x. Die gerundete Zahl x_n ist eine Zahl mit n Dezimalstellen und wird so definiert, dass x im Intervall $[x_n - \frac{1}{2}\varepsilon_n, x_n + \frac{1}{2}\varepsilon_n)$ liegt, wobei $\varepsilon_n = 0.0\ldots 001$ der Abstand zweier Zahlen in der n-stelligen Dezimalskala ist.

Die Addition auf der n-stelligen Dezimalskala funktioniert genauso wie für ganze Zahlen. Will man zwei Dezimalzahlen x und y addieren, dann addiert man die gerundeten Zahlen x_n und y_n. Berücksichtigt man auch die Rundungsfehler, dann erhält man das Intervall $[x_n + y_n - \varepsilon_n, x_n + y_n + \varepsilon_n]$, in dem die Summe von x und y liegen muss. Die ersten n Stellen der Summe sind damit bestimmt, wobei jedoch die n-te Stelle auch um 1 größer oder kleiner sein kann.

Beispiel: Sei $x = 2.31745576\ldots$ und $y = 1.22253522\ldots$. Rundet man auf 5 Stellen, so erhält man $x_5 = 2.31746$ und $y_5 = 1.22254$. Es folgt $x_5 + y_5 = 3.54000$. Die Summe von x und y liegt daher in $[3.53999, 3.54001]$.

Durch Vergrößern von n kann man immer mehr Stellen der Summe bestimmen, sodass $x + y$ dadurch eindeutig definiert wird. Auf dieselbe Art erhält man auch die Differenz $x - y$. Das ist ja die Addition von $-y$, der Zahl mit geändertem Vorzeichen.

Man erkennt daraus auch die Gültigkeit des Kommutativgesetzes und des Assoziativgesetzes für die Addition. Da gerundete Zahlen genauso addiert werden wie ganze Zahlen, muss $x_n + y_n = y_n + x_n$ für alle n gelten. Wäre $x + y \neq y + x$, dann könnte man ein m finden, sodass sich $x + y$ und $y + x$ in der m-ten Dezimalstelle unterscheiden. Man kann nun n so groß wählen, dass $x + y$ und $x_n + y_n$ über die m-te Dezimalstelle hinaus übereinstimmen und dass dasselbe auch für $y + x$ und $y_n + x_n$ gilt. Wegen $x_n + y_n = y_n + x_n$ müssen dann $x + y$ und $y + x$ an der m-ten Dezimalstelle übereinstimmen. Dieser Widerspruch zeigt, dass $x + y = y + x$ gilt. Auf ähnliche Weise ergibt sich auch das Assoziativgesetz.

Es genügt, das Produkt für positive reelle Zahlen einzuführen. Das Produkt von zwei beliebigen reellen Zahlen x und y erhält man, indem man das Produkt ohne Vorzeichen berechnet und mit einem positiven Vorzeichen versieht, wenn x und y gleiches Vorzeichen haben, und mit einem negativen, wenn x und y verschiedenes Vorzeichen haben.

Seien x und y also positive reelle Zahlen. Die gerundeten Zahlen x_n und y_n multipliziert man unter Weglassen des Dezimalpunkts wie ganze Zahlen, wobei man im Produkt den Dezimalpunkt wieder richtig setzen muss. Ist C eine Zahl größer als $\frac{x+y+1}{2}$, dann liegt das Produkt der Zahlen x und y im Intervall $[x_n y_n - C\varepsilon_n, x_n y_n + C\varepsilon_n]$. Gibt man ein m vor, dann kann man immer ein n finden, sodass die ersten m Dezimalstellen von $x_n y_n$ bereits die des Produkts von x und y sind. Auf diese Weise lassen sich beliebig viele Dezimalstellen des Produkts bestimmen, sodass xy eindeutig definiert ist. Wie für die Addition folgen das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz auch für die Multiplikation, da die gerundeten Dezimalzahlen ja wie ganze Zahlen multipliziert werden und für diese daher Kommutativ- und Assoziativgesetz gelten. Ebenso erhält man das Distributivgesetz.

Beispiel: Sei $x = 2.3714524\ldots$ und $y = 0.02495735\ldots$. Rundet man auf 4 Stellen, so erhält man $x_4 = 2.3715$ und $y_4 = 0.0250$. Es folgt $x_4 y_4 = 0.0592875$. Man kann $C = 2$ wählen und erhält, dass xy im Intervall $[0.0590, 0.0595]$ liegt. Wir haben also 3 Dezimalstellen von xy bestimmt.

Um die Division einzuführen, genügt es den Kehrwert $\frac{1}{x}$ einer Zahl $x > 0$ zu behandeln. Wir erhalten $\frac{y}{x}$ dann als das Produkt $y \cdot \frac{1}{x}$. Sei also $x > 0$. Ist $x > 1$, dann setzen wir $k = 0$. Ansonsten sei die k-te Dezimalstelle die erste, an der x eine Ziffer $\neq 0$ hat. Für $n > k$ gilt dann, dass der Kehrwert von x im Intervall $[\frac{1}{x_n} - 10^{2k}\varepsilon_n, \frac{1}{x_n} + 10^{2k}\varepsilon_n]$ liegen muss. Man kann $\frac{1}{x_n}$ als Division zweier ganzer Zahlen berechnen. Dadurch erhält man die ersten $n - 2k$ Dezimalstellen des Kehrwerts von x. Da man n beliebig groß wählen kann, ist der Kehrwert eindeutig bestimmt.

Beispiel: Sei $x = 0.0273152\ldots$, sodass wir $x_5 = 0.02732$ erhalten. Es folgt $k = 2$ und $\frac{1}{x_5} = 36.60322\ldots$ durch Ausdividieren des Bruchs $\frac{100000}{2732}$. Wegen $10^{2k}\varepsilon_5 = 0.1$ liegt $\frac{1}{x}$ im Intervall $[36.5, 36.71]$.

Damit sind auf $\mathbb{R}$ alle vier Grundrechenarten eingeführt, wobei die üblichen Rechenregeln gelten. Mit den Rechenoperationen $+$ und $\cdot$ bildet $\mathbb{R}$ einen Körper.

2. Ordnung

Wir haben die Ordnungsrelation in $\mathbb{R}$ so definiert: Es gilt $a < b$, wenn a auf der Zahlengerade links von b liegt, das heißt, wenn $b - a$ positives Vorzeichen hat. Ebenso gilt $a \le b$, wenn $b - a$ positives Vorzeichen hat oder null ist. Wir schreiben das so auf

(A) $\quad a \le b \;\Leftrightarrow\; 0 \le b - a \quad$ und $\quad a < b \;\Leftrightarrow\; 0 < b - a$

Da Summe und Produkt zweier positiver Zahlen wieder positiv sind, haben wir auch

(B) $\quad a \ge 0,\, b \ge 0 \;\Rightarrow\; a + b \ge 0,\; ab \ge 0 \quad$ und $\quad a > 0,\, b > 0 \;\Rightarrow\; a + b > 0,\; ab > 0$

Aus diesen einfachen Eigenschaften lassen sich alle weitere Regeln für das Rechnen mit der Ordnungsrelation herleiten. Wir fassen sie in den folgenden beiden Sätzen zusammen.

Satz 1.1: *Für $a \in \mathbb{R}$ gilt $a^2 \ge 0$. Weiters gilt $a < 0 \Leftrightarrow 0 < -a$ und $a > 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{a} > 0$.*

Beweis: Wir erhalten $a < 0 \Leftrightarrow 0 < -a$ aus (A) mit $b = 0$. Gilt $a > 0$, dann folgt $a^2 > 0$, indem man $b = a$ in (B) setzt. Gilt $a < 0$, dann folgt $-a > 0$ und $(-a)^2 > 0$, das heißt $a^2 > 0$, mit Hilfe der beiden gerade gezeigten Aussagen. Somit gilt $a^2 > 0$ für alle $a \neq 0$.
Gilt jetzt $a > 0$, dann gilt auch $(\frac{1}{a})^2 > 0$, wie wir soeben gezeigt haben, und aus (B) folgt dann $a(\frac{1}{a})^2 > 0$, das heißt $\frac{1}{a} > 0$. Damit ist $a > 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{a} > 0$ gezeigt.
Gilt $a = 0$, dann gilt $a^2 = 0$, womit auch $a^2 \ge 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gezeigt ist. $\square$

Satz 1.2: *Seien a, b, c und d in $\mathbb{R}$. Dann gilt*
(a) $a \le b \;\Leftrightarrow\; a + c \le b + c$
(b) $a \le b \;\Leftrightarrow\; ac \le bc$, *wenn* $c > 0$
(c) $a \le b \;\Leftrightarrow\; ac \ge bc$, *wenn* $c < 0$
(d) $a \le b,\, b \le c \;\Rightarrow\; a \le c$
(e) $a \le b,\, c \le d \;\Rightarrow\; a + c \le b + d$
(f) $0 \le a \le b,\, 0 \le c \le d \;\Rightarrow\; ac \le bd$
(g) $a \le b \;\Leftrightarrow\; a^2 \le b^2$, *wenn* $a \ge 0$ *und* $b \ge 0$

Beweis: Es gilt $a \le b \;\Leftrightarrow 0 \le b - a$ und $a + c \le b + c \;\Leftrightarrow\; 0 \le b + c - (a + c)$ nach (A). Wegen $b - a = b + c - (a + c)$ ist damit bereits (a) gezeigt.

Wir zeigen (b). Aus $a \le b$ folgt $0 \le b - a$ nach (A) und daraus $0 \le bc - ac$ nach (B), da $c > 0$ vorausgesetzt wird, und daraus dann $ac \le bc$ wieder wegen (A). Somit ist $a \le b \;\Rightarrow\; ac \le bc$ gezeigt. Wegen $c > 0$ gilt auch $\frac{1}{c} > 0$ nach Satz 1.1. Aus der soeben gezeigten Implikation folgt dann $ac \le bc \;\Rightarrow\; ac\frac{1}{c} \le bc\frac{1}{c}$, das heißt $ac \le bc \;\Rightarrow\; a \le b$. Damit ist (b) vollständig bewiesen.

Wir erhalten (c) aus (b). Es gilt $c < 0$ und daher $0 < -c$ wegen Satz 1.1. Dann gilt $a \le b \;\Leftrightarrow\; a(-c) \le b(-c)$ nach (b) und $a(-c) \le b(-c) \;\Leftrightarrow\; a(-c) + d \le b(-c) + d$ nach (a). Setzt man das zusammen und $d = ac + bc$, dann hat man $a \le b \;\Leftrightarrow\; bc \le ac$.

Es gilt $a \le b,\, b \le c \;\Rightarrow\; 0 \le b - a,\, 0 \le c - b \;\Rightarrow\; 0 \le b - a + c - b = c - a \;\Rightarrow\; a \le c$, wobei wir zuerst (A), dann (B) und schließlich nochmals (A) anwenden. Damit ist (d) gezeigt.

Aus (a) und (d) folgt $a \le b,\, c \le d \;\Rightarrow\; a + c \le b + c,\, c + b \le d + b \;\Rightarrow\; a + c \le d + b$. Das beweist (e).

Aus (b) und (d) folgt $0 \le a \le b,\, 0 \le c \le d \;\Rightarrow\; ac \le bc,\, cb \le db \;\Rightarrow\; ac \le db$. Das ist (f). Für $c = 0$ gilt ja $ac \le bc$ trivialerweise, ebenso $cb \le db$ für $b = 0$.

Sei $c = b + a$. Gilt $a = b = 0$, dann ist (g) erfüllt. Ansonsten gilt $c = b > 0$ oder $c = a > 0$ oder $c = a + b > 0$. Im letzten Fall, das ist der mit $a > 0$ und $b > 0$, wenden wir (B) an. Wegen $c > 0$ erhalten wir $a \le b \;\Leftrightarrow\; 0 \le b - a \;\Leftrightarrow\; 0 \cdot c \le (b - a)c \;\Leftrightarrow\; 0 \le b^2 - a^2 \;\Leftrightarrow\; a^2 \le b^2$ mit Hilfe von (A) und von (b). Damit ist (g) gezeigt. □

Die Aussagen in Satz 1.2 gelten auch, wenn man $\le$ durch $<$ und $\ge$ durch $>$ ersetzt. Die Beweise lassen sich leicht entsprechend modifizieren.

In Satz 1.2 sind einige Äquivalenzumformungen von Ungleichungen enthalten, die man verwendet, um Ungleichungen zu beweisen oder die Lösungsmenge einer Ungleichung zu suchen. Wir geben ein Beispiel.

Beispiel: Wir zeigen, dass das harmonische Mittel kleiner oder gleich dem arithmetischen Mittel ist, also $\frac{2xy}{x+y} \le \frac{x+y}{2}$ für $x,\, y > 0$ gilt. Wir versuchen durch Äquivalenzumformungen eine Ungleichung zu erhalten, deren Richtigkeit klar ist:

$$\begin{aligned} \tfrac{2xy}{x+y} &\le \tfrac{x+y}{2} && \mid \cdot (x+y) \\ 2xy &\le \tfrac{x^2+2xy+y^2}{2} && \mid \cdot 2 \\ 4xy &\le x^2 + 2xy + y^2 && \mid -4xy \\ 0 &\le x^2 - 2xy + y^2 && \\ 0 &\le (x-y)^2 && \end{aligned}$$

Diese letzte Ungleichung ist richtig, da quadrierte Zahlen nach Satz 1.1 immer ≥ 0 sind. Da die erste Ungleichung dazu äquivalent ist, haben wir diese bewiesen.

Der Betrag $|x|$ einer reellen Zahl x ist die Zahl ohne Vorzeichen, das heißt $|x| = x$ für $x \geq 0$, und $|x| = -x$ für $x < 0$. Es gilt $|-x| = |x|$. Der Abstand zweier Zahlen x und y auf der Zahlengeraden ist durch $|x - y|$ gegeben. Wir werden ihn bei der Definition des Grenzwerts verwenden. Der folgende Satz gibt die Eigenschaften des Betrages an.

Satz 1.3: *Seien x und y in $\mathbb{R}$. Dann gilt*
(a) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung)
(b) $|x| \cdot |y| = |xy|$

Beweis: Es gilt $x \leq |x|$ und $-x \leq |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$, da $x = |x|$ und $-x \leq 0 \leq |x|$ im Fall $x \geq 0$ gilt, und $x \leq 0 \leq |x|$ und $-x = |x|$ im Fall $x < 0$.

Seien jetzt x und y in $\mathbb{R}$. Dann gilt $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$, wie soeben gezeigt wurde, also auch $x + y \leq |x| + |y|$ nach Satz 1.2 (e). Ebenso gilt $-x \leq |x|$ und $-y \leq |y|$ und damit auch $-x - y \leq |x| + |y|$ wieder wegen Satz 1.2 (e). Da $|x + y|$ entweder gleich $x + y$ oder gleich $-x - y$ ist, ist $|x + y| \leq |x| + |y|$ gezeigt. Das ist (a).

Da das Produkt xy ohne Berücksichtigung des Vorzeichens berechnet und dieses erst danach gesetzt wird, ist $|xy|$ das Produkt der vorzeichenlosen Zahlen, also $|x| \cdot |y|$. $\square$

Wir führen noch die Begriffe Maximum und Minimum ein. Unter dem Maximum von endlich vielen reellen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ versteht man die größte dieser Zahlen. Man bezeichnet sie mit $\max(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Unter dem Minimum dieser Zahlen versteht man die kleinste dieser Zahlen. Man bezeichnet sie mit $\min(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

3. Intervallschachtelungseigenschaft

Nachdem wir die Rechenoperationen und die Ordnungsrelation behandelt haben, kommen wir jetzt zur sogenannten Intervallschachtelungseigenschaft der reellen Zahlen.

Als Intervallschachtelung bezeichnet man eine Folge von abgeschlossenen Intervallen, sodass das nächstfolgende Intervall immer im vorhergehenden enthalten ist. Es liegen also Intervalle $[a_n, b_n]$ für $n \geq 1$ vor, für die $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq [a_4, b_4] \supseteq \ldots$ gilt. Die Anordnung der Endpunkte ist durch $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq \cdots < \cdots \leq b_4 \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$ gegeben. Wir nehmen an, dass alle Dezimalzahlen unendlich viele Dezimalstellen haben, indem wir bei Dezimalzahlen mit endlich vielen Dezimalstellen mit Nullen fortsetzen.

Satz 1.4 (Intervallschachtelungseigenschaft) *Für $n \geq 1$ seien $[a_n, b_n]$ Intervalle, sodass $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ gilt. Dann gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in [a_n, b_n]$ für alle $n \geq 1$.*

Beweis: Wir nehmen zuerst an, dass $a_u > 0$ für ein $u \geq 1$ gilt.

Sei g_n der ganzzahlige Teil der Dezimalzahl b_n. Wegen $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots > a_u > 0$ erhalten wir $g_1 \geq g_2 \geq g_3 \geq \cdots \geq 0$. Da die Zahlen g_n aber ganze Zahlen sind, ist die jeweils nächste Zahl entweder gleich der vorherigen Zahl oder um mindestens eins kleiner als die vorherige Zahl. Daher kann es nur endlich oft vorkommen, dass die nächste Zahl kleiner als die vorherige ist, sonst würden diese Zahlen ja irgendwann kleiner als 0 werden. Es müssen ein $g \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und ein n_0 existieren, sodass $g_n = g$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Jetzt zu den Dezimalstellen. Für $k \geq 1$ sei $d_{n,k}$ die k-te Dezimalstelle von b_n. Wir beginnen mit der ersten Dezimalstelle, also mit $k = 1$. Es gilt $b_{n_0} \geq b_{n_0+1} \geq b_{n_0+2} \geq \cdots > 0$ und der ganzzahlige Teil dieser Zahlen ist derselbe. Für die erste Dezimalstelle gilt daher $d_{n_0,1} \geq d_{n_0+1,1} \geq d_{n_0+2,1} \geq \ldots$. Weiters liegen die Ziffern $d_{n,1}$ für $n \geq n_0$ in der Menge $\{0, 1, \ldots, 9\}$, sodass ab einer gewissen Stelle dieselbe Ziffer auftreten muss. Es gibt somit eine Ziffer d_1 und ein $n_1 \geq n_0$ mit $d_{n,1} = d_1$ für alle $n \geq n_1$.

So behandeln wir auch die Dezimalstellen $d_{n,k}$ mit $k \geq 2$. Da der ganzzahlige Teil und die erste Dezimalstelle für $n \geq n_1$ unverändert bleiben, gilt $d_{n_1,2} \geq d_{n_1+1,2} \geq d_{n_1+2,2} \geq \dots$, und man findet wie oben ein $n_2 \geq n_1$ und eine Ziffer d_2 mit $d_{n,2} = d_2$ für alle $n \geq n_2$. Im k-ten Schritt findet man ein $n_k \geq n_{k-1}$ und eine Ziffer d_k mit $d_{n,k} = d_k$ für alle $n \geq n_k$. Sei $x = g.d_1d_2d_3\dots$, die aus den gefundenen Ziffern gebildete Dezimalzahl. Man kann sich auch überlegen, dass kein m existiert mit $d_k = 9$ für alle $k \geq m$. Wegen $g \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt $x \geq 0$. Wir geben ein Beispiel für diese Konstruktion.

b_1	=	5	.	7	4	2	4	5	4	8	3	5	7	4	8	...
b_2	=	4	.	2	5	3	8	5	2	2	1	4	7	4	3	...
b_3	=	3	.	9	9	3	5	8	2	0	3	1	9	3	5	...
b_4	=	3	.	8	2	4	6	2	8	3	7	0	2	3	1	...
b_5	=	3	.	7	8	2	6	9	3	4	0	2	4	0	7	...
b_6	=	3	.	7	6	4	7	8	4	9	5	3	2	2	0	...
b_7	=	3	.	7	6	3	5	6	3	2	1	7	3	9	5	...
b_8	=	3	.	7	6	1	8	6	3	2	9	1	4	3	9	...
b_9	=	3	.	7	6	1	6	8	3	4	7	9	3	3	1	...
b_{10}	=	3	.	7	6	1	6	3	1	7	3	6	1	2	6	...
b_{11}	=	3	.	7	6	1	5	9	4	1	4	7	3	1	4	...
b_{12}	=	3	.	7	6	1	5	6	7	3	6	4	9	8	7	...
b_{13}	=	3	.	7	6	1	5	4	9	9	9	4	2	7	4	...
b_{14}	=	3	.	7	6	1	5	4	9	9	8	2	1	4	9	...
b_{15}	=	3	.	7	6	1	5	4	9	9	8	1	7	4	8	...
b_{16}	=	3	.	7	6	1	5	4	9	9	7	9	2	2	0	...
b_{17}	=	3	.	7	6	1	5	4	9	9	7	8	8	0	7	...
b_{18}	=	3	.	7	6	1	5	4	9	9	7	8	2	3	1	...
b_{19}	=	3	.	7	6	1	5	4	9	9	7	6	9	9	5	...
b_{20}	=	3	.	7	6	1	5	4	9	9	7	6	6	7	4	...
		$\downarrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$				
x	=	3	.	7	6	1	5	4	9	9	7	6	...	...	...	

Es bleibt zu zeigen, dass die so gewonnene reelle Zahl x in allen Intervallen $[a_n, b_n]$ liegt. Wir zeigen zuerst $b_n \geq x$ für alle n. Angenommen, es gibt ein k mit $b_k < x$. Da mit wachsendem m die Dezimalzahlen b_m ein immer größeres Anfangsstück mit der Dezimalzahl x gemeinsam haben, findet man ein $m > k$, sodass b_m mehr Dezimalstellen mit x gemeinsam hat als b_k und somit näher bei x liegt als b_k. Daraus folgt $b_k < b_m$, ein Widerspruch, da ja $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_k \geq \dots \geq b_m \geq \dots$ gilt. Damit ist $b_n \geq x$ für alle n gezeigt.

Ebenso gilt $a_n \leq x$ für alle n. Angenommen, es gibt ein k mit $a_k > x$. Da mit wachsendem m die Dezimalzahlen b_m ein immer größeres Anfangsstück mit der Dezimalzahl x gemeinsam haben, findet man wie oben ein m, sodass b_m näher bei x liegt als a_k. Daraus folgt $a_k > b_m$, ein Widerspruch, da die linken Endpunkte aller Intervalle kleiner sind als die rechten Endpunkte aller Intervalle. Damit ist $a_n \leq x$ für alle n gezeigt.

Was tun wir, wenn die eingangs gestellte Bedingung, dass $a_u > 0$ für ein $u \geq 1$ gilt, nicht erfüllt ist? Es gilt dann $a_n \leq 0$ für alle $n \geq 1$. Gilt $b_n \geq 0$ für alle n, dann liegt 0 in allen Intervallen und wir sind fertig. Ansonsten finden wir ein $v \geq 1$, sodass $b_v < 0$ gilt. In diesem Fall untersuchen wir die Folge $[-b_n, -a_n]$ mit $n \geq 1$. Wegen $-b_v > 0$ ist ja die zu Beginn gestellte Bedingung erfüllt. Wie oben finden wir eine relle Zahl y, die in allen Intervallen $[-b_n, -a_n]$ liegt. Die Zahl $x = -y$ liegt dann in allen Intervallen $[a_n, b_n]$. □

Dieser Satz besagt, dass es für jede Folge von abgeschlossenen Intervallen, die ineinandergeschachtelt sind, mindestens eine Zahl gibt, die in allen Intervallen enthalten ist. Wir können auch eine Aussage über die Eindeutigkeit machen. Sei $l_n = b_n - a_n$ die Länge des n-ten Intervalls. Es gilt $l_1 \geq l_2 \geq l_3 \geq \dots$, da die Intervalle ineinandergeschachtelt sind. Gibt es nun zwei verschiedene Zahlen x und y, die in allen Intervallen enthalten sind, und ist $\varepsilon = |x - y| > 0$ der Abstand der beiden Zahlen, dann gilt $l_n \geq \varepsilon$ für alle $n \geq 0$. Wenn also keine Zahl $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $l_n \geq \varepsilon$ für alle n gilt, dann gibt es genau eine Zahl, die in allen Intervallen liegt.

Oft kommt es vor, dass $l_n \leq \frac{1}{2} l_{n-1}$ für alle n gilt. In diesem Fall gibt es genau eine Zahl, die in allen Intervallen liegt. Würde ein $\varepsilon > 0$ existieren, sodass $\varepsilon \leq l_n$ für alle n gilt, dann würde $\varepsilon \leq \frac{l_1}{2^{n-1}}$ und daraus $2^n \leq \frac{2l_1}{\varepsilon}$ für alle n folgen. Ein Blick auf die Zahlengerade zeigt aber, dass die Zahlen $1, 2, 4, 8, \dots$ jede reelle Zahl überschreiten, sodass ein n mit $2^n > \frac{2l_1}{\varepsilon}$ existiert. Daher gibt es kein $\varepsilon > 0$, sodass $\varepsilon \leq l_n$ für alle n gilt.

Als Anwendung der Intervallschachtelung zeigen wir, dass man aus einer positiven reellen Zahl die Wurzel ziehen kann und dadurch wieder eine positive reelle Zahl enthält.

Beispiel: Sei $x > 0$. Wir bilden Intervalle $[a_n, b_n]$ mit $0 < a_n < b_n$ und $a_n b_n = x$.
Wir wählen a_1 und b_1 beliebig, sodass $0 < a_1 < b_1$ und $a_1 b_1 = x$ gelten, zum Beispiel $a_1 = 1$ und $b_1 = x$ für $x > 1$ und $a_1 = x$ und $b_1 = 1$ für $x < 1$. Haben wir $[a_n, b_n]$ mit $0 < a_n < b_n$ und $a_n b_n = x$ schon bestimmt, dann setzen wir

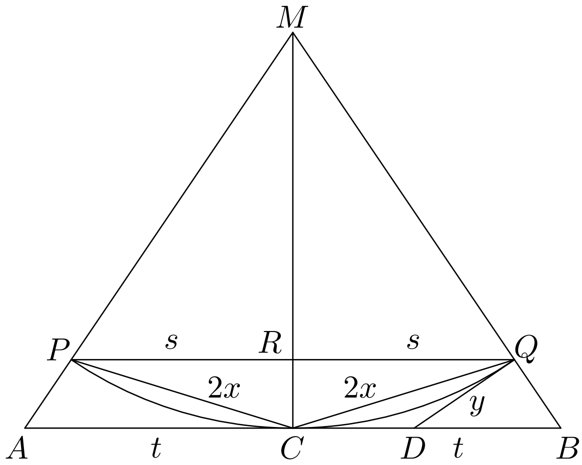
$$b_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + b_n) \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \tfrac{x}{b_{n+1}}$$

sodass wieder $a_{n+1} b_{n+1} = x$ gilt. Da b_{n+1} der Mittelpunkt des Intervalls $[a_n, b_n]$ ist, folgt $0 < a_n < b_{n+1} < b_n$ und $a_{n+1} = \frac{x}{b_{n+1}} > \frac{x}{b_n} = a_n > 0$ mit Satz 1.2 (b). Weiters gilt

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \tfrac{b_{n+1}^2 - x}{b_{n+1}} = \tfrac{(a_n + b_n)^2 - 4a_n b_n}{4b_{n+1}} = \tfrac{1}{4b_{n+1}}(b_n - a_n)^2$$

Wegen $a_n < b_n$ folgt daraus auch $a_{n+1} < b_{n+1}$. Somit ist $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ ein Intervall, das in $[a_n, b_n]$ enthalten ist. Da b_{n+1} der Mittelpunkt von $[a_n, b_n]$ ist, ist das nächste Intervall höchstens halb so lang wie das vorhergehende. Es gibt somit genau eine reelle Zahl y, die in allen Intervallen enthalten ist. Mit Satz 1.2 (g) folgt $a_n^2 \leq y^2 \leq b_n^2$ für alle $n \geq 1$. Mit Satz 1.2 (b) folgt $a_n^2 \leq a_n b_n \leq b_n^2$ und wegen $a_n b_n = x$ erhalten wir auch $a_n^2 \leq x \leq b_n^2$ für alle $n \geq 1$. Da auch $b_n^2 - a_n^2 = (b_n + a_n)(b_n - a_n) \leq 2b_1(b_n - a_n)$ für alle $n \geq 1$ gilt, existiert kein $\varepsilon > 0$ mit $b_n^2 - a_n^2 \geq \varepsilon$ für alle n. Daher gibt es nur eine Zahl, die in allen Intervallen $[a_n^2, b_n^2]$ liegt. Damit ist $y^2 = x$ gezeigt, das heißt y ist die Wurzel aus x.
Für $x = 2$ sind $[1, 2] \supseteq [1.3333, 1.5000] \supseteq [1.4118, 1.4167] \supseteq [1.414211, 1.414216] \supseteq \dots$ die ersten Intervalle. Man sieht, dass sie sehr schnell kleiner werden.

Als weiteres Beispiel bestimmen wir die Zahl π, die Fläche des Kreises mit Radius 1. Wir schachteln die Kreisfläche durch Flächen von regelmäßigen Vielecken ein. Diese Methode geht auf Archimedes zurück. Man kann damit π auf eine bestimmte Anzahl von Dezimalstellen berechnen. (Dabei bezeichnen wir mit $\overline{UV}$ die Strecke und mit $|UV|$ den Abstand zwischen den Punkten U und V.)



Beispiel: Wir bestimmen die Fläche des Kreises mit Radius $r = 1$ durch Approximation mit regelmäßigen Vielecken. Seien s und t die halben Seitenlängen des ein- und umgeschriebenen regelmäßigen k-Ecks. Seien x und y die halben Seitenlängen des ein- und umgeschriebenen regelmäßigen $2k$-Ecks. In der nebenstehenden Zeichnung sind $\overline{PQ}$ und $\overline{AB}$ Seiten des ein- und umgeschriebenen regelmäßigen k-Ecks, $\overline{PC}$ und $\overline{CQ}$ sind Seiten des eingeschriebenen regelmäßigen $2k$-Ecks und $\overline{CD}$ und $\overline{DQ}$ sind halbe Seiten des umgeschriebenen regelmäßigen $2k$-Ecks. Aus der Ähnlichkeit der beiden rechtwinkeligen Dreiecke BQD und BCM folgt $|DQ| : |DB| = |MC| : |MB|$. Aus dem Strahlensatz folgt $|MQ| : |MB| = |RQ| : |CB|$. Wegen $|MC| = r = |MQ|$ folgt $|DQ| : |DB| = |RQ| : |CB|$. Setzt man die Seitenlängen ein, so ergibt sich $\frac{y}{t-y} = \frac{s}{t}$. Daraus folgt $y = \frac{ts}{t+s}$. Aus der Ähnlichkeit der beiden gleichschenkeligen Dreiecke PCQ und CDQ folgt $\frac{2x}{2s} = \frac{y}{2x}$, das heißt $x = \sqrt{\frac{sy}{2}}$. Sei F_m die Fläche des umgeschriebenen m-Ecks und f_m die Fläche des eingeschriebenen m-Ecks. Ist u die halbe Seitenlänge des umgeschriebenen m-Ecks, dann gilt $F_m = mur = mu$, also $F_k = kt$ und $F_{2k} = 2ky$. Ist v die halbe Seitenlänge des eingeschriebenen m-Ecks, dann ist r die Grundlinie und v die Höhe in den Dreiecken, aus denen das regelmäßigen $2m$-Eck besteht. Daher gilt $f_{2m} = 2m\frac{1}{2}rv = mv$, also $f_{2k} = ks$ und $f_{4k} = 2kx$. Wir erhalten die Rekursionsformeln

$$F_{2k} = 2ky = \tfrac{2kts}{t+s} = \tfrac{2F_k f_{2k}}{F_k + f_{2k}} \quad \text{und} \quad f_{4k} = 2kx = k\sqrt{2sy} = \sqrt{f_{2k}F_{2k}}$$

Für $n \geq 1$ sei $a_n = f_{2^{n+1}}$ und $b_n = F_{2^{n+1}}$. Die Intervalle $[a_n, b_n]$ enthalten dann π, die Fläche des Kreises mit Radius 1. Da das regelmäßige eingeschriebene 2^{n+1}-Eck im regelmäßigen eingeschriebenen 2^{n+2}-Eck enthalten ist, ergibt sich $a_n < a_{n+1}$. Da das regelmäßige umgeschriebene 2^{n+1}-Eck das regelmäßige umgeschriebene 2^{n+2}-Eck enthält, ergibt sich $b_n > b_{n+1}$. Daher bilden die Intervalle $[a_n, b_n]$ mit $n \geq 1$ eine Intervallschachtelung.

Die Fläche des eingeschriebenen regelmäßigen Vierecks ist 2. Somit gilt $a_1 = 2$. Die Fläche des umgeschriebenen regelmäßigen Vierecks ist 4. Somit gilt $b_1 = 4$. Mit Hilfe der obigen Rekursionsformeln kann man weitere Intervalle berechnen

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{und} \quad b_{n+1} = \tfrac{2b_n a_{n+1}}{b_n + a_{n+1}}$$

Da das harmonische kleiner oder gleich dem arthmetischen Mittel ist, ist $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ in der linken Hälfte des Intervalls $[a_{n+1}, b_n]$ enthalten. Daher ist $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ höchstens halb so lang wie $[a_n, b_n]$. Es gibt eine eindeutig bestimmte reelle Zahl, die in allen Intervallen liegt. Das muss die Fläche des Kreises mit Radius 1 sein.

Die ersten Intervalle sind $[2, 4] \supseteq [2.8284, 3.3137] \supseteq [3.0615, 3.1826] \supseteq [3.1214, 3.1517] \supseteq [3.1365, 3.1441] \supseteq [3.1403, 3.1422] \supseteq [3.1413, 3.1418] \supseteq [3.1415, 3.1416] \supseteq \dots$, sodass man neun Intervalle benötigt, um π auf vier Dezimalstellen genau zu erhalten.

Genauso kann man einen Kreis mit Radius $r \neq 1$ behandeln. Die Überlegungen sind genau dieselben. Man erhält dieselbe Intervallschachtelung, nur dass die Endpunkte aller Intervalle mit r^2 multipliziert sind. Somit gibt es wieder genau eine reelle Zahl, die in allen Intervallen liegt, und diese Zahl ist $r^2\pi$. Das ist die Fläche des Kreises mit Radius r.

4. Folgen und deren Grenzwerte

Folgen und Grenzwerte spielen eine zentrale Rolle in der Analysis. Eine Folge von reellen Zahlen kann man sich als zeitlichen Ablauf vorstellen. Zum Zeitpunkt 0 ist man im Punkt a_0, zum Zeitpunkt 1 ist man im Punkt a_1, zum Zeitpunkt 2 ist man im Punkt a_2, und so weiter. Es wird die Folge $a_0, a_1, a_2, \dots$ von reellen Zahlen durchlaufen. Man schreibt eine Folge auch in der Form $(a_n)_{n\geq 0}$ auf. Oft beginnt man die Zeitpunkte mit 1 zu zählen, hat also die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$. Die reellen Zahlen $a_0, a_1, a_2, \dots$ heißen Glieder der Folge.

Folgen können verschiedenes Verhalten zeigen. Die durch $a_n = n$ mit $n \geq 1$ definierte Folge durchläuft die natürlichen Zahlen. Sie wird also nach ∞ entschwinden. Die durch $a_n = \frac{1}{n}$ mit $n \geq 1$ definierte Folge hingegen nähert sich mit fortschreitendem n immer mehr der Zahl 0. Es ist naheliegend, die Zahl $a = 0$ als Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ zu bezeichnen. Die Folge $a_n = (-1)^n \frac{1}{n^2}$ mit $n \geq 1$ zeigt alternierendes Verhalten. Zu geraden Zeitpunkten n ist a_n rechts von 0. Zu ungeraden Zeitpunkten n ist a_n links von 0. Mit fortschreitendem n nähert sich auch diese Folge immer mehr der Zahl 0. Daher hat sie ebenfalls den Grenzwert $a = 0$.

Um den Grenzwert einer Folge zu definieren, muss man zuerst Umgebungen einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ einführen. Als ε-Umgebung der Zahl a wird das offene Intervall $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ bezeichnet, wobei ε größer als 0 ist. Ist a eine reelle Zahl und existiert zu jeder ε-Umgebung von a, wie klein ε auch sein mag, ein Zeitpunkt, ab dem die Glieder der Folge in dieser Umgebung liegen, dann wird man a als Grenzwert der Folge bezeichnen. In eine mathematische Sprahe übersetzt, ergibt das folgende Definition.

Definition: Man nennt $a \in \mathbb{R}$ Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, sodass $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Man schreibt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. (Statt $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ schreibt man oft auch $|a_n - a| < \varepsilon$, das bedeutet ja dasselbe.)

Folgen, die einen Grenzwert haben, nennt man konvergent. Alle anderen Folgen heißen divergent. Außerdem ist der Grenzwert einer Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, falls er existiert, eindeutig bestimmt. Sind a und b zwei verschiedene Zahlen in $\mathbb{R}$, dann findet man ein $\varepsilon > 0$, zum Beispiel $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$, sodass die offenen Intervalle $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ und $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ keinen gemeinsamen Punkt haben. Ist a Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, dann gibt es ein n_0, sodass $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Dann gilt aber $a_n \notin (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ für alle $n \geq n_0$ und b kann nicht Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ sein.

Beispiele: Sei $a_n = \frac{1}{n}$ für $n \geq 1$. Wir zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ gilt, indem wir die Definition des Grenzwertes nachprüfen. Dazu sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Für $n \geq n_0$ gilt dann $|a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Gilt $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ für $n \geq 1$, dann folgt $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ wie oben, indem wir $n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$ wählen.

Sei $c_n = (-1)^n$ für $n \geq 0$. Diese Folge ist nicht konvergent. Angenommen sie hätte den Grenzwert a. Für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ müsste es dann ein n_0 geben mit $a_n \in (a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$ für $n \geq n_0$. Daraus würde $|a_{n_0} - a_{n_0+1}| < 1$ folgen, ein Widerspruch dazu, dass eine der Zahlen a_{n_0} und a_{n_0+1} gleich 1 und die andere gleich -1 ist. Somit hat diese Folge keinen Grenzwert.

Um Rechenregeln für Grenzwerte herzuleiten, benötigen wir folgenden Satz.

Satz 1.5: *Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge, für die der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ existiert. Dann gibt es ein $C > 0$, sodass $|a_n| \leq C$ für alle $n \geq 0$ gilt. Ist $a \neq 0$, dann existiert ein $c > 0$ und ein m_0, sodass $|a_n| \geq c$ für alle $n \geq m_0$ gilt.*

Beweis: Sei $\varepsilon = 1$ vorgegeben. Aus der Definition des Grenzwerts erhalten wir, dass ein n_0 existiert mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung folgt dann $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < \varepsilon + |a|$ für alle $n \geq n_0$. Wählt man für C die größte der Zahlen $\varepsilon + |a|, |a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n_0-1}|$, dann ist $|a_n| \leq C$ für alle $n \geq 0$ erfüllt.

Für die zweite Aussage wird $a \neq 0$ vorausgesetzt. Wir wählen $\varepsilon = \frac{|a|}{2} > 0$. Es existiert ein m_0, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq m_0$ gilt. Sei $c = \frac{|a|}{2} > 0$. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung erhalten wir $|a| = |a - a_n + a_n| \leq |a - a_n| + |a_n|$. Für $n \geq m_0$ ergibt sich $|a_n| \geq |a| - |a - a_n| > |a| - \varepsilon = |a| - \frac{|a|}{2} = c$, womit die zweite Aussage gezeigt ist. □

Satz 1.6 (Rechenregeln für Grenzwerte) *Seien $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ Folgen, für die die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ existieren.*
(a) *Gilt $m_0 \geq 0$ und $a_n \leq b_n$ für $n \geq m_0$, dann gilt auch $a \leq b$.*
(b) *Es gilt $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.*
(c) *Es gilt $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$.*
(d) *Gilt $b \neq 0$ und $b_n \neq 0$ für alle n, dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.*

Beweis: Wir zeigen (a) durch einen indirekten Beweis. Wir nehmen daher an, dass $a > b$ gilt. Sei $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$. Wegen $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ finden wir ein n_0 und ein n_1, sodass $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ und $b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon$ für alle $n \geq n_1$ gilt. Für $n \geq \max(n_0, n_1)$ erhalten wir dann, dass $a_n > a - \varepsilon = b + \varepsilon > b_n$ gilt. Das widerspricht aber der Voraussetzung, dass $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq m_0$ gilt. Dieser Widerspruch zeigt, dass $a > b$ nicht gelten kann. Damit ist (a) bewiesen.

Um (b) zu zeigen, prüfen wir die Definition des Grenzwerts nach. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir müssen ein n_0 finden, sodass $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Wegen $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ finden wir ein n_1 und ein n_2, sodass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_1$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_2$ gilt. Sei $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Für $n \geq n_0$ folgt

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

mit Hilfe der Dreiecksungleichung. Damit ist die Grenzwertdefinition nachgeprüft und (b) ist gezeigt.

Zum Beweis von (c) verwenden wir Satz 1.5. Es existiert ein $C > 0$, sodass $|b_n| \leq C$ für alle n gilt. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wegen $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ finden wir ein n_1 und ein n_2, sodass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{C+|a|}$ für alle $n \geq n_1$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{C+|a|}$ für alle $n \geq n_2$ gilt. Sei $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Für $n \geq n_0$ erhalten wir mit Hilfe von Satz 1.3

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |(a_n - a)b_n| + |a(b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a|C + |a||b_n - b| < \tfrac{\varepsilon}{C+|a|}C + |a|\tfrac{\varepsilon}{C+|a|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist die Grenzwertdefinition nachgeprüft und (c) ist gezeigt.

Um (d) zu zeigen, wählen wir zuerst ein m_0 und ein $c > 0$, sodass $|b_n| \geq c$ für alle $n \geq m_0$ gilt, was wegen Satz 1.5 möglich ist. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wegen $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ finden wir ein n_1 und ein n_2, sodass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon|b|c}{|a|+|b|}$ für alle $n \geq n_1$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon|b|c}{|a|+|b|}$ für alle $n \geq n_2$ gilt. Wir setzen $n_0 = \max(m_0, n_1, n_2)$. Für $n \geq n_0$ erhalten wir dann mit Hilfe von Satz 1.3

$$\begin{aligned} |\tfrac{a_n}{b_n} - \tfrac{a}{b}| &= |\tfrac{a_n}{b_n} - \tfrac{a}{b_n} + \tfrac{a}{b_n} - \tfrac{a}{b}| \leq |\tfrac{a_n}{b_n} - \tfrac{a}{b_n}| + |\tfrac{a}{b_n} - \tfrac{a}{b}| = \tfrac{1}{|b_n|} \cdot |a_n - a| + \tfrac{|a|}{|b||b_n|} \cdot |b - b_n| \\ &\leq \tfrac{1}{c} \cdot |a_n - a| + \tfrac{|a|}{|b|c} \cdot |b_n - b| < \tfrac{1}{c} \cdot \tfrac{\varepsilon|b|c}{|a|+|b|} + \tfrac{|a|}{|b|c} \cdot \tfrac{\varepsilon|b|c}{|a|+|b|} = \varepsilon \end{aligned}$$

Damit ist die Grenzwertdefinition nachgeprüft und (d) ist gezeigt. □

Auf einen Spezialfall dieser Rechenregeln sei noch hingewiesen. Ist die Folge $(b_n)_{n\geq 0}$ konstant, also $b_n = d$ für alle n, dann gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = d$, wie man leicht aus der Definition des Grenzwertes erkennt. Ist $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge, für die $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ gilt, dann erhalten wir $\lim_{n\to\infty}(d + a_n) = d + \lim_{n\to\infty} a_n$ und $\lim_{n\to\infty} da_n = d \lim_{n\to\infty} a_n$ aus Satz 1.6.

Mit diesen Rechenregeln ist es möglich, das Berechnen vieler Grenzwerte auf einfache Fälle, wie $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ zurückzuführen.

Beispiel: Wir berechnen den Grenzwert der Folge $a_n = \frac{2n^2-5n}{3n^2+4}$ für $n \to \infty$. Dazu dividieren wir Zähler und Nenner durch die höchste vorkommende Potenz, das ist in diesem Fall n^2, und erhalten $a_n = \frac{2-\frac{5}{n}}{3+\frac{4}{n^2}}$. Wegen Satz 1.6 (d) können wir den Grenzwert von Zähler und Nenner getrennt berechnen. Durch Anwenden von Satz 1.6 (b) erhalten wir $\lim_{n\to\infty}(2-\frac{5}{n}) = 2-5\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 2$ und $\lim_{n\to\infty} 3+\frac{4}{n^2} = 3+4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 3$ folgt wegen Satz 1.6 (b) und (c). Damit haben wir $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$ berechnet.

Der folgende Satz wird ebenfalls häufig zum Berechnen eines Grenzwerts verwendet.

