Analysis in einer Variable für LAK

F. Hofbauer

Mengen und Abbildungen

1. Man beweise $A \cup (A \cap B) = A$ und $A \cap (A \cup B) = A$.
2. Man beweise $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ und $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
3. Man beweise $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$.
4. Man zeige $(A \cup B)' = A' \cap B'$ und $(A \cap B)' = A' \cup B'$.
5. Man beweise $A' \Delta B' = A \Delta B$.
6. Man beweise $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
7. Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Sei $U \subseteq A$ und $V \subseteq A$. Man beweise $f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$ und $f(U \cap V) \subseteq f(U) \cap f(V)$. Hinweis: $x \in f(C) \;\Leftrightarrow\;$ es gibt ein $y \in C$ mit $f(y) = x$
8. Sei $f : A \to B$ eine Abbildung und $U \subseteq A$ und $V \subseteq B$. Man zeige $U \subseteq f^{-1}(f(U))$ und $V \supseteq f(f^{-1}(V))$. Hinweis: $x \in f^{-1}(C) \;\Leftrightarrow\; f(x) \in C$
9. Ist f in Beispiel 8 injektiv, dann gilt $U = f^{-1}(f(U))$. Ist f in Beispiel 8 surjektiv, dann gilt $V = f(f^{-1}(V))$.
10. Sei $f : A \to B$ eine Abbildung und $V \subseteq B$. Man zeige $f^{-1}(B \setminus V) = A \setminus f^{-1}(V)$.
11. Sei $f : A \to B$ eine Abbildung und U und V Teilmengen von B. Man zeige $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ und $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$.
12. Sei $f : A \to B$ eine Abbildung (A und B endliche Mengen). Man zeige
    f ist injektiv $\;\Leftrightarrow\;$ es gibt eine Abbildung $g : B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}$
    f ist surjektiv $\;\Leftrightarrow\;$ es gibt eine Abbildung $g : B \to A$ mit $f \circ g = \mathrm{id}$
    f ist bijektiv $\;\Leftrightarrow\;$ es gibt eine Abbildung $g : B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}$ und $f \circ g = \mathrm{id}$

Zählen

13. Man zeige $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, wobei $|C|$ die Anzahl der Elemente von C bezeichnet.
14. Man zeige, dass die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist. Man folgere, dass die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen abzählber ist. Hinweis: Die Abbildung $(m, n) \mapsto 2^{m-1}(2n - 1)$ von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ ist bijektiv.
15. Seien A und B Mengen mit $|A| = a$ und $|B| = b$. Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Abbildungen von A nach B. Man zeige $|\mathcal{F}| = b^a$.
16. Seien A und B Mengen mit $|A| = a$ und $|B| = b$. Sei $\mathcal{G}$ die Menge aller injektiven Abbildungen von A nach B. Man zeige $|\mathcal{G}| = b(b - 1)(b - 2) \dots (b - a + 1)$, wenn $b \geq a$ gilt. Für $b < a$ ist $\mathcal{G}$ leer.

Induktion

17. Man zeige $n^2 < 2^n$ für $n \in \{5, 6, 7, \dots\}$.
18. Man zeige $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für $n \in \mathbb{N}$.
19. Man zeige $\sum_{k=1}^{n} (2k - 1)^2 = \frac{(2n-1)2n(2n+1)}{6}$ für $n \in \mathbb{N}$.

20. Man zeige $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ für $n \in \mathbb{N}$.
21. Man zeige $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$ für $n \in \mathbb{N}$.
22. Man zeige $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$.
23. Man zeige $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ für $n \in \mathbb{N}$.
24. Man zeige $(1+x)^n \geq 1 + nx$ für $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$.
25. Man zeige $(1-x)^n < \frac{1}{1+nx}$ für $0 < x < 1$ und $n \in \mathbb{N}$.
26. Sei M eine Menge mit $|M| = m$. Für $0 \leq n \leq m$ sei $\mathcal{T}_n(M)$ die Menge der n-elementigen Teilmengen von M. Man zeige $|\mathcal{T}_n(M)| = \binom{m}{n}$. Hinweis: Sei $a \in M$ und $K = M \setminus \{a\}$. Dann gilt $\mathcal{T}_n(M) = \mathcal{T}_n(K) \cup \{L \cup \{a\} : L \in \mathcal{T}_{n-1}(K)\}$.
27. Man zeige $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.
28. Man zeige $\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$ für $m \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}_0$.
29. Man zeige $\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$ für $n \geq m$.
30. Man berechne a und b so, dass $k^2 = a\binom{k}{2} + b\binom{k}{1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Man beachte, dass $\binom{u}{v} = 0$ gilt, wenn $u < v$. Mit Hilfe von Beispiel 29 berechne man $\sum_{k=1}^{n} k^2$.
31. Man berechne a, b und c so, dass $k^3 = a\binom{k}{3} + b\binom{k}{2} + c\binom{k}{1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Man beachte, dass $\binom{u}{v} = 0$ gilt, wenn $u < v$. Mit Hilfe von Beispiel 29 berechne man $\sum_{k=1}^{n} k^3$.
32. Man zeige $2\sqrt{n+1} - 2 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Indirekter Beweis

33. Man zeige, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.
34. Man zeige, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.
35. Man zeige, dass die Menge $[0,1)$ nicht abzählbar ist.

