

Analysis in mehreren Variablen

Eine Vorlesung für das

Lehramtsstudium

Franz Hofbauer

WS 2009

I. Funktionen in mehreren Variablen

Stetigkeit, Integration und Ableitung von Funktion in mehreren Variablen werden behandelt. Die Beweise werden nicht immer im Detail ausgeführt. Mit Hilfe des Integrals werden Volumina, Massen und Schwerpunkte berechnet. Die Ableitung verwenden wir, um Maxima und Minima von Funktionen in mehreren Variablen zu bestimmen.

1. Höherdimensionale Räume

Das mathematische Modell für den d -dimensionalen Raum ist \mathbb{R}^d . Die Punkte im \mathbb{R}^d werden wir mit \mathbf{x} , \mathbf{y} und dergleichen bezeichnen und mit ihnen wie mit Vektoren rechnen. In Koordinaten geschrieben, wird \mathbf{x} zu (x_1, x_2, \dots, x_d) . Für $d = 2$ verwenden wir auch die Koordinaten (x, y) , und (x, y, z) für $d = 3$. Auf \mathbb{R}^d ist ein inneres Produkt durch $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_d y_d$ definiert und eine Norm durch $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2}$. Der Abstand der Punkte \mathbf{x} und \mathbf{y} im \mathbb{R}^d ist dann $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

Satz 1.1 (Dreiecksungleichung) Für \mathbf{x} und \mathbf{y} in \mathbb{R}^d gilt $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Beweis: Es gilt die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$. Daraus folgt dann $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2$, womit $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ gezeigt ist. \square

Im Eindimensionalen haben wir auf offenen und abgeschlossenen Intervallen gearbeitet. Im Höherdimensionalen werden wir stattdessen auf offenen und abgeschlossenen Teilmengen arbeiten. Zuerst definieren wir Umgebungen eines Punktes. Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ und $\varepsilon > 0$ ist $U_\varepsilon(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \varepsilon\}$ die ε -Umgebung von \mathbf{x} . Im \mathbb{R}^2 ist $U_\varepsilon(\mathbf{x})$ eine Kreisscheibe und im \mathbb{R}^3 eine Kugel. Eine Teilmenge B von \mathbb{R}^d heißt offen, wenn für jedes $\mathbf{x} \in B$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(\mathbf{x}) \subseteq B$. Eine Teilmenge B von \mathbb{R}^d heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement offen ist, das heißt wenn für jedes $\mathbf{x} \notin B$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(\mathbf{x}) \cap B = \emptyset$. Eine Teilmenge B von \mathbb{R}^d heißt beschränkt, wenn ein $\alpha > 0$ existiert mit $B \subseteq U_\alpha(\mathbf{0})$. Für eine Menge $B \subseteq \mathbb{R}^d$ definieren wir das Innere durch $B^0 = \{\mathbf{x} \in B : U_\varepsilon(\mathbf{x}) \subseteq B \text{ für ein } \varepsilon > 0\}$ und den Rand durch $\partial B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : U_\varepsilon(\mathbf{x}) \cap B \neq \emptyset, U_\varepsilon(\mathbf{x}) \setminus B \neq \emptyset \text{ für alle } \varepsilon > 0\}$. Für eine offene Menge $B \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt $B^0 = B$.

Beispiel: Sei $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 \leq 1\}$, eine Ellipse. Die Menge B ist abgeschlossen. Für $(x, y) \notin B$, das heißt $4x^2 + 9y^2 > 1$, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x, y) \cap B = \emptyset$. Weiters gilt $B^0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 < 1\}$ und $\partial B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 = 1\}$, wie man ebenfalls leicht mit Hilfe der Definitionen nachprüft.

Wir können Folgen $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ im \mathbb{R}^d untersuchen und Grenzwerte definieren.

Definition: Man nennt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ Grenzwert der Folge $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, sodass $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt, das heißt $\mathbf{x}_n \in U_\varepsilon(\mathbf{x})$ für alle $n \geq n_0$. Man schreibt $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$.

Folgen, die einen Grenzwert besitzen, heißen konvergent. Der Grenzwert einer Folge $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ ist, falls er existiert, eindeutig bestimmt. Sind \mathbf{x} und \mathbf{y} zwei verschiedene Punkte in \mathbb{R}^d , dann findet man ein $\varepsilon > 0$, zum Beispiel $\varepsilon = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}{2}$, sodass $U_\varepsilon(\mathbf{x}) \cap U_\varepsilon(\mathbf{y}) = \emptyset$ gilt. Ist \mathbf{x} Grenzwert, dann gibt es ein n_0 , sodass $\mathbf{x}_n \in U_\varepsilon(\mathbf{x})$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Dann gilt aber $\mathbf{x}_n \notin U_\varepsilon(\mathbf{y})$ für alle $n \geq n_0$ und \mathbf{y} kann nicht Grenzwert sein.

Eine Folge $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ heißt beschränkt, wenn ein $c > 0$ existiert mit $\|\mathbf{x}_n\| \leq c$ für alle $n \geq 0$. Man kann zeigen, dass eine konvergente Folge beschränkt ist.

Sei D eine Teilmenge von \mathbb{R}^d . Wird jedem Punkt $\mathbf{x} \in D$ in eindeutiger Weise eine reelle Zahl $f(\mathbf{x})$ zugeordnet, dann nennt man f eine Funktion mit Definitionsbereich D und Werten in \mathbb{R} . Man schreibt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Als Beispiele kann man Polynome in mehreren Variablen angeben. Polynome in zwei Variablen sind Funktionen der Form $f(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{ij} x^i y^j$ mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Polynome in drei Variablen sind Funktionen der Form $f(x, y, z) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n a_{ijk} x^i y^j z^k$ mit $a_{ijk} \in \mathbb{R}$. Konkrete Beispiele sind $x^2 + 3xy^2 - 1$ und $2xyz - 5yz^3 + x$.