Satz 1.7: *Es seien $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ und $(x_n)_{n\geq 0}$ Folgen. Existieren die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} a_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n$ und sind beide gleich a und gibt es außerdem ein m_0 mit $a_n \leq x_n \leq b_n$ für alle $n \geq m_0$, dann existiert auch $\lim_{n\to\infty} x_n$ und ist ebenfalls gleich a.*

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir finden ein n_1 mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_1$ und ein n_2 mit $|b_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_2$. Sei $n_0 = \max(m_0, n_1, n_2)$. Für $n \geq n_0$ gilt $a_n \leq x_n \leq b_n$ und a_n und b_n liegen in der ε-Umgebung von a. Da dann auch jeder Punkt, der zwischen a_n und b_n liegt, in der ε-Umgebung von a liegen muss, erhalten wir $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ für alle $n \geq n_0$. Damit ist $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gezeigt. □

Beispiel: Sei $x_n = \sqrt{n+2\sqrt{n}} - \sqrt{n}$. Wir berechnen $\lim_{n\to\infty} x_n$ mittels Satz 1.7. Es gilt

$$\begin{aligned} 1 - \tfrac{1}{2\sqrt{n}} \leq x_n \leq 1 \ &\Leftrightarrow\ \sqrt{n} + 1 - \tfrac{1}{2\sqrt{n}} \leq \sqrt{n+2\sqrt{n}} \leq \sqrt{n} + 1 \\ &\Leftrightarrow\ n + 2\sqrt{n} - \tfrac{1}{\sqrt{n}} + \tfrac{1}{4n} \leq n + 2\sqrt{n} \leq n + 2\sqrt{n} + 1 \end{aligned}$$

Die letzte Aussage ist leicht als richtig erkennbar, daher haben wir $a_n \leq x_n \leq b_n$ für alle $n \geq 1$ gezeigt mit $a_n = 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}$ und $b_n = 1$. Wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ aus Satz 1.6. Klarerweise gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$. Aus Satz 1.7 folgt daher $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

Es folgt ein weiterer Satz, der ebenfalls die Existenz eines Grenzwerts zum Inhalt hat. Dazu sind einige Definitionen notwendig. Eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ heißt monoton wachsend, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \geq 0$ gilt. Eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ heißt monoton fallend, wenn $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \geq 0$ gilt. Eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ heißt nach oben beschränkt mit oberer Schranke c, wenn $a_n \leq c$ für alle $n \geq 0$ gilt. Eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ heißt nach unten beschränkt mit unterer Schranke d, wenn $a_n \geq d$ für alle $n \geq 0$ gilt. Der erste Teil von Satz 1.5 besagt, dass eine konvergente Folge sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

Satz 1.8 (Satz über die Konvergenz monotoner Folgen) *Eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge hat einen Grenzwert. Eine monoton fallende, nach unten beschränkte Folge hat einen Grenzwert.*

Der Beweis von Satz 1.8 verwendet die Intervallschachtelungseigenschaft der reellen Zahlen. Beweise, die die Intervallschachtelungseigenschaft verwenden, sind in einem späteren Kapitel zusammengestellt. Dort findet man unter anderem auch den Beweis von Satz 1.8.

Im folgenden Beispiel werden rekursiv definierte Folgen (jedes Folgenglied wird aus den vorhergehenden berechnet) mit Hilfe von Satz 1.8 untersucht.

Beispiel: Sei $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{a_n^3+1}{3}$ für $n \geq 0$. Wir zeigen, dass die so definierte Folge monoton fallend ist und $\frac{1}{3}$ als untere Schranke hat.

Es gilt $a_1 = \frac{2}{3} \leq a_0$. Angenommen, wir haben $a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_{n-1} \geq a_n \geq \frac{1}{3}$ schon gezeigt. Dann folgt $a_{n+1} = \frac{a_n^3+1}{3} \geq \frac{1}{3}$ und $a_{n+1} = \frac{a_n^3+1}{3} \leq \frac{a_{n-1}^3+1}{3} = a_n$, sodass auch $a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_{n-1} \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \frac{1}{3}$ gilt. Durch Wiederholen dieses Beweisschritts sieht man, dass die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ monoton fallend und nach unten durch $\frac{1}{3}$ beschränkt ist.

Nach Satz 1.8 existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = x$. Wegen Satz 1.6 gilt $x \geq \frac{1}{3}$ und $x = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n^3+1}{3} = \frac{x^3+1}{3}$. Der Grenzwert x ist also eine Lösung der Gleichung $x^3 - 3x + 1 = 0$, die im Intervall $[\frac{1}{3}, 1)$ liegt.

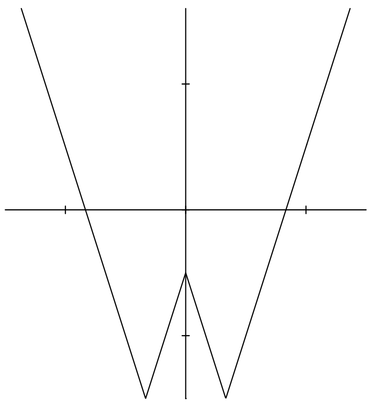
Sei $b_0 = 1$ und $b_{n+1} = \sqrt{3 - \frac{1}{b_n}}$ für $n \geq 0$. Es gilt $b_0 \leq \sqrt{2} = b_1 \leq \sqrt{3}$. Wie oben zeigt man, dass die Folge $(b_n)_{n\geq 0}$ monoton wachsend ist und $\sqrt{3}$ als obere Schranke hat. Ist $b_0 \leq b_1 \leq \cdots \leq b_{n-1} \leq b_n \leq \sqrt{3}$ schon gezeigt, dann folgt $b_{n+1} = \sqrt{3 - \frac{1}{b_n}} \leq \sqrt{3}$ und $b_{n+1} = \sqrt{3 - \frac{1}{b_n}} \geq \sqrt{3 - \frac{1}{b_{n-1}}} = b_n$, sodass auch $b_0 \leq b_1 \leq \cdots \leq b_{n-1} \leq b_n \leq b_{n+1} \leq \sqrt{3}$ gilt. Durch Wiederholen dieses Beweisschritts sieht man, dass die Folge $(b_n)_{n\geq 0}$ monoton wachsend und nach oben durch $\sqrt{3}$ beschränkt ist.

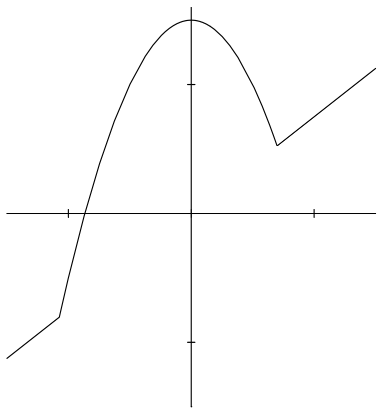
Nach Satz 1.8 existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} b_n = y$. Da $b_{n+1}^2 = 3 - \frac{1}{b_n}$ für alle n gilt, folgt $y^2 = 3 - \frac{1}{y}$ mit Hilfe von Satz 1.6. Somit ist y wieder eine Lösung der Gleichung $y^3 - 3y + 1 = 0$, allerdings eine im Intervall $(1, \sqrt{3}]$.

5. Funktionen

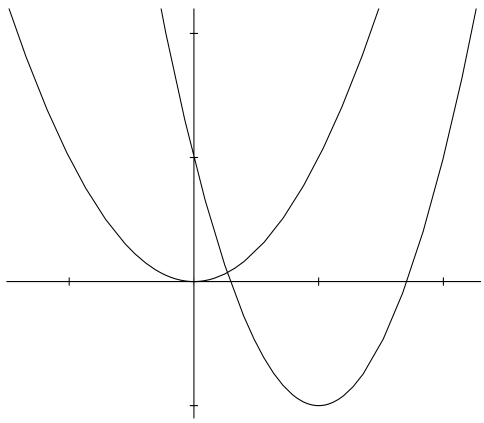
Sei D eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Wird jeder Zahl $x \in D$ in eindeutiger Weise eine reelle Zahl $f(x)$ zugeordnet, dann nennt man f eine Funktion mit Definitionsbereich D. Oft werden Funktionen durch Formeln angegeben, zum Beispiel $f(x) = 2 + 3x - 5x^2$ oder $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, wobei man in beiden Fällen den Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ wählen kann. Das ist jedoch nicht immer möglich. Hat man zum Beispiel die Funktion $f(x) = \frac{3x^3}{x^2-1}$, dann muss man 1 und -1 aus dem Definitionsbereich ausschließen, da man diese Zahlen nicht in die Formel einsetzen kann. In diesem Fall ist $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ ein geeigneter Definitionsbereich. Man kann für diese Funktion aber auch andere Definitionsbereiche wählen, zum Beispiel $D = (-1, 1)$ oder $D = [2, 9]$ oder viele andere Mengen. Es ist daher wichtig den Definitionsbereich D anzugeben. Für $x \in D$ nennt man die Zahl $f(x)$ den Funktionswert im Punkt x. Die Menge $f(D) = \{f(x) : x \in D\}$ aller Funktionswerte heißt Wertebereich der Funktion f. Man schreibt $f : D \to \mathbb{R}$, wenn f auf D definiert ist und Werte in $\mathbb{R}$ hat. Oft drückt man Funktionen auch mit Hilfe des Symbols $\mapsto$ aus. Zum Beispiel schreibt man die Funktion, die jedem $x \in \mathbb{R}$ den Funktionswert $3x^3$ zuordnet, entweder als $f(x) = 3x^3$ oder als $x \mapsto 3x^3$.

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, dann nennt man die Menge $\{(x, f(x)) : x \in D\}$ den Graph der Funktion f. Fasst man $(x, f(x))$ als Punkt in der Ebene mit Koordinaten x und $f(x)$ auf, dann ist der Graph eine Kurve, die man zeichnen kann. Die folgenden Zeichnungen zeigen die Graphen der Funktionen $x \mapsto |1 - |3x|| - \frac{3}{2}$ und $x \mapsto \max(-2x^2 + \frac{3}{2}, \frac{3}{4}x)$.





Wir überlegen uns, wie sich der Graph einer Funktion unter gewissen Transformationen ändert. Der Graph der Funktion $x \mapsto f(-x)$ ist der an der y-Achse gespiegelte Graph der Funktion $x \mapsto f(x)$. Der Graph der Funktion $x \mapsto -f(x)$ ist der an der x-Achse gespiegelte Graph der Funktion $x \mapsto f(x)$. Im Folgenden sei a immer größer als 0. Der Graph der Funktion $x \mapsto f(x+a)$ ist der um a Einheiten nach links und der Graph der Funktion $x \mapsto f(x-a)$ ist der um a Einheiten nach rechts verschobene Graph der Funktion $x \mapsto f(x)$. Der Graph der Funktion $x \mapsto f(ax)$ ist der um den Faktor $\frac{1}{a}$ in x-Richtung gestreckte (gestauchte) Graph der Funktion $x \mapsto f(x)$. Der Graph der Funktion $x \mapsto f(x) + a$ ist der um a Einheiten nach oben und der Graph der Funktion $x \mapsto f(x) - a$ ist der um a Einheiten nach unten verschobene Graph der Funktion $x \mapsto f(x)$. Schließlich ist der Graph der Funktion $x \mapsto af(x)$ der um den Faktor a in y-Richtung gestreckte (gestauchte) Graph der Funktion $x \mapsto f(x)$.

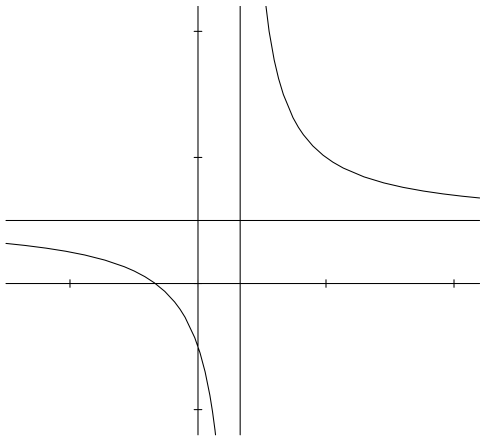


Beispiel: Sei $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ mit Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$. Durch Umformen erhalten wir $f(x) = 2(x-1)^2 - 1$. Der Graph der Funktion $g(x) = x^2$ ist eine Parabel. Wir nennen sie Standardparabel. Man erhält den Graph der Funktion f, indem man die Standardparabel um 1 Einheit nach rechts verschiebt, dann um den Faktor 2 in y-Richtung streckt und schließlich um 1 Einheit nach unten verschiebt. Die nebenstehende Zeichnung zeigt den Graph der Funktion $f(x) = 2(x-1)^2 - 1$ und die Standardparabel. Man kann die durchgeführten Transformationen nachvollziehen.

Die einfachsten Funktionen sind Polynome. Ihr Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$. Die Funktion $f(x) = c$ ist konstant und hat eine waagrechte Gerade als Graph. Die Funktionen $f(x) = c_1x + c_0$ mit $c_1 \neq 0$ sind die Polynome ersten Grades, deren Graphen ebenfalls Gerade sind, jedoch keine waagrechten. Die Funktionen $f(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0$ mit $c_2 \neq 0$ sind die Polynome zweiten Grades. Ihre Graphen sind Parabeln, die man aus der Standardparabel nach der Methode in obigem Beispiel erhält. Schließlich nennt man die Funktionen $f(x) = c_nx^n + \cdots + c_1x + c_0$ mit $c_n \neq 0$ die Polynome n-ten Grades.

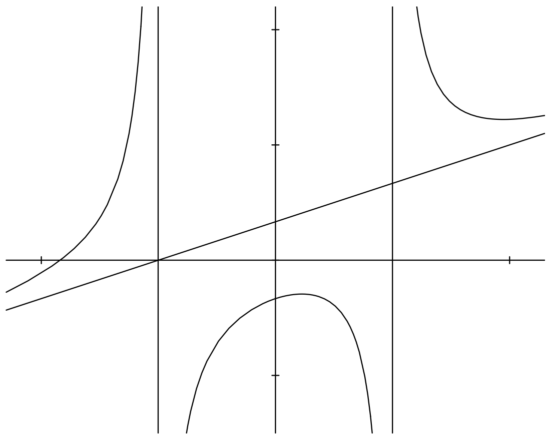
Rationale Funktionen sind Brüche, deren Zähler und Nenner Polynome sind. Das Nennerpolynom kann in endlich vielen Punkten gleich 0 sein. Diese Punkte muss man aus dem Definitionsbereich ausschließen. Dort hat der Graph der Funktion senkrechte Asymptoten. (Wir setzen voraus, dass die rationale Funktion gekürzt ist, das heißt Zähler- und Nennerpolynom haben keine gemeinsamen Nullstellen.) Die einfachste rationale Funktion ist $f(x) = \frac{1}{x}$ mit Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Der Graph ist eine Hyperbel, deren Asymptoten die x-Achse und die y-Achse sind.

Beispiel: Sei $f(x) = \frac{3x+1}{6x-2}$ mit Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$. Durch Umformen erhalten wir $f(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{x-\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}$. Man kann den Graph dieser Funktion aus dem Graph der Funktion $g(x) = \frac{1}{x}$ durch entsprechende Transformationen gewinnen. Zuerst wird der Graph der Funktion g um $\frac{1}{3}$ nach rechts verschoben, dann um den Faktor $\frac{1}{3}$ in y-Richtung gestaucht und schließlich um $\frac{1}{2}$ nach oben verschoben. So erhält man den Graph der Funktion f, den die nebenstehende Zeichnung zeigt. Er hat eine senkrechte Asymptote bei $x = \frac{1}{3}$ und eine waagrechte bei $y = \frac{1}{2}$.



Ist der Grad des Zählerpolynoms einer rationalen Funktion $f(x)$ größer oder gleich dem Grad des Nennerpolynoms, so kann man $f(x)$ schreiben als Summe eines Polynoms und einer rationalen Funktion, deren Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist. Der Graph der Funktion f liegt asymptotisch zu diesem Polynom.

Beispiel: Sei $f(x) = \frac{x^3+x^2-x+1}{3x^2-3}$ mit Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Umformen ergibt $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{x^2-1}$. Die Gerade $g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ ist eine Asymptote für den Graph von f, da die Differenz $\frac{2}{3}\frac{1}{x^2-1}$ zwischen $\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ und $f(x)$ für Zahlen x mit großem Betrag sehr klein ist. Außerdem hat der Graph von f senkrechte Asymptoten bei $x = -1$ und $x = 1$. Die nebenstehende Zeichnung zeigt den Graph der Funktion f zusammen mit den drei Asymptoten.



Nach diesen eher geometrischen Überlegungen zu den Funktionsgraphen wollen wir uns dem Rechnen mit Funktionen zuwenden. Sind f_1 und f_2 Funktionen mit Definitionsbereichen D_1 und D_2, dann kann man auf $D = D_1 \cap D_2$ Summe, Differenz und Produkt dieser Funktionen bilden. Man definiert $f_1 + f_2$ als die Funktion, die jedem $x \in D$ den Funktionswert $f_1(x) + f_2(x)$ zuordnet. Genauso definiert man $f_1 - f_2$ und $f_1 \cdot f_2$. Mit dem Quotient $\frac{f_1}{f_2}$ muss man vorsichtiger sein. Man muss alle Punkte x aus dem Definitionsbereich ausschließen, für die $f_2(x) = 0$ gilt.

Funktionen lassen sich auch hintereinander ausführen. Sind f und g Funktionen mit Definitionsbereichen D_1 und D_2, und gilt $f(x) \in D_2$ für alle $x \in D_1$, dann kann man $g(f(x))$ bilden. Die Funktion mit Definitionsbereich D_1, die jedem $x \in D_1$ den Funktionswert $g(f(x))$ zuordnet, bezeichnet man mit $g \circ f$.

6. Stetigkeit

Eine stetige Funktion f stellt man sich so vor, dass man den Graph dieser Funktion als nicht unterbrochene Linie zeichnen kann. Wenn der Punkt y dem Punkt x nahe kommt, dann muss auch der Funktionswert $f(y)$ dem Funktionswert $f(x)$ nahe kommen. Um eine mathematische Definition zu geben, verwenden wir Umgebungen.

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x \in D$. Die Funktion f heißt stetig im Punkt x, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $y \in (x - \delta, x + \delta) \cap D$ gilt. Man sagt f ist stetig auf der Menge D, wenn f in jedem Punkt $x \in D$ stetig ist.

Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$. Die Funktionen $f(x) = c$, $g(x) = |x|$ und $h(x) = ax + b$ sind auf $\mathbb{R}$ definiert. Sei $x \in \mathbb{R}$ fest. Wir zeigen die Stetigkeit dieser Funktionen im Punkt x. Dazu sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Für die Funktion f können wir $\delta > 0$ beliebig wählen. Es gilt dann $|f(y) - f(x)| = 0 < \varepsilon$ für alle $y \in (x - \delta, x + \delta)$. Für die Funktion g können wir $\delta = \varepsilon$ wählen. Es gilt dann $|g(y) - g(x)| \le |y - x| < \varepsilon$ für alle $y \in (x - \delta, x + \delta)$. Für die Funktion h können wir $\delta = \frac{1}{|a|}\varepsilon$ wählen. Es gilt dann $|h(y) - h(x)| = |a| \cdot |y - x| < \varepsilon$ für alle $y \in (x - \delta, x + \delta)$. Bei komplizierteren Funktionen kann die Wahl von δ schwieriger sein, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel: Die Funktion $f(x) = x^2$ ist stetig in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$. Wir prüfen wieder die Definition nach. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Hier hängt die Wahl von δ nicht nur von ε, sondern auch von x ab. Wir können $\delta = \min(\frac{\varepsilon}{1+|2x|}, 1)$ wählen. Gilt dann $y \in (x - \delta, x + \delta)$, also $|y - x| < \delta$, so folgt $|y + x| = |y - x + 2x| \le |y - x| + |2x| \le 1 + |2x|$ und damit erhalten wir $|f(y) - f(x)| = |y^2 - x^2| = |y + x| \cdot |y - x| < (1 + |2x|)\delta \le \varepsilon$.

Um die Stetigkeit von Funktionen nicht so mühsam nachrechnen zu müssen, führen wir im nächsten Satz die Stetigkeit auf Grenzwerte zurück. Für jede Folge $(x_n)_{n\ge1}$, deren Glieder x_n im Definitionsbereich einer Funktion f liegen, können wir die Folge $(f(x_n))_{n\ge1}$ der Funktionswerte untersuchen.

Satz 1.9: *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x \in D$. Dann sind äquivalent*
(a) *f ist im Punkt x stetig*
(b) *für jede Folge $(x_n)_{n\ge1}$ in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.*

Beweis: Der Beweis besteht aus zwei Teilen. Wir beginnen mit (a) $\Rightarrow$ (b). Unter der Voraussetzung der Stetigkeit von f im Punkt x müssen wir $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ zeigen für alle Folgen $(x_n)_{n\ge1}$ in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Wir wählen $\varepsilon > 0$ beliebig und suchen n_0. Da f im Punkt x stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, sodass $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $y \in (x - \delta, x + \delta) \cap D$ gilt. Wegen $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ finden wir jetzt ein n_0, sodass $x_n \in (x - \delta, x + \delta)$ für alle $n \ge n_0$ gilt. Da $x_n \in D$ für alle $n \ge 1$ vorausgesetzt wird, gilt mit diesem n_0, dass $|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$ erfüllt ist, womit $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ gezeigt ist.

Wir zeigen (b) $\Rightarrow$ (a) durch einen indirekten Beweis. Wir nehmen an, dass (a) nicht gilt und zeigen, dass dann auch (b) nicht erfüllt ist.

Sei also (a) nicht erfüllt, das heißt f ist im Punkt x nicht stetig. Nach Definition der Stetigkeit existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass, ganz egal wie klein wir $\delta > 0$ wählen, immer ein $y \in (x - \delta, x + \delta) \cap D$ existiert mit $|f(y) - f(x)| \ge \varepsilon$. Insbesondere können wir $\delta = \frac{1}{n}$ wählen und finden ein $y_n \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \cap D$ mit $|f(y_n) - f(x)| \ge \varepsilon$. Somit haben wir eine

Folge $(y_n)_{n\geq 1}$ in D gefunden, die Grenzwert x hat nach Satz 1.7, da $x - \frac{1}{n} \leq y_n \leq x + \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$ gilt. Andererseits gilt $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(x)$ nicht, da $f(y_n)$ für jedes $n \geq 1$ außerhalb der ε-Umgebung von $f(x)$ liegt. Damit ist gezeigt, dass (b) nicht erfüllt ist. □

Mit diesem Satz und den Rechenregeln für Grenzwerte erhält man den folgenden Satz.

Satz 1.10: *Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, die im Punkt $x \in D$ stetig sind. Dann sind auch die Funktionen $f + g$, $f - g$ und fg im Punkt x stetig. Gilt $g(x) \neq 0$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ im Punkt x stetig.*

Beweis: Der Definitionsbereich der Funktionen $f + g$, $f - g$ und fg ist ebenfalls D. Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine beliebige Folge in D mit Grenzwert x. Da f und g im Punkt x stetig sind, folgt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ und $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)$ aus Satz 1.9. Aus Satz 1.6 folgt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) + g(x_n) = f(x) + g(x)$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) - g(x_n) = f(x) - g(x)$ und $\lim_{n\to\infty} f(x_n)g(x_n) = f(x)g(x)$. Wegen Satz 1.9 heißt das aber, dass die Funktionen $f + g$, $f - g$ und fg im Punkt x stetig sind.
Um den Definitionsbereich E der Funktion $\frac{f}{g}$ zu erhalten, muss man aus D alle Punkte ausschließen, in denen g gleich null ist. Da $g(x) \neq 0$ vorausgesetzt wird, liegt x in E. Wählt man eine beliebige Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ in E mit Grenzwert x, so gilt $g(x_n) \neq 0$ für alle $n \geq 1$. Außerdem gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ und $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)$ wegen Satz 1.9. Aus Satz 1.6 (d) folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x)}{g(x)}$. Wegen Satz 1.9 heißt das aber, dass die Funktion $\frac{f}{g}$ im Punkt x stetig ist. □

Mit Hilfe dieses Satzes kann man die Stetigkeit vieler Funktionen zeigen. Die Funktion $f(x) = x$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig. Durch Produktbildung folgt, dass auch die Funktionen $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, ... auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind. Da konstante Funktionen stetig sind, sind auch die Funktionen $x \mapsto cx^n$ mit $c \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ stetig. Durch Bilden von Summen folgt dann, dass alle Polynome auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind. Daraus erhält man wieder die Stetigkeit von rationalen Funktionen in allen Punkten, in denen das Nennerpolynom nicht null ist.

Treppenfunktionen sind Beispiele für Funktionen, die nicht überall stetig sind. Die Funktion $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = 3$ für $x \in [0, 1)$ und $f(x) = 2$ für $x \in [1, 2]$ ist ein einfaches Beispiel für eine Treppenfunktion. Sie ist im Punkt 1 unstetig. Wir wählen $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ für $n \geq 1$. Dann ist $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $[0, 2]$ mit $f(x_n) = 3$ für alle $n \geq 1$, sodass auch $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 3$ gilt. Andererseits gilt $f(1) = 2$, sodass f wegen Satz 1.9 im Punkt 1 unstetig ist.

Zum Abschluss behandeln wir noch die Stetigkeit einer Funktion, die sich durch Hintereinanderausführen von zwei Funktionen ergibt.

Satz 1.11: *Seien $f : D_1 \to \mathbb{R}$ und $g : D_2 \to \mathbb{R}$ Funktionen, sodass $f(x) \in D_2$ für alle $x \in D_1$ gilt. Wenn f im Punkt $x \in D_1$ stetig ist und g im Punkt $f(x) \in D_2$, dann ist auch $g \circ f$ im Punkt x stetig.*

Beweis: Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine beliebige Folge in D_1 mit Grenzwert x. Dann ist $(f(x_n))_{n\geq 1}$ eine Folge in D_2. Da f im Punkt x stetig ist, hat diese Folge wegen Satz 1.9 den Grenzwert $f(x)$. Da g im Punkt $f(x)$ stetig ist, folgt $\lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(x))$ wieder aus Satz 1.9. Das aber bedeutet wieder wegen Satz 1.9 die Stetigkeit von $g \circ f$ im Punkt x. □

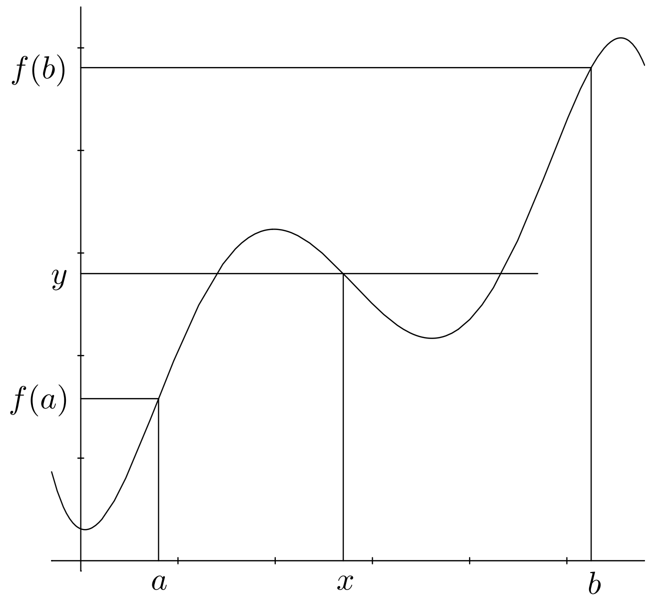
Ist die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ stetig auf ihrem Definitionsbereich D, dann gilt das auch für die Funktion $h : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x) = |f(x)|$. Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = |x|$ ist ja stetig auf $\mathbb{R}$ und es gilt $h = g \circ f$.

7. Zwischenwertsatz und Umkehrfunktion

Ein wichtiger Satz über stetige Funktionen ist der Zwischenwertsatz. Liegt der Funktionswert in einem Punkt a unterhalb und in einem Punkt b oberhalb eines Wertes y, dann muss der Graph der Funktion an einer Stelle zwischen a und b den Wert y überschreiten.

Satz 1.12 (Zwischenwertsatz) *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Es gelte entweder $f(a) < y < f(b)$ oder $f(a) > y > f(b)$. Dann existiert ein $x \in (a, b)$ mit $f(x) = y$.*

Der Beweis dieses Satzes verwendet die Intervallschachtelungseigenschaft und wird in einem späteren Kapitel gemeinsam mit anderen Beweisen behandelt. Die nebenstehende Zeichnung illustriert die Aussage des Zwischenwertsatzes. Ist y eine Zahl, die zwischen den Funktionswerten $f(a)$ und $f(b)$ liegt, dann hat die Gleichung $f(x) = y$ eine Lösung x im Intervall (a, b). Wie die Zeichnung zeigt, muss diese Lösung jedoch nicht eindeutig sein. Um eindeutige Lösungen zu haben, muss die Funktion neben der Stetigkeit noch eine andere Voraussetzung erfüllen. Wir müssen uns mit dem Monotonieverhalten von Funktionen beschäftigen.



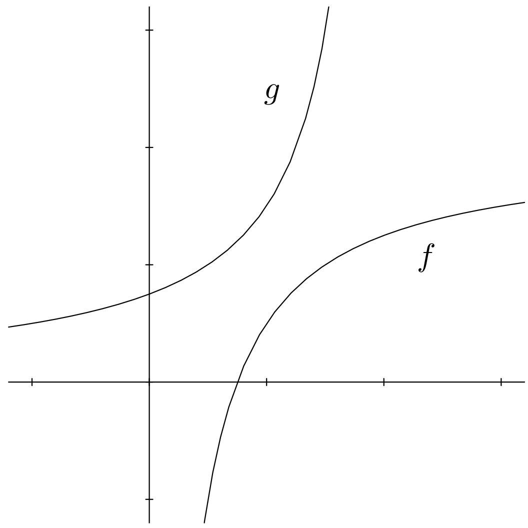
Definition: Sei D eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt
(a) konstant, wenn ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x) = c$ für alle $x \in D$
(b) monoton wachsend, wenn gilt: $u, v \in D$ und $u < v \;\Rightarrow\; f(u) \le f(v)$
(c) streng monoton wachsend, wenn gilt: $u, v \in D$ und $u < v \;\Rightarrow\; f(u) < f(v)$
(d) monoton fallend, wenn gilt: $u, v \in D$ und $u < v \;\Rightarrow\; f(u) \ge f(v)$
(e) streng monoton fallend, wenn gilt: $u, v \in D$ und $u < v \;\Rightarrow\; f(u) > f(v)$

Satz 1.13: *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend oder fallend. Für jedes y, das zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt, existiert genau ein $x \in (a, b)$ mit $f(x) = y$.*

Beweis: Die Existenz von x folgt aus Satz 1.12. Für $\tilde{x} \ne x$ kann aber $f(\tilde{x}) = y = f(x)$ nicht gelten, da f streng monoton ist und somit $f(\tilde{x}) < f(x)$ oder $f(\tilde{x}) > f(x)$ gilt. □

Schließlich behandeln wir die Umkehrfunktion zu einer Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ für ein beschränktes abgeschlossenes Intervall I. Für allgemeinere Intervalle wird sie an Beispielen erklärt. Die Umkehrfunktion g zur Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist auf dem Wertebereich $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$ definiert. Sie weist jedem Element $y = f(x)$ von $f(I)$ den Wert x zu, kehrt also die Zuordnung, die f durchführt, um. Man berechnet g, indem man die Gleichung $y = f(x)$ nach x auflöst. Voraussetzung dafür ist, dass die Lösung eindeutig ist. Es gelten dann die Gleichungen $g(f(x)) = x$ für alle $x \in I$ und $f(g(y)) = y$ für alle $y \in f(I)$.

Der Graph der Umkehrfunktion g von f geht aus dem Graph von f durch Spiegelung an der Geraden durch den Koordinatenursprung mit Anstieg 1 hervor. Diese Spiegelung führt nämlich die Menge $\{(x, f(x)) : x \in I\}$, die den Graph von f bildet, über in die Menge $\{(f(x), x) : x \in I\} = \{(y, g(y)) : y \in f(I)\}$, die den Graph von g bildet.



Beispiel: Die Funktion $f(x) = \frac{4x-3}{2x}$ ist auf dem Intervall $I = (0,\infty)$ definiert. Die Funktionswerte $f(x)$ durchlaufen das Intervall $J = (-\infty, 2)$, wenn x durch I läuft. Daher gilt $f(I) = J$. Die Umkehrfunktion erhält man durch Lösen der Gleichung $y = \frac{4x-3}{2x}$ nach x, vorausgesetzt diese Lösung ist eindeutig bestimmt. Das ist auch der Fall. Wir erhalten $x = \frac{3}{4-2y}$ als eindeutige Lösung. Die Umkehrfunktion ist daher $g(y) = \frac{3}{4-2y}$. Sie ist auf J definiert und es gilt $g(f(x)) = x$ für $x \in I$ und $f(g(y)) = y$ für $y \in J$, wie man leicht nachprüft. Die Zeichnung zeigt die Graphen der beiden Funktionen. Sie liegen symmetrisch zur Geraden durch den Koordinatenursprung mit Anstieg 1.

Der folgende Satz gibt Voraussetzungen an, unter denen eine Umkehrfunktion existiert.

Satz 1.14: *Sei $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes abgeschlossenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend oder streng monoton fallend. Sei $J = [f(a), f(b)]$, wenn f streng monoton wachsend, und $J = [f(b), f(a)]$, wenn f streng monoton fallend ist. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Funktion $g : J \to I$ mit $g(f(x)) = x$ für alle $x \in I$ und $f(g(y)) = y$ für alle $y \in J$. Weiters ist g streng monoton wachsend, wenn f streng monoton wachsend ist, und streng monoton fallend, wenn f streng monoton fallend ist. Schließlich ist g auch stetig. Die Funktion g heißt Umkehrfunktion von f.*

Beweis: Wir führen den Beweis nur für streng monoton wachsende Funktionen. Für streng monoton fallende Funktionen verläuft der Beweis ganz analog. Es drehen sich nur Ungleichheitszeichen um.

Wir definieren die Funktion $g : J \to I$. Sei $y \in J$. Wenn $y = f(a)$ gilt, dann setzen wir $g(y) = a$. Wenn $y = f(b)$ gilt, dann setzen wir $g(y) = b$. Wenn keiner dieser beiden Fälle eintritt, dann liegt y zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Aus Satz 1.13 folgt dann, dass genau ein $x \in (a,b)$ existiert mit $f(x) = y$. Wir setzen $g(y) = x$. Damit ist $g : J \to I$ definiert. Aus dieser Definition ergibt sich $f(g(y)) = y$ für alle $y \in J$. Ist andererseits $x \in I$ beliebig, dann gilt $f(x) \in J$ und wir können $y = f(x)$ in die Gleichung $f(g(y)) = y$ einsetzen. Es folgt $f(g(f(x))) = f(x)$ und daraus dann $g(f(x)) = x$, da f streng monoton wachsend ist und daher in verschiedenen Punkten nicht denselben Funktionswert annehmen kann.

Weiters ist $g : J \to I$ eindeutig bestimmt. Wäre $\tilde{g} : J \to I$ eine andere Funktion mit den selben Eigenschaften, dann hätten wir $f(g(y)) = y = f(\tilde{g}(y))$ und somit auch $g(y) = \tilde{g}(y)$ für alle $y \in J$ wieder wegen der strengen Monotonie von f.

Die Funktion g ist streng monoton wachsend. Aus $y_1 < y_2$ folgt $g(y_1) < g(y_2)$. Würde nämlich $g(y_1) \geq g(y_2)$ gelten, dann würde $f(g(y_1)) \geq f(g(y_2))$ folgen, da f streng monoton wachsend ist, also $y_1 \geq y_2$. Daher kann $g(y_1) \geq g(y_2)$ nicht gelten.

Schließlich beweisen wir, dass $g : J \to I$ stetig ist. Sei $y \in J$ und $(y_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in J mit $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Wegen Satz 1.9 genügt es zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(y)$ gilt. Würde das nicht zutreffen, dann fände man ein $x_1 < g(y)$, sodass $g(y_n) \leq x_1$ für unendlich viele n gilt, oder ein $x_2 > g(y)$, sodass $g(y_n) \geq x_2$ für unendlich viele n gilt. Im ersten Fall folgt $f(x_1) < y$ und $y_n \leq f(x_1)$ für unendlich viele n, da f streng monoton wachsend ist, ein Widerspruch zu $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Im zweiten Fall folgt $f(x_2) > y$ und $y_n \geq f(x_2)$ für unendlich viele n, ebenfalls ein Widerspruch zu $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Die Annahme, dass $\lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(y)$ nicht gilt, führt daher immer zu einem Widerspruch, womit $\lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(y)$ gezeigt ist. □

Bemerkung: Die Verallgemeinerung von Satz 1.14 für eine stetige und streng monotone Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem beliebigen Intervall I, also auf einem, das nicht notwendig beschränkt und abgeschlossen ist, soll an Beispielen erklärt werden.

Sei $I = J = [0, \infty)$ und $f : I \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = x^2$. Sie ist stetig und streng monoton wachsend. Für $n \geq 1$ sei $I_n = [0, n]$ und $J_n = [0, n^2]$. Wegen $f(0) = 0$ und $f(n) = n^2$ existiert nach Satz 1.14 die Umkehrfunktion $g_n : J_n \to I_n$ für alle $n \geq 1$. Da sie eindeutig ist, muss auch $g_{n+1} = g_n$ auf dem Intervall J_n für alle $n \geq 1$ gelten, das heißt die Funktion g_{n+1} ist eine Fortsetzung der Funktion g_n. Setzt man diese Funktionen zusammen, so hat man die Umkehrfunktion $g : J \to I$ der Funktion $f : I \to J$.

Noch ein Beispiel: Sei $I = J = (0, \infty)$ und $f : I \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^3}$. Sie ist stetig und streng monoton fallend. Für $n \geq 1$ sei $I_n = [\frac{1}{n}, n]$ und $J_n = [\frac{1}{n^3}, n^3]$. Es gilt $f(\frac{1}{n}) = n^3$ und $f(n) = \frac{1}{n^3}$. Mit derselben Vorgangsweise wie oben erhält man dann die Umkehrfunktion $g : J \to I$ der Funktion $f : I \to J$.

8. Potenzfunktion

Zuerst behandeln wir Potenzfunktionen $f(x) = x^m$ mit ganzzahligen Exponenten m. Um rationale Exponenten einführen zu können, definieren wir dann die m-te Wurzel einer positiven reellen Zahl mit Hilfe der Umkehrfunktion. Wir haben die Quadratwurzel bereits mit Hilfe der Intervallschachtelungseigenschaft definiert, mit der Umkehrfunktion kann man jedoch einfacher arbeiten und auch höhere Wurzeln leicht definieren.

Definition: Sei $a > 0$. Für $m \in \mathbb{N}$ definieren wir a^m als m-faches Produkt, wir setzen $a^0 = 1$, und a^{-m} definieren wir als $\frac{1}{a^m}$.

Satz 1.15: *Sei $a > 0$ und $b > 0$. Für m und n in $\mathbb{Z}$ gilt dann*
(a) $a^m b^m = (ab)^m$ (b) $a^{m+n} = a^m a^n$ (c) $(a^m)^n = a^{mn}$

Beweis: Den Beweis führen wir durch Anwenden der Definition mit Hilfe entsprechender Fallunterscheidungen. Für $m > 0$ gilt $a^m = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ und $b^m = b \cdot b \cdot \ldots \cdot b$, wobei rechts jeweils ein m-faches Produkt steht. Ebenso gilt $(ab)^m = ab \cdot ab \cdot \ldots \cdot ab$. Daraus erkennt man, dass (a) für positives m richtig ist. Mit Hilfe dieses Resultats folgt dann $a^{-m}b^{-m} = \frac{1}{a^m}\frac{1}{b^m} = \frac{1}{a^m b^m} = \frac{1}{(ab)^m} = (ab)^{-m}$, sodass (a) auch für negative Exponenten gilt. Für $m = 0$ wird (a) zu $1 = 1$.

Sind m und n beide ≥ 0, dann ist sowohl a^{m+n} als auch $a^m a^n$ das $m+n$-fache Produkt $a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, woraus (b) für nicht negative m und n folgt. Gilt $m \geq 0$ und $n < 0$, dann ist $a^m a^n$ ein Bruch, dessen Zähler das m-fache Produkt $a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ ist (oder 1 für $m = 0$), und dessen Nenner das $|n|$-fache Produkt $a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ ist. Kürzt man, dann bleibt a^{m+n} übrig. Analog läßt sich (b) auch für die Fälle $m < 0, n \geq 0$ und $m < 0, n < 0$ nachprüfen.

Gilt $n > 0$, dann ist $(a^m)^n$ das n-fache Produkt $a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m$. Durch wiederholtes Anwenden von (b) wird das zu $a^{m+m+\cdots+m} = a^{mn}$, womit (c) für $n > 0$ gezeigt ist. Mit Hilfe dieses Resultats folgt dann $(a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn} = a^{m(-n)}$. Für $n = 0$ wird (c) zu $1 = 1$. □

Der folgende Satz gibt eine Äquivalenzumformung, die sehr nützlich sein wird.

Satz 1.16: *Für $a, b \in [0, \infty)$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt* $a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$ *und* $a = b \Leftrightarrow a^n = b^n$.

Beweis: Wenn $a = b = 0$ gilt, dann auch $a^n = b^n = 0$, sodass die Äquivalenzen gelten. Wir können also $a > 0$ oder $b > 0$ annehmen. Sei $c = a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}$. Es gilt $c > 0$. Wir verwenden die Formel $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$. Damit sieht man, dass $a^n - b^n = (a-b)c < 0$ genau dann gilt, wenn $a - b < 0$ gilt, und $a^n - b^n = (a-b)c = 0$ genau dann, wenn $a - b = 0$ gilt. □

Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion $f(x) = x^n$ von $[0, \infty)$ nach $\mathbb{R}$ ist stetig und wegen Satz 1.16 auch streng monoton wachsend. Der Wertebereich von f ist das Intervall $[0, \infty)$. Es existiert die Umkehrfunktion $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$. Wir schreiben $\sqrt[n]{y}$ für $g(y)$ und nennen diese Zahl die n-te Wurzel aus y. Es gilt $(\sqrt[n]{y})^n = y$ für $y \in [0, \infty)$ und $\sqrt[n]{x^n} = x$ für $x \in [0, \infty)$.

Satz 1.17: *Es sei $x > 0$ beliebig. Seien m und $\tilde{m}$ in $\mathbb{Z}$ und n und $\tilde{n}$ in $\mathbb{N}$. Wenn $\frac{m}{n} = \frac{\tilde{m}}{\tilde{n}}$ gilt, dann gilt auch $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[\tilde{n}]{x^{\tilde{m}}}$.*

Beweis: Um zu dieser Schlussfolgerung zu kommen, gehen wir schrittweise vor.

$$
\begin{aligned}
\tfrac{m}{n} = \tfrac{\tilde{m}}{\tilde{n}} \ &\Rightarrow\ m\tilde{n} = \tilde{m}n \ \Rightarrow\ x^{m\tilde{n}} = x^{\tilde{m}n} & \\
&\Rightarrow\ (x^m)^{\tilde{n}} = (x^{\tilde{m}})^n & &\text{wegen Satz 1.15 (c)} \\
&\Rightarrow\ (\sqrt[n]{x^m})^{n\tilde{n}} = (\sqrt[\tilde{n}]{x^{\tilde{m}}})^{\tilde{n}n} & &\text{Definition der Wurzel und Satz 1.15 (c)} \\
&\Rightarrow\ \sqrt[n]{x^m} = \sqrt[\tilde{n}]{x^{\tilde{m}}} & &\text{wegen Satz 1.16}
\end{aligned}
$$

Damit sind wir beim gewünschten Ergebnis angelangt. □

Jetzt können wir die Potenzfunktion mit rationalen Exponenten definieren.

Definition: Es sei $x > 0$ und $q \in \mathbb{Q}$. Weiters sei $\frac{m}{n}$ irgendeine Darstellung von q als Bruch mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren x^q durch $\sqrt[n]{x^m}$, wobei es wegen Satz 1.17 gleichgültig ist, welche Darstellung $\frac{m}{n}$ von q gewählt wurde.

Aus dieser Definition und der Definition der Wurzel folgt $(x^q)^n = x^m$, wenn $\frac{m}{n}$ eine Darstellung von q als Bruch ist. Es folgen Rechenregeln für rationale Exponenten.

Satz 1.18: *Für $p, q \in \mathbb{Q}$ und a und b in $[0, \infty)$ gilt*
(a) $a^p b^p = (ab)^p$ (b) $a^{p+q} = a^p a^q$ (c) $(a^p)^q = a^{pq}$

Beweis: Unter Verwendung von Satz 1.15 und Satz 1.16 führen wir diese Formeln durch Äquivalenzumformungen auf bekannte Formeln zurück. Um (a) zu zeigen, sei $p = \frac{m}{n}$ eine Darstellung von p als Bruch. Dann gilt

$$a^p b^p = (ab)^p \ \Leftrightarrow\ (a^p b^p)^n = ((ab)^p)^n \ \Leftrightarrow\ (a^p)^n (b^p)^n = ((ab)^p)^n \ \Leftrightarrow\ a^m b^m = (ab)^m$$

Da diese letzte Gleichung aus Satz 1.15 bekannt ist, ist (a) bewiesen. Um (b) zu zeigen, wählen wir $p = \frac{m}{n}$ und $q = \frac{k}{n}$ als Brüche mit gleichem Nenner. Dann gilt

$$a^{p+q} = a^p a^q \ \Leftrightarrow\ (a^{p+q})^n = (a^p a^q)^n \ \Leftrightarrow\ (a^{p+q})^n = (a^p)^n (a^q)^n \ \Leftrightarrow\ a^{m+k} = a^m a^k$$

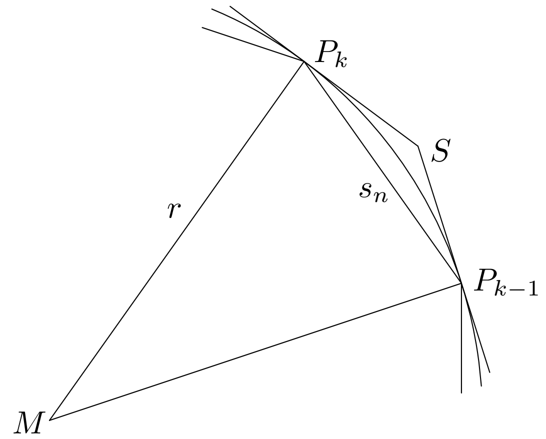
womit wir (b) ebenfalls auf eine Formel aus Satz 1.15 zurückgeführt haben. Um auch die letzte Formel zu erhalten, wählen wir $p = \frac{m}{n}$ und $q = \frac{k}{l}$ und formen um

$$(a^p)^q = a^{pq} \Leftrightarrow (((a^p)^q)^l)^n = (a^{pq})^{ln} \Leftrightarrow (a^p)^{kn} = a^{mk} \Leftrightarrow ((a^p)^n)^k = a^{mk} \Leftrightarrow (a^m)^k = a^{mk}$$

womit auch (c) auf Satz 1.15 zurückgeführt ist. □

Zum Abschluss dieses Kapitels behandeln wir noch ein geometrisches Problem. Wir berechnen die Länge eines Kreisbogens. Dazu brauchen wir die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$, die wegen Satz 1.14 stetig ist. Wir haben gesehen, dass die Fläche eines Kreises mit Radius 1 eine reelle Zahl ist, die wir π nennen. Die Fläche eines Kreises mit Radius r ist dann das r^2-fache, also $r^2\pi$. Ein Kreissektor mit Winkel α ist ein entsprechender Teil des Kreises und hat Fläche $A = \frac{\alpha}{360^0} r^2\pi$. Wir wollen die Länge b des Bogens eines Kreissektors bestimmen. Dazu müssen wir die Bogenlänge b definieren. Seien $P_0, P_1, \ldots, P_n$ Punkte auf dem Kreisbogen, die den Bogen in n gleiche Teile unterteilen, wobei P_0 und P_n die Endpunkte des Bogens sind. Die Sehnen $\overline{P_{k-1}P_k}$ haben alle die gleiche Länge s_n, sodass ns_n die Länge des gesamten Polygonzuges ist. Wir definieren die Länge b des Kreisbogens durch den Grenzwert der Längen der Polygonzüge, das heißt $b = \lim_{n\to\infty} ns_n$.