Addition, Multiplikation

36. Man verwandle $0.11123123123\ldots$ in einen Bruch und $\frac{5}{27}$ in eine Dezimalzahl.
37. Man berechne die Summe der beiden periodischen Dezimalzahlen $0.789789\ldots + 0.565656\ldots$ und überprüfe das Ergebnis mittels Bruchrechnung.
38. Man berechne das Produkt von $x = 0.111\ldots$ und $y = 0.333\ldots$.
39. Sei $x = 0.0235721\ldots$ und $y = 2.3496281\ldots$. Wie groß muss man n wählen, damit das Produkt der auf n Dezimalstellen gerundeten Zahlen die ersten 5 Dezimalstellen von xy richtig wiedergibt?
40. Sei $x = 23.235721\ldots$. Wie groß muss man n wählen, damit die Inverse der auf n Dezimalstellen gerundeten Zahl die ersten 7 Dezimalstellen von $\frac{1}{x}$ richtig wiedergibt?

Äquivalenzumformungen

41. Für a und b in $\mathbb{R}^+$ zeige man $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.
42. Man zeige für $a, b, c, d > 0$, dass $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$ gilt.
43. Man zeige für $a, b > 0$, dass $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}}$ gilt.
44. Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die $|x| \leq \frac{x}{2} + 1$ gilt.
45. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $2x^2 - 2 \leq x^2 - x$?

46. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\frac{2+x}{x-2} < 3$?
47. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\frac{3x+3}{x-1} < x+1$?
48. Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die $\frac{x+4}{x-1} > \frac{5}{x+1}$ gilt.
49. Man löse $||x|-2| < 1$.
50. Man löse $(x+5)(x+2)^2(x-1)(x-3) \leq 0$.
51. Man bestimme die Menge aller Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ für die $x-3y > 2$ und $x+y \leq 1$ gilt.
52. Für welche $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt $|x|+|y| \leq 1$?
53. Für welche $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt $|x|-|y| \leq 2$?