Satz 1.19: *Sei A die Fläche eines Kreissektors in einem Kreis mit Radius r und b die Länge des zugehörigen Kreisbogens. Dann gilt $b = \frac{2A}{r}$.*



Beweis: Sei M der Kreismittelpunkt und seien P_{k-1} und P_k zwei aufeinanderfolgende Punkte auf dem Kreisbogen im Abstand s_n. Sei A_n die Fläche des Kreissektors, die zwischen den Radien $\overline{MP_{k-1}}$ und $\overline{MP_k}$ liegt, sodass $A = nA_n$ folgt. Als Fläche des Dreiecks $P_{k-1}MP_k$ ergibt sich $\frac{1}{2}s_n\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s_n^2}$. Da sie kleiner als A_n ist, folgt $\frac{1}{2}ns_n\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s_n^2} \le nA_n = A$. Sei S der Schnittpunkt der beiden Tangenten an den Kreis in den Punkten P_{k-1} und P_k. Dann ist A_n kleiner als die Fläche des Vierecks $P_{k-1}MP_kS$, die $\frac{1}{2}s_n \cdot |MS|$ beträgt. Nach dem Kathetensatz für das rechtwinkelige Dreieck gilt $r^2 = |MS| \cdot \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s_n^2}$. Es folgt $A = nA_n \le \frac{1}{2}ns_n\frac{r^2}{\sqrt{r^2-\frac{1}{4}s_n^2}}$. Damit haben wir gezeigt

$$\frac{2A}{r^2}\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s_n^2} \le ns_n \le 2A\Big/\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s_n^2}$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$ folgt $\lim_{n\to\infty} r^2 - \frac{1}{4}s_n^2 = r^2$ aus Satz 1.6. Die Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ ist stetig. Es folgt $\lim_{n\to\infty}\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s_n^2} = r$ aus Satz 1.9. Wegen Satz 1.6 ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2A}{r^2}\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s_n^2} = \frac{2A}{r} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} 2A\Big/\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s_n^2} = \frac{2A}{r}$$

Aus Satz 1.7 erhalten wir, dass $\lim_{n\to\infty} ns_n$ existiert und gleich $\frac{2A}{r}$ ist. □

Da die Fläche eines Kreises mit Radius r gleich $r^2\pi$ ist, ist $\frac{2}{r}r^2\pi = 2r\pi$ nach Satz 1.19 der Umfang des Kreises. Bei der Definition der trigonometrischen Funktionen werden wir die Winkel durch die Länge des entsprechenden Bogens des Einheitskreises messen. Aus dem Umfang 2π des Einheitskreises berechnet man das Bogenmaß $\frac{2\pi\alpha}{360^0}$ für den Winkel α.

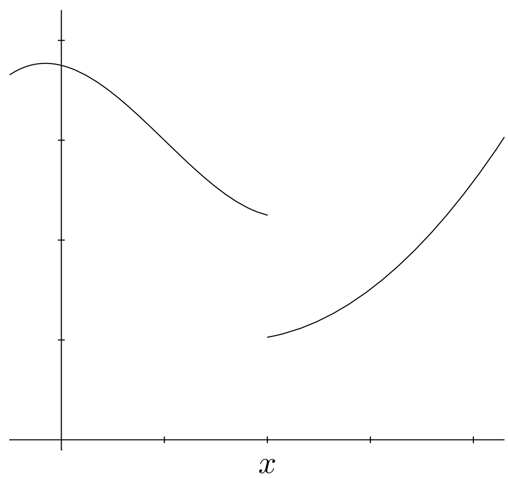
Bemerkung: In der Definition der Bogenlänge kann man auch eine Folge von nicht notwendig regelmäßigen Polygonzügen zulassen. Das Maximum der Seitenlängen dieser Polygonzüge muss jedoch gegen null gehen. Der Beweis von Satz 1.19 lässt sich entsprechend modifizieren.

II. Differenzierbarkeit

Wir definieren die Ableitung einer Funktion und verwenden sie, um das Monotonieverhalten dieser Funktion zu untersuchen. Daraus ergeben sich Methoden, um Maxima und Minima zu berechnen und um Gleichungen und Ungleichungen zu beweisen. Weiters werden die trigonometrischen Funktionen und die Exponentialfunktion eingeführt.

1. Grenzwerte von Funktionen

Es kann vorkommen, dass eine Funktion in einem isolierten Punkt nicht definiert ist. Sei D ein offenes Intervall, das auch unbeschränkt sein kann, also auch (a,∞) oder $(-\infty,b)$ oder ganz $\mathbb{R}$. Sei $x \in D$ und $D_x = D \setminus \{x\}$. Wir nehmen an, dass die Funktion f auf D_x definiert ist und versuchen f im Punkt x sinnvoll zu ergänzen. Die nebenstehende Zeichnung zeigt den Graph einer Funktion, die im Punkt $x = 2$ eine Sprungstelle aufweist. Man kann natürlich $f(x)$ irgendwie festlegen, aber ein sinnvoller Wert ist wohl der, gegen den $f(y)$ strebt, wenn y gegen x geht. Für die Funktion in der nebenstehenden Zeichnung strebt aber $f(y)$ gegen verschiedene Werte, je nachdem, ob y von links oder von rechts an x herankommt. Es gibt keinen Grenzwert. Deshalb ist es nicht möglich den Funktionswert bei x so festzulegen, dass die Lücke im Graph geschlossen wird.



Wir sind bei dem Problem angelangt, zuerst einmal den Grenzwert von $f(y)$ für y gegen x zu definieren. Wir gehen analog vor, wie bei der Definition des Grenzwerts einer Folge. Soll u der Grenzwert der Funktion f im Punkt x sein und gibt man eine ε-Umgebung von u vor, dann muss der Funktionswert $f(y)$ in dieser ε-Umgebung liegen, wenn y nur nahe genug bei x liegt. Daraus ergibt sich die Definition des Grenzwerts.

Definition: Sei D ein offenes Intervall, $x \in D$ und f auf $D_x = D \setminus \{x\}$ definiert. Man nennt u den Grenzwert der Funktion f im Punkt x, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass $|f(y) - u| < \varepsilon$ für alle $y \in (x-\delta, x+\delta) \cap D_x$ gilt. Man schreibt $\lim_{y\to x} f(y) = u$.

Der Grenzwert einer Funktion ist eindeutig bestimmt, wenn er existiert. Das kann man sich genauso überlegen, wie wir es für Folgen getan haben.

Ist die Funktion f auch im Punkt x definiert, dann gilt $\lim_{y\to x} f(y) = f(x)$ genau dann, wenn f im Punkt x stetig ist, wie ein Vergleich der Definitionen von Grenzwert und Stetigkeit zeigt. Wir verwenden das im folgendes Beispiel.

Beispiel: Die Funktion $f(y) = \frac{1-\sqrt{1+y}}{y}$ ist auf dem Intervall $D = (-1,1)$ definiert, außer im Punkt $x = 0$. Dort ist der Nenner des Bruches null. Wir berechnen $\lim_{y\to 0} \frac{1-\sqrt{1+y}}{y}$. Für $y \in D_x$ gilt $f(y) = \frac{1-(1+y)}{y(1+\sqrt{1+y})} = \frac{-1}{1+\sqrt{1+y}}$. Die Funktion $g(y) = \frac{-1}{1+\sqrt{1+y}}$ ist auf ganz D definiert und wegen Satz 1.10 auch stetig, also eine stetige Fortsetzung von f auf ganz D. Da $f(y) = g(y)$ für $y \in D_x$ gilt, erhalten wir $\lim_{y\to 0} f(y) = \lim_{y\to 0} g(y) = g(0) = -\frac{1}{2}$.

Wie wir es schon bei der Stetigkeit von Funktionen getan haben, charakterisieren wir Grenzwerte von Funktionen durch Grenzwerte von Folgen.

Satz 2.1: *Sei D ein offenes Intervall, $x \in D$ und f auf $D_x = D \setminus \{x\}$ definiert. Dann sind äquivalent*
(a) $\lim_{y\to x} f(y) = u$
(b) *für jede Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ in D_x mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = u$.*

Beweis: Der Beweis besteht aus zwei Teilen. Wir beginnen mit (a) $\Rightarrow$ (b). Unter der Voraussetzung $\lim_{y\to x} f(y) = u$ müssen wir $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = u$ für jede Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ in D_x mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ zeigen. Wir wählen $\varepsilon > 0$ beliebig und suchen n_0. Wegen $\lim_{y\to x} f(y) = u$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass $|f(y)-u| < \varepsilon$ für alle $y \in (x-\delta, x+\delta) \cap D_x$ gilt. Wegen $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ finden wir jetzt ein n_0, sodass $x_n \in (x-\delta, x+\delta)$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Da die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ auch in D_x liegt, erhalten wir $|f(x_n) - u| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, womit $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = u$ gezeigt ist.

Wir zeigen (b) $\Rightarrow$ (a) indirekt. Sei also (a) nicht erfüllt, das heißt $\lim_{y\to x} f(y) = u$ gilt nicht. Es existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass für jedes $\delta > 0$ ein $y \in (x-\delta, x+\delta) \cap D_x$ existiert mit $|f(y) - u| \geq \varepsilon$. Wir wählen $\delta = \frac{1}{n}$ und finden ein $x_n \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \cap D_x$, sodass $|f(x_n) - u| \geq \varepsilon$ gilt. So haben wir eine Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ in D_x gefunden, deren Grenzwert x ist, da ja $|x_n - x| < \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$ gilt. Andererseits kann $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = u$ nicht gelten, da $f(x_n)$ für jedes $n \geq 1$ außerhalb der ε-Umgebung von u liegt. Damit ist gezeigt, dass (b) nicht gilt. □

Um Grenzwerte zu berechnen, sind entsprechende Rechenregeln hilfreich. Diese sind dieselben wie die Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen. Mit Hilfe des letzten Satzes können wir die Rechenregeln leicht übertragen.

Satz 2.2: *Sei D ein offenes Intervall und $x \in D$. Die Funktionen f und g seien auf D_x definiert. Weiters sollen die Grenzwerte $\lim_{y\to x} f(y) = a$ und $\lim_{y\to x} g(y) = b$ existieren.*
(a) *Es gilt $\lim_{y\to x} f(y) + g(y) = a + b$.*
(b) *Es gilt $\lim_{y\to x} f(y)g(y) = ab$.*
(c) *Gilt $g(y) \neq 0$ für alle $y \in D_x$ und $b \neq 0$, dann gilt $\lim_{y\to x} \frac{f(y)}{g(y)} = \frac{a}{b}$.*

Beweis: Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine beliebige Folge in D_x mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Wegen Satz 2.1 gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$ und $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = b$.

Es folgt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) + g(x_n) = a + b$ und $\lim_{n\to\infty} f(x_n)g(x_n) = ab$ wegen Satz 1.6. Damit ist $\lim_{y\to x} f(y) + g(y) = a + b$ und $\lim_{y\to x} f(y)g(y) = ab$ wegen Satz 2.1 gezeigt.

Wenn $b \neq 0$ gilt und $g(y) \neq 0$ für alle $y \in D_x$, dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{a}{b}$ wieder wegen Satz 1.6. Wegen Satz 2.1 ist damit $\lim_{y\to x} \frac{f(y)}{g(y)} = \frac{a}{b}$ gezeigt. □

Auch der folgende Satz ergibt sich aus dem entsprechenden Satz für Folgen.

Satz 2.3: *Sei D ein offenes Intervall und $x \in D$. Seien f, g und h Funktionen, die auf D_x definiert sind. Wenn $\lim_{y\to x} f(y) = \lim_{y\to x} g(y) = a$ gilt und $f(y) \leq h(y) \leq g(y)$ für alle $y \in D_x$, dann existiert auch $\lim_{y\to x} h(y)$ und ist ebenfalls gleich a.*

Beweis: Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine beliebige Folge in D_x mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Wegen Satz 2.1 gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$ und $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = a$. Weiters folgt $f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n)$ für alle $n \geq 1$ aus den Voraussetzungen. Nach Satz 1.7 haben wir dann auch $\lim_{n\to\infty} h(x_n) = a$. Wegen Satz 2.1 ist damit $\lim_{y\to x} h(y) = a$ gezeigt. □

2. Die Ableitung

Die Ableitung einer Funktion f im Punkt x ist der Anstieg der Tangente an deren Graphen im Punkt mit Koordinaten x und $f(x)$. Wir erhalten diesen Anstieg als Grenzwert der Anstiege von Sekanten. Sei D ein offenes Intervall, auf dem f definiert ist, und sei $x \in D$. Ist y ebenfalls in D und ungleich x, so erhält man den Anstieg der Sekante, die den Punkt mit Koordinaten y und $f(y)$ und den mit Koordinaten x und $f(x)$ verbindet, als den Quotienten $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Läßt man jetzt y gegen x wandern, dann wird die Sekante zur Tangente. Der Grenzwert des Anstiegs der Sekante ist der Anstieg der Tangente, also die Ableitung der Funktion im Punkt x. Da die Funktion $y \mapsto \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ für alle $y \in D_x$ definiert ist, kann man die Grenzwertdefinition für Funktionen anwenden.

Definition: Sei f auf dem offenen Intervall D definiert und $x \in D$. Existiert der Grenzwert $\lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$, dann sagt man, die Funktion f ist im Punkt x differenzierbar, und nennt diesen Grenzwert die Ableitung der Funktion f im Punkt x. Sie wird mit $f'(x)$ bezeichnet.

Manchmal ersetzt man in dieser Definition der Ableitung y durch $x+h$. Dann ist $y \to x$ äquivalent zu $h \to 0$. Daher kann man auch $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ schreiben.

Beispiel: Wir berechnen die Ableitungen der Funktionen $f(x) = x^m$ für $m \in \mathbb{Z}$.
Für $m = 0$ ist f eine konstante Funktion. Für konstante Funktionen f gilt $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = 0$ für alle x und y, also auch $f'(x) = 0$ für alle x.
Sei $k \in \mathbb{N}$. Die Funktion $f(x) = x^k$ ist auf $D = \mathbb{R}$ definiert. Wir berechnen die Ableitung von f im Punkt x. Sei $g(y) = y^{k-1} + y^{k-2}x + y^{k-3}x^2 + \cdots + yx^{k-2} + x^{k-1}$. Für $y \neq x$ gilt $\frac{y^k-x^k}{y-x} = g(y)$. Da g im Punkt x stetig ist, folgt $\lim_{y\to x} \frac{y^k-x^k}{y-x} = g(x) = kx^{k-1}$. Damit ist $f'(x) = kx^{k-1}$ berechnet.
Sei $k \in \mathbb{N}$. Die Funktion $f(x) = x^{-k}$ ist auf $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert. Wir berechnen die Ableitung von f im Punkt $x \neq 0$. Sind x und y Punkte in D mit $x \neq y$, dann gilt $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = -\frac{1}{x^k y^k}\frac{y^k-x^k}{y-x}$. Mit Hilfe des obigen Resultats und der Rechenregeln aus Satz 2.2 folgt $\lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \lim_{y\to x} -\frac{1}{x^k y^k} \lim_{y\to x} \frac{y^k-x^k}{y-x} = -\frac{1}{x^{2k}} kx^{k-1} = -kx^{-k-1}$.
Man kann diese Ergebnisse so zusammenfassen. Für $m \in \mathbb{Z}$ hat $f(x) = x^m$ die Ableitung $f'(x) = mx^{m-1}$ für alle $x \in D$, wobei der Definitionsbereich D gleich $\mathbb{R}$ ist für $m \geq 0$ und gleich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ für $m < 0$.

Um mit Ableitungen arbeiten zu können, braucht man entsprechende Rechenregeln. Zuvor klären wir noch den Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

Satz 2.4: *Sei f auf dem offenen Intervall D definiert und $x \in D$. Wenn f im Punkt x differenzierbar ist, dann ist f im Punkt x auch stetig.*

Beweis: Es existiert ein $\alpha > 0$, sodass $|\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - f'(x)| < 1$ für alle $y \in (x-\alpha, x+\alpha) \cap D_x$ gilt, da f im Punkt x differenzierbar ist. Sei $c = |f'(x)| + 1$. Wir erhalten
$|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}| \leq |\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - f'(x)| + |f'(x)| < 1 + |f'(x)| = c$ für alle $y \in (x-\alpha, x+\alpha) \cap D_x$
mit Hilfe der Dreiecksungleichung. Daraus ergibt sich dann

$$|f(y) - f(x)| \leq c|y - x| \text{ für alle } y \in (x-\alpha, x+\alpha) \cap D.$$

Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so wählen wir $\delta = \min(\alpha, \frac{\varepsilon}{c})$. Für alle $y \in (x-\delta, x+\delta) \cap D$ gilt dann $|f(y) - f(x)| \leq c|y - x| < \varepsilon$. Damit ist die Stetigkeit von f im Punkt x gezeigt. $\square$

Satz 2.5 (Rechenregeln für die Ableitung) *Seien f und g auf einem offenen Intervall D definiert und $x \in D$. Seien c und d in $\mathbb{R}$. Dann gilt:*
(a) *Linearität: Wenn $f'(x)$ und $g'(x)$ existieren, dann ist auch die Funktion $cf + dg$ im Punkt x differenzierbar und es gilt $(cf + dg)'(x) = cf'(x) + dg'(x)$.*
(b) *Produktregel: Wenn $f'(x)$ und $g'(x)$ existieren, dann ist auch die Funktion fg im Punkt x differenzierbar und es gilt $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$.*
(c) *Quotientenregel: Existieren $f'(x)$ und $g'(x)$ und gilt $g(y) \neq 0$ für alle $y \in D$, dann ist die Funktion $\frac{f}{g}$ im Punkt x differenzierbar und es gilt $(\frac{f}{g})'(x) = f'(x)\frac{1}{g(x)} - g'(x)\frac{f(x)}{g^2(x)}$.*

Beweis: Um (a) zu beweisen, gehen wir von folgender Gleichung aus

$$\frac{(cf + dg)(y) - (cf + dg)(x)}{y - x} = c\,\frac{f(y) - f(x)}{y - x} + d\,\frac{g(y) - g(x)}{y - x}$$

Da $f'(x)$ und $g'(x)$ existieren, existiert wegen Satz 2.2 auch der Grenzwert der rechten Seite dieser Gleichung für $y \to x$ und ist gleich $cf'(x) + dg'(x)$. Daher existiert auch der Grenzwert der linken Seite und ist ebenfalls gleich $cf'(x) + dg'(x)$, womit (a) gezeigt ist.
Um (b) zu zeigen, gehen wir von folgender Gleichung aus

$$\frac{f(y)g(y) - f(x)g(x)}{y - x} = f(y)\frac{g(y) - g(x)}{y - x} + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}g(x)$$

Nach Satz 2.4 ist f im Punkt x stetig, da $f'(x)$ existiert. Also gilt $\lim_{y\to x} f(y) = f(x)$. Da auch $g'(x)$ existiert, existiert wegen Satz 2.2 der Grenzwert der rechten Seite dieser Gleichung für $y \to x$ und ist gleich $f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$. Daher existiert auch der Grenzwert der linken Seite und ist ebenfalls $f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$, womit (b) gezeigt ist.
Um (c) zu zeigen, gehen wir von folgender Gleichung aus

$$\frac{f(y)/g(y) - f(x)/g(x)}{y - x} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}\,\frac{1}{g(y)} - \frac{g(y) - g(x)}{y - x}\,\frac{f(x)}{g(x)g(y)}$$

Nach Satz 2.4 ist g im Punkt x stetig, da $g'(x)$ existiert. Es folgt $\lim_{y\to x} g(y) = g(x)$. Da auch $f'(x)$ existiert und $g(y) \neq 0$ gilt für $y \in D$, existiert wegen Satz 2.2 der Grenzwert der rechten Seite dieser Gleichung für $y \to x$ und ist gleich $f'(x)\frac{1}{g(x)} - g'(x)\frac{f(x)}{g^2(x)}$. Das ist dann auch der Grenzwert der linken Seite dieser Gleichung. Damit ist (c) bewiesen. □

Satz 2.6 (Kettenregel) *Sei f auf einem offenen Intervall D definiert und $x \in D$. Sei g auf einem offenen Intervall definiert, das $f(D)$ enthält. Wenn $g'(f(x))$ und $f'(x)$ existieren, dann existiert auch $(g \circ f)'(x)$ und es gilt $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$.*

Beweis: Es gilt $\lim_{y\to x} \frac{g\circ f(y) - g\circ f(x)}{y-x} = \lim_{y\to x} \frac{g(f(y)) - g(f(x))}{f(y)-f(x)}\,\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = g'(f(x))f'(x)$, da mit $y \to x$ auch $f(y)$ gegen $f(x)$ geht (nach Satz 2.4 ist f ja im Punkt x stetig). Damit ist die Kettenregel bereits gezeigt. Allerdings hat dieser Beweis den Fehler, dass man nicht weiß, ob $f(y) - f(x)$ ungleich 0 ist. Wir gehen daher folgendermaßen vor.
Sei $\varphi(t) = \frac{g(t)-g(f(x))}{t-f(x)}$ für $t \neq f(x)$ und $\varphi(t) = g'(f(x))$ für $t = f(x)$. Dann gilt

$$\frac{g\circ f(y) - g\circ f(x)}{y - x} = \varphi(f(y))\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \qquad \text{für alle } y \in D_x$$

Die Funktion φ ist im Punkt $f(x)$ stetig, da die Existenz von $g'(f(x))$ vorausgesetzt wird und daher $\lim_{t\to f(x)} \frac{g(t)-g(f(x))}{t-f(x)} = g'(f(x)) = \varphi(f(x))$ gilt. Da $f'(x)$ existiert und somit f im Punkt x stetig ist, folgt die Stetigkeit von $\varphi \circ f$ im Punkt x aus Satz 1.11, und daraus wieder $\lim_{y\to x} \varphi(f(y)) = \varphi(f(x)) = g'(f(x))$. Der Grenzwert der rechten Seite in obiger

Gleichung für $y \to x$ ist daher gleich $g'(f(x))f'(x)$. Also existiert auch der Grenzwert der linken Seite und ist ebenfalls gleich $g'(f(x))f'(x)$, das heißt $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$. $\square$

Mit diesen Rechenregeln ist es leicht, die Ableitung vieler Funktionen zu berechnen. Für $f(x) = x^m$ mit $m \in \mathbb{Z}$ haben wir $f'(x) = mx^{m-1}$ berechnet. Mit Satz 2.5 (a) erhalten wir die Ableitung eines Polynoms. Für $g(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_2x^2 + c_1x + c_0$ gilt $g'(x) = c_n n x^{n-1} + c_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \cdots + 2c_2x + c_1$. Mit Satz 2.5 (c) lassen sich dann rationale Funktionen differenzieren. Weitere Ableitungen findet man mit Hilfe des folgenden Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion.

Satz 2.7: *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und streng monoton wachsend oder streng monoton fallend. Sei $J = f(I)$ und $g : J \to I$ die Umkehrfunktion von f. Ist $x \in J$ und $f'(g(x)) \neq 0$, dann existiert $g'(x)$ und es gilt $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$.*

Beweis: Nach Satz 2.4 ist f stetig, sodass die Umkehrfunktion wegen Satz 1.14 existiert. Es gilt $f(g(x)) = x$ und $f(g(y)) = y$ für alle x und y in J. Es folgt

$$\frac{g(y) - g(x)}{y - x} = \frac{1}{\frac{f(g(y)) - f(g(x))}{g(y) - g(x)}} \qquad \text{für } y \neq x$$

da g nach Satz 1.14 streng monoton und $g(y) - g(x)$ somit ungleich 0 ist. Nach Satz 1.14 ist g auch stetig, sodass mit $y \to x$ auch $g(y)$ gegen $g(x)$ geht. Da die Existenz von $f'(g(x))$ vorausgesetzt wird, erhalten wir $\lim_{y \to x} \frac{f(g(y)) - f(g(x))}{g(y) - g(x)} = f'(g(x))$. Wegen $f'(g(x)) \neq 0$ folgt $\lim_{y \to x} \frac{g(y) - g(x)}{y - x} = \frac{1}{f'(g(x))}$ aus obiger Gleichung und Satz 2.2. Somit existiert $g'(x)$ und ist gleich $\frac{1}{f'(g(x))}$. $\square$

Beispiel: Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Wurzelfunktion $g(x) = \sqrt[n]{x}$ mit Definitionsbereich $D = (0, \infty)$ ist die Umkehrfunktion der Funktion $f(x) = x^n$, die ebenfalls Definitionsbereich D hat. Da $f'(x) = nx^{n-1} \neq 0$ für alle $x \in D$ gilt, folgt $g'(x) = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1}$ für alle $x \in D$ aus Satz 2.7. Nun können wir auch die Potenzfunktion $h(x) = x^q$ mit $q \in \mathbb{Q}$ und Definitionsbereich D differenzieren. Wir wählen $q = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Weiters sei $g(x) = \sqrt[n]{x}$ wie oben. Wegen $h(x) = (g(x))^m$ folgt aus der Kettenregel, dass $h'(x) = m(\sqrt[n]{x})^{m-1} \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1} = \frac{m}{n} x^{q - \frac{1}{n}} x^{\frac{1}{n} - 1} = qx^{q-1}$ für alle $x \in D$ gilt.

3. Monotonieverhalten von Funktionen

Eine Funktion kann auf gewissen Abschnitten ihres Definitionsbereichs monoton wachsend sein und auf anderen monoton fallend. Dieses Monotonieverhalten kann man mit Hilfe der Ableitung untersuchen. Dafür benötigt man den Mittelwertsatz, zu dessen Beweis ein Resultat über Extremwerte von stetigen Funktionen verwendet wird. Ein Extremwert kann ein Maximum sein, das ist der größte Wert, den die Funktion annimmt, oder ein Minimum, das ist der kleinste Wert, den die Funktion annimmt. Diese Bezeichnungsweise ist analog zum Maximmum und Minimum von endlich vielen reellen Zahlen.

Satz 2.8: *Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes abgeschlossenes Intervall. Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt ihr Maximum und ihr Minimum an, das heißt es gibt ein $x_0 \in [a, b]$, sodass $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, und es gibt ein $x_1 \in [a, b]$, sodass $f(x) \geq f(x_1)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.*

Dieser Satz wird später bewiesen. Zum Beweis des Mittelwertsatzes brauchen wir noch einen weiteren Satz über die Ableitung einer Funktion in einem Extremwert.

Satz 2.9: *Sei $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Wenn $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und einen Extremwert im Punkt $x \in (a,b)$ hat, dann gilt $f'(x) = 0$.*

Beweis: Der Extremwert im Punkt x sei ein Maximum. Dann gilt $f(y) \le f(x)$ für alle y in (a,b). Wir setzen $\varphi(y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Die Funktion φ ist auf $(a,x) \cup (x,b)$ definiert. Es gilt $\varphi(y) \ge 0$ für $y \in (a,x)$ und $\varphi(y) \le 0$ für $y \in (x,b)$. Da die Existenz von $f'(x)$ vorausgesetzt wird, gilt auch $\lim_{y\to x} \varphi(y) = f'(x)$.

Sei $\alpha = \frac{x-a}{2}$ und $x_n = x - \frac{\alpha}{n}$ für $n \ge 1$. Dann ist $(x_n)_{n\ge1}$ eine Folge im Intervall (a,x) mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Wegen Satz 2.1 gilt $\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = f'(x)$. Da $\varphi(x_n) \ge 0$ für alle n gilt, erhalten wir $f'(x) \ge 0$ wegen Satz 1.6 (a).

Sei $\beta = \frac{b-x}{2}$ und $y_n = x + \frac{\beta}{n}$ für $n \ge 1$. Dann ist $(y_n)_{n\ge1}$ eine Folge im Intervall (x,b) mit $\lim_{n\to\infty} y_n = x$. Wegen Satz 2.1 gilt $\lim_{n\to\infty} \varphi(y_n) = f'(x)$. Da $\varphi(y_n) \le 0$ für alle n gilt, erhalten wir $f'(x) \le 0$ wegen Satz 1.6 (a). Somit ist $f'(x) = 0$ gezeigt.

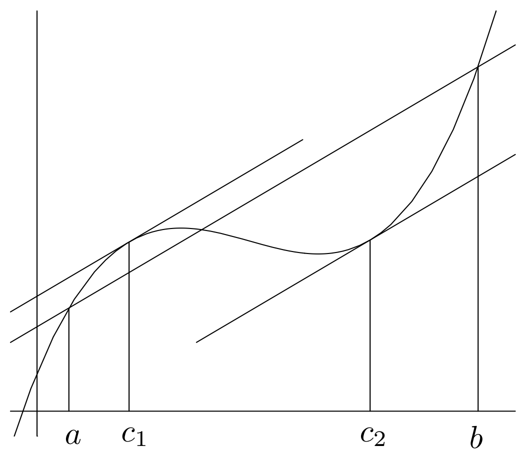
Der Beweis für ein Minimum verläuft analog. □

Satz 2.10 (Mittelwertsatz) *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf dem offenen Intervall (a,b) differenzierbar. Dann gibt es ein $c \in (a,b)$ mit $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Beweis: Wir nehmen zuerst $f(a) = f(b) = 0$ an und zeigen, dass $f'(c) = 0$ für ein $c \in (a,b)$ gilt. Gilt $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$, dann gilt auch $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$ und man kann jedes $x \in (a,b)$ als c wählen. Ansonsten liegt entweder ein Punkt, in dem die Funktion f ihr Maximum, oder ein Punkt, in dem die Funktion f ihr Minimum annimmt, im Intervall (a,b). Maximum und Minimum existieren ja nach Satz 2.8. Sei $c \in (a,b)$ ein Punkt, in dem die Funktion f einen Extremwert hat. Nach Satz 2.9 gilt $f'(c) = 0$.

Um den allgemeinen Fall zu behandeln, sei $g(x) = f(x) - f(a) - (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Dann ist $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) differenzierbar. Es gilt $g(a) = g(b) = 0$. Nach dem bereits bewiesenen Spezialfall gibt es ein $c \in (a,b)$ mit $g'(c) = 0$. Daraus folgt dann $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, was zu zeigen war. □

Man kann den Mittelwertsatz auch geometrisch interpretieren. Verbindet man den Punkt mit Koordinaten a und $f(a)$ und den Punkt mit Koordinaten b und $f(b)$ durch eine Gerade, so ist $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ihr Anstieg. Der Mittelwertsatz besagt dann, dass es zwischen den Punkten a und b einen Punkt c gibt, sodass die Tangente im Punkt mit Koordinaten c und $f(c)$ an den Graph von f parallel zu dieser Gerade (Sehne) liegt. Die nebenstehende Zeichnung zeigt ein Beispiel, wo es nicht nur einen solchen Punkt c, sondern zwei solche Punkte c_1 und c_2 gibt.



Der Zusammenhang zwischen dem Monotonieverhalten einer Funktion und ihrer Ableitung ist offensichtlich. Dort, wo die Funktion monoton wachsend ist, hat die Tangente einen positiven Anstieg, sodass die Ableitung positiv ist. Dort, wo die Funktion monoton fallend ist, hat die Tangente einen negativen Anstieg, sodass die Ableitung negativ ist. Der Mittelwertsatz ermöglicht einen Beweis dieser Aussagen.

Satz 2.11: *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und im offenen Intervall (a,b) differenzierbar.*
(a) *Wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$ gilt, dann ist f konstant.*
(b) *Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$ gilt, dann ist f monoton wachsend.*
(c) *Wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$ gilt, dann ist f streng monoton wachsend.*
(d) *Wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a,b)$ gilt, dann ist f monoton fallend.*
(e) *Wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a,b)$ gilt, dann ist f streng monoton fallend.*

Beweis: Seien u und v beliebig in $[a,b]$ mit $u < v$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $c \in (u,v) \subseteq (a,b)$ mit $f(v) - f(u) = (v-u)f'(c)$. Damit kann man jetzt die einzelnen Fälle behandeln. Im ersten Fall ist $f'(c) = 0$, also $f(v) = f(u)$ für alle u und v in $[a,b]$ und daher ist f konstant. Im zweiten Fall ist $f'(c) \geq 0$, also $f(v) \geq f(u)$, und daher ist f monoton wachsend. Im dritten Fall ist $f'(c) > 0$, also $f(v) > f(u)$, und daher ist f streng monoton wachsend. Ebenso lassen sich die anderen Fälle behandeln. □

Beispiel: Sei $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ mit Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$. Es soll das Monotonieverhalten von f bestimmt werden. Wir berechnen $f'(x) = \frac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ mit Hilfe der Quotientenregel. Da $(1+x^2)^2 > 0$ für alle x gilt, hat $f'(x)$ dasselbe Vorzeichen wie $1-x^2$. Somit gilt $f'(x) < 0$ für $x \in (-\infty,-1)$ und $x \in (1,\infty)$ und $f'(x) > 0$ für $x \in (-1,1)$. Daher ist f auf dem Intervall $(-\infty,-1]$ streng monoton fallend, auf dem Intervall $[-1,1]$ streng monoton wachsend, und auf dem Intervall $[1,\infty)$ wieder streng monoton fallend. Da die x-Achse eine Asymptote ist (der Grad des Zählerpolynoms ist kleiner als der Grad des Nennerpolynoms), hat man bereits eine gute Vorstellung, wie der Graph von f aussieht.

Beispiel: Sei $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \sqrt{x^2+3}$ mit Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$. Die Ableitung ist $f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$. Wir schreiben $f'(x) = \frac{x}{2\sqrt{x^2+3}}(\sqrt{x^2+3}-2)$ als Produkt, um das Vorzeichen zu bestimmen. Der erste Faktor ist genau dann positiv, wenn $x \in (0,\infty)$ gilt. Der zweite Faktor ist genau dann positiv, wenn $x^2 > 1$ gilt, also $x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$. Daraus folgt dann, dass $f' > 0$ auf den Intervallen $(-1,0)$ und $(1,\infty)$ und $f' < 0$ auf den Intervallen $(-\infty,-1)$ und $(0,1)$ gilt. Somit ist die Funktion f auf $(-\infty,-1]$ streng monoton fallend, auf $[-1,0]$ streng monoton wachsend, auf $[0,1]$ wieder streng monoton fallend und schließlich auf $[1,\infty)$ wieder streng monoton wachsend.

Sei D ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Für Punkte a und b in D mit $a < b$ sei $\ell_{a,b}(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$ die Gerade (Sehne) durch den Punkt mit Koordinaten a und $f(a)$ und den mit Koordinaten b und $f(b)$. Die Funktion f heißt konvex, wenn $f(x) \leq \ell_{a,b}(x)$ für alle a und b in D und $x \in (a,b)$ gilt, das heißt die Sehne liegt immer oberhalb der Funktion. Die Funktion f heißt konkav, wenn $f(x) \geq \ell_{a,b}(x)$ für alle a und b in D und $x \in (a,b)$ gilt, das heißt die Sehne liegt immer unterhalb der Funktion.

Satz 2.12: *Sei D ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Wenn $f''(y) \leq 0$ für alle $y \in D$ gilt, dann ist f konkav. Wenn $f''(y) \geq 0$ für alle $y \in D$ gilt, dann ist f konvex.*

Beweis: Für alle a und b in D mit $a < b$ und alle $x \in (a,b)$ folgt mit Hilfe von Satz 2.10

$$\ell_{a,b}(x) - f(x) = \frac{(x-a)(f(b)-f(x))-(b-x)(f(x)-f(a))}{b-a} = \frac{(x-a)(b-x)f'(y_2)-(b-x)(x-a)f'(y_1)}{b-a}$$

wobei $a < y_1 < x < y_2 < b$ gilt. Nochmaliges Anwenden von Satz 2.10 ergibt

$$\ell_{a,b}(x) - f(x) = \frac{(x-a)(b-x)(y_2-y_1)f''(y)}{b-a} \qquad \text{für ein} \quad y \in (y_1,y_2) \subseteq D$$

Gilt $f''(y) \leq 0$ für alle $y \in D$, dann folgt daraus $\ell_{a,b}(x) - f(x) \leq 0$, das heißt f ist konkav. Gilt $f''(y) \geq 0$ für alle $y \in D$, dann folgt $\ell_{a,b}(x) - f(x) \geq 0$, das heißt f ist konvex. □

4. Extremwerte

Eine Anwendung der Untersuchungen über das Monotonieverhalten von Funktionen im letzten Kapitel ist die Berechnung von lokalen Extremwerten von differenzierbaren Funktionen. Man sagt, dass die Funktion f im Punkt x ein lokales Minimum hat, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $f(y) > f(x)$ für alle $y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \setminus \{x\}$ gilt. Analog spricht man von einem lokalen Maximum im Punkt x, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $f(y) < f(x)$ für alle $y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \setminus \{x\}$ gilt. Oft verwendet man folgenden Satz.

Satz 2.13: *Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und $x \in (a,b)$.*
Wenn $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$ gilt, dann hat f im Punkte x ein lokales Minimum.
Wenn $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$ gilt, dann hat f im Punkte x ein lokales Maximum.

Beweis: Wir behandeln nur den Fall $f''(x) > 0$. Wir wählen $\alpha = \frac{f''(x)}{2} > 0$. Wegen $f''(x) = \lim_{y\to x} \frac{f'(y)-f'(x)}{y-x}$ existiert ein $\delta > 0$ mit $\frac{f'(y)-f'(x)}{y-x} \geq \alpha$ für $y \in (x-\delta, x+\delta) \setminus \{x\}$. Wegen $f'(x) = 0$ erhalten wir $\frac{f'(y)}{y-x} \geq \alpha > 0$ für $y \in (x-\delta, x+\delta) \setminus \{x\}$.
Für $y \in (x-\delta, x)$ gilt $y-x < 0$ und daher auch $f'(y) < 0$. Für $y \in (x, x+\delta)$ gilt $y-x > 0$ und daher auch $f'(y) > 0$. Somit ist f streng monoton fallend auf $(x-\delta, x]$ und streng monoton wachsend auf $[x, x+\delta)$. Es folgt, dass $f(y) > f(x)$ für alle $y \in (x-\delta, x+\delta) \setminus \{x\}$ gilt, also f ein lokales Minimum in x hat. □

Um festzustellen, ob eine Funktion in einer Nullstelle ihrer Ableitung ein Maximum oder ein Minimum hat, ist es nicht notwendig, die zweite Ableitung auszurechnen. Man kann auch das Vorzeichen der Ableitung in den Intervallen zwischen den berechneten Nullstellen der Ableitung bestimmen. Dann weiß man, auf welchen dieser Intervalle die Funktion wächst und auf welchen sie fällt, und erkennt so, wo sie ein lokales Maximum und wo sie ein lokales Minimum hat.

Beispiel: Wir zeigen, dass unter allen Rechtecken mit gegebener Diagonale das Quadrat die größte Fläche hat. Sei d die gegebene Länge der Diagonale. Ist x die eine Rechteckseite, dann ist die andere gleich $\sqrt{d^2 - x^2}$. Die Fläche des Rechtecks ist $x\sqrt{d^2 - x^2}$. Anstatt das Maximum der Funktion $f(x) = x\sqrt{d^2 - x^2}$ zu suchen, berechnen wir es für die Funktion $g(x) = f(x)^2 = x^2(d^2 - x^2)$, da g und f ihr Maximum im selben Punkt annehmen. Wir erhalten $g'(x) = 2d^2x - 4x^3$. Die Nullstellen dieser Ableitung sind $x_1 = -d/\sqrt{2}$, $x_2 = 0$ und $x_3 = d/\sqrt{2}$. Wegen $g'(x) = -2x(2x^2 - d^2)$ ist g' negativ auf den Intervallen $(d/\sqrt{2}, \infty)$ und $(-d/\sqrt{2}, 0)$. Daher ist g dort streng monoton fallend. Ebenso sieht man, dass g' positiv auf den Intervallen $(-\infty, -d/\sqrt{2})$ und $(0, d/\sqrt{2})$ ist. Daher ist g dort streng monoton wachsend. Aus diesem Verhalten sieht man, dass g lokale Maxima in den Punkten $d/\sqrt{2}$ und $-d/\sqrt{2}$ hat und ein lokales Minimum im Punkt 0. Natürlich sind nur Seitenlängen $x \in [0, d]$ sinnvoll. Wir haben eine maximale Fläche, wenn $x = d/\sqrt{2}$ ist. Die andere Rechteckseite ist dann auch $d/\sqrt{2}$, sodass ein Quadrat vorliegt.

Beispiel: Wir berechnen den kleinsten Abstand des Punktes $(12, \frac{15}{2})$ von der Parabel $y = x^2$. Das Quadrat des Abstandes dieses Punkts zu einem Punkt auf der Parabel ist $f(x) = (x-12)^2 + (x^2 - \frac{15}{2})^2 = x^4 - 14x^2 - 24x + \frac{801}{4}$. Wir suchen lokale Minima und Maxima dieser Funktion. Es gilt $f'(x) = 4(x^3 - 7x - 6)$. Die Nullstellen dieser Ableitung sind $x_1 = 3$, $x_2 = -1$ und $x_3 = -2$. Daraus folgt $f'(x) = 4(x-3)(x+1)(x+2)$. Auf den Intervallen $(-2, -1)$ und $(3, \infty)$ ist f' positiv und f daher streng monoton wachsend. Auf den Intervallen $(-\infty, -2)$ und $(-1, 3)$ ist f' negativ und f daher streng monoton fallend.

Lokale Minima haben wir für $x_1 = 3$ und $x_3 = -2$. Für $x_2 = -1$ liegt ein lokales Maximum vor. Der Abstand vom Punkt $(12, \frac{15}{2})$ zum Punkt $(3, 9)$ beträgt $\frac{\sqrt{333}}{2}$. Der Abstand vom Punkt $(12, \frac{15}{2})$ zum Punkt $(-2, 4)$ beträgt $\frac{\sqrt{449}}{2}$. Daher ist $(3, 9)$ der Punkt auf der Parabel, der den kleinsten Abstand vom Punkt $(12, \frac{15}{2})$ hat. Wandert man vom Punkt $(3, 9)$ aus die Parabel entlang zum Punkt $(-1, 1)$, so wird der Abstand immer größer. Hat man den Punkt $(-1, 1)$ überschritten, dann wird der Abstand wieder kleiner, bis man den Punkt $(-2, 4)$ erreicht. Nach Überschreiten dieses Punktes vergrößert sich der Abstand wieder.

5. Gleichungen und Ungleichungen

Man kann die Methoden aus dem letzten Kapitel zum Beweis von Gleichungen und Ungleichungen verwenden. Beweist man, dass die Funktion f konstant ist, dann hat man die Gleichung $f(x) = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ bewiesen. Beweist man, dass die Funktion f das Minimum c annimmt, dann hat man die Ungleichung $f(x) \geq c$ bewiesen. Als erste Anwendung dieser Methode wollen wir den sogenannten binomischen Lehrsatz behandeln. Dazu benötigen wir die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k \leq n$.

Satz 2.14 (Binomischer Lehrsatz) *Es gilt* $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *und* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Dazu sei $f_n(x) = (1+x)^n - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}x^k$. Um den Satz zu beweisen, zeigen wir, dass $f_n(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir beginnen mit $n = 1$. Es gilt $f_1(x) = (1+x) - \binom{1}{0} - \binom{1}{1}x = 0$. Für $n = 1$ ist die Aussage also richtig. Bevor wir größere n behandeln, berechnen wir $k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$ und damit

$$f_n'(x) = n(1+x)^{n-1} - \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1} = n(1+x)^{n-1} - \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}x^{k-1} = nf_{n-1}(x).$$

Ist $f_{n-1}(x) = 0$ für alle x gezeigt, dann folgt wegen $f_n'(x) = nf_{n-1}(x) = 0$, dass f_n eine konstante Funktion ist, und wegen $f_n(0) = 1^n - \binom{n}{0} = 0$ folgt $f_n(x) = 0$ für alle x. Damit ist die gesuchte Gleichung durch Induktion bewiesen. □

Mit Hilfe von Satz 2.14 können wir folgende Grenzwerte bestimmen.

Satz 2.15: *Es existieren folgende Grenzwerte*
(a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$ *für alle* $x > 0$
(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^m}{x^n} = 0$ *für alle* $m \in \mathbb{N}$ *und alle* $x > 1$

Beweis: Um (a) zu zeigen, sei $x \geq 1$. Wegen Satz 1.16 gilt $\sqrt[n]{x} \geq 1$. Läßt man auf der rechten Seite des binomischen Lehrsatzes alle Summanden außer dem zweiten weg, so folgt $(1+y)^n \geq ny$ für $n \geq 1$ und $y \geq 0$. Setzt man in diese Ungleichung $y = \sqrt[n]{x} - 1 \geq 0$ ein, so erhält man $\sqrt[n]{x} \leq 1 + \frac{x}{n}$. Es gilt somit $1 \leq \sqrt[n]{x} \leq 1 + \frac{x}{n}$ für $n \geq 1$. Mit Hilfe von Satz 1.7 folgt daraus $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$. Sei jetzt $x \in (0, 1)$. Für $y = \frac{1}{x}$ gilt $y > 1$, sodass wir $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{y} = 1$ schon gezeigt haben. Aus Satz 1.18 (a) folgt $\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} = 1$, also $\sqrt[n]{x} = \frac{1}{\sqrt[n]{y}}$. Mit Hilfe von Satz 1.6 (d) erhalten wir $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$. Damit ist (a) erledigt.

Wir zeigen (b). Läßt man auf der rechten Seite des binomischen Lehrsatzes alle Summanden außer dem dritten weg, so folgt $(1+x)^n \geq \binom{n}{2}x^2$ für $n \geq 2$ und $x \geq 0$. Indem man $\sqrt[n]{n} - 1$ für x einsetzt, folgt wie oben, dass $1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \sqrt{2/(n-1)}$ für $n \geq 2$ gilt. Da die Wurzelfunktion im Punkt 0 stetig ist, gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2/(n-1)} = 0$ wegen Satz 1.9. Mit Hilfe von Satz 1.7 erhalten wir dann $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Um (c) zu zeigen, überlegen wir uns zuerst, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{n^m}{n(n-1)\dots(n-m)} = 0$ gilt. Das folgt wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = 1$, ... , $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-m} = 1$, indem man das Produkt dieser Folgen bildet. Läßt man auf der rechten Seite des binomischen Lehrsatzes alle Summanden außer dem $k+1$-ten weg, so folgt $(1+y)^n \geq \binom{n}{k} y^k$ für $n \geq k$ und $y \geq 0$. Setzt man $y = x-1$ und $k = m+1$, so ergibt sich $x^n \geq \binom{n}{m+1}(x-1)^{m+1}$ für $n \geq m+1$ und daraus $0 \leq \frac{n^m}{x^n} \leq \frac{n^m}{n(n-1)\dots(n-m)} \frac{(m+1)!}{(x-1)^{m+1}}$. Wendet man Satz 1.7 an, so folgt (c). □

Die folgenden beiden Ungleichung brauchen wir, wenn wir die Exponentialfunktion und den Logarithmus behandeln.

Satz 2.16: *Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n > -x$ gilt $(1+\frac{x}{n})^n \leq (1+\frac{x}{n+1})^{n+1}$.*

Beweis: Wir untersuchen $f(x) = (1+\frac{x}{n+1})^{n+1}/(1+\frac{x}{n})^n$ auf dem Intervall $(-n,\infty)$. Es gilt $f'(x) = \frac{x}{n(n+1)}(1+\frac{x}{n+1})^n(1+\frac{x}{n})^{-n-1}$, das ist > 0 für $x \in (0,\infty)$ und < 0 für $x \in (-n,0)$, sodass f auf $[0,\infty)$ monoton wachsend und auf $(-n,0]$ monoton fallend ist. Wegen $f(0) = 1$ folgt $f(x) \geq 1$, das heißt $(1+\frac{x}{n})^n \leq (1+\frac{x}{n+1})^{n+1}$ für $x \in (-n,\infty)$. □

Satz 2.17: *Es gilt $(n+1)(\sqrt[n+1]{x}-1) \leq n(\sqrt[n]{x}-1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $x > 0$.*

Beweis: Sei $f(x) = n(\sqrt[n]{x}-1) - (n+1)(\sqrt[n+1]{x}-1)$ mit Definitionsbereich $D = (0,\infty)$. Wir berechnen die Ableitung $f'(x) = n\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} - (n+1)\frac{1}{n+1}x^{\frac{1}{n+1}-1} = x^{\frac{1}{n}-1} - x^{\frac{1}{n+1}-1}$. Wegen $\frac{1}{n} - 1 > \frac{1}{n+1} - 1$ erhalten wir $f'(x) < 0$ für $x \in (0,1)$ und $f'(x) > 0$ für $x \in (1,\infty)$. Wegen Satz 2.11 ist f auf $(0,1]$ monoton fallend und auf $[1,\infty)$ monoton wachsend. Es gilt also $f(x) \geq f(1)$ für alle $x > 0$. Wegen $f(1) = 0$ ist das die gesuchte Ungleichung. □

Wir beweisen noch eine Verallgemeinerung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung.

Satz 2.18: *Sei $p > 1$ und $q = \frac{p}{p-1}$. Seien a_i und b_i für $1 \leq i \leq n$ reelle Zahlen. Dann gilt die Hölder-Ungleichung $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |a_i|^p}\,\sqrt[q]{\sum_{i=1}^n |b_i|^q}$.*

Beweis: Für $0 < r < 1$ sei $f(x) = x^r - rx - 1 + r$ mit Definitionsbereich $D = (0,\infty)$. Es gilt $f'(x) = rx^{r-1} - r$. Wegen $f'(x) > 0$ für $x \in (0,1)$ und $f'(x) < 0$ für $x \in (1,\infty)$ hat die Funktion f im Punkt 1 ihr Maximum. Es gilt also $f(x) \leq f(1) = 0$, das heißt $x^r \leq rx + 1 - r$ für alle $x > 0$. Sind u und v in $(0,\infty)$, dann kann man $x = \frac{u}{v}$ setzen. Multiplikation mit v ergibt $u^r v^{1-r} \leq ru + (1-r)v$. Diese Ungleichung ist auch noch richtig für $u = 0$ oder $v = 0$ oder beides. Daher ist sie für alle $u \geq 0$ und $v \geq 0$ gezeigt.

Sind alle a_i gleich 0 oder alle b_i gleich 0, dann ist die zu beweisende Ungleichung erfüllt. Wir setzen $U = \sum_{i=1}^n |a_i|^p$ und $V = \sum_{i=1}^n |b_i|^q$ und können annehmen, dass $U > 0$ und $V > 0$ gilt. Somit sind $u_i = \frac{|a_i|^p}{U}$ und $v_i = \frac{|b_i|^q}{V}$ für $1 \leq i \leq n$ definiert und es gilt $\sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^n v_i = 1$. Setzt man $u = u_i$ und $v = v_i$ in obiger Ungleichung und summiert über i so erhält man $\sum_{i=1}^n u_i^r v_i^{1-r} \leq 1$, das heißt $\sum_{i=1}^n |a_i|^{pr}|b_i|^{q(1-r)} \leq U^r V^{1-r}$. Setzt man jetzt $r = \frac{1}{p}$ und beachtet, dass dann $1 - r = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$ nach Voraussetzung gilt, so ergibt sich $\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \sqrt[p]{U}\,\sqrt[q]{V}$. Das ist bereits die zu beweisende Ungleichung. □

6. Trigonometrische Funktionen

Trigonometrische Funktionen spielen eine wichtige Rolle in der Geometrie, zum Beispiel für Dreiecksberechnungen. Sie sind auch für die Physik wichtig. Sie treten zum Beispiel bei der Untersuchung von Schwingungen auf.

Der Einheitskreis ist der Kreis mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius 1. Um die Funktionen sin und cos zu definieren, sei $x \in \mathbb{R}$. Vom Punkt $(1,0)$ aus wird die Länge x auf dem Einheitskreis gemessen (für $x > 0$ im Gegenuhrzeigersinn, für $x < 0$ im Uhrzeigersinn). Die Koordinaten des so ereichten Punktes nennen wir $\cos x$ und $\sin x$.

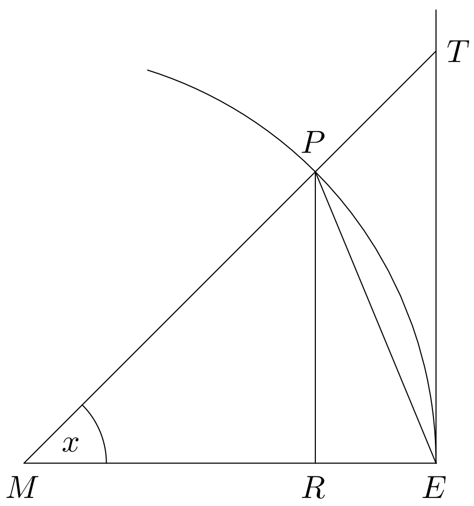
(Um eine einwandfreie Definition der trigonometrischen Funktionen zu erhalten, sollte man mit der Umkehrfunktion argumentieren. Für $t \in [-1,1]$ sei $k(t)$ die Länge des Kreisbogens vom Punkt $(1,0)$ bis zum Punkt $(t, \sqrt{1-t^2})$. Die Abbildung $t \mapsto k(t)$ ist stetig und streng monoton fallend. Das kann man mit Hilfe von Satz 1.19 beweisen. Weiters gilt $k(-1) = \pi$ und $k(1) = 0$. Somit existiert die Umkehrfunktion, die das Intervall $[0,\pi]$ auf das Intervall $[-1,1]$ abbildet. Das ist der cos. Und $\sin x$ erhält man als $\sqrt{1-\cos^2 x}$.)

Da man beim Abmessen der Längen x und $x + 2\pi$ den selben Punkt am Einheitskreis erreicht, erhält man $\sin(x+2\pi) = \sin x$ und $\cos(x+2\pi) = \cos x$. Man sagt, die Funktionen sin und cos haben Periode 2π.

Satz 2.19: *Für die Funktionen* sin *und* cos *gelten folgende Gleichungen*
(a) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
(b) $\sin 0 = \sin \pi = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$, $\cos 0 = 1$, $\cos \pi = -1$, $\cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{3\pi}{2} = 0$
(c) $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$
(d) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$, $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$, $\sin(x + \pi) = -\sin x$, $\cos(x + \pi) = -\cos x$

Beweis: Wir erhalten (a), da der Punkt mit den Koordinaten $\cos x$ und $\sin x$ auf dem Einheitskreis liegt. Auch (b) folgt sofort aus der Definition, indem man die Koordinaten der Punkte abliest, die man erhält, wenn man die Längen 0, $\frac{\pi}{2}$, π und $\frac{3\pi}{2}$ am Einheitskreis aufträgt. Da die Punkte, die man erhält, wenn man die Längen x und $-x$ am Einheitskreis aufträgt, symmetrisch zur x-Achse liegen, folgt (c). Den Vektor $\binom{\cos(x+\frac{\pi}{2})}{\sin(x+\frac{\pi}{2})}$ erhält man, indem man den Vektor $\binom{\cos x}{\sin x}$ um 90^0 im Gegenuhrzeigersinn verdreht. Das ergibt die ersten beiden Gleichungen von (d). Den Vektor $\binom{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)}$ erhält man, indem man den Vektor $\binom{\cos x}{\sin x}$ um den Nullpunkt spiegelt. Das ergibt die anderen Gleichungen von (d). □

Die Tangente an den Einheitskreis im Punkt $E = (1,0)$ ist parallel zur y-Achse. Für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ hat die Gerade durch den Koordinatenursprung M und durch den Punkt $P = (\cos x, \sin x)$ einen Schnittpunkt mit dieser Tangente, den wir T nennen. Wir definieren $\tan x$ als die y-Koordinate dieses Schnittpunkts T. Bezeichnet man den Punkt $(\cos x, 0)$ noch mit R, dann sind die Dreiecke PMR und TME zueinander ähnlich. Es gilt $|PR| : |RM| = |TE| : |EM|$ nach dem Strahlensatz. Das ist $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\tan x}{1}$. Wir haben die Formel $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ gewonnen.



Um die Ableitungen berechnen zu können, brauchen wir folgende Ungleichungen.

Satz 2.20: *Für* $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ *gilt* $\sin x \le x$ *und* $x \le \tan x$.

Beweis: Wir verwenden die oben eingeführten Bezeichnungen. Die Fläche des Dreiecks MEP ist kleiner als die Fläche des Kreissektors zwischen den Radien $\overline{ME}$ und $\overline{MP}$. Die

Grundlinie des Dreicks MEP hat Länge 1 und die zugehörige Höhe ist $\sin x$. Daher ist $\frac{1}{2}\sin x$ die Fläche des Dreicks MEP. Da der Kreissektor Radius 1 und Bogenlänge x hat, ist seine Fläche nach Satz 1.19 gleich $\frac{1}{2}x$. Wir erhalten also $\frac{1}{2}\sin x \le \frac{1}{2}x$. Das ergibt die erste der beiden Ungleichungen.

Die Fläche des Dreiecks MET ist größer als die Fläche des Kreissektors zwischen den Radien $\overline{ME}$ und $\overline{MP}$. Die Grundlinie des Dreicks MET hat Länge 1 und die zugehörige Höhe ist $\tan x$. Daher ist $\frac{1}{2}\tan x$ die Fläche des Dreiecks MET. Sie ist größer als die Fläche $\frac{1}{2}x$ des Kreissektors, woraus die zweite der beiden Ungleichungen folgt. $\square$

Satz 2.21 (Summensätze) *Für x und y in $\mathbb{R}$ gelten die beiden Formeln*
(a) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
(b) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.

Beweis: Misst man vom Punkt $(1,0)$ aus am Einheitskreis im Gegenuhrzeigersinn die Länge x, so kommt man zum Punkt $(\cos x, \sin x)$. Misst man vom Punkt $(1,0)$ aus am Einheitskreis im Uhrzeigersinn die Länge y, so kommt man zum Punkt $(\cos y, -\sin y)$. Die Länge des Kreisbogens zwischen diesen Punkten ist $x+y$. Der Kreisbogen zwischen den Punkten $(1,0)$ und $(\cos(x+y), \sin(x+y))$ hat ebenfalls die Länge $x+y$. Daher ist auch die Länge der Strecke vom Punkt $(\cos x, \sin x)$ zum Punkt $(\cos y, -\sin y)$ gleich der Länge der Strecke vom Punkt $(1,0)$ zum Punkt $(\cos(x+y), \sin(x+y))$. Das heißt also

$$\sqrt{(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2} = \sqrt{(1 - \cos(x+y))^2 + (\sin(x+y))^2}$$

Man kann die Wurzeln auf beiden Seiten weglassen. Quadriert man aus, so erhält man

$$\begin{aligned}&\cos^2 x - 2\cos x \cos y + \cos^2 y + \sin^2 x + 2 \sin x \sin y + \sin^2 y\\ &\qquad = 1 - 2\cos(x+y) + \cos^2(x+y) + \sin^2(x+y)\end{aligned}$$

An drei verschiedenen Stellen kann man die Formel aus Satz 2.19 (a) anwenden, und erhält $1 - 2\cos x \cos y + 1 + 2 \sin x \sin y = 1 - 2\cos(x+y) + 1$. Damit sind wir bei der Formel $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ angelangt und (b) ist gezeigt.

Wir ersetzen in dieser soeben gezeigten Formel y durch $y + \frac{\pi}{2}$. Aus Satz 2.19 (d) folgt $\cos(x + y + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x+y)$, $\cos(y + \frac{\pi}{2}) = -\sin y$ und $\sin(y + \frac{\pi}{2}) = \cos y$. Setzt man das ein, so erhält man $-\sin(x+y) = \cos x(-\sin y) - \sin x \cos y$. Das ist (a). $\square$

Jetzt sind wir soweit, um die Ableitungen von sin und cos berechnen zu können.

Satz 2.22: *Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin' x = \cos x$ und $\cos' x = -\sin x$.*

Beweis: Wir zeigen zuerst $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ und $\lim_{h \to 0} \frac{1-\cos h}{h} = 0$. Für $h \in (0, \frac{\pi}{2})$ gilt $\sin h \le h$ und $h \le \tan h = \frac{\sin h}{\cos h}$ nach Satz 2.20 und daher auch $\cos h \le \frac{\sin h}{h} \le 1$. Setzt man $-h$ für h ein, so ändert sich weder $\cos h$ noch $\frac{\sin h}{h}$. Somit gilt $\cos h \le \frac{\sin h}{h} \le 1$ für alle $h \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$. Weiters gilt $\lim_{h \to 0} \cos h = 1$, wie man aus der Definition des cos erkennt (oder: für $h \in (-1,1) \setminus \{0\}$ folgt $\sqrt{1-h^2} \le \cos h$ aus Satz 2.19 (a) und $\frac{\sin h}{h} \le 1$). Aus Satz 2.3 folgt somit $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$.

Wegen Satz 2.19 (a) gilt $\frac{1-\cos h}{h} = \frac{1-\cos^2 h}{h(1+\cos h)} = \frac{\sin^2 h}{h(1+\cos h)} = (\frac{\sin h}{h})^2 \frac{h}{1+\cos h}$. Mit Hilfe von Satz 2.2 und der oben gefundenen Grenzwerte folgt $\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} = 0$.

Mit Hilfe der Summensätze kann man jetzt $\sin' x$ und $\cos' x$ berechnen. Aus dem Summensatz für den sin folgt $\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = -\sin x \frac{1-\cos h}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}$. Läßt man h gegen 0 gehen, so folgt $\sin' x = \cos x$ mit Hilfe obiger Resultate und Satz 2.2.

Ebenso folgt $\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = -\cos x \frac{1-\cos h}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h}$ aus dem Summensatz für den cos und daraus $\cos' x = -\sin x$ mit $h \to 0$. $\square$

Für ein beliebiges Dreieck gelten der Sinus– und der Cosinussatz.

Satz 2.23 (Sinussatz) *In einem beliebigem Dreieck mit Fläche F und den üblichen Bezeichnungen gilt* $\frac{2F}{abc} = \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$.

Beweis: Sei h die Länge der Höhe auf c. Dann gilt $2F = ch$. Weiters gilt $\sin\alpha = \frac{h}{b}$ (wegen $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$ gilt das auch, wenn die Höhe ausserhalb des Dreiecks liegt). Daraus folgt dann $\frac{2F}{abc} = \frac{h}{ab} = \frac{b\sin\alpha}{ab} = \frac{\sin\alpha}{a}$. Analog folgt $\frac{2F}{abc} = \frac{\sin\beta}{b}$ und $\frac{2F}{abc} = \frac{\sin\gamma}{c}$. $\square$

Satz 2.24 (Cosinussatz) *In einem Dreieck mit den üblichen Bezeichnungen gilt* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ *und* $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Beweis: Sei H der Fußpunkt der Höhe auf die Seite c und h deren Länge. Sei p der Abstand von H zum Eckpunkt A, wenn H rechts von A liegt oder gleich A ist (spitzer Winkel α), und der mit negativem Vorzeichen versehene Abstand, wenn H links von A liegt (stumpfer Winkel α). In beiden Fällen gilt dann $\cos\alpha = \frac{p}{b}$ das heißt $p = b\cos\alpha$. Aus dem Satz von Pythagoras folgt $b^2 = h^2 + p^2$ und $a^2 = h^2 + (c-p)^2$. Subtraktion ergibt $b^2 - a^2 = p^2 - (c-p)^2 = 2pc - c^2$. Setzt man für p ein, so erhält man $b^2 - a^2 = 2bc\cos\alpha - c^2$, das heißt $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Die anderen Gleichungen beweist man analog. $\square$

Zum Abschluss behandeln wir noch kurz den Tangens und seine Umkehrfunktion. Sei $D = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Da $\cos x > 0$ für $x \in D$ gilt, ist $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ auf D definiert und stetig. Aus der Quotientenregel folgt

$$\tan' x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Wegen $\tan' x > 0$ für alle $x \in D$ ist tan eine streng monoton wachsende Funktion. Wegen $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ geht $\tan x$ gegen ∞, wenn x gegen $\frac{\pi}{2}$ geht. Ebenso geht $\tan x$ gegen $-\infty$, wenn x gegen $-\frac{\pi}{2}$ geht. Der Wertebereich $\{\tan x : x \in D\}$ ist daher $\mathbb{R}$. Es existiert die Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Ihre Ableitung ist wegen Satz 2.7

$$\arctan' x = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

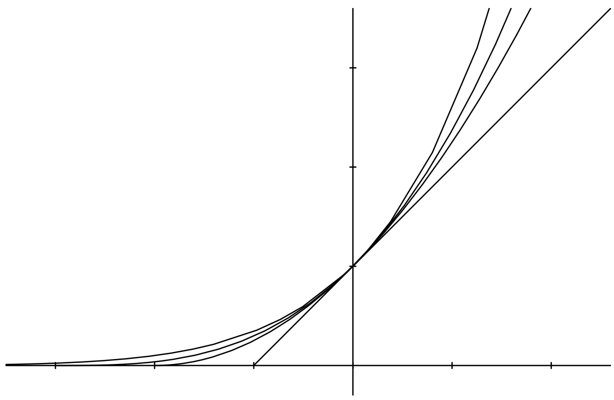
Es stellt sich heraus, dass die Ableitung des arctan eine rationale Funktion ist. Der arctan ist ebenfalls streng monoton wachsend.

7. Exponentialfunktion und Logarithmus

Die Exponentialfunktion verwendet man, um Wachstum zu beschreiben. Ein Beispiel ist die Verzinsung eines Geldbetrags a. Ist x die Zinsrate, so hat man nach einem Jahr den Betrag $a(1+x)$. Angenommen, die Zinsen werden nicht erst am Ende des Jahres gutgeschrieben, sondern in Monatsabständen. Nach einem Monat hat man dann den Betrag $a(1+\frac{x}{12})$, nach zwei Monaten den Betrag $a(1+\frac{x}{12})(1+\frac{x}{12})$, und nach einem Jahr den Betrag $a(1+\frac{x}{12})^{12}$. Teilt man das Jahr in n gleich lange Perioden und nimmt an, dass die Zinsen jeweils am Ende dieser Perioden gutgeschrieben werden, dann hat man am Ende des Jahres den Betrag $a(1+\frac{x}{n})^n$. Würde man diese Perioden immer kleiner machen, das heißt n gegen ∞ gehen lassen, dann hätte man $a\,u(x)$ mit $u(x) = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$. Das wäre der Betrag am Ende des Jahres, wenn man kontinuierlich verzinsen würde.

Ein anderes Beispiel ist die Vermehrung von Zellen oder das Wachstum einer Bakterienkolonie. Hier finden die Zellteilungen laufend statt. Man kann dieses Zellenwachstum als einen kontinuierlichen Prozess auffassen. Ist a die Anzahl der Zellen zu Beginn und x der relative Anteil der Zellen, die sich während einer Zeiteinheit teilen, dann hat man $a(1+x)$ Zellen am Ende eines Zeitintervalls, dessen Länge eine Zeiteinheit ist. Da aber die Anzahl der Zellen während dieses Zeitintervalls nicht konstant bleibt, kann man diese Überlegung nur auf sehr kleine Zeitintervalle anwenden. Wir teilen das Einheitszeitintervall in n Intervalle der Länge $\frac{1}{n}$ und erhalten $a(1+\frac{x}{n})^n$ als Anzahl der Zellen nach einer Zeiteinheit. Im Grenzwert $n \to \infty$ ergibt sich $a\,u(x)$ wie oben.

Ein weiteres Beispiel ist der radioaktive Zerfall. Sei a die ursprünglich vorhandene Menge an radioaktivem Material und x die Zerfallsrate. Dabei muss x negativ sein, da die Menge des radioaktiven Materials ja abnimmt. Dieselbe Vorgangsweise wie oben ergibt, dass die nach einer Zeiteinheit noch vorhandene Menge gleich $a\,u(x)$ ist.



Die Funktion $u(x) = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$ nennt man Exponentialfunktion. Aber zuerst ist zu zeigen, dass dieser Grenzwert existiert. Für $n = 1, 2, 3, 8$ ist die Funktion $x \mapsto (1+\frac{x}{n})^n$ nebenstehend gezeichnet und zwar jeweils auf dem Intervall $[-n, \infty)$. Dort ist die Funktion monoton wachsend und hat nichtnegative Werte. Man sieht auch, dass der Graph jeder dieser Funktionen über dem Graph der vorhergehenden liegt. Das wurde auch in Satz 2.16 gezeigt. Es ist bereits erkennbar, wie die Grenzfunktion aussehen wird.

Für $n \ge 1$ definieren wir die Funktion $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $u_n(x) = (1+\frac{x}{n})^n$. Durch wiederholtes Anwenden von Satz 2.16 erhalten wir

(A) $$u_n(x) \ge u_m(x) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad n \ge m > -x$$

Gilt $|t| < 1$, dann gilt auch $(1+t)^n(1-t)^n = (1-t^2)^n < 1$. Damit erhalten wir

(B) $$u_n(x) \cdot u_n(-x) < 1 \quad \text{und} \quad u_n(x) < \tfrac{1}{u_n(-x)} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad n > |x|$$

Sei jetzt $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $n_0 > |x|$ gilt. Für alle $n \ge n_0$ erhalten wir dann $u_n(x) < \frac{1}{u_n(-x)} \le \frac{1}{u_{n_0}(-x)}$ wegen (B) und (A). Die Folge $(u_n(x))_{n \ge n_0}$ ist somit nach oben beschränkt. Wegen (A) ist sie auch monoton wachsend. Also existiert $u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$ nach Satz 1.8.

Damit ist gezeigt, dass $u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert. Es folgt $u(x) \ge 0$, da ja $u_n(x) > 0$ für alle $n > -x$ gilt. Da $u_n(0) = 1$ für alle n gilt, erhalten wir $u(0) = 1$. Die Zahl $u(1) = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ nennt man Eulersche Zahl und bezeichnet sie mit e.

Satz 2.25: *Für x und y in $\mathbb{R}$ gilt $u(x+y) = u(x)u(y)$. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt weiters $u(x) > 0$ und $u(-x) = \frac{1}{u(x)}$. Ist $q \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R}$, dann gilt $u(qx) = u(x)^q$, insbesondere $u(q) = e^q$.*

Beweis: Wir berechnen $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{y}{n+x})^n$. Dazu sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \ge |x|$ fest gewählt. Ist $n > |y| + k$, dann liegt $(1+\frac{y}{n+x})^n$ zwischen $(1+\frac{y}{n+k})^n$ und $(1+\frac{y}{n-k})^n$. Für beliebiges $m \in \mathbb{Z}$ gilt $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{y}{n+m})^n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{y}{n+m})^{n+m}(1+\frac{y}{n+m})^{-m} = u(y)$. Wegen Satz 1.7 folgt $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{y}{n+x})^n = u(y)$. Nun gilt aber $(1+\frac{x+y}{n})^n = (1+\frac{x}{n})^n(1+\frac{y}{n+x})^n$ für alle $n \ge 1$. Lässt man n gegen ∞ gehen, so erhält man $u(x+y) = u(x)u(y)$.

Setzt man $y = -x$ dann ergibt sich $1 = u(0) = u(x)u(-x)$. Einerseits folgt $u(x) \neq 0$ und daher $u(x) > 0$, da $u(x) \geq 0$ schon gezeigt wurde. Andererseits folgt $u(-x) = \frac{1}{u(x)}$.

Für $n \geq 0$ zeigen wir $u(nx) = u(x)^n$ mit Induktion. Für $n = 0$ gilt diese Gleichung wegen $u(0) = 1$ und für $n = 1$ ist sie trivial. Ist $u(nx) = u(x)^n$ bereits gezeigt, dann folgt $u((n+1)x) = u(nx+x) = u(nx)u(x) = u(x)^n u(x) = u(x)^{n+1}$ mit Hilfe der ersten Aussage dieses Satzes. Damit ist $u(nx) = u(x)^n$ für alle $n \geq 0$ gezeigt. Aus der zweiten Aussage dieses Satzes folgt nun $u(-nx) = \frac{1}{u(nx)} = \frac{1}{u(x)^n} = u(x)^{-n}$, sodass $u(nx) = u(x)^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gezeigt ist.

Für $q = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir $u(qx)^n = u(nqx) = u(mx) = u(x)^m$, woraus $u(qx) = \sqrt[n]{u(x)^m} = u(x)^q$ folgt. Setzt man $x = 1$, so hat man $u(q) = u(1)^q = e^q$. $\square$

Nach Satz 2.25 gilt $u(q) = e^q$ für alle $q \in \mathbb{Q}$. Das ist der Grund, warum man e^x statt $u(x)$ schreibt, auch wenn x nicht in $\mathbb{Q}$ liegt. Im nächsten Satz berechnen wir die Ableitung der Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Satz 2.26: *Die Funktion u ist differenzierbar und es gilt $u'(x) = u(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

Beweis: Wir berechnen die Ableitung von $u(x)$ im Punkt $x = 0$. Wegen (A) und (B) gilt

$$u_1(x) \leq u_n(x) \leq \frac{1}{u_n(-x)} \leq \frac{1}{u_1(-x)} \quad \text{für} \quad x \in (-1,1) \quad \text{und} \quad n \geq 1$$

Wir setzen für $u_1(x)$ und $u_1(-x)$ ein, lassen n gegen ∞ gehen und erhalten

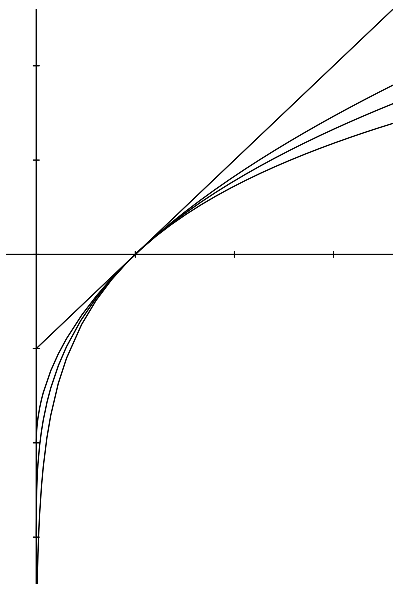
$$1 + x \leq u(x) \leq \frac{1}{1-x} \quad \text{für} \quad x \in (-1,1)$$

Durch Subtraktion von 1 und Division durch x ergibt sich daraus

$$1 \leq \frac{u(x)-1}{x} \leq \frac{1}{1-x} \quad \text{für} \quad x \in (0,1) \quad \text{und} \quad 1 \geq \frac{u(x)-1}{x} \geq \frac{1}{1-x} \quad \text{für} \quad x \in (-1,0)$$

Da $u(0) = 1$ gilt, erhalten wir $\lim_{x\to 0} \frac{u(x)-u(0)}{x} = 1$ aus diesen Ungleichungen und Satz 2.3, das heißt $u'(0)$ existiert und es gilt $u'(0) = 1$.

Um $u'(x)$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ zu finden, verwenden wir $u(x+h) = u(x)u(h)$ aus Satz 2.25. Es folgt $\frac{u(x+h)-u(x)}{h} = u(x)\frac{u(h)-1}{h}$ und $\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} = u(x) \lim_{h\to 0} \frac{u(h)-1}{h} = u(x)$, das heißt $u'(x)$ existiert und es gilt $u'(x) = u(x)$. $\square$



Analog können wir auch den Logarithmus einführen, indem wir die Funktionen $x \mapsto (1+\frac{x}{n})^n$ umkehren und den Grenzwert dieser Umkehrfunktionen suchen. Wir lösen die Gleichung $(1 + \frac{y}{n})^n = x$ nach y auf, und erhalten so die Umkehrfunktion $\ell_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1)$. Sie hat Definitionsbereich $(0,\infty)$. Nebenstehend ist diese Funktion für $n = 1, 2, 3, 8$ gezeichnet. Wir erhalten die Spiegelung des obigen Bildes um die Gerade durch den Nullpunkt mit Anstieg 1. Wir zeigen, dass der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \ell_n(x)$ für $x \in (0,\infty)$ existiert und bezeichnen ihn mit $\ell(x)$. Wir untersuchen dann die Eigenschaften der Funktion $\ell : (0,\infty) \to \mathbb{R}$.

Für $x \geq 1$ und $n \geq 1$ gilt $\ell_{n+1}(x) \leq \ell_n(x)$ wegen Satz 2.17 und $\ell_n(x) \geq 0$ wegen $\sqrt[n]{x} \geq 1$, sodass $(\ell_n(x))_{n\geq 1}$ eine nach unten beschränkte monoton fallende Folge ist und somit $\ell(x) = \lim_{n\to\infty} \ell_n(x)$ nach Satz 1.8 existiert. Da $\ell_n(1) = 0$ für alle $n \geq 1$ gilt, erhalten wir insbesondere $\ell(1) = 0$.

Man rechnet $\ell_n(x) = -\sqrt[n]{x}\,\ell_n(\frac{1}{x})$ für alle $x \in (0,\infty)$ nach. Da $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$ für alle $x > 0$ nach Satz 2.15 (a) gilt, folgt aus dieser Gleichung, dass $\ell(x)$ auch für $0 < x < 1$ existiert und dass $\ell(x) = -\ell(\frac{1}{x})$ für alle $x \in (0,\infty)$ gilt.

Die so auf $(0,\infty)$ definierte Funktion ℓ heißt (natürlicher) Logarithmus. Wir haben bereits $\ell(1) = 0$ und $\ell(x) = -\ell(\frac{1}{x})$ für alle $x \in (0,\infty)$ gezeigt. Wir beweisen weitere Eigenschaften.

Satz 2.27: *Die Funktion $\ell : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar und es gilt $\ell'(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x \in (0,\infty)$.*

Beweis: Es gilt $\ell_n'(x) = x^{\frac{1}{n}-1}$ für alle $n \geq 1$. Für $y \neq x$ erhalten wir aus dem Mittelwertsatz, dass $\ell_n(y) - \ell_n(x) = c^{\frac{1}{n}-1}(y-x)$ gilt für ein c zwischen x und y (c hängt von n ab). Daraus folgt, dass $\frac{\ell_n(y)-\ell_n(x)}{y-x}$ für alle $n \geq 2$ zwischen $x^{\frac{1}{n}-1}$ und $y^{\frac{1}{n}-1}$ liegt. Lässt man n gegen ∞ gehen, so folgt aus Satz 1.6 (a), dass $\frac{\ell(y)-\ell(x)}{y-x}$ zwischen $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{y}$ liegt. Daher gilt $\lim_{y\to x} \frac{\ell(y)-\ell(x)}{y-x} = \frac{1}{x}$ wegen Satz 2.3, womit $\ell'(x) = \frac{1}{x}$ gezeigt ist. □

Die Ableitung von $\ell : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist größer als 0. Die Funktion ℓ ist streng monoton wachsend. Wegen $\ell(1) = 0$ folgt $\ell(x) > 0$ für $x \in (1,\infty)$ und $\ell(x) < 0$ für $x \in (0,1)$.

Satz 2.28: *Für x und y in $(0,\infty)$ gilt $\ell(xy) = \ell(x) + \ell(y)$.*

Beweis: Für $n \geq 1$ gilt $\ell_n(xy) = n(\sqrt[n]{xy} - \sqrt[n]{y} + \sqrt[n]{y} - 1) = \sqrt[n]{y}\,\ell_n(x) + \ell_n(y)$. Lässt man in dieser Gleichung n gegen ∞ gehen, dann hat man $\ell(xy) = \ell(x) + \ell(y)$, da ja $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{y} = 1$ gilt. □

Wir haben die Exponentialfunktion $u : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ und den Logarithmus $\ell : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert und ihre Ableitungen berechnet. Es ist zu erwarten, dass sie Umkehrfunktionen voneinander sind. Um das zu zeigen, sei die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g(x) = \ell(u(x)) - x$ definiert. Es gilt $g'(x) = \ell'(u(x))u'(x) - 1 = \frac{1}{u(x)}u(x) - 1 = 0$. Somit ist g konstant. Wegen $u(0) = 1$ und $\ell(1) = 0$ erhalten wir $g(0) = 0$. Also gilt $g(x) = 0$ und daher auch $\ell(u(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Sei jetzt $y \in (0,\infty)$ beliebig. Setzt man $x = \ell(y)$ in die Gleichung $\ell(u(x)) = x$ ein, dann hat man $\ell(u(\ell(y))) = \ell(y)$. Da ℓ streng monoton wachsend ist, erhalten wir daraus $u(\ell(y)) = y$. Damit ist $\ell(u(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $u(\ell(y)) = y$ für alle $y \in (0,\infty)$ gezeigt. Also sind Exponentialfunktion und Logarithmus tatsächlich Umkehrfunktionen voneinander.

Wir verwenden ab jetzt die übliche Schreibweise $\ln x$ statt $\ell(x)$ für den Logarithmus. Für $a > 0$ definieren wir die Funktion $v_a : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ durch $v_a(x) = u(x\ln a) = e^{x\ln a}$. Wegen Satz 2.26 gilt $v_a'(x) = u'(x\ln a)\ln a = u(x\ln a)\ln a = v_a(x)\ln a$. Damit ist die Ableitung der Funktion v_a gefunden.

Satz 2.29: *Für x und y in $\mathbb{R}$ gilt $v_a(x+y) = v_a(x)v_a(y)$. Für $q \in \mathbb{Q}$ gilt $v_a(q) = a^q$.*

Beweis: Mit Satz 2.25 erhalten wir $u((x+y)\ln a) = u(x\ln a + y\ln a) = u(x\ln a)u(y\ln a)$, das heißt $v_a(x+y) = v_a(x)v_a(y)$.

Ebenfalls aus Satz 2.25 folgt $u(q\ln a) = u(\ln a)^q$ und daraus dann $v_a(q) = a^q$, da die Exponentialfunktion u ja die Umkehrfunktion von ln ist und somit $u(\ln a) = a$ gilt. □

Nach Satz 2.29 gilt $v_a(q) = a^q$ für alle $q \in \mathbb{Q}$. Das ist der Grund, warum man a^x statt $v_a(x)$ schreibt, auch wenn x nicht in $\mathbb{Q}$ liegt. Obige Definition der Funktion v_a wird dann zu $a^x = u(x\ln a) = e^{x\ln a}$. Daraus folgt $\ln a^x = x\ln a$, da ln die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion u ist und somit $\ln e^{x\ln a} = x\ln a$ gilt.

Satz 2.30: *Für $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $a^x b^x = (ab)^x$ und $(a^x)^y = a^{xy}$.*

Beweis: Nach Satz 2.28 und Satz 2.25 gilt $\ln ab = \ln a + \ln b$ und $u(x + y) = u(x)u(y)$. Daraus erhalten wir dann $(ab)^x = u(x \ln ab) = u(x \ln a + x \ln b) = u(x \ln a)u(x \ln b) = a^x b^x$. Mit Hilfe der Gleichung $\ln a^x = x \ln a$ folgt auch $(a^x)^y = u(y \ln a^x) = u(yx \ln a) = a^{xy}$. □

Sei $r \in \mathbb{R}$ und $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ definiert durch $g(x) = x^r$. Das ist die Potenzfunktion für reelle Exponenten. Es gilt $g'(x) = rx^{r-1}$. Um das zu zeigen, verwenden wir obige Definition $g(x) = x^r = v_x(r) = e^{r \ln x}$. Es folgt $g'(x) = e^{r \ln x}\frac{r}{x} = x^r \frac{r}{x} = rx^r x^{-1} = rx^{r-1}$.

Beispiel: Wir beweisen die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel. Wir zeigen zuerst, dass $e^{x-1} \geq x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Die Funktion $f(x) = e^{x-1} - x$ hat Ableitung $f'(x) = e^{x-1} - 1$. Es gilt $f'(x) < 0$ für $x < 1$ und $f'(x) > 0$ für $x > 1$. Auf dem Intervall $(-\infty, 1)$ ist f monoton fallend. Auf $(1, \infty)$ ist f monoton wachsend. Es gilt daher $f(x) \geq f(1)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Das ist die gewünschte Ungleichung $e^{x-1} - x \geq 0$.
Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen. Wir zeigen $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$. Dazu sei $m = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ und $x_j = \frac{a_j}{m}$, sodass $x_1+x_2+\cdots+x_n = n$ gilt. Aus obiger Ungleichung folgt $e^{x_j-1} \geq x_j$ für alle j und daraus wieder $e^{x_1-1}e^{x_2-1} \ldots e^{x_n-1} \geq x_1 x_2 \ldots x_n$. Die linke Seite ist aber gleich $e^{x_1+x_2+\cdots+x_n-n} = e^0 = 1$, sodass wir $x_1 x_2 \ldots x_n \leq 1$ erhalten. Das aber bedeutet nichts anderes als $a_1 a_2 \ldots a_n \leq m^n$. Zieht man auf beiden Seiten noch die n-te Wurzel, so steht die gewünschte Ungleichung schon da.

8. Regel von de l'Hospital

Wir beweisen die Regel von de l'Hospital, die dazu dient, gewisse Grenzwerte zu berechnen. Dazu brauchen wir ein Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes.

Satz 2.31 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz) *Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar. Dann gibt es ein $c \in (a, b)$ mit $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$. Gilt auch $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ dann kann man diese Gleichung schreiben als $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.*

Beweis: Sei $h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$. Dann ist $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar. Es gilt $h(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$ und $h(b) = g(a)f(b) - f(a)g(b)$, das heißt $\frac{h(b)-h(a)}{b-a} = 0$. Daher folgt aus Satz 2.10 die Existenz eines $c \in (a, b)$ mit $h'(c) = 0$. Daraus folgt $(f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0$ und die erste Aussage ist gezeigt.
Gilt $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ dann folgt $g(b) - g(a) \neq 0$ aus Satz 2.10 und wir können obige Gleichung schreiben als $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. □

Satz 2.32 (Regel von de l'Hospital) *Sei $a < s < b$. Seien $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ und $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Weiters sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, s) \cup (s, b)$. Wenn $f(s) = g(s) = 0$ und $\lim_{x\to s} \frac{f'(x)}{g'(x)} = u$ gilt, dann gilt auch $\lim_{x\to s} \frac{f(x)}{g(x)} = u$.*

Beweis: Es gilt $f(s) = g(s) = 0$. Ist $x \in (a, s)$, dann folgt $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(s)-f(x)}{g(s)-g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ für ein $c \in (x, s)$ aus Satz 2.31 angewandt auf das Intervall $[x, s]$. Ist $x \in (s, b)$, dann folgt $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(s)}{g(x)-g(s)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ für ein $c \in (s, x)$ aus Satz 2.31 angewandt auf das Intervall $[s, x]$. Nach Voraussetzung gilt $\lim_{x\to s} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c\to s} \frac{f'(c)}{g'(c)} = u$, da mit x ja auch c gegen s geht. Damit ist $\lim_{x\to s} \frac{f(x)}{g(x)} = u$ bereits gezeigt. □

Die Voraussetzung $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,s) \cup (s,b)$ muss man nicht überprüfen, da die auftretenden Funktionen üblicherweise isolierte Nullstellen haben und daher ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $g'(x) \neq 0$ für $x \in (s-\varepsilon, s) \cup (s, s+\varepsilon)$ gilt. Man kann den Satz dann mit $a = s-\varepsilon$ und $b = s+\varepsilon$ anwenden.

Beispiel: Wir berechnen $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$. In Zähler und Nenner stehen Funktionen, die auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar sind und die 0 ergeben, wenn man $x = 0$ einsetzt. Wir erhalten $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{1} = 2$.

Beispiel: Wir berechnen $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1-\cos 2x}$. Im Zähler und Nenner stehen differenzierbare Funktionen, die 0 ergeben, wenn man $x = 0$ einsetzt. Wir erhalten $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1-\cos 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\sin 2x}$. Wir erhalten einen Quotienten, wo im Zähler und Nenner wieder differenzierbare Funktionen stehen, die 0 ergeben, wenn man $x = 0$ einsetzt. Wir wenden die Regel von de l'Hospital noch einmal an und erhalten $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1-\cos 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{4\cos 2x} = \frac{1}{4}$.

9. Komplexe Zahlen

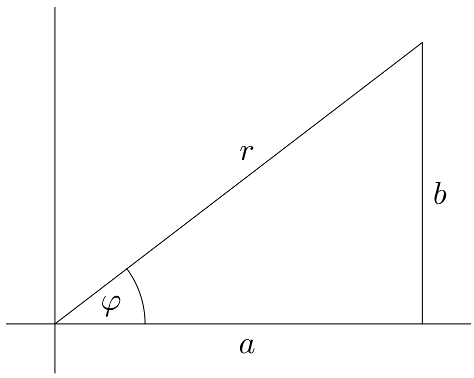
Rechnet man mit reellen Zahlen, dann hat man das Problem, dass nicht jedes Polynom eine Nullstelle hat. Das Polynom $x^2 + 1$ hat zum Beispiel keine. Um dieses Problem zu beheben, führt man die komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \{a + ib : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ ein. Addition und Multiplikation sind in naheliegender Weise definiert, wobei $i^2 = -1$ zu setzen ist, das heißt

$$(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d) \quad \text{und} \quad (a+ib)\cdot(c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$$

Es gelten wieder die Assoziativgesetze, die Kommutativgesetze und das Distributivgesetz. Zu jeder komplexen Zahl $a + bi$ existiert die additive Inverse $-a - bi$. Zu jeder komplexen Zahl $a + bi \neq 0$ existiert die multiplikative Inverse $\frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}$. Die komplexen Zahlen bilden somit einen Körper. Aus jeder komplexen Zahl lässt sich die Wurzel ziehen. Die Ordnung geht verloren. Auf $\mathbb{C}$ kann keine Ordnungsrelation definiert werden, die mit den Rechenoperationen verträglich ist.