Intervallschachtelung

54. Sei $x > 0$. Seien a_1 und b_1 so gewählt, dass $0 < a_1 < b_1$ und $a_1 b_1^2 = x$ gilt. Für $n \geq 1$ sei $b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n$ und $a_{n+1} = \frac{x}{b_{n+1}^2}$. Man zeige, dass $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n+8b_n}{27b_{n+1}^2}(a_n-b_n)^2$ gilt. Man folgere, dass die Intervalle $[a_n, b_n]$ eine Intervallschachtelung bilden. Es gibt genau einen Punkt y, der in allen Intervallen enthalten ist. Wegen $a_n b_n^2 = x$ für alle n folgt $y^3 = x$. Wir haben also ein Intervallschachtelung für $\sqrt[3]{x}$ gefunden.
55. Seien $c_1 = 1$, $a_1 = 2$ und $b_1 = 3$. Für $n \geq 1$ sei $c_{n+1} = \frac{c_n}{n+1}$, $a_{n+1} = a_n + c_{n+1}$ und $b_{n+1} = a_{n+1} + \frac{c_{n+1}}{n+1}$. Man zeige, dass $b_{n+1} = b_n - \frac{c_{n+1}}{n(n+1)}$ gilt. Daher bilden die Intervalle $[a_n, b_n]$ eine Intervallschachtelung. Es gibt genau einen Punkt, der in allen Intervallen enthalten ist. Wegen $a_n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ ist das die Eulersche Zahl e.
56. Sei $x > 0$. Seien $c_1 = x$, $a_1 = 1+x$ und $b_1 = 1+2x$. Für $n \geq 1$ sei $c_{n+1} = \frac{c_n x}{n+1}$, $a_{n+1} = a_n + c_{n+1}$ und $b_{n+1} = a_{n+1} + c_{n+1}$. Man zeige, dass $b_{n+1} = b_n - c_{n+1}(\frac{n+1}{x} - 2)$ gilt. Daher bilden die Intervalle $[a_n, b_n]$ für $n \geq 2x-1$ eine Intervallschachtelung. Es gibt genau einen Punkt, der in allen Intervallen enthalten ist. Wegen $a_n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ ist das die Zahl e^x.
57. Sei $x > 1$. Wir suchen eine Intervallschachtelung für die Fläche F_x unter dem Graph der Funktion $f(y) = \frac{1}{y}$ in den Grenzen von 1 bis x. Sei $k \geq 1$. Für $1 \leq m \leq k$ sind die Rechtecke $(\sqrt[k]{x^{m-1}}, \sqrt[k]{x^m}] \times [0, 1/\sqrt[k]{x^m}]$ disjunkt und liegen unterhalb des Funktionsgraphen. Ihre Gesamtfläche ist $r_k = k(1 - \frac{1}{\sqrt[k]{x}})$. Ebenso für $1 \leq m \leq k$ sind die Rechtecke $(\sqrt[k]{x^{m-1}}, \sqrt[k]{x^m}] \times [0, 1/\sqrt[k]{x^{m-1}}]$ disjunkt und ragen über den Funktionsgraphen hinaus. Ihre Gesamtfläche ist $s_k = k(\sqrt[k]{x} - 1)$. Daher gilt $r_k \leq F_x \leq s_k$ für alle $k \geq 1$.
58. Für $n \geq 0$ sei $a_n = r_{2^n}$ und $b_n = s_{2^n}$, wobei r_k und s_k wie im letzten Beispiel sind. Es gilt $a_0 = 1 - \frac{1}{x}$ und $b_0 = x - 1$. Für $n \geq 0$ zeige man $a_{n+1} = \frac{2a_n\sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}}$ und $b_{n+1} = \frac{2b_n\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}}$. Aus dem letzten Beispiel folgt $a_n < b_n$ für alle n. Damit zeige man $a_n < a_{n+1}$ und $b_n > b_{n+1}$. Weiters zeige man, dass $b_{n+1} - a_{n+1} < \frac{1}{2}(b_n - a_n)$ gilt. Die Intervalle $[a_n, b_n]$ bilden daher eine Intervallschachtelung für F_x, wobei das nächstfolgende Intervall jeweils höchstens halb so lang ist wie das vorhergehende.
59. Man zeige $(1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Hinweis: Beide Seiten nach Beispiel 27 entwickeln und die Summanden vergleichen.
60. Man zeige $(1+\frac{1}{n})^{n+1} > (1+\frac{1}{n+1})^{n+2}$ für $n \in \mathbb{N}$. Hinweis: Ist äquivalent zu $(1+\frac{1}{n^2+2n})^{n+1} > 1 + \frac{1}{n+1}$. Jetzt Beispiel 24.
61. Sei $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ und $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ und $b_1 > b_2 > b_3 > \ldots$ wegen der beiden letzten Beispiele, und außerdem $a_n < b_n$ für alle $n \geq 1$. Man zeige $b_n - a_n < \frac{b_1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Intervalle $[a_n, b_n]$ bilden eine Intervallschachtelung mit einem eindeutig bestimmten inneren Punkt.

Grenzwerte von Folgen

62. Man bestimme den Grenzwert der Folgen (falls er existiert)
$\frac{3n^2-n+2}{2n^2-1}$, $\frac{(n-2)(2n+1)(3n+3)}{(4n^2+1)(2n-1)}$, $\frac{(n+1)^3-n^3}{3n^2}$, $\frac{2n^3+4}{n^2+1}$
63. Man bestimme den Grenzwert der Folgen (falls er existiert)
$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, $\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$,
64. Sei $a_1 = 2$ und $a_{n+1} = \sqrt[3]{3a_n - 1}$ für $n \geq 1$. Man zeige, dass diese Folge monoton fallend ist und $a_n \geq 1$ für alle n gilt. Daher existiert $\lim_{n\to\infty} a_n$.
65. Sei $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{1}{6}(a_n^4 + a_n^2 + 1)$ für $n \geq 1$. Diese Folge ist monoton fallend und durch 0 nach unten beschränkt. Der Grenzwert existiert und ist eine Lösung von $x^4 + x^2 - 6x + 1 = 0$.

Fibonaccizahlen

66. Sei $a_0 = a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n \geq 1$. Die Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ nennt man Fibonaccizahlen. Für $n \geq 1$ sei $w_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$. Das sind die Wachstumsraten der Fibonaccizahlen. Man zeige $w_1 = 1$ und $w_n = 1 + \frac{1}{w_{n-1}}$ für $n \geq 2$.
67. Für die Zahlen w_n aus Beispiel 66 zeige man $\frac{3}{2} \leq w_n \leq 2$ für $n \geq 2$ durch Induktion.
68. Man zeige $w_1 < w_3 < w_5 < \ldots$ und $w_2 > w_4 > w_6 > \ldots$ indem man zuerst $w_n < w_{n+2} \Rightarrow w_{n+1} > w_{n+3}$ und $w_n > w_{n+2} \Rightarrow w_{n+1} < w_{n+3}$ beweist.
69. Aus Beispiel 67 und Beispiel 68 folgt, dass $u = \lim_{k\to\infty} w_{2k-1}$ und $v = \lim_{k\to\infty} w_{2k}$ existieren. Mit Hilfe von Beispiel 67 zeige man $|w_{n+1} - w_{n+2}| \leq \frac{4}{9}|w_n - w_{n+1}|$ für $n \geq 2$ und folgere $u = v$. Somit existiert auch $\lim_{n\to\infty} w_n$ und ist gleich u.
70. Man zeige, dass $u = 1 + \frac{1}{u}$ für den Grenzwert u aus Beispiel 69 gilt und berechne u.