Beispiel: Wir berechnen $\sqrt{3+4i}$, das heißt wir lösen die Gleichung $(a+ib)^2 = 3+4i$. Es folgt $a^2 - b^2 + 2abi = 3 + 4i$, also $a^2 - b^2 = 3$ und $2ab = 4$. Berechnet man aus der zweiten Gleichung b und setzt es in die erste ein, so erhält man $a^2 - \frac{4}{a^2} = 3$, das ist $a^4 - 3a^2 - 4 = 0$. Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind $a^2 = 4$ und $a^2 = -1$. Da a eine reelle Zahl ist, muss $a^2 \geq 0$ gelten. Es kommt also nur $a^2 = 4$ in Frage. Wir erhalten die beiden Lösungen $a = 2$ und $a = -2$. Die zugehörigen Werte für b sind $b = 1$ und $b = -1$. Als Wurzeln der Zahl $3 + 4i$ erhalten wir die beiden komplexen Zahlen $2 + i$ und $-2 - i$.

Man kann eine komplexe Zahl $a + ib$ graphisch als Vektor $\binom{a}{b}$ im $\mathbb{R}^2$ darstellen. Die Addition der komplexen Zahlen entspricht dann der Vektoraddition. Um auch die Multiplikation geometrisch zu deuten, ist es nützlich, die Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen einzuführen. Es gilt $a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, wobei $r = \sqrt{a^2+b^2}$ der Betrag der komplexen Zahl $a + ib$ ist und φ der Winkel zwischen der positiven x-Achse und dem Vektor, der die komplexe Zahl $a + ib$ darstellt.



Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir die komplexe Zahl e^{ix} durch die sogenannte Eulersche Formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Dann lässt sich die Polarkoordinatendarstellung schreiben als $a + ib = re^{i\varphi}$. Warum man die komplexe Zahl $\cos x + i \sin x$ mit e^{ix} bezeichnet, wird aus dem nächsten Satz klar. Es gelten Rechenregeln wie für die Exponentialfunktion.

Satz 2.33: *Für x und y in $\mathbb{R}$ gilt $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$.*

Beweis: Das folgt aus den Summensätzen für die trigonometrischen Funktionen. Es gilt

$$e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i\sin(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y + i \sin x \cos y + i \cos x \sin y$$

$$e^{ix}e^{iy} = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = \cos x \cos y + i \sin x \cos y + i \cos x \sin y - \sin x \sin y$$

Daraus erkennt man die gesuchte Gleichung. □

Nun kann man auch die Multiplikation von zwei komplexen Zahlen geometrisch deuten. Wir schreiben die Zahlen in Polarkoordinatendarstellung als $r_1e^{i\varphi_1}$ und $r_2e^{i\varphi_2}$. Mit Hilfe von Satz 2.33 folgt $r_1e^{i\varphi_1} \cdot r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$. Das Produkt zweier komplexer Zahlen erhält man also, indem man die Beträge der beiden Zahlen multipliziert und die Winkel addiert. Daraus ergibt sich auch, dass $\sqrt{r}e^{i\varphi/2}$ und $-\sqrt{r}e^{i\varphi/2}$ die beiden Wurzeln der komplexen Zahl $re^{i\varphi}$ sind. Die Wurzel (abgesehen vom Vorzeichen) erhält man, indem man die Wurzel aus dem Betrag zieht und den Winkel halbiert.

Man kann nun umgekehrt auch die trigonometrischen Funktionen durch die komplexe Exponentialfunktion darstellen. Wegen $e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i \sin x$ erhalten wir $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$ und $e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$. Daraus ergibt sich

$$\cos x = \tfrac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \quad \text{und} \quad \sin x = \tfrac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

Diese Darstellung von $\sin x$ und $\cos x$ durch die komplexe Exponentialfunktion kann man verwenden um Potenzen und Produkte von trigonometrischen Funktionen auszurechnen.

Beispiel: Es soll $\sin^2 x \sin 2x$ als Summe von trigonometrischen Funktionen geschrieben werden. Durch Einsetzen obiger Formeln erhält man $\sin^2 x \sin 2x = \frac{e^{2ix}-2+e^{-2ix}}{-4}\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}$. Multiplikation dieser beiden Brüche ergibt $\frac{e^{4ix}-2e^{2ix}+2e^{-2ix}-e^{-4ix}}{-8i}$. Diesen Bruch können wir jetzt zerteilen, sodass wir wieder trigonometrische Funktionen einsetzen können, und erhalten $\frac{e^{4ix}-e^{-4ix}}{-8i} + \frac{2e^{2ix}-2e^{-2ix}}{8i} = -\frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x$. Das ist die gewünschte Summe.

Beispiel: Wir zeigen, dass $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$ für die Winkel eines Dreiecks, also unter der Bedingung $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ gilt. Wir beginnen mit $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ und setzen $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ ein. Durch Ausmultiplizieren erhalten wir

$$\begin{aligned} -8i \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = {} & e^{i(\alpha+\beta+\gamma)} - e^{i(\alpha+\beta-\gamma)} - e^{i(\alpha-\beta+\gamma)} + e^{i(\alpha-\beta-\gamma)} \\ & - e^{i(-\alpha+\beta+\gamma)} + e^{i(-\alpha+\beta-\gamma)} + e^{i(-\alpha-\beta+\gamma)} - e^{i(-\alpha-\beta-\gamma)}. \end{aligned}$$

Fassen wir diese Ausdrücke entsprechend zusammen, so ergibt sich

$$4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = -\sin(\alpha+\beta+\gamma) + \sin(\alpha+\beta-\gamma) + \sin(\alpha-\beta+\gamma) + \sin(-\alpha+\beta+\gamma).$$

Das ist das Ergebnis, wenn wir die Bedingung, dass es sich um die Winkel eines Dreiecks handelt, nicht verwenden. Berücksichtigen wir, dass $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ und $\sin(\pi - x) = \sin x$ gilt, dann erhalten wir $4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma$.

III. Beweise durch Intervallschachtelung

Die Intervallschachtelungseigenschaft macht es möglich, die grundlegenden Sätze der Analysis zu beweisen. Es waren drei Sätze, nämlich der Satz über die Konvergenz monotoner Folgen, der Zwischenwertsatz und der Satz vom Maximum und Minimum stetiger Funktionen, die nicht bewiesen wurden und deren Beweis wir jetzt führen werden. Dazu kommen noch der Satz von Bolzano–Weierstraß und ein Satz über die Existenz von Infimum und Supremum einer beschränkten Menge. Als Beweismethode verwenden wir die Intervallhalbierung. Es wird eine Folge von abgeschlossenen Intervallen konstruiert, sodass jedes Intervall entweder die linke oder die rechte Hälfte des vorhergehenden Intervalls ist. Wir wissen, dass es dann genau eine reelle Zahl gibt, die in allen Intervallen enthalten ist.

1. Intervallhalbierung

Mit Hilfe der Intervallhalbierungsmethode beweisen wir den Zwischenwertsatz und den Satz von Bolzano–Weierstraß.

Satz 3.1 (Zwischenwertsatz) *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Es gelte entweder $f(a) < y < f(b)$ oder $f(a) > y > f(b)$. Dann existiert ein $x \in (a, b)$ mit $f(x) = y$.*

Beweis: Wir untersuchen den Fall $f(a) < y < f(b)$. Wir konstruieren eine Folge von geschachtelten Intervallen $[a_n, b_n]$ mit $f(a_n) < y < f(b_n)$, die möglicherweise abbricht. Wir beginnen mit $[a_1, b_1] = [a, b]$. Ist $[a_n, b_n]$ konstruiert, dann bestimmen wir $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ folgendermaßen. Sei c_n der Mittelpunkt von $[a_n, b_n]$. Ist $f(c_n) = y$, dann haben wir das gewünschte x bereits gefunden und der Beweis ist fertig. Ist $f(c_n) > y$, dann setzen wir $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, c_n]$. Ist $f(c_n) < y$, dann setzen wir $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [c_n, b_n]$. In beiden Fällen gilt $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ und $f(a_{n+1}) < y < f(b_{n+1})$. Damit sind die Intervalle konstruiert. Da das nächstfolgende Intervall immer eine Hälfte des vorhergehenden ist, gilt $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$ für alle $n \geq 1$. Die Längen der Intervalle gehen gegen 0.
Wegen der Intervallschachtelungseigenschaft gibt es ein x, das in allen Intervallen $[a_n, b_n]$ enthalten ist. Wir zeigen $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = x$. Dazu sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen n_0 größer als $\frac{b-a}{\varepsilon}$. Für alle $n \geq n_0$ erhalten wir dann wegen $x \in [a_n, b_n]$, dass $|a_n - x| \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}} \leq \frac{b-a}{n} \leq \frac{b-a}{n_0} < \varepsilon$ gilt. Damit ist $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ gezeigt. Genauso folgt $\lim_{n\to\infty} b_n = x$, da ja auch $|b_n - x| \leq b_n - a_n$ für alle n gilt.
Wir zeigen $f(x) = y$. Da f stetig ist, folgt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x)$. Da $f(a_n) \leq y$ für alle n gilt, erhalten wir $f(x) \leq y$. Ebenso folgt $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(x)$. Da $f(b_n) \geq y$ für alle n gilt, erhalten wir $f(x) \geq y$. Damit ist $f(x) = y$ gezeigt. □

Der nächste Satz verwendet Teilfolgen. Ist $(x_n)_{n\geq 0}$ eine Folge, dann nennt man jede Folge $x_{n_0}, x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots$ mit $n_0 < n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ eine Teilfolge dieser Folge.

Satz 3.2 (Satz von Bolzano–Weierstraß) *Jede Folge $(x_n)_{n\geq 0}$, die in einem beschränkten abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ liegt, hat eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in $[a, b]$.*

Beweis: Wir konstruieren eine Folge von geschachtelten Intervallen $[a_n, b_n]$, von denen jedes unendlich viele Glieder der Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ enthält. Wir beginnen mit $[a_1, b_1] = [a, b]$. Ist das Intervall $[a_n, b_n]$ bereits konstruiert, sodass es unendlich viele Folgenglieder enthält, und ist c_n der Mittelpunkt von $[a_n, b_n]$, dann enthält mindestens eines der Intervalle $[a_n, c_n]$ oder $[c_n, b_n]$ unendlich viele Glieder der Folge. Als $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ wählen wir das Intervall, das unendlich viele Folgenglieder enthält. Enthalten beide unendlich viele Folgenglieder, dann wählen wir irgendeines. Es gilt dann $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ für alle $n \geq 1$. Damit sind die Intervalle konstruiert. Da jedes Intervall eine Hälfte des vorhergehenden ist, gilt $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$ für alle n. Die Längen der Intervalle gehen gegen 0.

Wir wählen eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \geq 0}$ von $(x_n)_{n \geq 0}$, sodass $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ für alle $k \geq 1$ gilt. Wir beginnen mit $x_{n_0} = x_0 \in [a_1, b_1]$. Sind die Folgenglieder $x_{n_0}, \ldots, x_{n_{k-1}}$ bereits gewählt, dann finden wir ein $n_k > n_{k-1}$ mit $x_{n_k} \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$, da dieses Intervall ja unendlich viele Folgenglieder enthält. Damit ist die Teilfolge ausgewählt. Wegen der Intervallschachtelungseigenschaft gibt es ein x, das in allen Intervallen $[a_n, b_n]$ enthalten ist, insbesondere in $[a_1, b_1] = [a, b]$. Wir zeigen $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Es gibt ein k_0 mit $b_{k_0} - a_{k_0} < \varepsilon$, da die Intervalllängen gegen 0 gehen. Für $k \geq k_0$ gilt dann $|x_{n_k} - x| \leq b_{k_0} - a_{k_0} < \varepsilon$ wegen $x \in [a_{k_0}, b_{k_0}]$ und $x_{n_k} \in [a_k, b_k] \subseteq [a_{k_0}, b_{k_0}]$. Damit ist $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ gezeigt. □

2. Infimum und Supremum

Infimum und Supremum werden für beschränkte nicht leere Teilmengen von $\mathbb{R}$ definiert. Man nennt d eine obere Schranke einer nicht leeren Teilmenge M von $\mathbb{R}$, wenn jedes Element von M kleiner oder gleich d ist. Man nennt c eine untere Schranke von M, wenn jedes Element von M größer oder gleich c ist. Eine Menge heißt beschränkt, wenn sie eine obere und eine untere Schranke besitzt. Die kleinste obere Schranke einer Menge heißt Supremum. Die größte untere Schranke einer Menge heißt Infimum. Es gilt dann

Satz 3.3: *Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ nicht leer. Hat M eine obere Schranke, dann auch eine kleinste obere Schranke. Hat M eine untere Schranke, dann auch eine größte untere Schranke.*

Beweis: Wir führen den Beweis für die obere Schranke. Nach Voraussetzung hat die Menge M eine obere Schranke r. Wir konstruieren eine Folge von geschachtelten Intervallen $[a_n, b_n]$, sodass a_n keine, wohl aber b_n eine obere Schranke der Menge M ist. Wir beginnen mit $[a_1, b_1] = [u-1, r]$, wobei u ein beliebiges Element der Menge M ist. Klarerweise ist $u-1$ keine obere Schranke der Menge M. Ist $[a_n, b_n]$ bereits konstruiert, dann bestimmen wir $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ folgendermaßen. Sei c_n der Mittelpunkt von $[a_n, b_n]$. Ist c_n eine obere Schranke der Menge M, dann setzen wir $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, c_n]$. Ist c_n keine obere Schranke der Menge M, dann setzen wir $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [c_n, b_n]$. Es gilt dann $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$, wobei a_{n+1} keine, wohl aber b_{n+1} eine obere Schranke der Menge M ist. Damit sind die Intervalle konstruiert. Da jedes Intervall eine Hälfte des vorhergehenden ist, ergibt sich $b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$ für alle $n \geq 1$. Die Längen der Intervalle gehen gegen 0.

Wegen der Intervallschachtelungseigenschaft gibt es ein x, das in allen Intervallen $[a_n, b_n]$ enthalten ist. Wir zeigen, dass x die kleinste obere Schranke ist.

Wir nehmen an, dass x keine obere Schranke der Menge M ist. Dann gibt es ein $v \in M$ mit $x < v$. Da die Intervalllängen gegen 0 gehen, gibt es ein n mit $b_n - a_n < v - x$. Wegen $a_n \leq x \leq b_n$ folgt daraus $b_n < v - x + a_n \leq v$. Da aber b_n eine obere Schranke von M ist, kann $b_n < v$ nicht gelten. Dieser Widerspruch zeigt, dass x eine obere Schranke ist.

Wir zeigen, dass x die kleinste obere Schranke der Menge M ist. Sei y eine beliebige Zahl kleiner als x. Da die Intervalllängen gegen 0 gehen, gibt es ein n mit $b_n - a_n < x - y$. Wegen $a_n \leq x \leq b_n$ folgt daraus $a_n > b_n - x + y \geq y$. Da aber a_n keine obere Schranke von M ist, existiert ein $v \in M$ mit $v > a_n$. Es folgt $v > y$. Somit ist y keine obere Schranke der Menge M, das heißt x ist die kleinste obere Schranke. □

Mit Hilfe der obigen Sätze, die wir durch Intervallschachtelung bewiesen haben, können wir die beiden folgenden beweisen.

Satz 3.4: *Eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge hat einen Grenzwert. Eine monoton fallende, nach unten beschränkte Folge hat einen Grenzwert.*

Beweis: Wir behandeln nur den Fall einer monoton wachsenden Folge $(x_n)_{n\geq 0}$. Sei r eine obere Schranke dieser Folge. Es gilt $x_n \leq r$ für alle $n \geq 0$. Dann ist r auch eine obere Schranke für die Menge $M = \{x_n : n \geq 0\}$. Nach Satz 3.3 hat M eine kleinste obere Schranke x. Wir zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ gilt.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da x die kleinste obere Schranke von M ist, ist $x - \varepsilon$ keine obere Schranke. Es existiert ein n_0 mit $x_{n_0} > x - \varepsilon$. Da x eine obere Schranke von M ist, gilt $x_n \leq x$ für alle $n \geq 0$. Da die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ monoton wachsend ist, gilt $x_n \geq x_{n_0}$ für alle $n \geq n_0$. Damit ist $x - \varepsilon < x_n \leq x$ für alle $n \geq n_0$ gezeigt. Für alle $n \geq n_0$ liegt x_n in der ε-Umgebung $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ von x. Wir haben $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ bewiesen. □

Man nennt d eine obere Schranke einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, wenn $f(x) \leq d$ für alle $x \in [a, b]$ gilt. Hat eine Funktion eine obere Schranke, dann sagt man, sie ist nach oben beschränkt. Man nennt c eine untere Schranke einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, wenn $f(x) \geq c$ für alle $x \in [a, b]$ gilt. Hat eine Funktion eine untere Schranke, dann sagt man, sie ist nach unten beschränkt. Eine Funktion heißt beschränkt, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Satz 3.5: *Seien a und b in $\mathbb{R}$ mit $a < b$. Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und nimmt ihr Maximum und ihr Minimum an, das heißt es gibt ein $x_0 \in [a, b]$, sodass $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, und ein $x_1 \in [a, b]$, sodass $f(x) \geq f(x_1)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.*

Beweis: Wir zeigen, dass f nach oben beschränkt ist. Wäre das nicht der Fall, dann würde für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a, b]$ existieren, sodass $f(x_n) \geq n$ gilt. Nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß hat $(x_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ deren Grenzwert x im Intervall $[a, b]$ liegt. Da f stetig ist, folgt $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$. Insbesondere existiert ein k_0, sodass $f(x_{n_k}) < f(x) + 1$ für alle $k \geq k_0$ gilt. Das aber ist ein Widerspruch dazu, dass $f(x_n) \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Also kann f nicht nach oben unbeschränkt sein.

Sei $M = \{f(x) : x \in [a, b]\}$. Wir haben soeben gezeigt, dass diese Menge nach oben beschränkt ist. Nach Satz 3.3 hat M eine kleinste obere Schranke s. Wir zeigen, dass ein $x_0 \in [a, b]$ existiert mit $f(x_0) = s$. Wäre das nicht der Fall, dann hätten wir $f(x) < s$ für alle $x \in [a, b]$. Die Funktion $g(x) = \frac{1}{s-f(x)}$ wäre dann für alle $x \in [a, b]$ definiert und wegen Satz 1.10 wäre g auch eine stetige Funktion auf dem Intervall $[a, b]$. Da wir oben gezeigt haben, dass jede auf dem Intervall $[a, b]$ stetige Funktion nach oben beschränkt ist, würde es ein $r > 0$ geben, sodass $g(x) \leq r$ für alle $x \in [a, b]$ gilt. Daraus folgt aber $f(x) \leq s - \frac{1}{r}$ für alle $x \in [a, b]$ und wir hätten eine obere Schranke für M gefunden, die kleiner als s ist. Dieser Widerspruch zeigt, dass es ein $x_0 \in [a, b]$ geben muss, für das $f(x_0) = s$ gilt. Da s eine obere Schranke der Menge M ist, gilt $f(x) \leq s$ für alle $x \in [a, b]$. Somit ist ein x_0 in $[a, b]$ gefunden, sodass $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

Um auch das Minimum zu behandeln, wenden wir die soeben gezeigte Aussage auf die Funktion $-f$ an, die ja ebenfalls stetig ist. Damit erhalten wir die Existenz eines $x_1 \in [a, b]$, sodass $-f(x) \leq -f(x_1)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt. Daraus folgt dann, dass $f(x) \geq f(x_1)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt. □

Zum Abschluss sollen noch einige Eigenschaften des Infimums und des Supremums behandelt werden, die wir im nächsten Kapitel bei der Definition des Integrals brauchen. Für eine beschränkte nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{R}$ bezeichnen wir das Infimum, die größte untere Schranke, mit $\inf M$ und das Supremum, die kleinste obere Schranke, mit $\sup M$.

Satz 3.6: *Seien M und K beschränkte nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$.*
(a) *Ist c eine untere und d eine obere Schranke von M, dann gilt $c \le \inf M \le \sup M \le d$.*
(b) *Gilt $M \subseteq K$, dann gilt auch $\inf M \ge \inf K$ und $\sup M \le \sup K$.*
(c) *Für jedes $\varepsilon > 0$ existieren u und v in M mit $u - \varepsilon < \inf M$ und $v + \varepsilon > \sup M$.*

Beweis: Für jedes Element u von M gilt $\inf M \le u$ und $u \le \sup M$, sodass $\inf M \le \sup M$ folgt. Da $\inf M$ die größte untere Schranke von M ist, gilt $c \le \inf M$ für jede beliebige untere Schranke c von M. Da $\sup M$ die kleinste obere Schranke von M ist, gilt $d \ge \sup M$ für jede beliebige obere Schranke d von M. Damit ist (a) gezeigt.

Es gelte $M \subseteq K$. Da $\inf K$ eine untere Schranke von K ist, ist $\inf K$ auch eine untere Schranke von M. Da $\inf M$ die größte untere Schranke von M ist, folgt $\inf M \ge \inf K$. Da $\sup K$ eine obere Schranke von K ist, ist $\sup K$ auch eine obere Schranke von M. Da $\sup M$ die kleinste obere Schranke von M ist, folgt $\sup M \le \sup K$. Damit ist (b) gezeigt.

Sei $\varepsilon > 0$. Da $\inf M$ die größte untere Schranke von M ist, ist $\inf M + \varepsilon$ keine untere Schranke von M. Daher existiert ein $u \in M$ mit $u < \inf M + \varepsilon$. Da $\sup M$ die kleinste obere Schranke von M ist, ist $\sup M - \varepsilon$ keine obere Schranke von M. Daher existiert ein $v \in M$ mit $v > \sup M - \varepsilon$. Damit ist auch (c) gezeigt. $\square$

Für eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und eine Teilmenge I von $[a, b]$ sei $f(I)$ die Menge $\{f(x) : x \in I\}$, das ist die Menge aller Funktionswerte, die auf der Teilmenge I von $[a, b]$ angenommen werden. Üblicherweise schreibt man $\inf_I f$ anstelle von $\inf f(I)$ und $\sup_I f$ anstelle von $\sup f(I)$. Als Folgerung von Satz 3.6 erhalten wir

Satz 3.7: *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Seien I und J nichtleere Teilmengen von $[a, b]$.*
(a) *Ist c eine untere und d eine obere Schranke von f, dann gilt $c \le \inf_I f \le \sup_I f \le d$.*
(b) *Gilt $I \subseteq J$, dann gilt auch $\inf_I f \ge \inf_J f$ und $\sup_I f \le \sup_J f$.*
(c) *Für jedes $\varepsilon > 0$ existieren x und y in I mit $f(x) - \varepsilon < \inf_I f$ und $f(y) + \varepsilon > \sup_I f$.*

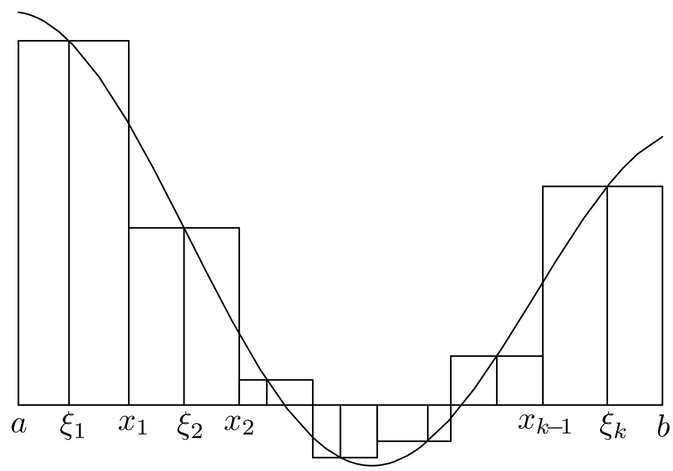
Beweis: Diese drei Aussagen erhält man, indem man $M = f(I)$ und $K = f(J)$ in Satz 3.6 setzt. Es gilt ja $I \subseteq J \Rightarrow f(I) \subseteq f(J)$. Weiters lässt sich $u \in f(I)$ schreiben als $f(x)$ mit $x \in I$ und $v \in f(I)$ als $f(y)$ mit $y \in I$. $\square$

IV. Integration

Wir führen das Integral ein, um die Fläche unter dem Graph einer Funktion zu berechnen. Durch eine entsprechende Approximation dieser Fläche mit Hilfe von Rechtecken ergibt sich die Definition des Integrals. Es stellt sich heraus, dass Integrieren die Umkehrung des Differenzierens ist. Aus Rechenregeln für die Ableitung erhält man wichtige Rechenregeln für das Integral. Mit Integralen kann man aber nicht nur Flächen berechnen, sondern auch anderes, wie zum Beispiel Volumina, Bogenlängen, Oberflächen und Schwerpunkte. Schließlich wird die Approximation von Funktionen durch Polynome behandelt. Der dabei auftretende Approximationsfehler lässt sich durch ein Integral ausdrücken. Das führt dann auch zur Untersuchung von Potenzreihen.

1. Definition und Eigenschaften des Integrals

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Unser Ziel ist es, die Fläche zu berechnen, die von der x-Achse, dem Graph der Funktion f und von den beiden senkrechten Geraden durch die Punkte a und b begrenzt wird. Liegt der Graph der Funktion unterhalb der x-Achse, dann hat die Fläche negatives Vorzeichen. Liegt der Graph teilweise über und teilweise unter der x-Achse, dann werden die Flächenstücke, die unter der x-Achse liegen, von denen, die über der x-Achse liegen, subtrahiert. Wir approximieren durch Rechtecke. Dazu sei $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$. Das ergibt eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ in Teilintervalle. Das Maximum der Differenzen $x_j - x_{j-1}$ nennen wir die Gitterweite der Zerlegung. Hat die Zerlegung Gitterweite α, dann gilt $x_j - x_{j-1} \le \alpha$ für $1 \le j \le k$. Für jedes j wählen wir ein $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$. Die Rechtecke mit Basislängen $x_j - x_{j-1}$ und Höhen $f(\xi_j)$ approximieren die zu berechnende Fläche. Die Gesamtfläche dieser Rechtecke ist $\sum_{j=1}^{k}(x_j - x_{j-1})f(\xi_j)$.



Für eine nicht leere Teilmenge I von $[a, b]$ sei $\sup_I f$ das Supremum und $\inf_I f$ das Infimum der Menge $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$. Wir fassen eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ als endliche Menge $\mathcal{Z}$ von Punkten in $[a, b]$ auf, die a und b enthält. Sei $\mathcal{Z} = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$, wobei $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ gilt. Wir definieren

$$O_{\mathcal{Z}}(f) = \sum_{j=1}^{k}(x_j - x_{j-1}) \sup\nolimits_{[x_{j-1}, x_j]} f \qquad \text{und} \qquad U_{\mathcal{Z}}(f) = \sum_{j=1}^{k}(x_j - x_{j-1}) \inf\nolimits_{[x_{j-1}, x_j]} f$$

und nennen $O_{\mathcal{Z}}(f)$ die Obersumme und $U_{\mathcal{Z}}(f)$ die Untersumme der Funktion f zur Zerlegung $\mathcal{Z}$. Weiters nennen wir die bereits oben erwähnten Summen

$$\sum_{j=1}^{k}(x_j - x_{j-1})f(\xi_j) \quad \text{mit} \quad \xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$$

Riemannsummen zur Zerlegung $\mathcal{Z}$. Jede Riemannsumme zur Zerlegung $\mathcal{Z}$ liegt zwischen $U_{\mathcal{Z}}(f)$ und $O_{\mathcal{Z}}(f)$. Es ist möglich, dass $U_{\mathcal{Z}}(f)$ oder $O_{\mathcal{Z}}(f)$ oder beide keine Riemannsummen sind.

Wir beweisen einige Eigenschaften von Ober– und Untersumme.

Satz 4.1: *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt mit unterer Schranke c und oberer Schranke d. Sei $\mathcal{R}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ mit Gitterweite α. Weiters sei $s \in [a,b]$ und $\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cup \{s\}$. Dann gilt $O_{\tilde{\mathcal{R}}}(f) \le O_{\mathcal{R}}(f) \le O_{\tilde{\mathcal{R}}}(f) + \alpha(d-c)$ und $U_{\tilde{\mathcal{R}}}(f) \ge U_{\mathcal{R}}(f) \ge U_{\tilde{\mathcal{R}}}(f) - \alpha(d-c)$.*

Beweis: Wenn s in $\mathcal{R}$ liegt, dann gilt $\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R}$. Wir erhalten $O_{\tilde{\mathcal{R}}}(f) = O_{\mathcal{R}}(f)$ und $U_{\tilde{\mathcal{R}}}(f) = U_{\mathcal{R}}(f)$, sodass die zu beweisenden Ungleichungen trivial sind.

Sei daher $\mathcal{R} = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ mit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$ und $s \notin \mathcal{R}$. Es existiert ein j mit $x_{j-1} < s < x_j$. Aus der Definition der Obersumme erhalten wir dann

$$O_{\mathcal{R}}(f) - (x_j - x_{j-1}) \sup\nolimits_{[x_{j-1},x_j]} f = O_{\tilde{\mathcal{R}}}(f) - (x_j - s) \sup\nolimits_{[s,x_j]} f - (s - x_{j-1}) \sup\nolimits_{[x_{j-1},s]} f.$$

Nach Satz 3.7 (b) gilt $\sup_{[x_{j-1},x_j]} f \ge \sup_{[s,x_j]} f$ und $\sup_{[x_{j-1},x_j]} f \ge \sup_{[x_{j-1},s]} f$. Es folgt

$$O_{\mathcal{R}}(f) - O_{\tilde{\mathcal{R}}}(f) = (x_j - x_{j-1}) \sup\nolimits_{[x_{j-1},x_j]} f - (x_j - s) \sup\nolimits_{[s,x_j]} f - (s - x_{j-1}) \sup\nolimits_{[x_{j-1},s]} f \ge 0.$$

Nach Satz 3.7 (a) gilt auch $\sup_{[x_{j-1},x_j]} f \le d$, $\sup_{[s,x_j]} f \ge c$ und $\sup_{[x_{j-1},s]} f \ge c$. Es folgt

$$O_{\mathcal{R}}(f) - O_{\tilde{\mathcal{R}}}(f) \le (x_j - x_{j-1})d - (x_j - s)c - (s - x_{j-1})c = (x_j - x_{j-1})(d-c) \le \alpha(d-c).$$

Damit sind die beiden Ungleichungen für die Obersumme gezeigt.

Der Beweis für die Untersummen läuft analog. Aus der Definition der Untersumme folgt

$$U_{\mathcal{R}}(f) - (x_j - x_{j-1}) \inf\nolimits_{[x_{j-1},x_j]} f = U_{\tilde{\mathcal{R}}}(f) - (x_j - s) \inf\nolimits_{[s,x_j]} f - (s - x_{j-1}) \inf\nolimits_{[x_{j-1},s]} f.$$

Nach Satz 3.7 (b) gilt $\inf_{[x_{j-1},x_j]} f \le \inf_{[s,x_j]} f$ und $\inf_{[x_{j-1},x_j]} f \le \inf_{[x_{j-1},s]} f$. Es folgt

$$U_{\mathcal{R}}(f) - U_{\tilde{\mathcal{R}}}(f) = (x_j - x_{j-1}) \inf\nolimits_{[x_{j-1},x_j]} f - (x_j - s) \inf\nolimits_{[s,x_j]} f - (s - x_{j-1}) \inf\nolimits_{[x_{j-1},s]} f \le 0.$$

Nach Satz 3.7 (a) gilt auch $\inf_{[x_{j-1},x_j]} f \ge c$, $\inf_{[s,x_j]} f \le d$ und $\inf_{[x_{j-1},s]} f \le d$. Es folgt

$$U_{\tilde{\mathcal{R}}}(f) - U_{\mathcal{R}}(f) \le (x_j - s)d + (s - x_{j-1})d - (x_j - x_{j-1})c = (x_j - x_{j-1})(d-c) \le \alpha(d-c).$$

Damit sind die beiden Ungleichungen für die Untersumme gezeigt. □

Satz 4.2: *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und seien $\mathcal{Y}$ und $\mathcal{Z}$ Zerlegungen von $[a,b]$.*
(a) *Wenn $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Z}$ gilt, dann gilt auch $O_{\mathcal{Y}}(f) \ge O_{\mathcal{Z}}(f)$ und $U_{\mathcal{Y}}(f) \le U_{\mathcal{Z}}(f)$.*
(b) *Es gilt $U_{\mathcal{Y}}(f) \le O_{\mathcal{Z}}(f)$.*

Beweis: Um (a) zu zeigen, sei $\mathcal{R}_0 = \mathcal{Y}$ und $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_m$ seien so gewählt, dass $\mathcal{R}_{i+1}$ aus $\mathcal{R}_i$ durch Hinzufügen eines Punktes entsteht und $\mathcal{R}_m = \mathcal{Z}$ gilt. Aus Satz 4.1 folgt $O_{\mathcal{R}_{j-1}}(f) \ge O_{\mathcal{R}_j}(f)$ und $U_{\mathcal{R}_{j-1}}(f) \le U_{\mathcal{R}_j}(f)$ für $1 \le j \le m$. Daraus erhalten wir dann $O_{\mathcal{Y}}(f) = O_{\mathcal{R}_0}(f) \ge O_{\mathcal{R}_m}(f) = O_{\mathcal{Z}}(f)$ und $U_{\mathcal{Y}}(f) = U_{\mathcal{R}_0}(f) \le U_{\mathcal{R}_m}(f) = U_{\mathcal{Z}}(f)$. Damit ist (a) gezeigt.

Um (b) zu zeigen, sei $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}$. Aus der Definition von Ober- und Untersumme und Satz 3.7 (a) folgt $U_{\mathcal{X}}(f) \le O_{\mathcal{X}}(f)$. Aus (a) erhalten wir $U_{\mathcal{Y}}(f) \le U_{\mathcal{X}}(f)$ wegen $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ und $O_{\mathcal{Z}}(f) \ge O_{\mathcal{X}}(f)$ wegen $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}$. Somit ergibt sich $U_{\mathcal{Y}}(f) \le O_{\mathcal{Z}}(f)$. Das ist (b). □

Sei $S_O = \{O_{\mathcal{Z}}(f) : \mathcal{Z}$ eine Zerlegung von $[a,b]\}$. Nach Satz 4.2 (b) ist $U_{\mathcal{Y}}(f)$ für jede Zerlegung $\mathcal{Y}$ von $[a,b]$ eine untere Schranke der Menge S_O. Somit hat die Menge S_O eine größte untere Schranke, die wir mit $O(f)$ bezeichnen, und wegen Satz 3.6 (a) gilt $U_{\mathcal{Y}}(f) \le O(f)$ für jede Zerlegung $\mathcal{Y}$ von $[a,b]$.

Sei $S_U = \{U_{\mathcal{Y}}(f) : \mathcal{Y}$ eine Zerlegung von $[a,b]\}$. Wir haben soeben gezeigt, dass $O(f)$ eine obere Schranke der Menge S_U ist. Somit hat die Menge S_U auch eine kleinste obere Schranke, die wir mit $U(f)$ bezeichnen, und wegen Satz 3.6 (a) gilt $U(f) \le O(f)$.

Wir fassen zusammen: Es gilt $O_{\mathcal{Z}}(f) \ge O(f)$ für alle Zerlegungen $\mathcal{Z}$ von $[a,b]$, da $O(f)$ eine untere Schranke von S_O ist. Ebenso gilt $U_{\mathcal{Z}}(f) \le U(f)$ für alle Zerlegungen $\mathcal{Z}$ von $[a,b]$, da $U(f)$ eine obere Schranke von S_U ist. Und wir haben $U(f) \le O(f)$ gezeigt.

Die Fläche zwischen dem Graph der Funktion f und der x-Achse, die wir berechnen wollen, wird durch $O(f)$ von oben und durch $U(f)$ von unten approximiert. Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt daher integrierbar, wenn $O(f) = U(f)$ gilt. Man bezeichnet diese Zahl dann mit $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ und nennt sie das Integral der Funktion f in den Grenzen von a bis b. Dabei spielt x dieselbe Rolle wie eine Summationsvariable. Man kann genausogut eine andere Variable schreiben, zum Beispiel $\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y$.

Im nächsten Satz charakterisieren wir das Integral als Grenzwert von Ober– und Untersummen und im übernächsten Satz dann als Grenzwert von Riemannsummen.

Satz 4.3: *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und sei $(\mathcal{Z}_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$ mit Gitterweiten α_n, für die $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ gilt. Dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} U_{\mathcal{Z}_n}(f) = U(f)$ und $\lim_{n\to\infty} O_{\mathcal{Z}_n}(f) = O(f)$.*

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da $U(f)$ nach Definition gleich $\sup S_U$ ist, existiert nach Satz 3.6 (c) eine Zerlegung $\mathcal{Y}$ des Intervalls $[a, b]$ mit $U_{\mathcal{Y}}(f) + \frac{\varepsilon}{2} > U(f)$. Sei k die Anzahl der Unterteilungspunkte der Zerlegung $\mathcal{Y}$. Sei c eine untere und d eine obere Schranke der Funktion f. Wir wählen n_0 so, dass $k\alpha_n(d - c) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Für $n \geq 1$ sei $\mathcal{X}_n = \mathcal{Z}_n \cup \mathcal{Y}$. Man kann zwischen $\mathcal{Z}_n$ und $\mathcal{X}_n$ Zerlegungen einfügen, sodass jede dieser Zerlegungen jeweils einen Punkt mehr als die vorhergehende enthält. Durch wiederholtes Anwenden von Satz 4.1 erhalten wir dann $U_{\mathcal{Z}_n}(f) \geq U_{\mathcal{X}_n}(f) - k\alpha_n(d - c)$, da jede Zerlegung, die $\mathcal{Z}_n$ enthält, Gitterweite $\leq \alpha_n$ hat. Weiters folgt $U_{\mathcal{X}_n}(f) \geq U_{\mathcal{Y}}(f)$ aus Satz 4.2 (a) wegen $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}_n$. Für $n \geq n_0$ gilt dann $U_{\mathcal{Z}_n}(f) > U_{\mathcal{Y}}(f) - \frac{\varepsilon}{2} > U(f) - \varepsilon$. Da $U(f)$ eine obere Schranke der Menge S_U ist, gilt $U(f) \geq U_{\mathcal{Z}_n}(f)$ für alle $n \geq 1$. Somit liegt $U_{\mathcal{Z}_n}(f)$ für $n \geq n_0$ in der ε-Umgebung von $U(f)$. Damit ist $\lim_{n\to\infty} U_{\mathcal{Z}_n}(f) = U(f)$ bewiesen. Der Beweis von $\lim_{n\to\infty} O_{\mathcal{Z}_n}(f) = O(f)$ läuft analog. □

Satz 4.4: *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $(\mathcal{Z}_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$, deren Gitterweiten für $n \to \infty$ gegen 0 gehen. Für $n \geq 1$ sei $A_n(f)$ irgendeine Riemannsumme zur Zerlegung $\mathcal{Z}_n$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} A_n(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Beweis: Da $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion ist, gilt $U(f) = O(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Weiters gilt $U_{\mathcal{Z}_n}(f) \leq A_n(f) \leq O_{\mathcal{Z}_n}(f)$ für alle $n \geq 1$, da $A_n(f)$ eine Riemannsumme zur Zerlegung $\mathcal{Z}_n$ ist. Es gilt $\lim_{n\to\infty} U_{\mathcal{Z}_n}(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\lim_{n\to\infty} O_{\mathcal{Z}_n}(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nach Satz 4.3. Daraus folgt $\lim_{n\to\infty} A_n(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ wegen Satz 1.7. □

Wir beweisen einfache Rechenregeln für das Integral.

Satz 4.5: *Seien f und g integrierbare Funktionen von $[a, b]$ nach $\mathbb{R}$ und sei c in $\mathbb{R}$. Dann gilt $\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ und $\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Beweis: Sei $I \subseteq [a, b]$ ein Intervall. Für alle $x \in I$ gilt $f(x) \leq \sup_I f$ und $g(x) \leq \sup_I g$, also auch $f(x) + g(x) \leq \sup_I f + \sup_I g$. Somit ist $\sup_I f + \sup_I g$ eine obere Schranke für die Menge $\{f(x) + g(x) : x \in I\}$. Es folgt $\sup_I(f + g) \leq \sup_I f + \sup_I g$. Analog zeigt man auch $\inf_I(f + g) \geq \inf_I f + \inf_I g$.

Sei $\mathcal{Z} = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$, wobei $a = x_0 < \cdots < x_k = b$ gilt. Wir haben oben gezeigt, dass $\inf_{[x_{j-1},x_j]} f + \inf_{[x_{j-1},x_j]} g \leq \inf_{[x_{j-1},x_j]}(f + g)$ und $\sup_{[x_{j-1},x_j]}(f + g) \leq \sup_{[x_{j-1},x_j]} f + \sup_{[x_{j-1},x_j]} g$ für $1 \leq j \leq k$ gilt. Multipliziert man diese Ungleichungen mit $x_j - x_{j-1}$ und summiert über j, so ergibt sich

$$U_{\mathcal{Z}}(f) + U_{\mathcal{Z}}(g) \leq U_{\mathcal{Z}}(f + g) \quad \text{und} \quad O_{\mathcal{Z}}(f + g) \leq O_{\mathcal{Z}}(f) + O_{\mathcal{Z}}(g).$$

Da $U_{\mathcal{Z}}(h) \le U(h) \le O(h) \le O_{\mathcal{Z}}(h)$ für alle beschränkten Funktionen h gilt, erhalten wir

$$U_{\mathcal{Z}}(f) + U_{\mathcal{Z}}(g) \le U_{\mathcal{Z}}(f+g) \le U(f+g) \le O(f+g) \le O_{\mathcal{Z}}(f+g) \le O_{\mathcal{Z}}(f) + O_{\mathcal{Z}}(g).$$

Sei jetzt $(\mathcal{Z}_n)_{n\ge 1}$ eine Folge von Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$, deren Gitterweiten für $n \to \infty$ gegen 0 gehen. Dann ergibt sich aus obigen Ungleichungen

$$U_{\mathcal{Z}_n}(f) + U_{\mathcal{Z}_n}(g) \le U(f+g) \le O(f+g) \le O_{\mathcal{Z}_n}(f) + O_{\mathcal{Z}_n}(g).$$

Da f und g integrierbar sind, folgen $\lim_{n\to\infty} U_{\mathcal{Z}_n}(f) = \lim_{n\to\infty} O_{\mathcal{Z}_n}(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\lim_{n\to\infty} U_{\mathcal{Z}_n}(g) = \lim_{n\to\infty} O_{\mathcal{Z}_n}(g) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ aus Satz 4.3. Damit erhalten wir

$$U(f+g) = O(f+g) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Das zeigt, dass auch die Funktion $f+g$ integrierbar ist und dass $\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ gilt. Damit ist die erste Aussage gezeigt.

Nun zur zweiten Aussage. Sei $I \subseteq [a,b]$ ein Intervall. Für $x \in I$ gilt $f(x) \le \sup_I f$. Ist $c \ge 0$, dann folgt $cf(x) \le c\sup_I f$ für $x \in I$. Somit ist $c\sup_I f$ eine obere Schranke für die Menge $\{cf(x) : x \in I\}$. Es folgt $\sup_I(cf) \le c\sup_I f$. Analog zeigt man $\inf_I(cf) \ge c\inf_I f$. Ist $c < 0$, dann folgt $cf(x) \ge c\sup_I f$ für alle $x \in I$. Somit ist $c\sup_I f$ eine untere Schranke für die Menge $\{cf(x) : x \in I\}$. Es folgt $\inf_I(cf) \ge c\sup_I f$. Analog kann man auch $\sup_I(cf) \le c\inf_I f$ zeigen.

Ist $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$, dann folgt wie oben, dass

$$cU_{\mathcal{Z}}(f) \le U_{\mathcal{Z}}(cf) \quad \text{und} \quad O_{\mathcal{Z}}(cf) \le cO_{\mathcal{Z}}(f) \quad \text{im Fall } c \ge 0 \text{ gilt, und}$$
$$cO_{\mathcal{Z}}(f) \le U_{\mathcal{Z}}(cf) \quad \text{und} \quad O_{\mathcal{Z}}(cf) \le cU_{\mathcal{Z}}(f) \quad \text{im Fall } c < 0.$$

Da $U_{\mathcal{Z}}(h) \le U(h) \le O(h) \le O_{\mathcal{Z}}(h)$ für alle beschränkten Funktionen h von $[a,b]$ nach $\mathbb{R}$ gilt, erhalten wir $cU_{\mathcal{Z}}(f) \le U_{\mathcal{Z}}(cf) \le U(cf) \le O(cf) \le O_{\mathcal{Z}}(cf) \le cO_{\mathcal{Z}}(f)$ im ersten und $cO_{\mathcal{Z}}(f) \le U_{\mathcal{Z}}(cf) \le U(cf) \le O(cf) \le O_{\mathcal{Z}}(cf) \le cU_{\mathcal{Z}}(f)$ im zweiten Fall.

Sei jetzt $(\mathcal{Z}_n)_{n\ge 1}$ eine Folge von Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$, deren Gitterweiten für $n \to \infty$ gegen 0 gehen. Dann ergibt sich $cU_{\mathcal{Z}_n}(f) \le U(cf) \le O(cf) \le cO_{\mathcal{Z}_n}(f)$ im ersten und $cO_{\mathcal{Z}_n}(f) \le U(cf) \le O(cf) \le cU_{\mathcal{Z}_n}(f)$ im zweiten Fall für $n \ge 1$. Da f integrierbar ist, folgt $\lim_{n\to\infty} U_{\mathcal{Z}_n}(f) = \lim_{n\to\infty} O_{\mathcal{Z}_n}(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ aus Satz 4.3. Damit erhalten wir sowohl im Fall $c \ge 0$ als auch im Fall $c < 0$

$$U(cf) = O(cf) = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Somit ist auch die Funktion cf integrierbar und es gilt $\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. □

Zweiter Beweis: Sei $h = f + g$. Sei $(\mathcal{Z}_n)_{n\ge 1}$ eine Folge von Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$, deren Gitterweiten gegen 0 gehen. Nach Satz 4.3 gilt $\lim_{n\to\infty} O_{\mathcal{Z}_n}(h) = O(h)$.