Funktionen

71. Man bestimme den größtmöglichen Definitionsbereich der folgenden Funktionen:
$f(x) = \frac{2x}{4-x^2}$, $f(x) = \sqrt{\frac{1}{9-x^2}}$
72. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x^2$ definiert. Man bestimme $f(\mathbb{R})$, $f([0,2])$, $f([-2,1])$, $f^{-1}(\{0,1,2\})$, $f^{-1}([0,1])$
73. Seien f und g auf $\mathbb{R}$ durch $f(x) = x^2 + 1$ und $g(x) = 2x + 1$ definiert. Man bestimme $f \circ g$ und $g \circ f$.
74. Man berechne Nullstellen, horizontale, vertikale und andere Asymptoten der folgenden Funktionen und skizziere aus diesen Informationen deren Graphen: $\frac{1-x}{4+2x}$, $\frac{x^2-3x+5}{x-3}$.
75. Ebenso: $\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} = \frac{1-2x}{x(1-x)}$
76. Ebenso: $\frac{x+1}{x^3-4x}$
77. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wie ist der Graph der folgenden Funktionen gegenüber dem Graph von f verändert: $x \mapsto 3f(x) - 1$, $x \mapsto f(x+2)$, $x \mapsto f(5x)$
78. Man zeige, dass folgende Funktion eine Umkehrfunktion besitzt und bestimme diese. Man skizziere den Graphen: $f(x) = \frac{2-x}{x}$ mit Definitionsbereich $D = (0, \infty)$
79. Ebenso: $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ mit Definitionsbereich $D = (0, 1)$
80. Man bestimme Definitionsbereich und Umkehrfunktion von $f(x) = \frac{1}{2} \log \frac{2+x}{2-x}$.

Zwischenwertsatz

81. Man zeige, dass $f(x) = x^4 - x - 1$ im Intervall $[1, 2]$ mindestens eine Nullstelle besitzt.
82. Man zeige, dass jedes Polynom ungeraden Grades mit reellen Koeffizienten mindestens eine reelle Nullstelle hat.
83. Man zeige, dass jede stetige Abbildung g eines Intervalls $[a, b]$ in sich einen Fixpunkt hat, indem man den Zwischenwertsatz auf die Funktion $x \mapsto g(x) - x$ anwendet.

Grenzwerte von Funktionen

84. Man berechne die Limiten (falls sie existieren): $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$, $\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1}$, $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1}$
85. Die Funktion $f(y) = \frac{1}{y}(\sqrt{1+y} - \sqrt{1-y})$ ist auf $D = (-1, 1) \setminus \{0\}$ definiert. Man berechne $\lim_{y\to 0} f(y)$.

Ableitung

86. Man differenziere: $x^2\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}(1 + x^2)$
87. Man differenziere: $(x - 1)^3(2x + 3)^4(x + 1)^2$
88. Man differenziere: $\frac{x^2}{2x^4-1}$, $\frac{ax+b}{cx+d}$
89. Man differenziere: $\frac{x^2+ax+b}{x^n}$, $\frac{(x+5)^7}{(x-7)^5}$
90. Man differenziere: $\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{3+x}$
91. Man differenziere: $\sqrt{x^2 + x + 2}$, $x^2\sqrt{1 + 3x^2}$
92. Man differenziere: $(3 + 2\sqrt{x})^2$, $\sqrt{\frac{4+x}{1-x}}$
93. Man differenziere: $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.
94. Man bestimme die Gleichung der Tangente an die Kurve $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ im Punkt $x = \frac{3}{5}$.
95. Man bestimme den Schnittpunkt der Tangente an den Graphen von $(x+2)(x-1)^2$ im Punkt $(-2, 0)$ mit der y-Achse.
96. Man bestimme die Gleichung der Normalen an den Graph der Funktion $2x + \frac{4}{x^2}$ im Punkt $x = 1$.