Sei $\mathcal{Z}_n = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$, wobei $a = x_0 < \dots < x_k = b$ gilt. Wir suchen eine Riemannsumme zu $\mathcal{Z}_n$. Wir wählen $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ so, dass $h(\xi_j) > \sup_{[x_{j-1},x_j]} h - \frac{1}{n(b-a)}$ gilt. Das ist nach Satz 3.7 (c) möglich. Die zu diesen Zwischenpunkten gehörige Riemannsumme ist dann $A_n(h) = \sum_{j=1}^k (x_j - x_{j-1})h(\xi_j)$. Multipliziert man obige Ungleichung mit $x_j - x_{j-1}$ und summiert über j, so ergibt sich $A_n(h) > O_{\mathcal{Z}_n}(h) - \frac{1}{n}$ wegen $\sum_{j=1}^k (x_j - x_{j-1}) = b - a$. Da $A_n(h)$ eine Riemannsumme ist, hat man auch $A_n(h) \le O_{\mathcal{Z}_n}(h)$. Das gilt für alle $n \ge 1$. Wegen $\lim_{n\to\infty} O_{\mathcal{Z}_n}(h) = O(h)$ folgt dann $\lim_{n\to\infty} A_n(h) = O(h)$ mit Hilfe von Satz 1.7.

Seien $A_n(f) = \sum_{j=1}^i (x_j - x_{j-1})f(\xi_j)$ und $A_n(g) = \sum_{j=1}^i (x_j - x_{j-1})g(\xi_j)$ die Riemannsummen für die Funktionen f und g zur Zerlegung $\mathcal{Z}_n$, die dieselben Zwischenpunkte verwenden wie die Riemannsumme $A_n(h)$. Nach Satz 4.4 gilt $\lim_{n\to\infty} A_n(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ und

$\lim_{n\to\infty} A_n(g) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, da f und g integrierbar sind. Da $A_n(h) = A_n(f) + A_n(g)$ für alle $n \geq 1$ gilt, erhalten wir auch $\lim_{n\to\infty} A_n(h) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. Damit ist $O(h) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ gezeigt.

Analog zeigt man $U(h) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. (Man braucht nur $O_{\mathcal{Z}_n}(h)$ durch $U_{\mathcal{Z}_n}(h)$, $O(h)$ durch $U(h)$, sup durch inf und $-\frac{1}{n}$ durch $\frac{1}{n}$ ersetzen und die Ungleichheitszeichen umdrehen.) Insgesamt haben wir $U(h) = O(h) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. Das zeigt, dass die Funktion $h = g + f$ integrierbar ist und dass $\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ gilt. Damit ist die erste Aussage gezeigt.

Sei jetzt $h = cf$. Sei $(\mathcal{Z}_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$, deren Gitterweiten gegen 0 gehen. Nach Satz 4.3 gilt $\lim_{n\to\infty} O_{\mathcal{Z}_n}(h) = O(h)$.

Wir gehen genauso vor wie im ersten Teil des Beweises. Zur Zerlegung $\mathcal{Z}_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ finden wir eine Riemannsumme $A_n(h) = \sum_{j=1}^k (x_j - x_{j-1}) h(\xi_j)$ für die $O_{\mathcal{Z}_n}(h) \geq A_n(h) > O_{\mathcal{Z}_n}(h) - \frac{1}{n}$ gilt. Wegen $\lim_{n\to\infty} O_{\mathcal{Z}_n}(h) = O(h)$ gilt dann auch $\lim_{n\to\infty} A_n(h) = O(h)$.

Sei $A_n(f) = \sum_{j=1}^k (x_j - x_{j-1}) f(\xi_j)$ die Riemannsumme für die Funktion f zur Zerlegung $\mathcal{Z}_n$, die dieselben Zwischenpunkte verwendet wie die Riemannsumme $A_n(h)$. Nach Satz 4.4 gilt $\lim_{n\to\infty} A_n(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, da f integrierbar ist. Da $A_n(h) = cA_n(f)$ für alle $n \geq 1$ gilt, erhalten wir $\lim_{n\to\infty} A_n(h) = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Damit ist $O(h) = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ gezeigt.

Analog zeigt man $U(h) = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Insgesamt haben wir $U(h) = O(h) = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Das zeigt, dass die Funktion $h = cf$ integrierbar ist und dass $\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ gilt. Damit ist auch die zweite Aussage gezeigt. □

Satz 4.6: *Seien f und g integrierbare Funktionen von $[a, b]$ nach $\mathbb{R}$ mit $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gilt $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.*

Beweis: Sei $h(x) = g(x) - f(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gilt $h \geq 0$. Wegen Satz 4.5 ist h integrierbar und es gilt $\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Da jede Untersumme von h größer oder gleich Null sein muss, erhalten wir $\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$ aus der Definition des Integrals. Damit ist dann $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ gezeigt. □

Sei f eine integrierbare Funktion, die auf dem Intervall $[a, b]$ definiert ist. Ist $[c, d]$ ein Teilinterval von $[a, b]$, dann kann man die Funktion f auf das Teilinterval $[c, d]$ einschränken und $\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$ bilden. Wir zeigen zuerst, dass dieses Integral existiert.

Satz 4.7: *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Sei $[c, d]$ ein Teilinterval von $[a, b]$ und $\tilde{f}$ die auf das Teilintervall $[c, d]$ eingeschränkte Funktion f, das heißt $\tilde{f} : [c, d] \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $\tilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in [c, d]$. Dann ist auch die Funktion $\tilde{f}$ integrierbar.*

Beweis: Sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$, die c und d enthält. Die Zerlegung $\mathcal{Z}$ eingeschränkt auf $[c, d]$ bezeichnen wir dann mit $\tilde{\mathcal{Z}}$. Ist $\mathcal{Z} = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$, wobei $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ gilt, und sind i und j die Indices mit $x_i = c$ und $x_j = d$, dann ergibt sich $\tilde{\mathcal{Z}} = \{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j\}$. Für die Ober- und Untersummen erhalten wir

$$O_{\mathcal{Z}}(f) - U_{\mathcal{Z}}(f) = \textstyle\sum_{m=1}^k (x_m - x_{m-1})(\sup_{[x_{m-1},x_m]} f - \inf_{[x_{m-1},x_m]} f)$$

$$O_{\tilde{\mathcal{Z}}}(\tilde{f}) - U_{\tilde{\mathcal{Z}}}(\tilde{f}) = \textstyle\sum_{m=i+1}^j (x_m - x_{m-1})(\sup_{[x_{m-1},x_m]} f - \inf_{[x_{m-1},x_m]} f)$$

Da die zweite Summe in der ersten enthalten ist und da alle Summanden größer oder gleich null sind, erhalten wir $O_{\tilde{\mathcal{Z}}}(\tilde{f}) - U_{\tilde{\mathcal{Z}}}(\tilde{f}) \le O_{\mathcal{Z}}(f) - U_{\mathcal{Z}}(f)$.

Sei jetzt $(\mathcal{Z}_n)_{n\ge1}$ eine Folge von Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$, die alle c und d enthalten und deren Gitterweiten gegen 0 gehen. Wie wir soeben gezeigt haben, gilt dann

$$O_{\tilde{\mathcal{Z}}_n}(\tilde{f}) - U_{\tilde{\mathcal{Z}}_n}(\tilde{f}) \le O_{\mathcal{Z}_n}(f) - U_{\mathcal{Z}_n}(f) \quad \text{für alle} \quad n \ge 1.$$

Lassen wir n gegen ∞ gehen, dann erhalten wir $O(\tilde{f}) - U(\tilde{f}) \le O(f) - U(f)$ aus Satz 4.3. Nun gilt $O(f) = U(f)$, da f integrierbar ist. Da $O(h) \ge U(h)$ für jede beschränkte Funktion h gilt, erhalten wir $O(\tilde{f}) = U(\tilde{f})$. Damit ist gezeigt, dass $\tilde{f}$ integrierbar ist. $\square$

Für eine integrierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist jede Funktion $\tilde{f}$, die man als Einschränkung von f auf ein Teilintervall $[c,d]$ erhält, integrierbar. Das Integral $\int_c^d \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x$ existiert. Wir schreiben $\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$ für dieses Integral, da $\tilde{f}$ auf $[c,d]$ ja mit f übereinstimmt.

Für eine integrierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ existieren somit die Integrale $\int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x$, wobei $a \le u < v \le b$ gilt. Zusätzlich dazu definieren wir auch noch $\int_u^u f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ und $\int_v^u f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x$. Wie man leicht sieht, bleiben die Aussagen von Satz 4.5 richtig, wenn die obere Integrationsgrenze kleiner oder gleich der unteren ist.

Denkt man an die Interpretation des Integrals als Fläche, dann ist der folgende Satz unmittelbar einsichtig. Addiert man die Fläche zwischen den Grenzen u und v zu der zwischen den Grenzen v und w, dann erhält man natürlich die Fläche zwischen den Grenzen u und w. Wir geben einen formalen Beweis mit Hilfe von Riemannsummen.

Satz 4.8: *Seien u, v und w Zahlen, die im Definitionsintervall der integrierbaren Funktion f liegen. Dann gilt $\int_u^w f(x)\,\mathrm{d}x = \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x + \int_v^w f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Beweis: Sind zwei der Zahlen u, v und w gleich, dann folgt die gesuchte Gleichung sofort aus den Definitionen. Wir nehmen daher an, dass diese drei Zahlen verschieden sind.

Sei zuerst $u < v < w$. Sei $(\mathcal{U}_n)_{n\ge1}$ eine Folge von Zerlegungen des Intervalls $[u,v]$, deren Gitterweite für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Ebenso sei $(\mathcal{Y}_n)_{n\ge1}$ eine Folge von Zerlegungen des Intervalls $[v,w]$, deren Gitterweite für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Für $n \ge 1$ sei $A_n(f)$ eine Riemannsumme von f zur Zerlegung $\mathcal{U}_n$ und $B_n(f)$ eine Riemannsumme von f zur Zerlegung $\mathcal{Y}_n$. Mit Hilfe von Satz 4.4 folgt $\lim_{n\to\infty} A_n(f) = \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\lim_{n\to\infty} B_n(f) = \int_v^w f(x)\,\mathrm{d}x$. Für $n \ge 1$ sei $\mathcal{Z}_n = \mathcal{U}_n \cup \mathcal{Y}_n$ und $C_n(f) = A_n(f) + B_n(f)$. Dann ist $\mathcal{Z}_n$ eine Zerlegung des Intervalls $[u,w]$ und $C_n(f)$ eine Riemannsumme von f zur Zerlegung $\mathcal{Z}_n$. Für $n \to \infty$ konvergiert die Gitterweite der Zerlegungen $\mathcal{Z}_n$ gegen 0. Aus Satz 4.4 folgt $\lim_{n\to\infty} C_n(f) = \int_u^w f(x)\,\mathrm{d}x$. In der Gleichung $C_n(f) = A_n(f) + B_n(f)$ lassen wir n gegen ∞ gehen. Das ergibt $\int_u^w f(x)\,\mathrm{d}x = \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x + \int_v^w f(x)\,\mathrm{d}x$.

Liegen die Zahlen u, v und w in einer anderen Reihenfolge, so kann man das gewünschte Resultat auf den bewiesenen Fall zurückführen. Gilt zum Beispiel $v < u < w$, dann haben wir $\int_v^w f(x)\,\mathrm{d}x = \int_v^u f(x)\,\mathrm{d}x + \int_u^w f(x)\,\mathrm{d}x$ gezeigt. Wegen $\int_v^u f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x$ folgt $\int_v^w f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x + \int_u^w f(x)\,\mathrm{d}x$, also die zu beweisende Gleichung. $\square$

Wir zeigen später, dass jede auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall definierte stetige Funktion integrierbar ist. Mit Hilfe dieses Resultats zeigen wir zwei wichtige Sätze.

Satz 4.9 (Mittelwertsatz der Integralrechnung) *Seien a und b verschiedene Punkte in $\mathbb{R}$ und sei $J = [a,b]$, wenn $a < b$, und $J = [b,a]$, wenn $b < a$. Seien f und g stetige Funktionen von J nach $\mathbb{R}$ und es gelte entweder $g \ge 0$ oder $g \le 0$. Dann existiert ein $c \in J$ mit $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$. Insbesondere existiert ein $c \in J$ mit $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = (b-a)f(c)$. (Es ist zu beachten, dass die Funktion fg stetig und somit auch integrierbar ist.)*

Beweis: Sei zuerst $a < b$ und $g \geq 0$. Da $f : J \to \mathbb{R}$ stetig ist, existiert ein Punkt $u \in J$, in dem f sein Minimum annimmt, und ein Punkt $v \in J$, in dem f sein Maximum annimmt. Es gilt $f(u) \leq f(t) \leq f(v)$ für alle $t \in J$. Wegen $g \geq 0$ folgt $f(u)g(t) \leq f(t)g(t) \leq f(v)g(t)$ für alle $t \in J$. Wegen $a < b$ erhalten wir mit Hilfe von Satz 4.6 und Satz 4.5

$$(*) \qquad f(u) \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leq f(v) \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Gilt $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = 0$, dann auch $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = 0$ und man kann $c \in J$ beliebig wählen. Im Fall $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$ existiert ein $c \in J$ mit $f(c) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t / \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$. Hat man in $(*)$ Ungleichheit, dann gilt das für ein c zwischen u und v nach dem Zwischenwertsatz. Hat man in $(*)$ eine Gleichheit, dann kann man $c = u$ oder $c = v$ wählen. Damit ist $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c) \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ für $g \geq 0$ und $a < b$ bewiesen ist.

Sei jetzt $b < a$ und $g \geq 0$. Es wurde gezeigt, dass ein $c \in J$ existiert mit $\int_b^a f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c) \int_b^a g(t)\,\mathrm{d}t$, das heißt $-\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = -f(c) \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$, woraus dann $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c) \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ folgt. Damit ist der Satz für $g \geq 0$ und Punkte a und b mit $a \neq b$ bewiesen.

Sei schließlich $g \leq 0$ und $a \neq b$. Dann gilt $-g \geq 0$. Es wure gezeigt, dass ein $c \in J$ existiert mit $\int_a^b -f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c) \int_a^b -g(t)\,\mathrm{d}t$, woraus $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c) \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ folgt. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Wählt man für g die konstante Funktion 1, dann erhält man die letzte Aussage. □

Der zweite Satz ist der sogenannte Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, der besagt, dass Integrieren die Umkehrung des Differenzierens ist.

Definition: Sei I ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f, wenn die Ableitung F' von F gleich f ist.

Satz 4.10 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) *Sei I ein offenes Intervall, das auch unbeschränkt sein kann, und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Für jedes $u \in I$ ist die Funktion $G : I \to \mathbb{R}$ definiert durch $G(x) = \int_u^x f(t)\,\mathrm{d}t$ eine Stammfunktion von f. Die Differenz zweier Stammfunktionen von f ist konstant. Für jede Stammfunktion F von f und für alle a und b in I gilt $\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y = F(b) - F(a)$.*

Beweis: Das Integral in der Definition von G existiert, da f stetig ist. Wir zeigen, dass G eine Stammfunktion ist. Für x und y in I mit $x \neq y$ gilt $G(y) - G(x) = \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t$ nach Satz 4.8. Aus Satz 4.9 mit $a = x$ und $b = y$ folgt die Existenz einer Zahl ξ im Intervall mit den Endpunkten x und y, sodass $G(y) - G(x) = (y - x)f(\xi)$ gilt. Wir erhalten daher $\lim_{y \to x} \frac{G(y)-G(x)}{y-x} = \lim_{y \to x} f(\xi) = f(x)$, da f stetig ist und mit y ja auch ξ gegen x gehen muss. Also gilt $G'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$, das heißt G ist eine Stammfunktion von f.

Sind F und $\tilde{F}$ zwei beliebige Stammfunktionen, dann gilt $(F - \tilde{F})' = f - f = 0$ auf I. Somit ist $F - \tilde{F}$ auf I konstant. Die Differenz zweier Stammfunktionen ist konstant.

Ist F eine beliebige Stammfunktion, dann gilt $F = G + c$ für eine Konstante c. Daher gilt $F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_u^b f(y)\,\mathrm{d}y - \int_u^a f(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y$ nach Satz 4.8. □

Wir geben Stammfunktionen für Funktionen an, die wir bereits behandelt haben.
Für $f(x) = \sin x$ ist $F(x) = -\cos x + c$ und für $f(x) = \cos x$ ist $F(x) = \sin x + c$ eine Stammfunktion, wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig ist. In beiden Fällen gilt ja $F'(x) = f(x)$.
Für $f(x) = e^x$ ist $F(x) = e^x + c$ eine Stammfunktion, wobei $c \in \mathbb{R}$ wieder beliebig ist.
Die Funktion $f(x) = x^r$ mit $r \in \mathbb{R}$ ist auf dem Intervall $I = (0, \infty)$ definiert, für manche r

auch auf ganz $\mathbb{R}$. Es gibt zwei Fälle. Im Fall $r \neq -1$ ist $F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$ eine Stammfunktion. Im Fall $r = -1$ ist $F(x) = \ln x + c$ eine Stammfunktion. Wieder ist $c \in \mathbb{R}$ beliebig.

Es genügt, jeweils eine einzige Stammfunktion zu finden. Nach Satz 4.10 erhält man dann alle Stammfunktionen, indem man eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ addiert.

Beispiel: Wir berechnen die Fläche unter einem Bogen der Sinuskurve. Gesucht ist also $\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x$. Da $-\cos x$ eine Stammfunktion von $\sin x$ ist, ist dieses Integral nach Satz 4.10 gleich $-\cos\pi + \cos 0 = 2$.

Aus den Rechenregeln für die Ableitung erhalten wir mit Hilfe von Satz 4.10 entsprechende Rechenregeln fürs Integral, nämlich die partielle Interation und die Substitutionsregel. Zuerst geben wir noch eine Definition.

Definition: Sei I ein offenes Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt stetig differenzierbar, wenn die Ableitung f' existiert und stetig ist.

Satz 4.11 (Partielle Integration) *Seien f und g auf dem offenen Intervall I stetig differenzierbar. Für a und b in I gilt $\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$.*

Beweis: Die Produktregel besagt $(fg)' = f'g + fg'$. Integriert man von a bis b, so folgt $\int_a^b (f(x)g(x))'\,\mathrm{d}x = \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$. Da fg eine Stammfunktion von $(fg)'$ ist, erhalten wir aus Satz 4.10, dass $\int_a^b (f(x)g(x))'\,\mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(a)g(a)$ gilt. □

Oft verwendet man die Schreibweise $h(x)\,\Big|_a^b = h(b) - h(a)$. Damit lässt sich die Formel für die partielle Integration so schreiben $\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\,\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$.

Beispiel: Wir berechnen $\int_a^b x \ln x \,\mathrm{d}x$ durch partielle Integration. Setzt man $f'(x) = x$, also $f(x) = \frac{x^2}{2}$, und $g(x) = \ln x$, dann folgt $\int_a^b x \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x\,\Big|_a^b - \int_a^b \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. Weiters gilt $\int_a^b \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{4}\,\Big|_a^b$, da $\frac{x^2}{4}$ eine Stammfunktion von $\frac{x}{2}$ ist, wie man leicht nachprüft. Wir erhalten $\int_a^b x\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x\,\Big|_a^b - \frac{x^2}{4}\,\Big|_a^b = \frac{b^2}{4}(2\ln b - 1) - \frac{a^2}{4}(2\ln a - 1)$.

Satz 4.12 (Substitutionsregel) *Seien I und J offene Intervalle und $\varphi : I \to J$ stetig differenzierbar. Die Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ sei stetig und F sei eine Stammfunktion von f. Für a und b in I gilt dann $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.*

Beweis: Wir verwenden die Kettenregel $(F \circ \varphi)'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Integriert man von a bis b, so folgt $F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ aus Satz 4.10. Da F eine Stammfunktion von f ist, gilt $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$ wieder wegen Satz 4.10. □

Beispiel: Wir berechnen $\int_0^v \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x$ mit Hilfe der Substitutionsregel. Zuerst muss man herausfinden, welche Funktion in x man als neue Variable t wählt. Wir wollen $\sqrt{2x+1}$ los werden. Wir setzen daher $t = \sqrt{2x+1}$. Es folgt $x = \frac{t^2-1}{2}$. Das ist $\varphi(t)$. Es gilt $\varphi(1) = 0$ und $\varphi(\sqrt{2v+1}) = v$. (Durch φ wird $[1, \sqrt{2v+1}]$ auf $[0, v]$ abgebildet.) Die Integrationsgrenzen für die Variable x sind 0 und v, die für die Variable t sind 1 und $\sqrt{2v+1}$. Wir ersetzen x durch $\varphi(t) = \frac{t^2-1}{2}$ und $\mathrm{d}x$ durch $\varphi'(t)\mathrm{d}t = t\mathrm{d}t$ nach der Substitutionsregel. Wir erhalten $\int_0^v \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{2v+1}} \frac{t^2-1}{2t} t\,\mathrm{d}t$. Eine Stammfunktion des Integranden $\frac{t^2-1}{2}$ ist $\frac{t^3}{6} - \frac{t}{2}$. Damit ergibt sich dann $\int_0^v \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{t^3-3t}{6}\,\Big|_1^{\sqrt{2v+1}} = \frac{v-1}{3}\sqrt{2v+1} + \frac{1}{3}$.

Will man eine Stammfunktion einer Funktion f bestimmen, dann berechnet man das Integral $F(x) = \int_u^x f(t)\,\mathrm{d}t$, wobei u beliebig ist. Wegen Satz 4.10 ist das eine Stammfunktion von f. Man erhält eine Stammfunktion $F(x)$ auch als unbestimmtes Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, das heißt man rechnet das Integral aus, ohne danach Grenzen einzusetzen. Das ergibt dasselbe abgesehen von der Konstanten, die durch das Einsetzen der unteren Grenze dazukommt. Aus dem vorletzten Beispiel folgt, dass $F(x) = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1)$ eine Stammfunktion von $f(x) = x \ln x$ ist. Verwendet man die Substitutionsregel beim Berechnen eines unbestimmten Integrals, dann erhält man die Stammfunktion als Funktion der neu eingeführten Variablen. Aus dem letzten Beispiel folgt, dass $\frac{t^3-3t}{6}$ eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x+1}}$ ist, jedoch in der neuen Variablen t. Durch Zurücksubstituieren von $t = \sqrt{2x+1}$ erhält man die Stammfunktion $F(x) = \frac{x-1}{3}\sqrt{2x+1}$.

Enthält die zu integrierende Funktion den Ausdruck $\sqrt{r^2 - x^2}$, dann kann man die Substitution $x = r \sin t$ versuchen. Wir rechnen dazu zwei Beispiele.

Beispiel: Wir berechnen $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$ mit Hilfe der Substitution $x = \varphi(t) = r \sin t$. Wir ersetzen x durch $\varphi(t) = r \sin t$ und $\mathrm{d}x$ durch $\varphi'(t)\mathrm{d}t = r \cos t \mathrm{d}t$. Es gilt $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(\frac{\pi}{2}) = r$. (Durch φ wird $[0, \frac{\pi}{2}]$ auf $[0, r]$ abgebildet.) Die Integrationsgrenzen für x sind 0 und r, die für t sind 0 und $\frac{\pi}{2}$. Wegen $1 - \sin^2 t = \cos^2 t$ erhalten wir

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r|\cos t| \cdot r \cos t\,\mathrm{d}t = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t.$$

Da $\frac{1}{4}(2t + \sin 2t)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$ ist, erhalten wir

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{r^2}{4}(\pi + \sin \pi) - \tfrac{r^2}{4}(0 + \sin 0) = \tfrac{r^2 \pi}{4}.$$

Beispiel: Wir berechnen $\int_0^r (r^2 - x^2)^{3/2}\,\mathrm{d}x$. Wir substituieren wieder $x = \varphi(t) = r \sin t$. Wir ersetzen x durch $\varphi(t) = r \sin t$ und $\mathrm{d}x$ durch $\varphi'(t)\mathrm{d}t = r \cos t \mathrm{d}t$. Die Integrationsgrenzen für die Variable t sind 0 und $\frac{\pi}{2}$. Wegen $1 - \sin^2 t = \cos^2 t$ ergibt sich

$$\int_0^r (r^2 - x^2)^{3/2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 |\cos t|^3 \cdot r \cos t\,\mathrm{d}t = r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\,\mathrm{d}t.$$

Um $\cos^4 t$ geeignet umzuformen, nehmen wir die Eulerformel zu Hilfe

$$\cos^4 t = \tfrac{1}{16}(e^{it} + e^{-it})^4 = \tfrac{1}{16}(e^{4it} + 4e^{2it} + 6 + 4e^{-2it} + e^{-4it}) = \tfrac{1}{8}\cos 4t + \tfrac{1}{2}\cos 2t + \tfrac{3}{8}.$$

Wir setzen das ein. Für $c \in \mathbb{R}$ ist $\frac{1}{c} \sin ct$ eine Stammfunktion von $\cos ct$. Wir erhalten

$$\int_0^r (r^2 - x^2)^{3/2}\,\mathrm{d}x = r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1}{8}\cos 4t + \tfrac{1}{2}\cos 2t + \tfrac{3}{8}\,\mathrm{d}t = r^4(\tfrac{1}{32}\sin 4t + \tfrac{1}{4}\sin 2t + \tfrac{3}{8}t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{3\pi}{16} r^4.$$

Beispiel: Wir suchen eine Stammfunktion von $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$, das heißt wir berechnen das unbestimmte Integral $\int \sqrt{1 + x^2}\,\mathrm{d}x$. Wir substituieren $x = \varphi(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$. Es gilt

$$\sqrt{1 + x^2} = \sqrt{1 + \tfrac{1}{4}(e^{2t} - 2 + e^{-2t})} = \tfrac{1}{2}(e^t + e^{-t})$$

und $\mathrm{d}x$ wird durch $\varphi'(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})\mathrm{d}t$ ersetzt. Durch Einsetzen erhalten wir

$$\tfrac{1}{4}\int (e^t + e^{-t})^2\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{4}\int (e^{2t} + 2 + e^{-2t})\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{8}e^{2t} + \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{8}e^{-2t}.$$

Damit ist eine Stammfunktion bereits berechnet, allerdings als Funktion in t. Wir müssen t wieder durch x ersetzen. Aus $x = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$ erhalten wir $e^t = x + \sqrt{1 + x^2}$ durch Lösen der quadratischen Gleichung $e^{2t} - 2xe^t - 1 = 0$. Da e^t positiv ist, kommt die andere Lösung $x - \sqrt{1 + x^2}$ nicht in Frage. Es folgt $t = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$ und $e^{-t} = \frac{1}{e^t} = -x + \sqrt{1 + x^2}$. Wir setzen das in obige Funktion ein und erhalten eine Stammfunktion in der Variable x

$$\tfrac{1}{8}(x + \sqrt{1 + x^2})^2 - \tfrac{1}{8}(-x + \sqrt{1 + x^2})^2 + \tfrac{1}{2}\log(x + \sqrt{1 + x^2}) = \tfrac{1}{2}x\sqrt{1 + x^2} + \tfrac{1}{2}\log(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

2. Gleichmäßige Stetigkeit

In diesem Kapitel wird nur gezeigt, dass eine stetige Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar ist. Dazu benötigen wir den Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit.

Definition: Eine Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig, wenn für jedes $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$ existiert, sodass sich für alle x und y in $[a,b]$ mit $|x-y|<\delta$ die Funktionswerte $f(x)$ und $f(y)$ um weniger als ε unterscheiden, das heißt $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ erfüllt ist.

Der Unterschied zur Stetigkeit besteht darin, dass δ nur von ε, nicht aber von einem Punkt $x\in[a,b]$ abhängt.

Satz 4.13: *Jede stetige Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.*

Beweis: Wir führen den Beweis indirekt. Wir nehmen an, dass f nicht gleichmäßig stetig ist. Es gibt somit ein $\varepsilon>0$, sodass für jedes $\delta>0$ die in der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit genannte Eigenschaft nicht gilt. Zu $\delta=\frac{1}{n}$ mit $n\in\mathbb{N}$ existieren also Punkte x_n und y_n in $[a,b]$, sodass zwar $|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$, aber $|f(x_n)-f(y_n)|\ge\varepsilon$ gilt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\ge1}$ von $(x_n)_{n\ge1}$, deren Grenzwert x in $[a,b]$ liegt. Aus $|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$ folgt $x_{n_k}-\frac{1}{n_k}\le y_{n_k}\le x_{n_k}+\frac{1}{n_k}$ für alle $k\ge1$, sodass wir $\lim_{k\to\infty}y_{n_k}=x$ mit Hilfe von Satz 1.7 erhalten. Da f stetig ist, ergibt sich $\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x)$ und $\lim_{k\to\infty}f(y_{n_k})=f(x)$ aus Satz 1.9. Daraus folgt $\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})-f(y_{n_k})=0$, was ein Widerspruch dazu ist, dass $|f(x_n)-f(y_n)|\ge\varepsilon$ für alle $n\ge1$ gilt. Damit ist der Satz bewiesen. □

Jetzt können wir bereits die Integrierbarkeit beweisen.

Satz 4.14: *Jede stetige Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist integrierbar.*

Beweis: Sei $\varepsilon>0$ vorgegeben. Wir setzen $\gamma=\frac{\varepsilon}{2(b-a)}>0$. Nach Satz 4.13 existiert ein $\delta>0$, sodass $|f(x)-f(y)|<\frac{\gamma}{2}$ für alle x und y in $[a,b]$ mit $|x-y|<\delta$ gilt. Sei $\mathcal{Z}=\{x_0,x_1,\dots,x_k\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ mit Gitterweite kleiner als δ. Wegen Satz 3.7 (c) existieren Punkte x und y in $[x_{j-1},x_j]$ mit $f(x)-\frac{\gamma}{4}<\inf_{[x_{j-1},x_j]}f$ und $f(y)+\frac{\gamma}{4}>\sup_{[x_{j-1},x_j]}f$. Wegen $|x-y|\le x_j-x_{j-1}<\delta$ folgt $|f(x)-f(y)|<\frac{\gamma}{2}$ und daher auch $\sup_{[x_{j-1},x_j]}f-\inf_{[x_{j-1},x_j]}f<f(y)-f(x)+\frac{\gamma}{2}<\gamma$. Wir erhalten daraus

$$O_{\mathcal{Z}}(f)-U_{\mathcal{Z}}(f)\le\textstyle\sum_{j=1}^k\gamma(x_j-x_{j-1})=\gamma(b-a)<\varepsilon.$$

Wegen $O(f)\le O_{\mathcal{Z}}(f)$ und $U(f)\ge U_{\mathcal{Z}}(f)$ folgt $O(f)-U(f)<\varepsilon$. Da $O(f)\ge U(f)$ immer gilt und $\varepsilon>0$ beliebig klein gewählt werden kann, ist $O(f)=U(f)$ gezeigt, das heißt f ist integrierbar. □

3. Anwendungen des Integrals

Die naheliegendste Anwendung des Integrals ist die *Berechnung von Flächen*. Es wurde ja so definiert, dass $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ die Fläche zwischen dem Graph der Funktion f und der x-Achse in den Grenzen von a bis b angibt. Wir berechnen die Fläche einer Ellipse.

Beispiel: Wir berechnen die Fläche der Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Ein Viertel davon ist die Fläche zwischen x-Achse und der Funktion $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ in den Grenzen von 0 bis a. Diese Fläche ist daher $\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$. Dieses Integral hat den Wert $\frac{a^2\pi}{4}$, wie im letzten Kapitel berechnet wurde. Ein Viertel der Ellipsenfläche ist also $\frac{ab\pi}{4}$ und die gesamte Ellipsenfläche ist $ab\pi$.

Eine weitere Anwendung des Integrals sind *Volumsberechnungen*. Sei E_x die Ebene im $\mathbb{R}^3$ durch den Punkt $(x, 0, 0)$, die senkrecht auf die x-Achse steht. Der Körper, dessen Volumen V wir berechnen wollen, liege im $\mathbb{R}^3$ zwischen den Ebenen E_a und E_b. Für $x \in [a, b]$ sei $u(x)$ die Fläche des Schnittes der Ebene E_x mit dem Körper. Wir nehmen an, dass $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist. Sei $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ eine beliebige Zerlegung des Intervalls $[a, b]$. Sei V_j das Volumen des Teils des Körpers, der zwischen den Ebenen $E_{x_{j-1}}$ und E_{x_j} liegt. Die stetige Funktion u nimmt im Intervall $[x_{j-1}, x_j]$ in einem Punkt p ihr Minimum und in einem Punkt q ihr Maximum an. Es gilt $(x_j - x_{j-1})u(p) \le V_j \le (x_j - x_{j-1})u(q)$, sodass nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ existiert, für das $V_j = (x_j - x_{j-1})u(\xi_j)$ gilt. Daraus erhalten wir dann $V = \sum_{j=1}^k V_j = \sum_{j=1}^k (x_j - x_{j-1})u(\xi_j)$. Lässt man jetzt die Gitterweite der Zerlegung gegen 0 gehen, dann geht diese Summe gegen das entsprechende Integral, sodass

$$V = \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x$$

eine Formel für das Volumen des Körpers ist.

Beispiel: Wir berechnen das Volumen V eines Kegels, dessen Höhe h ist und dessen Grundfläche eine beliebige ebene Figur mit Fläche G ist. Wir legen diesen Kegel in den $\mathbb{R}^3$, sodass die Spitze im Koordinatenursprung und die Grundfläche in der Ebene E_h liegt. Aus dem Strahlensatz folgt, dass die Fläche $u(x)$ des Schnittes der Ebene E_x mit diesem Kegel gleich $(\frac{x}{h})^2 G$ ist. Es folgt $V = \int_0^h u(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^h (\frac{x}{h})^2 G\,\mathrm{d}x = \frac{G}{h^2}\int_0^h x^2\,\mathrm{d}x = \frac{Gh}{3}$. Eine quadratische Pyramide mit Grundkante a und Höhe h hat dann das Volumen $\frac{a^2h}{3}$. Ein Kegel mit kreisförmiger Grundfläche vom Radius r und Höhe h hat das Volumen $\frac{r^2\pi h}{3}$.

Beispiel: Wir berechnen das Volumen des Ellipsoids mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Dieses Ellipsoid liegt zwischen den Ebenen E_{-a} und E_a. Für $-a < x < a$ ist der Schnitt von E_x mit dem Ellipsoid die Ellipse mit der Gleichung $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{a^2-x^2}{a^2}$, das heißt $\frac{a^2y^2}{b^2(a^2-x^2)} + \frac{a^2z^2}{c^2(a^2-x^2)} = 1$. Sie hat die Fläche $u(x) = \pi\frac{bc}{a^2}(a^2 - x^2)$. Das Volumen des Ellipsoids ist daher $\int_{-a}^a u(x)\,\mathrm{d}x = \pi\frac{bc}{a^2}\int_{-a}^a a^2 - x^2\,\mathrm{d}x = \pi\frac{bc}{a^2}(a^2x - \frac{x^3}{3})\,\Big|_{-a}^a = \frac{4}{3}\pi abc$.

Ein wichtiger Spezialfall obiger Volumsformel ist das *Volumen eines Drehkörpers*, der durch die Rotation des Flächenstücks unter der stetigen Funktion $f : [a, b] \to [0, \infty)$ um die x-Achse entsteht. Für $x \in [a, b]$ ist die Fläche des Schnittes der Ebene E_x mit dem Drehkörper gleich $u(x) = \pi f(x)^2$. Die Formel für das Volumen des Drehkörpers ist daher

$$V = \pi\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

Beispiel: Sei $0 \le a < b \le r$. Wir berechnen das Volumen des Segments der Kugel mit Mittelpunkt $(0, 0, 0)$ und Radius r zwischen den Ebenen E_a und E_b. Hier rotiert das Flächenstück unter der Funktion $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ über dem Intervall $[a, b]$ um die x-Achse. Wir erhalten $V = \pi\int_a^b r^2 - x^2\,\mathrm{d}x = \pi(r^2x - \frac{x^3}{3})\,\Big|_a^b = \pi(r^2(b-a) - \frac{b^3-a^3}{3})$

Beispiel: Sei $a > r$. Wir berechnen das Volumen des Ringes (Torus), der durch die Rotation des Kreises $x^2 + (y - a)^2 = r^2$ um die x-Achse entsteht. Dieses Volumen V ist die Differenz der beiden Volumina $\pi\int_{-r}^r (a + \sqrt{r^2 - x^2})^2\,\mathrm{d}x$ und $\pi\int_{-r}^r (a - \sqrt{r^2 - x^2})^2\,\mathrm{d}x$. Wir erhalten also $V = 4a\pi\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = 4a\pi\frac{r^2\pi}{2} = 2ar^2\pi^2$.

Wir bestimmen das Volumen über einem sogenannten *Normalbereich* $B \subseteq \mathbb{R}^2$ unter einer Funktion $g : B \to [0,\infty)$. Man nennt B einen Normalbereich bezüglich der x-Achse, wenn ein Intervall $[a,b]$ und stetige Funktionen $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi \le \psi$ existieren, sodass $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ gilt. Die Fläche $u(x)$ des Schnittes der Ebene E_x mit dem Körper über B und unter g lässt sich dann durch $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} g(x,y)\,\mathrm{d}y$ berechnen. Wir erhalten also

$$V = \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{mit} \quad u(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} g(x,y)\,\mathrm{d}y$$

als Volumen über dem Bereich B unter der Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$.

Wir können bei allen diesen Überlegungen die Rolle der Koordinaten vertauschen. Lässt sich der Bereich B schreiben als Normalbereich bezüglich der y-Achse, das heißt es gilt $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ \varrho(y) \le x \le \chi(y)\}$ für ein Intervall $[c,d]$ und stetige Funktionen $\varrho : [c,d] \to \mathbb{R}$ und $\chi : [c,d] \to \mathbb{R}$ mit $\varrho \le \chi$, dann ergibt sich wie oben

$$V = \int_c^d v(y)\,\mathrm{d}y \quad \text{mit} \quad v(y) = \int_{\varrho(y)}^{\chi(y)} g(x,y)\,\mathrm{d}x$$

als Volumen über dem Bereich B unter der Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$.

Beispiel: Wir berechnen das Volumen über dem Rechteck $B = [-1,1] \times [0,2]$ unter der Funktion $g(x,y) = x + 3y + 1$. Wir erhalten

$$u(x) = \textstyle\int_0^2 g(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^2 x + 3y + 1\,\mathrm{d}y = xy + \frac{3}{2}y^2 + y\,\big|_0^2 = 2x + 6 + 2 = 2x + 8 \quad \text{und}$$

$$V = \textstyle\int_{-1}^1 u(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 2x + 8\,\mathrm{d}x = x^2 + 8x\,\big|_{-1}^1 = 9 - (-7) = 16.$$

Man kann das auch so ausrechnen

$$v(y) = \textstyle\int_{-1}^1 x + 3y + 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + 3yx + x\,\big|_{-1}^1 = 3y + \frac{3}{2} - (-3y - \frac{1}{2}) = 6y + 2 \quad \text{und}$$

$$V = \textstyle\int_0^2 v(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^2 6y + 2\,\mathrm{d}y = 3y^2 + 2y\,\big|_0^2 = 12 + 4 = 16.$$

Beispiel: Sei $g(x,y) = 2x + 3y$ und B die Fläche zwischen den Parabeln $y^2 = x$ und $y^2 = 4(x-3)$. Gesucht ist das Volumen über B und unter g. Die erste der Parabeln hat Scheitel $(0,0)$, die zweite $(3,0)$. Sie schneiden einander in den Punkten $(4,2)$ und $(4,-2)$. Somit ist B der Normalbereich $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \le y \le 2,\ y^2 \le x \le \frac{1}{4}y^2 + 3\}$.

$$\begin{aligned} v(y) &= \textstyle\int_{y^2}^{\frac{1}{4}y^2+3} 2x + 3y\,\mathrm{d}x = (x^2 + 3xy)\,\big|_{y^2}^{\frac{1}{4}y^2+3} = (\frac{1}{4}y^2 + 3)^2 + 3y(\frac{1}{4}y^2 + 3) - y^4 - 3y^3 \\ &= \tfrac{1}{16}y^4 + \tfrac{3}{2}y^2 + 9 + \tfrac{3}{4}y^3 + 9y - y^4 - 3y^3 = -\tfrac{15}{16}y^4 - \tfrac{9}{4}y^3 + \tfrac{3}{2}y^2 + 9y + 9 \quad \text{und} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \textstyle\int_{-2}^2 v(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^2 -\frac{15}{16}y^4 - \frac{9}{4}y^3 + \frac{3}{2}y^2 + 9y + 9\,\mathrm{d}y \\ &= -\tfrac{3}{16}y^5 - \tfrac{9}{16}y^4 + \tfrac{1}{2}y^3 + \tfrac{9}{2}y^2 + 9y\,\big|_{-2}^2 = -12 + 8 + 36 = 32. \end{aligned}$$

Beispiel: Wir berechnen das Volumen des Schnittkörpers zweier Zylinder, die beide Radius r haben und deren Achsen die x-Achse bzw. die y-Achse sind. Aus Symmetriegründen genügt es, den Teil des Schnittkörpers zu betrachten, der über dem Bereich $B = \{(x,y) : 0 \le x \le r,\ 0 \le y \le x\}$ liegt. Das ist ein Sechzehntel des Schnittkörpers. Oberhalb von B wird der Schnittkörper durch die Funktion $g(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2}$ begrenzt.

$$u(x) = \textstyle\int_0^x g(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^x \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}y = y\sqrt{r^2 - x^2}\,\big|_0^x = x\sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{und}$$

$$V = \textstyle\int_0^r u(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}(r^2 - x^2)^{3/2}\,\big|_0^r = \frac{1}{3}r^3.$$

Das Volumen des Schnittkörpers ist daher $\frac{16}{3}r^3$.

Als weitere Anwendung des Integrals bestimmen wir die *Bogenlänge* des Graphen einer Funktion. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) stetig differenzierbar. Wir nehmen weiters an, dass die Ableitung f' zu einer stetigen Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ fortgesetzt werden kann. Wir approximieren den Graph von f durch einen Polygonzug. Sei $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ eine beliebige Zerlegung des Intervalls $[a, b]$. Dann ist $\sum_{j=1}^{k} \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (f(x_j) - f(x_{j-1}))^2}$ die Länge des Polygonzugs durch die Punkte $(x_j, f(x_j))$ mit $0 \le j \le k$. Nach dem Mittelwertsatz existiert für jedes j ein $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ mit $\frac{f(x_j)-f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} = f'(\xi_j)$. Daher ist die Länge des Polygonzuges gleich $\sum_{j=1}^{k} \sqrt{1 + f'(\xi_j)^2}(x_j - x_{j-1})$. Die Bogenlänge L der Kurve ist der Grenzwert der Längen der Polygonzüge, wenn die Gitterweite der Zerlegung gegen 0 geht. Die Längen der Polygonzüge sind aber Riemannsummen für die auf $[a, b]$ stetige und daher auch integrierbare Funktion $\sqrt{1 + f'(x)^2}$. Der Grenzwert ist daher das entsprechende Integral. Wir erhalten

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

als Formel für die Bogenlänge der Kurve, die durch den Graph von f gegeben ist.

Beispiel: Durch $f(x) = \frac{p}{2}x^2$ ist eine Parabel gegeben. Wir berechnen die Länge des Parabelstücks mit $0 \le x \le c$. Wegen $f'(x) = px$ ergibt sich $L = \int_0^c \sqrt{1 + p^2x^2}\,\mathrm{d}x$ aus obiger Formel. Führt man die neue Variable $t = px$ ein, so hat man $L = \int_0^{pc} \sqrt{1 + t^2}\frac{1}{p}\,\mathrm{d}t$. Nach einem früheren Beispiel ist $G(t) = \frac{1}{2}t\sqrt{1 + t^2} + \frac{1}{2}\log(t + \sqrt{1 + t^2})$ eine Stammfunktion von $\sqrt{1 + t^2}$. Es folgt $L = \frac{1}{p}(G(pc) - G(0)) = \frac{c}{2}\sqrt{1 + p^2c^2} + \frac{1}{2p}\log(pc + \sqrt{1 + p^2c^2})$.

4. Verallgemeinerte Riemannsummen

Um noch andere Anwendungen des Integrals behandeln zu können, brauchen wir eine verallgemeinerte Form von Riemannsummen. Es gilt folgender Satz.

Satz 4.15: *Seien f und g stetige Funktionen von $[a, b]$ nach $\mathbb{R}$. Sei $(\mathcal{Z}_n)_{n\ge1}$ eine Folge von Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$, deren Gitterweite für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Für jedes $n \ge 1$ sei $B_n = \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)g(\eta_j)(x_j - x_{j-1})$, wobei wir $\mathcal{Z}_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ gesetzt haben und ξ_j und η_j beliebig im Intervall $[x_{j-1}, x_j]$ gewählt werden. Es gilt dann $\lim_{n\to\infty} B_n = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.*

Beweis: Da f stetig ist, existiert ein c mit $|f(x)| \le c$ für alle $x \in [a, b]$. Für $n \ge 1$ sei $A_n = \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)g(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$, eine Riemannsumme zur Zerlegung $\mathcal{Z}_n$ für fg.
Wir zeigen $\lim_{n\to\infty} A_n - B_n = 0$. Dazu sei $\varepsilon > 0$. Da g stetig ist, existiert wegen Satz 4.13 ein $\delta > 0$, sodass $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{c(b-a)}$ gilt für alle x und y in $[a, b]$ mit $|x - y| < \delta$. Weiters sei n_0 so gewählt, dass $\mathcal{Z}_n$ für $n \ge n_0$ Gitterweite $< \delta$ hat. Für $n \ge n_0$ ergibt sich dann $|g(\xi_j) - g(\eta_j)| < \frac{\varepsilon}{c(b-a)}$, da ja $|\xi_j - \eta_j| \le |x_j - x_{j-1}| < \delta$ gilt. Damit erhalten wir

$$|A_n - B_n| = \Big|\sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)\big(g(\xi_j) - g(\eta_j)\big)(x_j - x_{j-1})\Big|$$
$$\le \sum_{j=1}^{k} |f(\xi_j)| \cdot |g(\xi_j) - g(\eta_j)|(x_j - x_{j-1}) < \sum_{j=1}^{k} c\frac{\varepsilon}{c(b-a)}(x_j - x_{j-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b - a) = \varepsilon$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert somit ein n_0, sodass $|A_n - B_n| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$ gilt. Damit ist $\lim_{n\to\infty} A_n - B_n = 0$ gezeigt. Weiters erhalten wir $\lim_{n\to\infty} A_n = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ mit Hilfe von Satz 4.4, da die Funktion fg stetig und daher integrierbar ist. Daraus ergibt sich dann $\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} A_n - \lim_{n\to\infty}(A_n - B_n) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. □

Wir verwenden Satz 4.15, um eine Formel für die *Mantelfläche eines Drehkörpers* zu finden. Sei $f : [a,b] \to [0,\infty)$ stetig und auf (a,b) stetig differenzierbar. Wir nehmen weiters an, dass die Ableitung f' zu einer stetigen Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ fortgesetzt werden kann. Der Graph von f rotiert um die x-Achse. Wir berechnen die dadurch entstehende Oberfläche, die Mantelfläche des Drehkörpers. Wie bei der Berechnung der Bogenlänge approximieren wir den Graph der Funktion f durch einen Polygonzug und lassen diesen Polygonzug dann um die x-Achse rotieren. Es sei $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ eine beliebige Zerlegung des Intervalls $[a,b]$. Die Fläche, die entsteht, wenn die Strecke von $(x_{j-1}, f(x_{j-1}))$ nach $(x_j, f(x_j))$ um die x-Achse rotiert, ist $2\pi f(\eta_j)\sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (f(x_j) - f(x_{j-1}))^2}$ für ein η_j im Intervall $[x_{j-1}, x_j]$. Wegen des Mittelwertsatzes gilt $\sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (f(x_j) - f(x_{j-1}))^2} = \sqrt{1 + f'(\xi_j)^2}(x_j - x_{j-1})$ für ein $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$. Daher ist die Fläche, die durch Rotation des Polygonzuges entsteht, gleich $2\pi \sum_{j=1}^k f(\eta_j)\sqrt{1 + f'(\xi_j)^2}(x_j - x_{j-1})$. Die Mantelfläche M ist der Grenzwert dieser Summe, wenn die Gitterweite der Zerlegung gegen 0 geht. Wegen Satz 4.15 erhalten wir

$$M = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

als Formel für die Mantelfläche, die durch Rotation des Graphen von f entsteht.

Beispiel: Wir berechnen die Mantelfläche M eines Kegels mit Radius r und Höhe h. Diese entsteht, wenn der Graph der Funktion $f : [0,h] \to [0,\infty)$ definiert durch $f(x) = \frac{r}{h}x$ um die x-Achse rotiert. Die Ableitung ist $f'(x) = \frac{r}{h}$. Aus obiger Formel erhalten wir

$$M = 2\pi \int_0^h \tfrac{r}{h}x\sqrt{1 + (\tfrac{r}{h})^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi \tfrac{r}{h}\tfrac{x^2}{2}\sqrt{1 + (\tfrac{r}{h})^2}\,\Big|_0^h = \pi r\sqrt{h^2 + r^2}.$$

Oft wird $\sqrt{h^2 + r^2}$ mit s bezeichnet. Die Formel für die Mantelfläche ist dann $M = \pi rs$.

Beispiel: Wir suchen die Kugeloberfläche. Der Graph der Funktion $f : [-r,r] \to [0,\infty)$ definiert durch $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ rotiert um die x-Achse. Wir berechnen $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$. Aus obiger Formel folgt dann $M = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2}\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\pi rx\,\big|_{-r}^r = 4\pi r^2$.

Seien f und g stetige Funktionen von $[a,b]$ nach $\mathbb{R}$, sodass $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ gilt. Wir suchen eine Formel für den *Schwerpunkt des Flächenstücks*, das von den Graphen der Funktionen f und g und den beiden senkrechten Geraden durch a und durch b begrenzt wird. Sei s die x-Koordinate des Schwerpunkts. Unterstützt man das Flächenstück durch die Gerade $x = s$, dann darf es weder nach der einen noch nach der anderen Seite kippen. Das Drehmoment, das durch die Schwerkraft bewirkt wird, muss gleich null sein.

Sei $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$. Das Drehmoment, das durch den Streifen zwischen den senkrechten Geraden $x = x_{j-1}$ und $x = x_j$ bewirkt wird, ist gleich dem Produkt des Flächeninhalts des Streifens und des mit einem Vorzeichen versehenen Abstands seines Schwerpunktes von der Geraden $x = s$. Dieses Produkt ist gleich $(g(\xi_j) - f(\xi_j))(x_j - x_{j-1})(\eta_j - s)$, wobei η_j und ξ_j in $[x_{j-1}, x_j]$ liegen. Als Drehmoment für die gesamte Fläche erhalten wir $D = \sum_{j=1}^k (\eta_j - s)(g(\xi_j) - f(\xi_j))(x_j - x_{j-1})$. Da man die Gitterweite der Zerlegung beliebig klein machen kann, folgt aus Satz 4.15, dass $D = \int_a^b (x - s)(g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$ gilt. Setzt man das gleich null, so erhält man

$$s = \int_a^b x\big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x \Big/ \int_a^b g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x$$

als x-Koordinate des Flächenschwerpunkts. Die y-Koordinate kann man berechnen, indem man die y-Achse als x-Achse und die x-Achse als y-Achse auffasst.

Beispiel: Sei $y = p - qx^2$ mit $p > 0$ und $q > 0$. Diese Gleichung stellt eine Parabel mit Scheitel $(0, p)$ dar. Wir berechnen den Schwerpunkt des Flächenstücks, das oberhalb der x-Achse, rechts von der y-Achse und innerhalb der Parabel liegt, also zwischen den Graphen der Funktionen $f(x) = 0$ und $g(x) = p - qx^2$ und den Grenzen $a = 0$ und $b = \sqrt{p/q}$. Die x-Koordinate des Schwerpunkts ergibt sich aus obiger Formel. Wir erhalten $\int_0^{\sqrt{p/q}} x(p - qx^2)\,\mathrm{d}x = \frac{px^2}{2} - \frac{qx^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{p/q}} = \frac{p^2}{4q}$ und $\int_0^{\sqrt{p/q}} p - qx^2\,\mathrm{d}x = px - \frac{qx^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{p/q}} = \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{q}}$. Die x-Koordinate des Schwerpunkts ist der Quotient dieser beiden Werte, also $\frac{3}{8}\sqrt{\frac{p}{q}}$.
Um die y-Koordinate des Schwerpunkts zu berechnen, fassen wir y als Variable auf und lassen die y-Achse die Rolle der x-Achse spielen. Die Parabelgleichung wird zu $x = \sqrt{\frac{p-y}{q}}$. Das Flächenstück liegt zwischen den Graphen der Funktionen $f(y) = 0$ und $g(y) = \sqrt{\frac{p-y}{q}}$ und den Grenzen $a = 0$ und $b = p$. Um obige Formel zu verwenden, berechnen wir $\int_0^p y\sqrt{\frac{p-y}{q}}\,\mathrm{d}y = -2q\int_{\sqrt{p/q}}^0 (p - qt^2)t^2\,\mathrm{d}t = -2q\big(\frac{pt^3}{3} - \frac{qt^5}{5}\big)\Big|_{\sqrt{p/q}}^0 = \frac{4p^2}{15}\sqrt{\frac{p}{q}}$, wobei wir $t = \sqrt{\frac{p-y}{q}}$ substituiert haben, und $\int_0^p \sqrt{\frac{p-y}{q}}\,\mathrm{d}y = -\frac{2}{3\sqrt{q}}(p-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^p = \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{q}}$. Der Quotient dieser Werte ist $\frac{2p}{5}$. Das ist die y-Koordinate des Schwerpunkts. Der Schwerpunkt der Fläche, die von der Parabel und den Koordinatenachsen begrenzt wird, ist $(\frac{3}{8}\sqrt{\frac{p}{q}}, \frac{2p}{5})$.

Genauso wie für eine Fläche kann man auch die Schwerpunktskoordinaten eines Körpers berechnen. Wir tun das für einen Drehkörper, der durch Rotation des Flächenstücks unter dem Graph einer stetigen Funktion $f : [a, b] \to [0, \infty)$ um die x-Achse entsteht. Der *Schwerpunkt des Drehkörpers* liegt auf der x-Achse. Seine x-Koordinate bezeichnen wir mit s. Sei $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$. Das Drehmoment, das durch die Scheibe des Drehkörpers über dem Intervall $[x_{j-1}, x_j]$ bezüglich der Ebene $x = s$ bewirkt wird, ist gleich dem Produkt des Volumens der Scheibe und des mit einem Vorzeichen versehenen Abstands ihres Schwerpunktes von der Ebene $x = s$. Es ist gleich $(\eta_j - s)\pi f(\xi_j)^2(x_j - x_{j-1})$, wobei η_j und ξ_j in $[x_{j-1}, x_j]$ liegen. Daher ist $D = \sum_{j=1}^k (\eta_j - s)\pi f(\xi_j)^2(x_j - x_{j-1})$ das gesamte Drehmoment. Da man die Gitterweite der Zerlegung beliebig klein machen kann, folgt $D = \pi\int_a^b (x - s)f(x)^2\,\mathrm{d}x$ aus Satz 4.15. Setzt man das gleich null, so erhält man

$$s = \int_a^b xf(x)^2\,\mathrm{d}x \Big/ \int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x$$

als x-Koordinate des Schwerpunkts des Drehkörpers.

Beispiel: Wir berechnen den Schwerpunkt des Kegels mit Höhe h und Radius r. Die Fläche unter dem Graph der Funktion $f : [0, h] \to [0, \infty)$ definiert durch $f(x) = \frac{r}{h}x$ rotiert um die x-Achse. Wir berechnen $\int_0^h xf(x)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^h x(\frac{r}{h}x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{r^2}{h^2}\frac{x^4}{4}\Big|_0^h = \frac{r^2h^2}{4}$ und $\int_0^h f(x)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^h (\frac{r}{h}x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{r^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{r^2h}{3}$. Daraus ergibt sich $s = \frac{3}{4}h$. Der Schwerpunkt des Kegels liegt also bei einem Viertel der Höhe über der Grundfläche.

5. Uneigentliche Integrale

Wir haben bisher Integrale nur für beschränkte Funktionen auf beschränkten abgeschlossenen Intervallen definiert. Ist das Integrationsintervall unbeschränkt, oder hat die zu integrierende Funktion eine Polstelle, dann spricht man von uneigentlichen Integralen. Diese definiert man durch Grenzwerte.

Der Einfachheit halber behandeln wir nur Funktionen mit Werten in $[0,\infty)$. Für eine Funktion $f:[a,\infty)\to[0,\infty)$ definieren wir $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^n f(x)\,\mathrm{d}x$. Für eine Funktion $f:(-\infty,b]\to[0,\infty)$ definieren wir $\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Für eine Funktion $f:(-\infty,\infty)\to[0,\infty)$ definieren wir $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^n f(x)\,\mathrm{d}x$. Dabei wird die Existenz der Grenzwerte und der Integrale auf der rechten Seite vorausgesetzt.

Beispiel: Wir berechnen das Integral $\int_1^\infty x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x$ für $\alpha>0$. Für $\alpha\neq 1$ ist $x\mapsto\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$ eine Stammfunktion von $x\mapsto x^{-\alpha}$. Es folgt $\int_1^n x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x=\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^n=\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}$. Für $\alpha<1$ erhält man ∞, wenn n gegen ∞ geht. In diesem Fall existiert das Integral $\int_1^\infty x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x$ nicht. Für $\alpha>1$ erhält man $\frac{1}{\alpha-1}$, wenn n gegen ∞ geht. In diesem Fall gilt $\int_1^\infty x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha-1}$. Es bleibt der Fall $\alpha=1$. Eine Stammfunktion von $x\mapsto x^{-\alpha}$ ist $x\mapsto\ln x$. Es folgt $\int_1^n x^{-1}\,\mathrm{d}x=\ln n$, sodass das Integral $\int_1^\infty x^{-1}\,\mathrm{d}x$ nicht existiert.

Ähnlich geht man bei Funktionen mit Polstelle vor. Für eine Funktion $f:[a,b)\to[0,\infty)$ mit Polstelle bei b definieren wir $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^{b-\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x$. Für eine Funktion $f:(a,b]\to[0,\infty)$ mit Polstelle bei a definieren wir $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{a+\frac{1}{n}}^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Vorausgesetzt wird die Existenz der Grenzwerte und der Integrale auf der rechten Seite.

Beispiel: Wir berechnen das Integral $\int_0^1 x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x$ für $\alpha>0$. Für $\alpha\neq 1$ ist $x\mapsto\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$ eine Stammfunktion von $x\mapsto x^{-\alpha}$. Es folgt $\int_{\frac{1}{n}}^1 x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x=\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{\frac{1}{n}}^1=\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1}{(1-\alpha)n^{1-\alpha}}$. Für $\alpha>1$ erhält man ∞, wenn n gegen ∞ geht. In diesem Fall existiert das Integral $\int_0^1 x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x$ nicht. Für $\alpha<1$ erhält man $\frac{1}{1-\alpha}$, wenn n gegen ∞ geht. In diesem Fall gilt $\int_0^1 x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{1-\alpha}$. Es bleibt $\alpha=1$. Eine Stammfunktion von $x\mapsto x^{-1}$ ist $x\mapsto\ln x$. Es folgt $\int_{\frac{1}{n}}^1 x^{-1}\,\mathrm{d}x=\ln 1-\ln\frac{1}{n}=\ln n$, sodass das Integral $\int_0^1 x^{-1}\,\mathrm{d}x$ nicht existiert.

Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass wir uneigentliche Integrale nur für Funktionen mit Werten in $[0,\infty)$ behandelt haben. Bei Funktionen, die sowohl positive als auch negative Werte annehmen, muss man vorsichtiger vorgehen.

6. Approximation von Funktionen durch Polynome

Um die Exponentialfunktion, trigonometrische Funktionen, die Logarithmusfunktion und andere berechnen zu können, muss man sie approximieren. Eine Möglichkeit ist die Approximation durch Polynome. Wir beginnen mit dem Satz von Taylor, der eine derartige Approximation angibt, und approximieren anschließend verschiedene Funktionen.

Satz 4.16 (Taylorformel) *Sei I ein offenes Intervall, das 0 enthält, und $n\geq 0$. Sei $f:I\to\mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, das heißt, für $k\leq n+1$ existiert die k-te Ableitung $f^{(k)}$ von f und $f^{(n+1)}$ ist stetig. Sei $x\in I$. Dann hat man die Formel*

$$f(x)=f(0)+f'(0)\frac{x}{1!}+\cdots+f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}+R_{n+1}(x)$$

wobei $R_{n+1}(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t$ gilt. Außerdem existiert ein c mit $0\leq c\leq x$ oder $x\leq c\leq 0$, sodass $R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$ gilt. Man nennt $R_{n+1}(x)$ das Restglied.

Beweis: Für $x = 0$ ist die zu beweisende Gleichung erfüllt. Sei daher $x \in I \setminus \{0\}$ fest gewählt. Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Da $t \mapsto -(x-t)$ eine Stammfunktion von 1 ist, erhalten wir mit partieller Integration, dass $\int_0^x f'(t) \cdot 1\,\mathrm{d}t = -f'(t)(x-t)\,\big|_0^x + \int_0^x f''(t)(x-t)\,\mathrm{d}t$ gilt. Daraus folgt

$$f(x) = f(0) + f'(0)\tfrac{x}{1!} + \int_0^x f''(t)\tfrac{(x-t)}{1!}\,\mathrm{d}t$$

Da $t \mapsto -\frac{(x-t)^2}{2!}$ eine Stammfunktion von $t \mapsto \frac{x-t}{1!}$ ist, erhalten wir mit partieller Integration, dass $\int_0^x f''(t)\frac{(x-t)}{1!}\,\mathrm{d}t = -f''(t)\frac{(x-t)^2}{2!}\,\big|_0^x + \int_0^x f^{(3)}(t)\frac{(x-t)^2}{2!}\,\mathrm{d}t$ gilt. Daraus folgt

$$f(x) = f(0) + f'(0)\tfrac{x}{1!} + f''(0)\tfrac{x^2}{2!} + \int_0^x f^{(3)}(t)\tfrac{(x-t)^2}{2!}\,\mathrm{d}t$$

Führt man diesen Schritt n Mal durch, so erhält man

$$f(x) = f(0) + f'(0)\tfrac{x}{1!} + \cdots + f^{(n)}(0)\tfrac{x^n}{n!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\tfrac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t$$

Damit ist die Formel mit der ersten Version von $R_{n+1}(x)$ bewiesen.
Um die zweite Form von $R_{n+1}(x)$ zu zeigen, sei $J = [0, x]$ im Fall $x > 0$, und $J = [x, 0]$ im Fall $x < 0$. Sei $g(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$. Dann gilt $g \geq 0$ oder $g \leq 0$ auf dem Intervall J. Da $f^{(n+1)}$ als stetig vorausgesetzt wird, folgt aus Satz 4.9, dass ein $c \in J$ existiert mit $R_{n+1}(x) = \int_0^x f^{(n+1)}(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f^{(n+1)}(c)\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = f^{(n+1)}(c)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. □

Um Funktionen durch Approximation mit Polynomen näherungsweise zu berechnen, ist es notwendig, das Restglied abzuschätzen. Dazu beweisen wir folgenden Satz.

Satz 4.17: *Sei $a \neq b$ und I das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten a und b. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt $|\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y| \leq \int_a^b |f(y)|\,\mathrm{d}y$, wenn $a < b$ ist, und $|\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y| \leq \int_b^a |f(y)|\,\mathrm{d}y$, wenn $b < a$ ist.*

Beweis: Da f stetig ist, ist auch $|f|$ stetig. Somit sind beide Funktionen integrierbar.
Sei zuerst $a < b$. Es gilt $f(y) \leq |f(y)|$ und $-f(y) \leq |f(y)|$ für alle $y \in I = [a, b]$. Aus Satz 4.6 folgt $\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y \leq \int_a^b |f(y)|\,\mathrm{d}y$ und $-\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y \leq \int_a^b |f(y)|\,\mathrm{d}y$. Da $|\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y|$ entweder $\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y$ oder $-\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y$ ist, ist $|\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y| \leq \int_a^b |f(y)|\,\mathrm{d}y$ bereits gezeigt.
Sei jetzt $b < a$. Im vorherigen Absatz wurde $|\int_b^a f(y)\,\mathrm{d}y| \leq \int_b^a |f(y)|\,\mathrm{d}y$ bewiesen. Wegen $|\int_b^a f(y)\,\mathrm{d}y| = |-\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y| = |\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y|$ erhalten wir $|\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y| \leq \int_b^a |f(y)|\,\mathrm{d}y$. □

Beispiel: Wir entwickeln die Funktion e^x mit $x \in \mathbb{R}$ nach der Taylorformel aus Satz 4.16. Da alle Ableitungen von e^x wieder e^x sind, erhalten wir

$$e^x = 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} + \cdots + \tfrac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x) \quad \text{mit} \quad R_{n+1}(x) = \tfrac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

wobei entweder $0 \leq c \leq x$ oder $x \leq c \leq 0$ gilt. Es folgt $|R_{n+1}(x)| \leq \frac{\max(1, e^x)}{(n+1)!}|x|^{n+1}$.
Für $-1 \leq x < 0$ gilt $|R_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}$. Bestimmt man n so, dass $\frac{1}{(n+1)!} < 10^{-6}$ gilt, dann weiß man, dass $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ die Zahl e^x auf 6 Dezimalstellen genau ergibt. Man erhält $n = 9$. Es gilt $\sum_{k=0}^9 \frac{(-1)^k}{k!} = 0.367879188712\ldots$ und somit $\frac{1}{e} = 0.367879$ auf 6 Dezimalstellen genau. Insbesondere hat man $\frac{1}{e} > \frac{1}{3}$, also $e < 3$ gezeigt. Das kann man verwenden, um $|R_{n+1}(x)|$ für positive x abzuschätzen.

Beispiel: Wir entwickeln die Funktion $f(x) = \sin x$ für $x \in \mathbb{R}$ nach der Taylorformel. Es gilt $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$, $f^{(5)}(x) = \cos x$,

$f^{(6)}(x) = -\sin x$, und so weiter. Daraus erkennt man, dass $f^{(k)}(0) = 0$ gilt, wenn k gerade ist, und dass $f^{(k)}(0)$ abwechselnd $+1$ und -1 ist, wenn k ungerade ist. Daher folgt

$$\sin x = x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\tfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x) \quad \text{mit} \quad R_{2n}(x) = (-1)^n \tfrac{\sin c}{(2n)!} x^{2n}$$

wobei entweder $0 \le c \le x$ oder $x \le c \le 0$ gilt. Es folgt $|R_{2n}(x)| \le \frac{1}{(2n)!}|x|^{2n}$.

Es genügt, $\sin x$ für $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ zu berechnen. Für diese x gilt $|R_{2n}(x)| \le \frac{1}{(2n)!}(\frac{\pi}{2})^{2n}$. Bestimmt man n so, dass $\frac{1}{(2n)!}(\frac{\pi}{2})^{2n} < 10^{-m}$ gilt, dann gibt $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ den Wert von $\sin x$ auf m Dezimalstellen genau an.

Um Entwicklungen für Logarithmus und Arcustangens zu finden, verwenden wir nicht die Taylorformel, sondern gehen von folgender Gleichung aus, die für $y \ne 1$ gilt

$$\tfrac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + \cdots + y^{n-1} + \tfrac{y^n}{1-y}$$

Sei $-1 \le x < 1$. Aus obiger Gleichung folgt für $y \in (-1, 1)$

$$\tfrac{1}{1+y} + \tfrac{1}{1-y} = \tfrac{2}{1-y^2} = 2(1 + y^2 + y^4 + \cdots + y^{2n-2}) + 2\tfrac{y^{2n}}{1-y^2}$$

woraus man folgendes Resultat durch Integration von 0 bis x erhält

$$\log \tfrac{1+x}{1-x} = 2(x + \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^5}{5} + \cdots + \tfrac{x^{2n-1}}{2n-1}) + R_{2n+1}(x) \quad \text{mit} \quad R_{2n+1}(x) = 2\int_0^x \tfrac{y^{2n}}{1-y^2}\,\mathrm{d}y$$

Nun gilt $|\frac{y^{2n}}{1-y^2}| \le \frac{x^{2n}}{1-x^2}$ für alle y zwischen 0 und x. Aus Satz 4.17 und Satz 4.6 folgt dann

$$|R_{2n+1}(x)| \le 2\int_0^x |\tfrac{y^{2n}}{1-y^2}|\,\mathrm{d}y \le 2\int_0^x \tfrac{x^{2n}}{1-x^2}\,\mathrm{d}y = 2x\tfrac{x^{2n}}{1-x^2} \quad \text{im Fall } x > 0, \text{ und}$$

$$|R_{2n+1}(x)| \le 2\int_x^0 |\tfrac{y^{2n}}{1-y^2}|\,\mathrm{d}y \le 2\int_x^0 \tfrac{x^{2n}}{1-x^2}\,\mathrm{d}y = -2x\tfrac{x^{2n}}{1-x^2} \quad \text{im Fall } x < 0.$$

Wir haben somit die Abschätzung $|R_{2n+1}(x)| \le 2|x|\frac{x^{2n}}{1-x^2}$ für alle $x \in (-1, 1)$ erhalten.

Sei $a > 1$. Wir setzen $x = \frac{a-1}{a+1}$. Es gilt $0 < x < 1$ und $a = \frac{1+x}{1-x}$. Mit Hilfe obiger Formel kann man $\log a = \log \frac{1+x}{1-x}$ auf eine bestimmte Anzahl von Dezimalstellen berechnen.

Jetzt behandeln wir noch den Arcustangens. Da $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und stetig ist, existiert die Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Aus der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion erhalten wir $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$.

Sei $-1 \le x < 1$. Aus obiger Formel mit $-y^2$ anstelle von y ergibt sich

$$\tfrac{1}{1+y^2} = 1 - y^2 + y^4 - \cdots + (-1)^{n-1}y^{2n-2} + (-1)^n\tfrac{y^{2n}}{1+y^2}$$

woraus man folgendes Resultat durch Integration von 0 bis x erhält

$$\arctan x = x - \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^5}{5} - \cdots + \tfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1} + R_{2n+1}(x) \text{ mit } R_{2n+1}(x) = (-1)^n\int_0^x \tfrac{y^{2n}}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$$

Nun gilt $|\frac{y^{2n}}{1+y^2}| \le x^{2n}$ für alle y zwischen 0 und x. Aus Satz 4.17 und Satz 4.6 folgt wie oben $|R_{2n+1}(x)| \le |x| \cdot x^{2n} = |x|^{2n+1}$ für alle $x \in (-1, 1)$.

Der arctan bietet die Möglichkeit, π zu berechnen. Es gilt $\pi = 4(\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3})$. Das folgt aus der Formel $\tan(\alpha+\beta) = (\tan\alpha + \tan\beta)/(1 - \tan\alpha\tan\beta)$, die man aus den Summensätzen für sin und cos erhält. Setzt man $\alpha = \arctan\frac{1}{2}$ und $\beta = \arctan\frac{1}{3}$ ein, so ergibt sich $\tan(\alpha+\beta) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{3})/(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}) = 1$. Daraus folgt, dass $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} + k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ gilt. Wegen $\alpha < \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ und $\beta < \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ gilt $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$. Wegen $\alpha > \arctan 0 = 0$ und $\beta > \arctan 0 = 0$ gilt auch $\alpha + \beta > 0$. Somit muss $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ gelten, das heißt $\pi = 4(\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3})$ ist gezeigt.

Die Berechnung von π ist auf die Berechnung von $\arctan\frac{1}{2}$ und $\arctan\frac{1}{3}$ zurückgeführt. Diese kann man dann mit Hilfe obiger Entwicklung durchführen.

7. Reihen

Der Versuch, unendlich viele Zahlen $a_k \in \mathbb{R}$ zu summieren, führt zur Definition von Reihen. Man schreibt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Für $n \geq 0$ nennt man $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ die n-te Partialsumme der Reihe. Existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} S_n$ und hat den Wert S, dann nennt man die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent mit Summe S. Existiert $\lim_{n\to\infty} S_n$ nicht, dann nennt man die Reihe divergent.

Das bekannteste Beispiel ist die geometrische Reihe. Das ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ für ein $q \in \mathbb{R}$. In diesem Fall kann man die Partialsummen direkt ausrechnen. Für $n \geq 0$ gilt $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, wenn $q \neq 1$ ist, und $S_n = n+1$, wenn $q = 1$ ist. Man sieht, dass die Reihe genau dann konvergiert, wenn $|q| < 1$ gilt. In diesem Fall hat man $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$. Wir schreiben dann $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

Kann man die Partialsummen nicht berechnen, dann sucht man nach Bedingungen, unter denen die Reihe konvergiert. Man führt die Partialsummen $\overline{S}_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ mit Absolutbeträgen ein, und nennt die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, wenn die Folge $(\overline{S}_n)_{n\geq 0}$ konvergent ist. Da die Folge $(\overline{S}_n)_{n\geq 0}$ monoton wächst, ist sie genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist. Ist das der Fall, dann schreibt man $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$. Wir haben folgenden wichtigen Satz

Satz 4.18: *Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

Beweis: Sei $\overline{S} = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_n$. Für $n \geq 0$ sei $T_n = \overline{S} - \overline{S}_n$. Es gilt $\lim_{n\to\infty} T_n = 0$ und wegen $\overline{S}_n \leq \overline{S}$ auch $T_n \geq 0$. Für $n \geq 0$ sei $u_n = S_n - T_n$ und $v_n = S_n + T_n$. Klarerweise gilt dann $S_n \in [u_n, v_n]$. Weiters folgt $u_{n+1} = S_n + a_{n+1} - T_n + |a_{n+1}| \geq S_n - T_n = u_n$ und $v_{n+1} = S_n + a_{n+1} + T_n - |a_{n+1}| \leq S_n + T_n = v_n$, sodass $[u_{n+1}, v_{n+1}] \subseteq [u_n, v_n]$ für alle $n \geq 0$ gilt. Schließlich haben wir auch $v_n - u_n = 2T_n$ für $n \geq 0$. Wegen der Intervallschachtelungseigenschaft gibt es ein S, das in allen Intervallen $[u_n, v_n]$ enthalten ist.

Wir zeigen $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Es gibt ein n_0 mit $2T_{n_0} < \varepsilon$. Wegen $S \in [u_{n_0}, v_{n_0}]$ folgt daraus $[u_{n_0}, v_{n_0}] \subseteq (S-\varepsilon, S+\varepsilon)$. Wegen $S_n \in [u_n, v_n] \subseteq [u_{n_0}, v_{n_0}]$ für $n \geq n_0$ gilt auch $S_n \in (S-\varepsilon, S+\varepsilon)$ für alle $n \geq n_0$, das heißt $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. $\square$

Es folgen Sätze, die Methoden angeben, mit denen man die Konvergenz oder Divergenz einer Reihe nachprüfen kann.

Satz 4.19: *Wenn* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergiert, dann existiert* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *und ist gleich* 0.

Beweis: Sei $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Nach Voraussetzung existiert $S = \lim_{n\to\infty} S_n$. Für $n \geq 1$ gilt $a_n = S_n - S_{n-1}$. Es folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$. $\square$

Es folgt sofort, dass $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k+1}$ nicht konvergiert, da $\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1}$ nicht 0 ist.

Satz 4.20: *Es sei* $a_k > 0$ *und* $b_k > 0$ *für* $k \geq 0$. *Wenn die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *konvergent und die Folge* $(\frac{a_k}{b_k})_{k\geq 0}$ *beschränkt ist, dann ist auch die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergent.*

Beweis: Für $n \geq 0$ sei $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ und $T_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. Nach Voraussetzung gibt es eine Konstante c mit $a_k \leq c b_k$ für alle $k \geq 0$, woraus $S_n \leq c T_n$ für alle $n \geq 0$ folgt. Da die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ als konvergent vorausgesetzt wird, gilt $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ für ein $T \in \mathbb{R}$. Da $b_k > 0$ für alle $k \geq 0$ gilt, ist die Folge $(T_n)_{n\geq 0}$ monoton wachsend, woraus $T_n \leq T$ für alle $n \geq 0$ folgt. Somit gilt $S_n \leq cT$ für alle $n \geq 0$. Da $a_k > 0$ für alle $k \geq 0$ vorausgesetzt wird, ist die Folge $(S_n)_{n\geq 0}$ auch monoton wachsend und hat daher einen Grenzwert, womit die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ gezeigt ist. $\square$

Dieser Satz gilt natürlich genauso, wenn die Summation nicht bei 0 beginnt, sondern bei 1 oder sonst irgendwo. Wir untersuchen die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k = \frac{k}{2^k}$. Sei $b_k = (\frac{2}{3})^k$. Dann gilt $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{(\frac{4}{3})^k} = 0$, sodass die Folge $(\frac{a_k}{b_k})_{k\geq 0}$ beschränkt ist. Da $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ eine konvergente geometrische Reihe ist, ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent.

Satz 4.21: *Sei* $f : [1,\infty) \to (0,\infty)$ *monoton fallend und stetig. Dann sind äquivalent*
(a) $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ *ist konvergent*
(b) $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *existiert*

Beweis: Wir zeigen zuerst (a) $\Rightarrow$ (b). Für $k \geq 0$ sei $b_k = f(k+1)$ und $a_k = \int_{k+1}^{k+2} f(x)\,\mathrm{d}x$ (dieses Integral existiert, da f stetig ist). Es gilt $\frac{a_k}{b_k} \leq 1$ für $k \geq 0$, da f monoton fallend ist. Da wir (a) voraussetzen, ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent. Wegen Satz 4.20 ist dann auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, das heißt $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_1^{n+2} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$ existiert und (b) ist gezeigt.

Um (b) $\Rightarrow$ (a) zu zeigen, sei $a_k = f(k+2)$ und $b_k = \int_{k+1}^{k+2} f(x)\,\mathrm{d}x$ für $k \geq 0$. Es gilt $\frac{a_k}{b_k} \leq 1$ für $k \geq 0$, da f monoton fallend ist. Da wir (b) voraussetzen, ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent wegen $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k = \lim_{n\to\infty} \int_1^{n+2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. Nach Satz 4.20 ist dann $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, also auch $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = f(1) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k$, womit (a) gezeigt ist. $\square$

Beispiel: Wir untersuchen die Konvergenz der Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ für $\alpha > 0$. Das ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$, wenn wir die Funktion $f : [1,\infty) \to (0,\infty)$ durch $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ definieren. Man sieht, dass f stetig ist und monoton fällt. Aus einem früheren Beispiel wissen wir, dass das Integral $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert, wenn $\alpha > 1$ ist, und nicht existiert, wenn $\alpha \leq 1$ ist. Aus Satz 4.21 folgt dann, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ konvergiert, wenn $\alpha > 1$ ist, und nicht konvergiert, wenn $\alpha \leq 1$ ist.

Beispiel: Die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\log k}$ ist divergent. Es gilt $\log k \leq k$, sodass die Folge $(\frac{a_k}{b_k})_{k\geq 2}$ mit $a_k = \frac{1}{k}$ und $b_k = \frac{1}{\log k}$ beschränkt ist. Wäre $\sum_{k=2}^{\infty} b_k$ konvergent, dann müsste nach Satz 4.20 auch $\sum_{k=2}^{\infty} a_k$ konvergent sein im Widerspruch zum letzten Beispiel.

Mit Hilfe von Reihen ist es möglich, Funktionen zu definieren. Wir haben Polynome kennen gelernt, durch die Funktionen auf $\mathbb{R}$ definiert werden. Das sind endliche Summen $\sum_{k=0}^{n} c_k x^k$. Eine naheliegende Verallgemeinerung besteht darin, die Summe einfach bis ∞ laufen zu lassen. Dadurch erhält man die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Solche Reihen nennt man Potenzreihen. Allerdings muss man sich zuerst klar machen, für welche $x \in \mathbb{R}$ eine Potenzreihe konvergiert. Dazu definieren wir den Limes superior einer Folge.

Definition: Sei $(a_k)_{k\geq 0}$ eine beschränkte Folge. Für $n \geq 0$ sei $\overline{a}_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$. Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \overline{a}_n$ heißt dann der Limes superior der Folge $(a_k)_{k\geq 0}$. Er wird mit $\limsup_{k\to\infty} a_k$ bezeichnet.

Satz 4.22: *Sei* $(a_k)_{k\geq 0}$ *eine beschränkte Folge. Dann existiert* $\limsup_{k\to\infty} a_k$. *Wenn* $\lim_{k\to\infty} a_k$ *existiert, dann gilt* $\limsup_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} a_k$.

Beweis: Da $(a_k)_{k\geq 0}$ beschränkt ist, existieren Konstante c und d mit $c \leq a_k \leq d$ für alle $k \geq 0$. Für $n \geq 0$ sei $M_n = \{a_k : k \geq n\}$. Da d eine obere Schranke der Menge M_n ist, existiert $\overline{a}_n = \sup M_n$. Für $n \geq 0$ gilt $M_{n+1} \subseteq M_n$ und daher auch $\overline{a}_{n+1} \leq \overline{a}_n$ wegen Satz 3.6 (b). Die Folge $(\overline{a}_n)_{n\geq 0}$ ist somit monoton fallend. Für jedes $n \geq 0$ ist c eine untere

Schranke von M_n und somit gilt $c \leq \overline{a}_n$ nach Satz 3.6 (a). Also ist die Folge $(\overline{a}_n)_{n\geq 0}$ auch nach unten durch c beschränkt. Aus Satz 3.4 folgt, dass $\lim_{n\to\infty} \overline{a}_n$ existiert, womit die Existenz von $\limsup_{k\to\infty} a_k$ gezeigt ist.

Es existiere $a = \lim_{k\to\infty} a_k$. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt ein n_0 mit $a - \frac{\varepsilon}{2} < a_k < a + \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k \geq n_0$. Für $n \geq n_0$ gilt dann $M_n \subseteq (a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2})$, das heißt $a - \frac{\varepsilon}{2}$ ist eine untere und $a + \frac{\varepsilon}{2}$ ist eine obere Schranke von M_n. Wegen Satz 3.6 (a) folgt $a - \frac{\varepsilon}{2} \leq \overline{a}_n \leq a + \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq n_0$. Wir haben $|\overline{a}_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ gezeigt. Somit gilt $\lim_{n\to\infty} \overline{a}_n = a$, das heißt $\limsup_{k\to\infty} a_k = a$. □

Definition: Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe. Ist die Folge $(\sqrt[k]{|c_k|})_{k\geq 1}$ nicht beschränkt, dann sei $T = \infty$. Ist sie beschränkt, dann sei $T = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$. Wir setzen $R = \frac{1}{T}$. Es gilt $R \in [0, \infty]$. Wir nennen R den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$.

Satz 4.23: *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Gilt $|x| < R$, dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ absolut konvergent. Gilt $|x| > R$, dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ divergent.*

Beweis: Für $n \geq 0$ sei $M_n = \{\sqrt[k]{|c_k|} : k \geq n\}$ und $\overline{a}_n = \sup M_n$.

Es sei $|x| > R$. Angenommen $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ ist konvergent. Dann gilt $\lim_{k\to\infty} c_k x^k = 0$ nach Satz 4.19. Es gibt ein n_0 mit $|c_k x^k| \leq 1$, das heißt $\sqrt[k]{|c_k|} \leq \frac{1}{|x|}$ für $k \geq n_0$. Insbesondere ist die Folge $(\sqrt[k]{|c_k|})_{k\geq 1}$ beschränkt, sodass $T = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \lim_{n\to\infty} \overline{a}_n$ existiert. Für $n \geq n_0$ ist $\frac{1}{|x|}$ eine obere Schranke von M_n, sodass auch $\overline{a}_n \leq \frac{1}{|x|}$ gilt. Es folgt $T \leq \frac{1}{|x|}$, ein Widerspruch zu $\frac{1}{|x|} < \frac{1}{R} = T$. Somit kann $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ nicht konvergent sein.

Es sei $|x| < R$. Insbesondere gilt $R > 0$ und $T < \infty$. Wir wählen s im Intervall $(|x|, R)$. Dann gilt $\frac{1}{s} > T$. Wegen $T = \lim_{n\to\infty} \overline{a}_n$ existiert ein n_0 mit $\overline{a}_{n_0} < \frac{1}{s}$. Da $\overline{a}_{n_0}$ eine obere Schranke der Menge M_{n_0} ist, erhalten wir, dass $\sqrt[k]{|c_k|} < \frac{1}{s}$ für alle $k \geq n_0$ gilt. Wir setzen $q = \frac{|x|}{s}$. Dann gilt $|c_k x^k| < q^k$ für $k \geq n_0$. Somit ist die Folge $\left(\frac{|c_k x^k|}{q^k}\right)_{k\geq 0}$ durch $C = \max\left(|c_0|, \frac{|c_1 x|}{q}, \frac{|c_2 x^2|}{q^2}, \ldots, \frac{|c_{n_0} x^{n_0}|}{q^{n_0}}, 1\right)$ beschränkt. Da $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ wegen $q < 1$ konvergiert, folgt die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k x^k|$ aus Satz 4.20. Damit ist gezeigt, dass die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ absolut konvergent ist. □

Durch Potenzreihen kann man Funktionen definieren, wobei man mit Hilfe von Satz 4.23 ein Intervall bestimmt, auf dem die Potenzreihe absolut konvergiert und somit die Funktion definiert ist. Zum Beispiel ist durch $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} kx^k$ eine Funktion auf dem Intervall $(-1, 1)$ definiert, da $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$ gilt und somit der Konvergenzradius R gleich 1 ist. Ebenso ist durch $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^k} x^k$ eine Funktion auf ganz $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ definiert, da ja $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{1/k^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$ gilt und somit der Konvergenzradius R gleich ∞ ist.

Für uns bereits bekannte Funktionen haben wir im letzten Kapitel Darstellungen durch Potenzreihen gefunden. Man muss nur zeigen, dass die Restglieder mit $n \to \infty$ gegen 0 gehen. Es gilt $\lim_{m\to\infty} \frac{x^m}{m!} = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, da für eine fest gewählte Zahl $u \in \mathbb{N}$ mit $|x| \leq u$ die Abschätzung $|\frac{x^m}{m!}| \leq \frac{u^u}{u!} \frac{u^{m-u-1}}{(u+1)(u+2)\cdots(m-1)} \frac{u}{m} \leq u^u \frac{u}{m}$ für alle $m \geq u$ erfüllt ist. Im letzten Kapitel wurde $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x)$ und $|R_{n+1}(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$ gezeigt. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt somit $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ und daher auch $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$. Damit haben wir die Reihendarstellung $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ gefunden, die für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Die Restgliedabschätzung für $\sin x$ war $|R_{2n}(x)| \leq \frac{1}{(2n)!}|x|^{2n}$. Wie oben erhalten wir damit die Reihendarstellung $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$, die ebenfalls für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Für $\cos x$ lässt sich die Reihendarstellung $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ herleiten. In der Reihendarstellung von $\sin x$ sind die Koeffizienten der geraden Potenzen gleich 0, und in der von $\cos x$ die Koeffizienten der ungeraden Potenzen.

Auch auf die beiden anderen im letzten Kapitel behandelten Funktionen lässt sich diese Methode anwenden. Man erhält die Reihendarstellungen $\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}$ und $\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$, die beide für $x \in (-1,1)$ gelten, da das Restglied $R_{2n+1}(x)$ für beide Funktionen und für alle $x \in (-1,1)$ mit $n \to \infty$ gegen 0 geht, wie man aus den im letzten Kapitel gefundenen Abschätzungen für $R_{2n+1}(x)$ leicht erkennt.

Der Konvergenzradius einer Potenzreihe ist mit der Formel, die wir oben gefunden haben, oft nur schwierig oder gar nicht zu berechnen. Es gibt noch eine andere Möglichkeit, den Konvergenzradius zu berechnen.

Satz 4.24: *Sei $(v_k)_{k\geq 1}$ eine Folge und $m_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k$ für $n \geq 1$. Gilt $\lim_{k\to\infty} v_k = v$, dann auch $\lim_{n\to\infty} m_n = v$.*

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da wir $\lim_{k\to\infty} v_k = v$ voraussetzen, existiert ein n_0 mit $|v_k - v| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $k \geq n_0$. Es sei $n_1 \geq \max(n_0, \frac{2}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{n_0} |v_k - v|)$. Für $n \geq n_1$ gilt dann

$$|m_n - v| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n} |v_k - v| + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} |v_k - v| < \frac{1}{n}(n-n_0)\frac{\varepsilon}{2} + \frac{n_1}{n}\frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Damit ist $\lim_{n\to\infty} m_n = v$ gezeigt. □

Satz 4.25: *Sei $u_k > 0$ für $k \geq 0$. Gilt $\lim_{k\to\infty} \frac{u_k}{u_{k-1}} = T$, dann auch $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k} = T$.*

Beweis: Es sei $T > 0$. Für $k \geq 1$ sei $v_k = \log u_k - \log u_{k-1}$. Nach Voraussetzung gilt $\lim_{k\to\infty} v_k = \lim_{k\to\infty} \log\frac{u_k}{u_{k-1}} = \log T$. Sei $m_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k = \frac{1}{n}\log u_n - \frac{1}{n}\log u_0$ für $n \geq 1$. Aus Satz 4.24 folgt $\lim_{n\to\infty} m_n = \log T$ und daher auch $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log u_n = \log T$. Daraus ergibt sich $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\log u_n} = e^{\log T} = T$.
Es fehlt noch der Beweis für $T = 0$. Die Ungleichung für geometrisches und arithmetisches Mittel ergibt $0 \leq \sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{u_0}\sqrt[n]{\frac{u_n}{u_{n-1}}\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\dots\frac{u_1}{u_0}} \leq \sqrt[n]{u_0}\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{u_{k-1}}$. Aus Satz 4.24 folgt $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{u_{k-1}} = 0$. Da $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_0} = 1$ gilt, erhalten wir $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = 0$. □

Man hat also die Möglichkeit, den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ auch mit Hilfe von $\lim_{k\to\infty}\frac{|c_k|}{|c_{k-1}|}$ zu berechnen, falls dieser Grenzwert existiert.

Beispiel: Wir berechnen den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ mit $c_k = \frac{k^k}{k!}$. Es gilt $\lim_{k\to\infty}\frac{|c_k|}{|c_{k-1}|} = \lim_{k\to\infty}\frac{k^k(k-1)!}{k!(k-1)^{k-1}} = \lim_{k\to\infty}(\frac{k}{k-1})^{k-1} = \lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{k-1})^{k-1} = e$ und somit auch $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|c_k|} = e$. Daher ist der Konvergenzradius R gleich $\frac{1}{e}$.

V. Anhang

In diesem Anhang behandeln wir Ungleichungen zwischen geometrischen, arithmetischen und noch viel allgemeineren Mitteln, die Stirlingsche Formel, die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, den Weierstraß'schen Approximationssatz, Integration und Differenziation von Funktionenreihen und die Vollständigkeit der reellen Zahlen.

1. Mittelungleichungen

Sei $n \geq 2$ und seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen. Dann ist $\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ das arithmetische und $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ das geometrische Mittel dieser Zahlen. Wir zeigen zuerst, dass das geometrische immer kleiner oder gleich dem arithmetischen Mittel ist. Dann beschäftigen wir uns mit Verallgemeinerungen.