Monotonieverhalten von Funktionen

97. In welchen Bereichen ist die Funktion $\frac{x}{4+x^2}$ monoton wachsend bzw. fallend?
98. Wo ist die Funktion $\frac{3x^2}{1-x^2}$ definiert? Wo ist monoton wachsend? Wo monoton fallend?
99. Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n > -x$ zeige man $(1 + \frac{x}{n})^n \leq (1 + \frac{x}{n+1})^{n+1}$, indem man das Monotonieverhalten der Funktion $f(x) = (1 + \frac{x}{n+1})^{n+1}/(1 + \frac{x}{n})^n$ auf $(-n, \infty)$ untersucht.
100. Für $x \in [0, 1]$ und $n \in \mathbb{N}$ zeige man $(1 + \frac{x}{n})^{n+1} \geq (1 + \frac{x}{n+1})^{n+2}$, indem man das Monotonieverhalten der Funktion $f(x) = (1 + \frac{x}{n+1})^{n+2}/(1 + \frac{x}{n})^{n+1}$ auf $[0, 1]$ untersucht.
101. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = (1 + x^2)^\alpha$. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist f konvex?

Extremwertaufgaben

102. Man bestimme das Rechteck mit maximalen Flächeninhalt, das dem Einheitskreis eingeschrieben werden kann.
103. Einem Halbkreis ist ein gleichseitiges Trapez mit maximalem Flächeninhalt einzuschreiben.
104. Der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist ein achsenparalleles Rechteck von maximalem Umfang einzuschrei-

ben.

105. Einem gleichseitigen Dreieck mit Höhenfußpunkt H ist das flächengrößte gleichschenkelige Dreieck mit Spitze in H einzuschreiben.
106. Welcher Punkt der Hyperbel $y^2 - x^2 = 1$ hat die kleinste Entfernung vom Punkt $(1, 0)$?
107. Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Für welches x ist $\sum_{k=1}^{n}(x - a_k)^2$ minimal?
108. Lichtreflexion: Seien P_1 und P_2 zwei Punkte in der Halbebene $\{(x, y) : y > 0\}$. Gesucht ist der kürzeste Weg von P_1 nach P_2, der einen Punkt der x–Achse enthält.
109. Einer Kugel mit Radius r ist ein Zylinder mit maximalem Volumen einzuschreiben.
110. Einer Kugel mit Radius r ist ein Kegel mit maximalem Volumen einzuschreiben.
111. Einer Kugel mit Radius r ist eine quadratische Pyramide mit maximalem Volumen einzuschreiben.
112. Bienenzelle: Eine regelmäßige sechsseitige Säule ist durch ein aus drei kongruenten Rhomben bestehendes Dach so abzuschließen, dass die Oberfläche des entstehenden Körpers bei vorgegebener Grundfläche und vorgeschriebenem Rauminhalt möglichst klein wird.

Exponentialfunktion, Logarithmus, trigonometrische Funktionen

113. Man differenziere: $x \log x$, $x^2 \sin x$
114. Man differenziere: $\cot x$, $\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}$
115. Man differenziere: $\log(1 + x^2)$, $e^{x-\log x}$
116. Man differenziere: $\sin^2(x^3 + 1)$
117. Man differenziere: $\sqrt{x^2 + \cos^3 \sqrt{x}}$
118. Man berechne $\log(xe^x)$, $e^{\log x+\log y}$, $\log \frac{1}{e^{2x}}$, $e^{-2\log x}$
119. Man zeige $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \log x > 0$ für $x > 1$, indem man das Monotonieverhalten dieser Funktion untersucht. Sei $a \neq b$ und $a, b > 0$. Setzt man $x = \frac{a}{b}$, wenn $a > b$, und $x = \frac{b}{a}$, wenn $a < b$, dann erhält man die Ungleichung $\frac{\log a-\log b}{a-b} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$.
120. Man zeige, dass $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ für alle $x > 0$ gilt, indem man das Monotonieverhalten der Funktion $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ auf dem Intervall $(0, \infty)$ untersucht.
121. Man zeige, dass $x - x^2 \leq \log(1 + x) \leq x$ für $x \in (-\frac{1}{2}, \infty)$ gilt, indem man das Monotonieverhalten der Funktionen $f(x) = x - \log(1 + x)$ und $g(x) = \log(1 + x) - x + x^2$ auf dem Intervall $(-\frac{1}{2}, \infty)$ untersucht. Man schließe daraus, dass $1 - x \leq \frac{1}{x}\log(1 + x) \leq 1$ für $x \in (0, \infty)$ und $1 - x \geq \frac{1}{x}\log(1 + x) \geq 1$ für $x \in (-\frac{1}{2}, 0)$, also $1 - |x| \leq \frac{1}{x}\log(1 + x) \leq 1 + |x|$ für $x \in (-\frac{1}{2}, \infty) \setminus \{0\}$ gilt. Daraus folgt $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\log(1 + x) = 1$ und $\lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x} = e$.
122. Aus dem letzten Beispiel folgere man $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\log(1 + ax) = a$ und $\lim_{x\to 0}(1 + ax)^{1/x} = e^a$.
123. Sei $\alpha > 0$. Für $0 < x < 1$ zeige man $-\log x \leq \frac{1}{\alpha}x^{-\alpha}$, indem man das Monotonieverhalten der Funktion $f(x) = \frac{1}{\alpha}x^{-\alpha} + \log x$ untersucht. Es folgt $\lim_{x\to 0} x^c \log x = 0$ für alle $c > 0$.
124. Sei $\alpha > 0$. Man Zeige $\log x \leq \frac{1}{\alpha}x^{\alpha}$ für $x \geq 1$, indem man das Monotonieverhelten der Funktion $f(x) = \frac{1}{\alpha}x^{\alpha} - \log x$ auf dem Intervall $[1, \infty)$ untersucht.
125. Für $c > 0$ zeige man $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^c} = 0$ mit Hilfe von Beispiel 124.
126. Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x \log x$. Man zeige, dass f konvex ist.
127. Die Funktion $\cos : (0, \frac{\pi}{2}) \to (0, 1)$ ist streng monoton fallend und hat daher eine Umkehrfunktion $\arccos : (0, 1) \to (0, \frac{\pi}{2})$. Man berechne die Ableitung von arccos.