Satz 5.1: *Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \geq -1$ gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx$.*

Beweis: mit Induktion. Für $n = 1$ hat man Gleichheit. Ist $(1+x)^n \geq 1 + nx$ bereits gezeigt, dann folgt $(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$. □

Satz 5.2: *Sei $n \geq 1$ und $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$. Dann gilt $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$.*

Beweis: Wir führen den Beweis mit Induktion. Für $n = 1$ hat man $a_1 \leq a_1$, was natürlich richtig ist. Wir nehmen an, dass die Ungleichung für $n-1$ Zahlen gezeigt ist und beweisen sie für n Zahlen. Wir setzen $G = \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}$ und $A = \frac{1}{n-1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})$. Dann ist $G \leq A$ bereits gezeigt. Wir schreiben a für a_n.
Wir setzen $x = \frac{a}{nA} - \frac{1}{n}$ in Satz 5.1 (es gilt $x \geq -\frac{1}{n} \geq -1$) und erhalten $\left(\frac{a}{nA} + \frac{n-1}{n}\right)^n \geq \frac{a}{A}$. Multiplikation mit A^n ergibt $\left(\frac{a+(n-1)A}{n}\right)^n \geq aA^{n-1}$. Mit der Induktionsvoraussetzung $G \leq A$ folgt $\left(\frac{a+(n-1)A}{n}\right)^n \geq aG^{n-1}$, das heißt $\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n \geq a_1 a_2 \ldots a_n$. Zieht man noch die n-te Wurzel, so hat man $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$. Das ist die gesuchte Ungleichung für n Zahlen. □

Wir verallgemeinern diese Mittel. Wir nennen die Zahlen $s_1, s_2, \ldots, s_n$ Gewichte, wenn sie > 0 sind und wenn $\sum_{k=1}^{n} s_k = 1$ gilt. Das verallgemeinerte arithmetische Mittel der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist dann $s_1 a_1 + s_2 a_2 + \cdots + s_n a_n$ und das verallgemeinerte geometrische Mittel ist $a_1^{s_1} a_2^{s_2} \ldots a_n^{s_n}$. Für $s_1 = s_2 = \cdots = s_n = \frac{1}{n}$ erhält man die Standardversionen dieser Mittel. Wir beweisen obige Ungleichung für die verallgemeinerten Mittel.

Satz 5.3: *Für $x > 0$ gilt $\log x \leq x - 1$ und Gleichheit nur dann, wenn $x = 1$ gilt.*

Beweis: Die Funktion $f(x) = \log x - x + 1$ ist auf $(0, \infty)$ definiert. Wegen $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ haben wir $f'(x) > 0$ für $x \in (0,1)$ und $f'(x) < 0$ für $x \in (1, \infty)$. Somit ist f streng monoton wachsend auf $(0,1]$ und streng monoton fallend auf $[1, \infty)$. Wir erhalten $f(x) \leq f(1) = 0$ für alle $x \in (0, \infty)$, wobei Gleichheit nur für $x = 1$ gilt. □

Satz 5.4: *Seien $s_1, s_2, \ldots, s_n$ Gewichte. Für positive reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, die nicht alle gleich sind, gilt dann $a_1^{s_1} a_2^{s_2} \ldots a_n^{s_n} < s_1 a_1 + s_2 a_2 + \cdots + s_n a_n$.*

Beweis: Sei $m = s_1 a_1 + s_2 a_2 + \cdots + s_n a_n$. Für $1 \leq k \leq n$ folgt $\log \frac{a_k}{m} \leq \frac{a_k}{m} - 1$ aus Satz 5.3, wobei nicht immer Gleichheit gilt, sonst wäre $\frac{a_k}{m} = 1$ für alle k und wir hätten $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = m$, ein Widerspruch. Es folgt $\sum_{k=1}^{n} s_k \log \frac{a_k}{m} < \sum_{k=1}^{n} s_k (\frac{a_k}{m} - 1)$. Wegen $\sum_{k=1}^{n} s_k \frac{a_k}{m} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} s_k a_k = 1$ und $\sum_{k=1}^{n} s_k = 1$ ergibt sich $\sum_{k=1}^{n} s_k \log \frac{a_k}{m} < 0$.

Wegen $\log \frac{a_k}{m} = \log a_k - \log m$ folgt $\sum_{k=1}^n s_k \log a_k < \sum_{k=1}^n s_k \log m$. Da $\sum_{k=1}^n s_k = 1$ gilt, ergibt sich $\sum_{k=1}^n \log a_k^{s_k} < \log m$. Wendet man auf diese Ungleichung die Exponentialfunktion an, so hat man $a_1^{s_1} a_2^{s_2} \dots a_n^{s_n} < m = s_1 a_1 + s_2 a_2 + \dots + s_n a_n$. □

Seien $a_1, a_2, \dots, a_n$ positive reelle Zahlen und $s_1, s_2, \dots, s_n$ Gewichte. Wir definieren

$$h(x) = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^n s_k a_k^x\right)^{\frac{1}{x}} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ a_1^{s_1} a_2^{s_2} \dots a_n^{s_n} & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Dann ist $h(0)$ das geometrische, $h(1)$ das arithmetische und $h(-1)$ das harmonische Mittel. Es sind die verallgemeinerte Versionen dieser Mittel.

Satz 5.5: *Die Funktion $g(x) = \log h(x)$ ist im Punkt 0 stetig.*

Beweis: Für $x \neq 0$ gilt $g(x) = \frac{\log u(x)}{x}$ mit $u(x) = \sum_{k=1}^n s_k a_k^x$. Wegen $u(0) = 1$ gilt $\log u(0) = 0$ und wir können $\lim_{x\to 0} g(x)$ mit Hilfe der Regel von de l'Hospital berechnen. Diese besagt, dass $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{u'(x)}{u(x)}$ gilt. Wir finden $\lim_{x\to 0} u(x) = \sum_{k=1}^n s_k = 1$. Wegen $u'(x) = \sum_{k=1}^n s_k a_k^x \log a_k$ erhalten wir weiters $\lim_{x\to 0} u'(x) = \sum_{k=1}^n s_k \log a_k$. Es folgt $\lim_{x\to 0} g(x) = \sum_{k=1}^n s_k \log a_k$. Da $g(0) = \log(a_1^{s_1} a_2^{s_2} \dots a_n^{s_n}) = \sum_{k=1}^n s_k \log a_k$ gilt, haben wir gezeigt, dass g im Punkt 0 stetig ist. □

Satz 5.6: *Seien $s_1, s_2, \dots, s_n$ Gewichte und $r_1, r_2, \dots, r_n$ seien ebenfalls Gewichte. Dann gilt $\sum_{k=1}^n r_k \log \frac{s_k}{r_k} \leq 0$ und Gleichheit nur dann, wenn $s_k = r_k$ für $1 \leq k \leq n$ gilt.*

Beweis: Es gilt $\sum_{k=1}^n r_k \log \frac{s_k}{r_k} \leq \sum_{k=1}^n r_k (\frac{s_k}{r_k} - 1) = \sum_{k=1}^n s_k - \sum_{k=1}^n r_k = 1 - 1 = 0$ wegen Satz 5.3. Ebenfalls nach Satz 5.3 haben wir Gleichheit nur dann, wenn $\frac{s_k}{r_k} = 1$, das heißt $s_k = r_k$ für $1 \leq k \leq n$ gilt. □

Satz 5.7: *Seien $a_1, a_2, \dots, a_n$ positive Zahlen, die nicht alle gleich sind, und $s_1, s_2, \dots, s_n$ Gewichte. Die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist dann stetig und streng monoton wachsend.*

Beweis: Sei $g(x) = \log h(x)$. Für $x \neq 0$ gilt $g(x) = \frac{1}{x} \log u(x)$ mit $u(x) = \sum_{k=1}^n s_k a_k^x$. Mit Hilfe der Produktregel erhalten wir dann $g'(x) = -\frac{1}{x^2} \log u(x) + \frac{1}{x} \frac{u'(x)}{u(x)}$, das heißt

$$x^2 g'(x) = -\log u(x) + \frac{x}{u(x)} \sum_{k=1}^n s_k a_k^x \log a_k = -\log u(x) + \frac{1}{u(x)} \sum_{k=1}^n s_k a_k^x \log a_k^x.$$

Sei $r_k = \frac{s_k a_k^x}{u(x)}$. Wegen $\sum_{k=1}^n r_k = 1$ sind die Zahlen $r_1, r_2, \dots, r_n$ Gewichte. Es kann $r_k = s_k$ nicht für alle k gelten, sonst wäre auch $a_k^x = u(x)$ für alle k erfüllt und wir hätten $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. Satz 5.6 ergibt dann $\sum_{k=1}^n r_k \log \frac{s_k}{r_k} < 0$. Wegen $\frac{s_k}{r_k} = \frac{u(x)}{a_k^x}$ folgt $\sum_{k=1}^n r_k \log \frac{u(x)}{a_k^x} < 0$. Nun gilt $\log \frac{u(x)}{a_k^x} = \log u(x) - \log a_k^x$ und $\sum_{k=1}^n r_k = 1$, womit wir $\log u(x) - \sum_{k=1}^n r_k \log a_k^x < 0$ erhalten. Setzen wir noch $r_k = \frac{s_k a_k^x}{u(x)}$ ein, so ergibt sich $\log u(x) - \sum_{k=1}^n \frac{s_k a_k^x}{u(x)} \log a_k^x < 0$. Damit ist $x^2 g'(x) > 0$ gezeigt. Also gilt auch $g'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Nach Satz 5.5 ist g im Punkt 0 stetig. Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist g sogar differenzierbar und hat Ableitung > 0. Somit ist g auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Da aber $h(x) = e^{g(x)}$ gilt, ist auch h auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. □

Satz 5.7 ergibt Ungleichungen für Mittel. Insbesondere gilt $h(-1) < h(0) < h(1)$, das sind Ungleichungen für das harmonische, geometrische und arithmetische Mittel.

Gilt $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$, dann folgt $h(x) = a$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

2. Die Stirlingsche Formel

Bevor wir zur Stirlingschen Formel kommen, behandeln wir das sogenannte Wallissche Produkt.

Satz 5.8: *Es gilt* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,\mathrm{d}x = \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$ *und* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,\mathrm{d}x = \frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{4}{5}\frac{2}{3}$ *für* $n \geq 1$. *Weiters gilt* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ *und* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = 1$, *das sind die Gleichungen für* $n = 0$.

Beweis: Für $k \geq 2$ berechnen wir mit Hilfe von partieller Integration

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k-1} x \sin x\,\mathrm{d}x = -\sin^{k-1} x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (k-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k-2} x \cos^2 x\,\mathrm{d}x$$
$$= (k-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k-2} x\,\mathrm{d}x - (k-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k x\,\mathrm{d}x$$

Durch entsprechende Umformungen ergibt sich daraus dann

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k x\,\mathrm{d}x = \frac{k-1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k-2} x\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

Klarerweise gilt $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ und $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = 1$. Das sind die beiden Gleichungen für $n = 0$. Nehmen wir also an, die beiden Gleichungen seien für n schon gezeigt. Mit Hilfe von (1) folgt dann $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} x\,\mathrm{d}x = \frac{2n+1}{2n+2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,\mathrm{d}x = \frac{2n+1}{2n+2}\frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$ und $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+3} x\,\mathrm{d}x = \frac{2n+2}{2n+3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,\mathrm{d}x = \frac{2n+2}{2n+3}\frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{4}{5}\frac{2}{3}$, das sind die beiden Gleichungen für $n+1$. Somit ist der Satz durch Induktion bewiesen. ∎

Satz 5.9: *Es gilt* $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Beweis: Für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ gilt $0 \leq \sin x \leq 1$, woraus $\sin^n x \leq \sin^{n-1} x$ für alle $n \geq 1$ folgt. Wir erhalten $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\,\mathrm{d}x$ und $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,\mathrm{d}x$, das heißt $\frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} \leq \frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{4}{5}\frac{2}{3}$ und $\frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{4}{5}\frac{2}{3} \leq \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$ wegen Satz 5.8. Durch Umformen ergibt sich $\frac{\pi}{2} \leq \frac{2^2 4^2 \ldots (2n)^2}{3^2 5^2 \ldots (2n-1)^2 2n} \leq \frac{\pi}{2}\frac{2n+1}{2n}$ für alle $n \geq 2$. Da aber $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n} = 1$ gilt, erhalten wir $\lim_{n\to\infty} \frac{2^2 4^2 \ldots (2n)^2}{3^2 5^2 \ldots (2n-1)^2 2n} = \frac{\pi}{2}$.

Nun gilt $2^{2n}(n!)^2 = 2^2 \cdot 4^2 \cdots (2n)^2$, woraus $\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$ folgt. Obiger Grenzwert besagt, dass $\lim_{n\to\infty} 2n\big(\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\big)^2 = \frac{2}{\pi}$ gilt. Daraus folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. ∎

Jetzt werden wir schrittweise die Stirlingsche Formel herleiten.

Satz 5.10: *Es gilt* $2x \leq \log\frac{1+x}{1-x} \leq 2x + \frac{2x^3}{3(1-x^2)}$ *für* $0 \leq x < 1$.

Beweis: Die Funktion $f(x) = \log\frac{1+x}{1-x} - 2x = \log(1+x) - \log(1-x) - 2x$ ist auf $[0,1)$ definiert. Es gilt $f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} - 2 = \frac{2x^2}{1-x^2}$. Wir erhalten $f'(x) \geq 0$ auf dem Intervall $(0,1)$. Die Funktion f ist monoton wachsend. Es gilt $f(x) \geq f(0) = 0$ für alle $x \in [0,1)$. Damit ist die erste Ungleichung gezeigt.

Die Funktion $g(x) = 2x + \frac{2x^3}{3(1-x^2)} - \log\frac{1+x}{1-x} = \frac{2x^3}{3(1-x^2)} - f(x)$ ist ebenfalls auf $[0,1)$ definiert. Wieder berechnen wir $g'(x) = \frac{2}{3}\frac{3x^2(1-x^2)+2x^4}{(1-x^2)^2} - \frac{2x^2}{1-x^2} = \frac{3x^2+x^4}{3(1-x^2)^2}$. Wir erhalten $g'(x) \geq 0$ auf dem Intervall $(0,1)$. Die Funktion g ist monoton wachsend. Es gilt $g(x) \geq g(0) = 0$ für alle $x \in [0,1)$. Damit ist auch die zweite Ungleichung gezeigt. ∎

Satz 5.11: *Für* $n \geq 1$ *sei* $a_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$ *und* $b_n = \log a_n$. *Dann ist die Folge* $(b_n)_{n\geq 1}$ *monoton fallend und hat einen Grenzwert* b. *Weiters gilt* $b \leq b_n \leq b + \frac{1}{12n}$ *für alle* $n \geq 1$.

Beweis: Für $n \geq 1$ gilt $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e}(\frac{n+1}{n})^{n+\frac{1}{2}}$. Es folgt $b_n - b_{n+1} = \log \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{2x}\log\frac{1+x}{1-x} - 1$ mit $x = \frac{1}{2n+1}$. Wegen Satz 5.10 gilt dann $0 \leq b_n - b_{n+1} \leq \frac{x^2}{3(1-x^2)} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}$.

Für $n \geq 1$ sei $c_n = b_n - \frac{1}{12n}$. Die Folge $(b_n)_{n\geq1}$ ist dann monoton fallend und die Folge $(c_n)_{n\geq1}$ ist monoton wachsend. Da $b_n \geq c_n \geq c_1$ für alle $n \geq 1$ gilt, ist die Folge $(b_n)_{n\geq1}$ nach unten durch c_1 beschränkt. Somit existiert ein b mit $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = b$. Weiters gilt $c_n \leq b \leq b_n$, das heißt $b \leq b_n \leq b + \frac{1}{12n}$ für alle $n \geq 1$. $\square$

Satz 5.12 (Stirlingsche Formel) *Es gilt* $\lim_{n\to\infty} \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$.

Beweis: Für $n \geq 1$ sei $a_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$ und $b_n = \log a_n$ wie in Satz 5.11 und b sei der dort gefundene Grenzwert der Folge $(b_n)_{n\geq1}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ mit $a = e^b$.

Weiters gilt $\frac{a_{2n}}{a_n^2} = \frac{(2n)!\,e^{2n}}{(2n)^{2n}\sqrt{2n}}\,\frac{n^{2n}\,n}{(n!)^2\,e^{2n}} = \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}\sqrt{2}}\binom{2n}{n}$ für $n \geq 1$. Es folgt $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_n^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ wegen Satz 5.9. Da aber auch $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_n^2} = \frac{a}{a^2} = \frac{1}{a}$ gelten muss, erhalten wir $\frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ und $a = \sqrt{2\pi}$. Damit ist $\lim_{n\to\infty}\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$ gezeigt. $\square$

Aus Satz 5.11 erhalten wir für alle $n \geq 1$ die Abschätzung $\sqrt{2\pi} \leq \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} \leq \sqrt{2\pi}\,e^{\frac{1}{12n}}$, das heißt $\frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n} \leq n! \leq \frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}\,e^{\frac{1}{12n}}$, da $e^b = \sqrt{2\pi}$ in obigem Beweis gezeigt wurde.

3. Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$

Für $\alpha > 1$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ konvergent (siehe Beispiel nach Satz 4.21). Somit ist die Reihe $A = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ konvergent. Ebenso sind die Reihen $U = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^2}$ und $G = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n)^2}$ konvergent, da sie durch Streichen von Gliedern aus obiger Reihe entstehen. Es gelten die Gleichungen $A = 4G$ und $A = U + G$. Man erhält sie durch Grenzübergang aus entsprechenden Gleichungen für Partialsummen. Es folgt $A = \frac{4}{3}U$.

Satz 5.13: *Für* $m \geq 1$ *gilt* $\sum_{n=1}^{2^{m-1}} \frac{1}{\sin^2\frac{(2n-1)\pi}{2^{m+1}}} = \frac{4^m}{2}$.

Beweis: Mit Hilfe von $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ und $\cos\alpha = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$ erhalten wir die Gleichung $\frac{1}{\sin^2 2\alpha} = \frac{1}{4}(\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha}) = \frac{1}{4}(\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2}+\alpha)})$.

Die folgende Gleichung zeigen wir durch Induktion nach m

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{2^m} \frac{1}{\sin^2\frac{(2n-1)\pi}{2^{m+1}}} = 4^m \quad \text{für} \quad m \geq 0.$$

Für $m = 0$ ist das $\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2}} = 1$, eine richtige Gleichung. Wir nehmen an, dass die in (1) stehende Gleichung bereits gezeigt ist. Setzt man oben $\alpha = \frac{(2n-1)\pi}{2^{m+2}}$ ein, so hat man

$$\frac{1}{\sin^2\frac{(2n-1)\pi}{2^{m+1}}} = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{\sin^2\frac{(2n-1)\pi}{2^{m+2}}} + \frac{1}{\sin^2\frac{(2^{m+1}+2n-1)\pi}{2^{m+2}}}\Big).$$

Setzt man das in die in (1) stehende Gleichung ein, dann erhält man

$$\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{2^m}\frac{1}{\sin^2\frac{(2n-1)\pi}{2^{m+2}}} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{2^m}\frac{1}{\sin^2\frac{(2(2^m+n)-1)\pi}{2^{m+2}}} = 4^m.$$

Das kann man in eine Summe zusammenfassen, da n in der ersten Summe von 1 bis 2^m läuft und $2^m + n$ in der zweiten Summe von $2^m + 1$ bis 2^{m+1}. Dadurch ergibt sich

$$\sum_{n=1}^{2^{m+1}}\frac{1}{\sin^2\frac{(2n-1)\pi}{2^{m+2}}} = 4^{m+1}.$$

Das ist die Gleichung in (1) mit $m+1$ anstelle von m. Damit ist (1) durch Induktion bewiesen.

Wegen $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ gilt $\sin^2\frac{(2^{m+1}-2n+1)\pi}{2^{m+1}}=\sin^2\frac{(2n-1)\pi}{2^{m+1}}$. Daran erkennt man, dass in (1) der (2^m-n+1)-te Summand und der n-te Summand gleich sind. Die Summe der ersten 2^{m-1} Summanden ist daher gleich der Summe der übrigen 2^{m-1} Summanden. Summiert man in (1) nur über die ersten 2^{m-1} Summanden, dann erhält man auch nur den halben Wert. Dadurch ergibt sich $\sum_{n=1}^{2^{m-1}}\frac{1}{\sin^2\frac{(2n-1)\pi}{2^{m+1}}}=\frac{4^m}{2}$. Das ist die zu beweisende Gleichung. □

Satz 5.14: *Es gilt* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

Beweis: Für $0<x<\frac{\pi}{2}$ gilt $\sin^2 x<x^2<\tan^2 x=\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$ (siehe Satz 2.20), woraus wir dann $\frac{1}{\sin^2 x}>\frac{1}{x^2}>\frac{1}{\sin^2 x}-1$ erhalten. Setzt man $x=\frac{(2n-1)\pi}{2^{m+1}}$ und summiert über n von 1 bis 2^{m-1}, dann erhält man $\frac{4^m}{2}>\sum_{n=1}^{2^{m-1}}\frac{4^{m+1}}{(2n-1)^2\pi^2}>\frac{4^m}{2}-2^{m-1}$ für alle $m\geq 1$ mit Hilfe von Satz 5.13. Multiplikation mit $\frac{\pi^2}{4^{m+1}}$ ergibt $\frac{\pi^2}{8}>\sum_{n=1}^{2^{m-1}}\frac{1}{(2n-1)^2}>\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{2^{m+3}}$. Lässt man m gegen ∞ gehen, dann ist der Satz schon bewiesen. □

Mit den eingangs durchgeführten Überlegungen folgt jetzt $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{6}$.

4. Der Weierstraßsche Approximationssatz

Sei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Der Weierstraßsche Approximationssatz besagt, dass man f durch Polynome approximieren kann. Man kann diese Polynome sogar angeben. Für $n\geq 1$ sei $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$. Da $f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ ein Polynom in der Variable x ist, ist $P_n(x)$ als Summe dieser Polynome ebenfalls ein Polynom in der Variable x. Wir zeigen, dass $\lim_{n\to\infty}P_n(x)=f(x)$ für alle $x\in[0,1]$ gilt.

Zur Abkürzung setzen wir $w_{n,k}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ für $n\geq 1$ und $0\leq k\leq n$. Insbesondere gilt $w_{n,n}(x)=x^n$ und $w_{n,0}(x)=(1-x)^n$. Es folgt $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n})w_{n,k}(x)$. Wir beginnen mit einigen Hilfsresultaten.

Satz 5.15: *Sei $n\geq 2$ und $x\in[0,1]$. Dann gilt $w_{n,k}(x)\geq 0$ für $0\leq k\leq n$. Weiters gilt $\sum_{k=0}^{n}w_{n,k}(x)=1$ und $\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2w_{n,k}(x)=nx(1-x)$.*

Beweis: Die Zahlen $w_{n,k}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ für $0\leq k\leq n$ sind gerade die in der Binomialverteilung auftretenden Wahrscheinlichkeiten. Sie sind ≥ 0 und ihre Summe ist 1. Der Erwartungswert $\sum_{k=0}^{n}kw_{n,k}(x)$ ist nx. Somit ist $\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2w_{n,k}(x)$ die Varianz, die gleich $nx(1-x)$ ist. Das kennt man aus der Wahrscheinlichkeitstheorie. □

Satz 5.16: *Sei $n\geq 2$ und $x\in[0,1]$ beliebig. Wir definieren $K_n=\{0,1,2,\dots,n\}$ und $J_{n,\delta}(x)=\{k\in K_n:|x-\frac{k}{n}|\geq\delta\}$. Für alle $\delta>0$ gilt dann $\sum_{k\in J_{n,\delta}(x)}w_{n,k}(x)\leq\frac{1}{4n\delta^2}$.*

Beweis: Für $k\in J_{n,\delta}(x)$ gilt $1\leq\left(\frac{k-nx}{n\delta}\right)^2$. Wir erhalten daher

$$\sum_{k\in J_{n,\delta}(x)}w_{n,k}(x)\leq\sum_{k\in J_{n,\delta}(x)}\left(\frac{k-nx}{n\delta}\right)^2w_{n,k}(x)\leq\frac{1}{n^2\delta^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2w_{n,k}(x)$$

Nach Satz 5.15 gilt $\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2w_{n,k}(x)=nx(1-x)$. Das Maximum der Funktion $x(1-x)$ ist $\frac{1}{4}$. Somit gilt $\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2w_{n,k}(x)=nx(1-x)\leq\frac{n}{4}$ für alle $x\in[0,1]$. Setzt man das oben ein, so hat man $\sum_{k\in J_{n,\delta}(x)}w_{n,k}(x)\leq\frac{n}{4n^2\delta^2}=\frac{1}{4n\delta^2}$. □

Eine Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig, wenn für jedes $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$ existiert, sodass für alle x und y in $[a,b]$ mit $|x-y|<\delta$ sich die Funktionswerte $f(x)$ und $f(y)$ um weniger als ε voneinander unterscheiden, das heißt $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ erfüllt ist.

Nach Satz 4.13 ist jede Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, die stetig ist, bereits gleichmäßig stetig.

Satz 5.17 (Weierstraßscher Approximationssatz) *Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $P_n(x) = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ für alle $n \geq 1$. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert dann ein n_0, sodass $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in [0,1]$ gilt (n_0 hängt nur von ε, nicht aber von x ab).*

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und somit auch gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x, y \in [0,1]$ mit $|x - y| < \delta$ gilt. Weiters ist f beschränkt. Es existiert ein $c > 0$, sodass $|f(x)| \leq c$ für alle $x \in [0,1]$ gilt. Wir wählen dann n_0 so groß, dass $\frac{c}{n_0\delta^2} < \varepsilon$ gilt.

Sei $x \in [0,1]$ beliebig. Sei $K_n = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, $I_{n,\delta}(x) = \{k \in K_n : |x - \frac{k}{n}| < \delta\}$ und $J_{n,\delta}(x) = \{k \in K_n : |x - \frac{k}{n}| \geq \delta\}$. Dann ist K_n die disjunkte Vereinigung von $I_{n,\delta}(x)$ und $J_{n,\delta}(x)$. Für $k \in I_{n,\delta}(x)$ gilt $|x - \frac{k}{n}| < \delta$ und daher auch $|f(x) - f(\frac{k}{n})| < \frac{\varepsilon}{2}$. Es folgt

$$\sum_{k \in I_{n,\delta}(x)} |f(x) - f(\tfrac{k}{n})| w_{n,k}(x) < \sum_{k \in I_{n,\delta}(x)} \tfrac{\varepsilon}{2} w_{n,k}(x) \leq \tfrac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n w_{n,k}(x) = \tfrac{\varepsilon}{2}$$

wobei auch Satz 5.15 verwendet wurde. Wegen $|f(x) - f(\frac{k}{n})| \leq |f(x)| + |f(\frac{k}{n})| \leq 2c$ folgt

$$\sum_{k \in J_{n,\delta}(x)} |f(x) - f(\tfrac{k}{n})| w_{n,k}(x) \leq \sum_{k \in J_{n,\delta}(x)} 2c\, w_{n,k}(x) \leq \tfrac{c}{2n\delta^2}$$

mit Satz 5.16. Ist jetzt $n \geq n_0$, dann gilt $\frac{c}{2n\delta^2} \leq \frac{c}{2n_0\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ und mit Satz 5.15 erhalten wir

$$|f(x) - P_n(x)| = |\sum_{k=0}^n \big(f(x) - f(\tfrac{k}{n})\big) w_{n,k}(x)| \leq \sum_{k=0}^n |f(x) - f(\tfrac{k}{n})| w_{n,k}(x)$$
$$\leq \sum_{k \in I_{n,\delta}(x)} |f(x) - f(\tfrac{k}{n})| w_{n,k}(x) + \sum_{k \in J_{n,\delta}(x)} |f(x) - f(\tfrac{k}{n})| w_{n,k}(x) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{c}{2n\delta^2} < \varepsilon$$

Damit ist $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ gezeigt und der Satz ist bewiesen. □

Man kann dieses Resultat auch noch ein wenig anders aufschreiben. Für eine Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definieren wir $\|g\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |g(x)|$, die sogenannte Supremumsnorm. Dann lässt sich Satz 5.17 folgendermaßen schreiben: Wenn $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist und $P_n(x) = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$, dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \geq 1$, sodass $\|f - P_n\|_\infty < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Das heißt $\lim_{n\to\infty} \|f - P_n\|_\infty = 0$.

5. Reihendarstellungen von Funktionen

Wir beginnen mit einem Satz über gliedweise Integration.

Satz 5.18: *Sei I ein offenes Intervall, das auch unbeschränkt sein darf, und $a \in I$ fest gewählt. Für $n \geq 0$ sei $g_n : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Weiters seien Zahlen $c_n > 0$ vorgegeben mit $\sum_{n=0}^\infty c_n = d < \infty$ und $|g_n(x)| \leq c_n$ für alle $x \in I$ und alle $n \geq 0$. Für alle $x \in I$ ist dann die Reihe $g(x) = \sum_{n=0}^\infty g_n(x)$ konvergent, das heißt die durch diese Reihe definierte Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ existiert. Weiters ist die Funktion g auf ganz I stetig und es gilt $\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^\infty \int_a^x g_n(t)\,\mathrm{d}t$ für alle $x \in I$.*

Beweis: Sei $x \in I$ beliebig. Da $\sum_{n=0}^\infty c_n < \infty$ und $|g_n(x)| \leq c_n$ für alle $n \geq 0$ gilt, erhalten wir $\sum_{n=0}^\infty |g_n(x)| < \infty$. Die Reihe $\sum_{n=0}^\infty g_n(x)$ ist somit absolut konvergent und daher nach Satz 4.18 auch konvergent. Wir schreiben $g(x) = \sum_{n=0}^\infty g_n(x)$.

Sei $d_k = d - \sum_{n=0}^{k-1} c_n$ für $k \geq 1$. Wegen $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k-1} c_n = d$ erhalten wir $\lim_{k\to\infty} d_k = 0$. Sei $x \in I$ beliebig und $k \geq 1$. Wir setzen $h_k(x) = \sum_{n=0}^{k-1} g_n(x)$. Für $m \geq k$ folgt dann

$$|\sum_{n=0}^m g_n(x) - h_k(x)| = |\sum_{n=k}^m g_n(x)| \leq \sum_{n=k}^m |g_n(x)| \leq \sum_{n=k}^m c_n \leq \sum_{n=0}^m c_n - \sum_{n=0}^{k-1} c_n.$$

Lassen wir m gegen ∞ gehen, so erhalten wir

$$(1) \qquad |g(x) - h_k(x)| \leq d_k \quad \text{für alle } x \in I \text{ und alle } k \geq 1$$

Um zu zeigen, dass g im Punkt $x \in I$ stetig ist, sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Sei k so gewählt, dass $d_k < \frac{\varepsilon}{3}$ gilt. Da h_k als Summe endlich vieler stetiger Funktionen stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $|h_k(x) - h_k(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $y \in (x-\delta, x+\delta) \cap I$. Mit (1) erhalten wir dann

$$|g(x) - g(y)| \le |g(x) - h_k(x)| + |h_k(x) - h_k(y)| + |h_k(y) - g(y)| < \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

für alle $y \in (x-\delta, x+\delta) \cap I$. Damit ist gezeigt, dass g im Punkt x stetig ist.

Aus (1) folgt auch, dass $g(t) - d_k \le h_k(t) \le g(t) + d_k$ für alle $t \in I$ und $k \ge 1$ gilt. Integriert man die Funktionen in dieser Ungleichungskette von a bis x so folgt

$$\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t - d_k(x-a) \le \int_a^x h_k(t)\,\mathrm{d}t \le \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t + d_k(x-a) \quad \text{für alle } k \ge 1.$$

Die Integrale existieren, da g und h_k stetige Funktionen sind. (Wenn x kleiner als a ist, dann drehen sich die Ungleichheitszeichen um.) Setzt man für $h_k(t)$ ein und beachtet, dass man das Integral und die endliche Summe vertauschen darf, so erhält man

$$\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t - d_k(x-a) \le \sum_{n=0}^{k-1} \int_a^x g_n(t)\,\mathrm{d}t \le \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t + d_k(x-a) \quad \text{für alle } k \ge 1.$$

Jetzt kann man den Grezwert für $k \to \infty$ bilden. Wegen $\lim_{k\to\infty} d_k = 0$ existiert $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x g_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k-1} \int_a^x g_n(t)\,\mathrm{d}t$ und es gilt $\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x g_n(t)\,\mathrm{d}t$. □

Beispiel: Sei $0 < \alpha < 1$ und $I = (-\alpha, \alpha)$. Für $n \ge 0$ sei $g_n(x) = 2x^{2n}$ und $c_n = 2\alpha^{2n}$. Dann gilt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \frac{2}{1-\alpha^2} < \infty$ und $|g_n(x)| \le c_n$ für alle $x \in I$ und $n \ge 0$. Die Voraussetzungen von Satz 5.18 sind erfüllt. Es folgt $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) = \frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$ und $\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \log(1+t) - \log(1-t)\,\big|_0^x = \log(1+x) - \log(1-x) = \log\frac{1+x}{1-x}$. Weiters gilt $\int_0^x g_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2t^{2n+1}}{2n+1}\,\big|_0^x = \frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$. Wegen Satz 5.18 erhalten wir die Reihendarstellung $\log\frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$, die für alle $x \in (-\alpha, \alpha)$ gilt. Da α beliebig nahe an 1 gewählt werden kann, gilt sie für alle $x \in (-1, 1)$.

Beispiel: Sei wieder $0 < \alpha < 1$ und $I = (-\alpha, \alpha)$. Für $n \ge 0$ sei $g_n(x) = (-1)^n x^{2n}$ und $c_n = \alpha^{2n}$. Dann gilt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \frac{1}{1-\alpha^2} < \infty$ und $|g_n(x)| \le c_n$ für alle $x \in I$ und $n \ge 0$. Die Voraussetzungen von Satz 5.18 gelten. Wir erhalten $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und $\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \arctan t\,\big|_0^x = \arctan x$. Weiters gilt $\int_0^x g_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1}\,\big|_0^x = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$. Wegen Satz 5.18 erhalten wir die Reihendarstellung $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, die für alle $x \in (-\alpha, \alpha)$ gilt. Da α beliebig nahe an 1 gewählt werden kann, gilt sie für $x \in (-1, 1)$.

Satz 5.19: *Sei I ein offenes Intervall, das auch unbeschränkt sein darf. Für alle $n \ge 0$ sei $f_n : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Weiters seien $c_n > 0$ vorgegeben mit $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$ und $|f_n'(x)| \le c_n$ für alle $x \in I$ und alle $n \ge 0$. Wenn $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ für alle $x \in I$ konvergiert, dann ist die dadurch definierte Funktion f auf ganz I differenzierbar und es gilt $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$.*

Beweis: Wir verwenden Satz 5.18. Sei $g_n = f_n'$ für $n \ge 0$ und sei $a \in I$ fest gewählt. Dann sind die Voraussetzungen von Satz 5.18 erfüllt. Dieser Satz besagt, dass die Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ existiert, dass g stetig ist und dass $\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t$ gilt. Nun gilt $\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t = f_n(x) - f_n(a)$ und die Reihen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ und $f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a)$ konvergieren nach Voraussetzung. Es folgt

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} f_n(x) - \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} f_n(a) \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} (f_n(x) - f_n(a)) = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n(x) - f_n(a)) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Das zeigt, dass f eine Stammfunktion von g ist, oder anders ausgedrückt, dass $f' = g$ gilt. Damit ist auch $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ gezeigt. □

Beispiel: Eine Reihe der Form $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ heißt Fourierreihe. Wir untersuchen nur die Sinusreihe $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ mit $b_n \in \mathbb{R}$. Für $n \geq 1$ setzen wir $f_n(x) = b_n \sin nx$. Aus Satz 5.18 folgt, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert und stetig ist, wenn $\sum_{j=1}^{\infty} |b_n| < \infty$ gilt, da ja $|f_n(x)| = |b_n \sin nx| \leq |b_n|$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \geq 1$ erfüllt ist. Wegen $f_n'(x) = nb_n \cos nx$ gilt außerdem $|f_n'(x)| \leq n|b_n|$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \geq 1$. Ist auch $\sum_{j=1}^{\infty} n|b_n| < \infty$ erfüllt, dann ist f nach Satz 5.19 differenzierbar und es gilt $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nx$. Für die Cosinusreihe gelten analoge Resultate.

Beispiel: Wir untersuchen Potenzreihen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit Koeffizienten c_n in $\mathbb{R}$. Sei $T = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$. Man nennt $R = \frac{1}{T}$ den Konvergenzradius der Potenzreihe. Ist $T = 0$, dann setzen wir $R = \infty$.

Sei $0 < \alpha < R$ und $I = (-\alpha, \alpha)$. Wir setzen $f_n(x) = c_n x^n$ für $n \geq 0$. Wegen $0 < \alpha < R$ gilt $\alpha T < 1$. Wir wählen q mit $\alpha T < q < 1$. Es folgt $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = T < \frac{q}{\alpha}$, sodass ein n_0 existiert mit $\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{q}{\alpha}$ für alle $n \geq n_0$. Es folgt $\alpha^n |c_n| < q^n$ für alle $n \geq n_0$. Wenn wir eine Konstante k wählen, die groß genug ist, dann gilt $\alpha^n |c_n| < kq^n$ für alle $n \geq 0$. Wegen $0 < q < 1$ gilt auch $\sum_{n=0}^{\infty} kq^n = \frac{k}{1-q} < \infty$. Ist $x \in I$, dann gilt $|f_n(x)| \leq |c_n|\alpha^n < kq^n$ für alle $n \geq 0$. Aus Satz 5.18 folgt daher, dass $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ für alle $x \in I = (-\alpha, \alpha)$ existiert. Da α beliebig nahe an R gewählt werden kann, gilt das für alle $x \in (-R, R)$. Daher heißt R auch Konvergenzradius der Potenzreihe.

Für $x \in I = (-\alpha, \alpha)$ und $n \geq 0$ erhalten wir auch $|f_n'(x)| \leq n|c_n|\alpha^{n-1} \leq \frac{kq}{\alpha} nq^{n-1}$. Nun gilt $\sum_{n=0}^{\infty} nq^{n-1} \leq \frac{1}{(1-q)^2} < \infty$ (Differenzieren von $\sum_{n=0}^{m-1} q^n = \frac{1-q^m}{1-q}$ nach q ergibt $\sum_{n=0}^{m-1} nq^{n-1} = \frac{1-q^m}{(1-q)^2} + \frac{-mq^{m-1}}{1-q} \leq \frac{1}{(1-q)^2}$ und dann $m \to \infty$). Wir können daher Satz 5.19 anwenden. Dieser besagt, dass f auf dem Intervall $I = (-\alpha, \alpha)$ differenzierbar ist mit $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$. Da α beliebig nahe an R gewählt werden kann, gilt das wieder für alle $x \in (-R, R)$.

6. Vollständigkeit

Wir haben gezeigt, dass die reellen Zahlen die Intervallschachtelungseigenschaft erfüllen. Man sagt, die reellen Zahlen sind vollständig. Oft verwendet man dazu auch Cauchyfolgen.

Definition: Eine Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ heißt Cauchyfolge, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $m \geq 0$ existiert, sodass $|x_j - x_i| < \varepsilon$ für alle Indices i und j gilt, die größer oder gleich m sind.

Wir listen die Intervallschachtelungseigenschaft und vier weitere Eigenschaften, die zur Intervallschachtelungseigenschaft äquivalent sind, auf. Man kann dann jede dieser fünf Eigenschaften als Vollständigkeitseigenschaft der reellen Zahlen verwenden.

(IS) Zu jeder Folge von ineinandergeschachtelten abgeschlossenen Intervallen gibt es einen Punkt, der in allen Intervallen liegt.
(BW) Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.
(SU) Jede nach oben beschränkte Menge hat eine kleinste obere Schranke (Supremum).
(MF) Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge ist konvergent.
(CF) Jede Cauchyfolge ist konvergent.

Wir haben (IS) $\Rightarrow$ (BW) und (IS) $\Rightarrow$ (SU) $\Rightarrow$ (MF) bereits in einem früheren Kapitel bewiesen. Wir beweisen jetzt, dass auch (BW) $\Rightarrow$ (CF) $\Rightarrow$ (MF) $\Rightarrow$ (IS) gilt. Dann ist bewiesen, dass alle fünf Eigenschaften äquivalent sind.

Wir beweisen (BW) $\Rightarrow$ (CF) : Sei $(x_n)_{n\geq 0}$ eine Cauchyfolge. Wir wählen $\varepsilon = 1$ und finden ein $m \geq 0$, sodass $|x_j - x_i| < 1$ für alle Indices i und j gilt, die größer oder gleich m sind. Sei $C = \max(|x_0|, |x_1|, \dots, |x_{m-1}|, |x_m| + 1)$. Dann gilt $|x_n| \leq C$ für alle $n \geq 0$. Die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ ist beschränkt.

Nach (BW) existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ von $(x_n)_{n\geq 0}$, die gegen einen Grenzwert x konvergiert. Wir zeigen, dass auch $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ gilt.

Dazu wählen wir $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $(x_n)_{n\geq 0}$ eine Cauchyfolge ist, existiert ein $m \geq 0$, sodass $|x_j - x_i| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle Indices i und j gilt, die größer oder gleich m sind. Weiters existiert ein $k \geq 0$, sodass $n_k \geq m$ und $|x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Für $n \geq m$ haben wir dann

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Damit ist $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ gezeigt. Die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ ist konvergent.

Wir beweisen (CF) $\Rightarrow$ (MF) : Sei $(x_n)_{n\geq 0}$ eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge. Wir zeigen, dass $(x_n)_{n\geq 0}$ eine Cauchyfolge ist. Wir führen einen indirekten Beweis und nehmen an, dass $(x_n)_{n\geq 0}$ keine Cauchyfolge ist, das heißt es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodass für jedes $m \geq 0$ Indices i und j existieren mit $j > i \geq m$ und $x_j - x_i = |x_j - x_i| \geq \varepsilon$.

Für $m = 0$ finden wir Indices i_0 und j_0 mit $j_0 > i_0$ und $x_{j_0} - x_{i_0} \geq \varepsilon$. Für $m = j_0$ finden wir Indices i_1 und j_1 mit $j_1 > i_1 \geq j_0$ und $x_{j_1} - x_{i_1} \geq \varepsilon$. Für $m = j_1$ finden wir Indices i_2 und j_2 mit $j_2 > i_2 \geq j_1$ und $x_{j_2} - x_{i_2} \geq \varepsilon$. So tun wir weiter. Wir erhalten Indices $i_0, i_1, i_2, \dots$ und $j_0, j_1, j_2, \dots$ mit $i_0 < j_0 \leq i_1 < j_1 \leq i_2 < j_2 \leq \dots$, sodass $x_{j_k} - x_{i_k} \geq \varepsilon$ für alle $k \geq 0$ gilt. Daraus folgt, dass die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ nicht beschränkt ist. Es gilt ja

$$x_{j_l} - x_{j_0} = \textstyle\sum_{k=1}^{l} (x_{j_k} - x_{j_{k-1}}) \geq \sum_{k=1}^{l} (x_{j_k} - x_{i_k}) \geq l\varepsilon \quad \text{für alle} \quad l \geq 1$$

wobei wir in dieser Rechnung die Monotonie der Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ verwendet haben.

Dieser Widerspruch zeigt, dass $(x_n)_{n\geq 0}$ eine Cauchyfolge ist. Aus (CF) folgt jetzt, dass die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ konvergiert.

Wir beweisen (MF) $\Rightarrow$ (IS) : Für jedes $n \geq 0$ sei $[a_n, b_n]$ ein abgeschlossenes Intervall, sodass $[a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq [a_4, b_4] \supseteq [a_5, b_5] \supseteq \dots$ gilt. Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ ist dann monoton wachsend und nach oben beschränkt. Nach (MF) existiert eine Zahl x, sodass $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ gilt.

Sei $n \geq 0$ beliebig. Es gilt dann $a_n \leq a_k \leq b_n$ für alle $k \geq n$. Daraus folgt, dass auch $a_n \leq x \leq b_n$ gilt. Damit ist gezeigt, dass x für alle $n \geq 0$ im Intervall $[a_n, b_n]$ liegt.

Inhaltsverzeichnis

I. Reelle Zahlen und stetige Funktionen 1

1. Dezimalzahlen 1
2. Ordnung 4
3. Intervallschachtelungseigenschaft 6
4. Folgen und deren Grenzwerte 10
5. Funktionen 13
6. Stetigkeit 16
7. Zwischenwertsatz und Umkehrfunktion 18
8. Potenzfunktion 20

II. Differenzierbarkeit 23

1. Grenzwerte von Funktionen 23
2. Die Ableitung 25
3. Monotonieverhalten von Funktionen 27
4. Extremwerte 30
5. Gleichungen und Ungleichungen 31
6. Trigonometrische Funktionen 32
7. Exponentialfunktion und Logarithmus 35
8. Regel von de l'Hospital 39
9. Komplexe Zahlen 40

III. Beweise durch Intervallschachtelung 42

1. Intervallhalbierung 42
2. Infimum und Supremum 43

IV. Integration 46

1. Definition und Eigenschaften des Integrals 46
2. Gleichmäßige Stetigkeit 55
3. Anwendungen des Integrals 55
4. Verallgemeinerte Riemannsummen 58
5. Uneigentliche Integrale 60
6. Approximation von Funktionen durch Polynome 61
7. Reihen 64

V. Anhang 68

1. Mittelungleichungen 68
2. Die Stirlingsche Formel 70
3. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 71
4. Der Weierstraßsche Approximationssatz 72
5. Reihendarstellungen von Funktionen 73
6. Vollständigkeit 75