Eine Reihe

128. Man zeige $\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{4}(\frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}) = \frac{1}{4}(\frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi+x}{2}})$ für $x \in \mathbb{R}$.

129. Man zeige $\frac{1}{4^n} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2^{n+1}}} = 1$ für $n \geq 1$ durch Induktion nach n. Hinweis: $x = \frac{(2k-1)\pi}{2^{n+1}}$ in Beispiel 128.

130. Man zeige $\frac{2}{4^n} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2^{n+1}}} = 1$ für $n \geq 1$. Hinweis: Wegen $\sin(\pi - x) = \sin x$ gilt für die Summe in Beispiel 129: erster Summand = letzter Summand, zweiter Summand = vorletzter Summand, dritter Summand = drittletzter Summand, ...

131. Man zeige $\frac{1}{\sin^2 x} > \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\sin^2 x} - 1$ für $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Hinweis: $\sin x < x < \tan x$.

132. Man zeige $1 > \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2} > 1 - \frac{1}{2^n}$ für $n \geq 1$. Hinweis: Man setze $x = \frac{(2k-1)\pi}{2^{n+1}}$ in Beispiel 131 und summiere über k von 1 bis 2^{n-1}. Dann Beispiel 130.

133. Für $n \geq 1$ sei $A_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k^2}$, $B_n = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k)^2}$ und $C_n = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2}$. Man zeige $A_n = B_n + C_n$ und $B_{n+1} = \frac{1}{4} A_n$. Nach Beispiel 132 gilt $B_n \leq C_n \leq \frac{\pi^2}{8}$ und daher $A_n \leq \frac{\pi^2}{4}$ für alle n, sodass $A = \lim_{n\to\infty} A_n$, $B = \lim_{n\to\infty} B_n$ und $C = \lim_{n\to\infty} C_n$ wegen der Monotonie der Folgen existieren. Es folgt $A = B + C$ und $B = \frac{1}{4}A$. Aus Beispiel 132 folgt $C = \frac{\pi^2}{8}$ und damit $A = \frac{\pi^2}{6}$. (Wir haben $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ gezeigt.)

Regel von de l'Hospital

134. Man berechne $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x)}{\sin x}$ und $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-e^x}{\tan x}$

135. Man berechne $\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$

136. Man berechne $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-\cos x}{\sin^2 x}$

137. Man berechne $\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x+e^x+e^{-x}-4}{x^4}$

Mittelungleichungen

138. Man zeige $\log x < x - 1$ für alle $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$.

139. Seien $v_1, v_2, \dots, v_n \in (0,\infty)$ und $V = \sum_{j=1}^n v_j$. Es gilt $\log \frac{V}{nv_i} = \frac{V}{nv_i} - 1$, wenn $v_i = \frac{V}{n}$, und $\log \frac{V}{nv_i} < \frac{V}{nv_i} - 1$, wenn $v_i \neq \frac{V}{n}$, wegen Beispiel 138. Sind die Zahlen $v_1, v_2, \dots, v_n$ nicht alle gleich, dann folgt $\sum_{j=1}^n \frac{v_i}{V} \log \frac{V}{nv_i} < \sum_{j=1}^n \frac{v_i}{V}(\frac{V}{nv_i} - 1)$. Man forme um, und zeige so, dass $\log V - \frac{1}{V}\sum_{j=1}^n v_j \log v_j < \log n$ gilt.

140. Sei $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0,\infty)$. Sei $f(x) = (\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n a_j^x)^{\frac{1}{x}}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f(0) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$. Sei $g(x) = \log f(x)$. Man zeige, dass g und damit f im Punkt 0 stetig ist (de l'Hospital).

141. Sind die Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$ alle gleich $c > 0$, dann zeige man, dass die Funktion f in Beispiel 140 konstant gleich c ist.

142. Seien f und g wie in Beispiel 140. Die Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$ seien nicht alle gleich. Mit Hilfe von Beispiel 139 zeige man $x^2 g'(x) > 0$ für $x \neq 0$, sodass g und damit f streng monoton wachsend ist. Bemerkung: $f(1)$ = arithmetisches, $f(0)$ = geometrisches, $f(-1)$ = harmonisches Mittel.

143. Sei $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. Man zeige, dass $\lim_{k\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n a_j^k)^{\frac{1}{k}} = a_n$ gilt. Hinweis: $a_n^k \leq \sum_{j=1}^n a_j^k \leq n a_n^k$. Ebenso $\lim_{k\to-\infty}(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n a_j^k)^{\frac{1}{k}} = a_1$.

Integration

144. Partielle Integration: $\int x e^x \, dx$, $\int \log x \, dx$ (ergänze $\int 1 \cdot \log x \, dx$).

145. Substitution: $\int x \log(x^2) \, dx$, $\int \frac{1}{ax-b} \, dx$, $\int \frac{x}{1+x^2} \, dx$, $\int x \sqrt[3]{1-5x} \, dx$, $\int x^2 \sqrt{1+x^3} \, dx$,

146. Berechne: $\int \frac{2}{x^2-1}\,dx$ $\left(\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$, $\int \frac{dx-c}{(x-a)(x-b)}\,dx$ $\left(\frac{dx-c}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{c-ad}{x-a} + \frac{db-c}{x-b}\right)\right)$.

147. Substitution: $\int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$, $\int \frac{(\log x)^2}{x}\,dx$, $\int \sin x \cos^3 x\,dx$, $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$.

148. Partielle Integration: $\int x \sin x\,dx$, $\int \arctan x\,dx$ (ergänze $\int 1 \cdot \arctan x\,dx$).

149. Eulerformel: $\int \sin^3 x\,dx$, $\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx$.

150. Trigonometrische Substitution: $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$, $\int \frac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}\,dx$ $\left(\tan' = ?,\quad \tan = \frac{\sin}{\sqrt{1-\sin^2}}\right)$

Fläche, Volumen, Drehkörper, Bogenlänge, Schwerpunkt

151. Man berechne die von den beiden Parabeln $y^2 = \frac{x}{4}$ und $y^2 = 5 - x$ eingeschlossene Fläche.

152. Man berechne die Fläche, die von der Parabel $y = \sqrt{x}$, der x-Achse und der Geraden $y = x-2$ eingeschlossen wird.

153. Man berechne das Volumen des Körpers, der durch Rotation des Flächenstücks zwischen den Parabeln $y = \sqrt{x}$ und $y = \frac{5}{4}\sqrt{x-9}$ um die x-Achse entsteht.

154. Die durch die Gleichung $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ definierte Funktion rotiert um die x-Achse. Man berechne das Volumen des Drehkörpers.

155. Man berechne die Länge des Graphen von $y = \sqrt{(x+1)^3}$ zwischen $x = 3$ und $x = 8$.

156. Man berechne die Länge des Graphen von $y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2}$ zwischen $x = 1$ und $x = 2$.

157. Man berechne die Länge des Graphen von $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ mit $x \in [0, 1]$.

158. Sei $a > r$. Man berechne die Oberfläche des Ringes (Torus), der durch die Rotation des Kreises $x^2 + (y-a)^2 = r^2$ um die x-Achse entsteht.

159. Der Graph von $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ mit $0 \le x \le 1$ rotiert um die x-Achse. Man berechne die Oberfläche des dadurch entstehenden Drehkörpers.

160. Man berechne den Schwerpunkt eines Halbkreises mit Radius r.

161. Man berechne den Schwerpunkt einer Halbkugel mit Radius r.

162. Der Graph von $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ mit $0 \le x \le 1$ rotiert um die x-Achse. Man berechne den Schwerpunkt des dadurch entstehenden Drehkörpers.

Uneigentliches Integral

163. Partielle Integration: $\int_0^1 -\log x\,\mathrm{d}x$. Hinweis: Beispiel 123

164. Substitution: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot x\,\mathrm{d}x$, $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

165. Substitution: $\int_2^{\infty} \frac{1}{x\log x}\,\mathrm{d}x$ und $\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^2}\,\mathrm{d}x$

Das Wallissche Produkt

166. Für $n \ge 2$ zeige man, dass $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x$ gilt. Hinweis: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x\,\mathrm{d}x$ und partielle Integration.

167. Man zeige $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x\,\mathrm{d}x = \frac{2k-1}{2k}\frac{2k-3}{2k-2}\cdots\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$ und $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\,\mathrm{d}x = \frac{2k}{2k+1}\frac{2k-2}{2k-1}\cdots\frac{4}{5}\frac{2}{3}$ mit Hilfe der Formel $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x$ aus Beispiel 166

168. Man zeige $\frac{\pi}{2} \le \frac{2^2 4^2 \ldots (2k)^2}{3^2 5^2 \ldots (2k-1)^2 2k} \le \frac{\pi}{2}\frac{2k+1}{2k}$ für $k \ge 2$ und folgere $\lim_{k\to\infty} \frac{2^2 4^2 \ldots (2k)^2}{3^2 5^2 \ldots (2k-1)^2 2k} = \frac{\pi}{2}$. Hinweis: Für $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ gilt $\sin^{2k} x \le \sin^{2k-1} x$ und $\sin^{2k+1} x \le \sin^{2k} x$ und dann Beispiel 167.

169. Man zeige $\frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdots(2k)}$ und folgere $\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{k}}{2^{2k}}\binom{2k}{k} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ mit Hilfe von Beispiel 168.

Taylorformel

170. Man entwickle $\cos x$ nach der Taylorformel.
171. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Man entwickle $(1+x)^\alpha$ nach der Taylorformel.
172. Man entwickle $\arcsin x$ mit Hilfe von Beispiel 171. Hinweis: $\arcsin' x = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

Reihen

173. Konvergent oder divergent: $\sum_{k=1}^\infty \frac{k+1}{k^2}$, $\sum_{k=1}^\infty \frac{k+1}{k^3}$.
174. Konvergent oder divergent: $\sum_{k=0}^\infty (-1)^k$, $\sum_{k=1}^\infty \frac{\log k}{k^2}$ (Beispiel 123 mit $x = \frac{1}{k}$).
175. Konvergent oder divergent: $\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k \log k}$, $\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k(\log k)^2}$.
176. Alternierende Reihe: Sei $(a_k)_{k\geq 0}$ eine monoton fallende Folge, die gegen 0 konvergiert. Für $n \geq 0$ sei $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$. Man zeige $S_1 \leq S_3 \leq S_5 \leq \cdots \leq S_4 \leq S_2 \leq S_0$ und $|S_n - S_{n-1}| = a_n$ und folgere daraus, dass $\lim_{n\to\infty} S_n$ existiert.
177. Ist die Reihe $\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{k}{k+3}$ konvergent? Ist $\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{k+1}{k^2+1}$ konvergent?
178. Bestimme den Konvergenzradius: $\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k+1} x^k$, $\sum_{k=0}^\infty \frac{2^k}{(k+2)^2} x^k$.
179. Bestimme den Konvergenzradius: $\sum_{k=0}^\infty \frac{2^k}{k!} x^k$, $\sum_{k=0}^\infty \frac{k^7}{2^k} x^k$.
180. Bestimme den Konvergenzradius: $\sum_{k=0}^\infty (k^4 - 4k^3) x^k$, $\sum_{k=0}^\infty \binom{2k}{k} x^k$.

Die Stirlingsche Formel

181. Sei $a_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$ und $b_n = \log a_n$ für $n \geq 1$. Man zeige $b_n - b_{n+1} = \frac{1}{2x} \log \frac{1+x}{1-x} - 1$ mit $x = \frac{1}{2n+1}$.
182. Zeige $2x \leq \log \frac{1+x}{1-x} \leq 2x + \frac{2x^3}{3(1-x^2)}$ für $0 \leq x < 1$[] entweder durch Entwickeln von $\log \frac{1+x}{1-x}$ in eine Reihe oder durch Untersuchen des Monotonieverhaltens der Funktionen $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x} - 2x$ und $g(x) = 2x + \frac{2x^3}{3(1-x^2)} - \log \frac{1+x}{1-x}$.
183. Für $n \geq 1$ sei $c_n = b_n - \frac{1}{12n}$. Man folgere $0 \leq b_n - b_{n+1} \leq \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}$ aus Beispiel 181 und 182. Die Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ ist monoton fallend und die Folge $(c_n)_{n\geq 1}$ ist monoton wachsend. Es existiert ein b mit $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = b$ und es gilt $b \leq b_n \leq b + \frac{1}{12n}$ für alle n.
184. Man zeige $\frac{a_{2n}}{a_n^2} = \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}\sqrt{2}} \binom{2n}{n}$ für $n \geq 1$. Wegen Beispiel 183 gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ mit $a = e^b$. Mit Hilfe von Beispiel 169 zeige man $a = \sqrt{2\pi}$. Es folgt $b = \log \sqrt{2\pi}$. Damit ist die Stirlingsche Formel $\lim_{n\to\infty} \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$ gezeigt.