Wir können mit Funktionen rechnen. Sind f_1 und f_2 Funktionen mit Definitionsbereichen D_1 und D_2 , dann kann man sie auf $D = D_1 \cap D_2$ einschränken und auf der Menge D dann Summe, Differenz und Produkt dieser Funktionen bilden. Man definiert $f_1 + f_2$ als die Funktion, die jedem $\mathbf{x} \in D$ den Wert $f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x})$ zuordnet. Genauso definiert man $f_1 - f_2$ und $f_1 \cdot f_2$. Mit dem Quotient $\frac{f_1}{f_2}$ muss man vorsichtiger sein. Man muss alle Punkte \mathbf{x} aus dem Definitionsbereich ausschließen, für die $f_2(\mathbf{x}) = 0$ gilt.

Analog wie im Eindimensionalen definieren wir die Stetigkeit von Funktionen.

Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $\mathbf{x} \in D$. Die Funktion f heißt stetig im Punkt \mathbf{x} , falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass $|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon$ für alle $\mathbf{y} \in U_\delta(\mathbf{x}) \cap D$ gilt. Man sagt f ist stetig auf D , wenn f in jedem Punkt $\mathbf{x} \in D$ stetig ist.

Die Beweise der folgenden beiden Sätze verlaufen dann analog wie für Funktionen im Eindimensionalen.

Satz 1.2: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $\mathbf{x} \in D$. Dann sind äquivalent

- (a) f ist im Punkt \mathbf{x} stetig
- (b) für jede Folge $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ in D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_n) = f(\mathbf{x})$

Satz 1.3: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$. Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, die im Punkt $\mathbf{x} \in D$ stetig sind. Dann sind auch die Funktionen $f + g$, $f - g$ und fg im Punkt \mathbf{x} stetig. Ist $g(\mathbf{x}) \neq 0$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ im Punkt \mathbf{x} stetig.

Sei D eine Teilmenge von \mathbb{R}^d . Wird jedem Punkt $\mathbf{x} \in D$ in eindeutiger Weise ein Punkt $g(\mathbf{x})$ im \mathbb{R}^p zugeordnet, dann nennt man g eine Funktion mit Definitionsbereich D und Werten in \mathbb{R}^p . Man schreibt $g : D \rightarrow \mathbb{R}^p$. Für jedes $\mathbf{x} \in D$ ist $g(\mathbf{x})$ ein Element von \mathbb{R}^p , das wir in Koordinaten $(g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_p(\mathbf{x}))$ schreiben können. Für $1 \leq j \leq p$ ist g_j eine Funktion von D nach \mathbb{R} . Wir nennen diese Funktionen die Komponenten von g .

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$. Man nennt eine Funktion $g : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ im Punkt $\mathbf{x} \in D$ stetig, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass $\|g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x})\| < \varepsilon$ für alle $\mathbf{y} \in U_\delta(\mathbf{x}) \cap D$ gilt. Man sagt g ist stetig auf D , wenn g in jedem Punkt $\mathbf{x} \in D$ stetig ist.

Satz 1.4: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$. Eine Funktion $g : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ ist im Punkt $\mathbf{x} \in D$ genau dann stetig, wenn alle ihre Komponenten g_1, g_2, \dots, g_p im Punkt \mathbf{x} stetig sind.

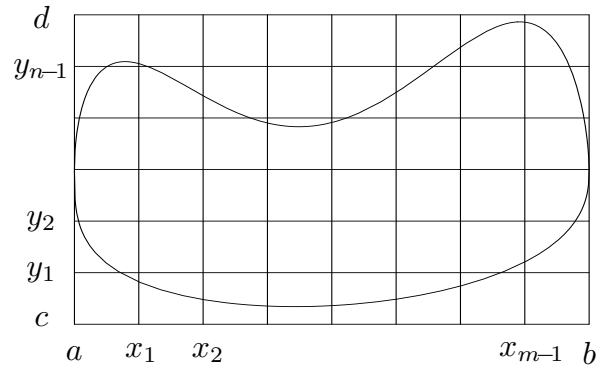
Beweis: Sei $g : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ im Punkt $\mathbf{x} \in D$ stetig und $1 \leq j \leq p$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es existiert ein $\delta > 0$, sodass $\|g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x})\| < \varepsilon$ für alle $\mathbf{y} \in U_\delta(\mathbf{x}) \cap D$ gilt. Wegen $|g_j(\mathbf{y}) - g_j(\mathbf{x})| \leq \|g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x})\|$ gilt dann auch $|g_j(\mathbf{y}) - g_j(\mathbf{x})| < \varepsilon$ für alle $\mathbf{y} \in U_\delta(\mathbf{x}) \cap D$, womit die Stetigkeit von g_j im Punkt \mathbf{x} gezeigt ist.

Für $1 \leq j \leq p$ sei jetzt $g_j : D \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $\mathbf{x} \in D$ stetig. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert ein $\delta_j > 0$ mit $|g_j(\mathbf{y}) - g_j(\mathbf{x})| < \frac{\varepsilon}{p}$ für alle $\mathbf{y} \in U_{\delta_j}(\mathbf{x}) \cap D$. Sei $\delta = \min_{1 \leq j \leq p} \delta_j$. Wegen $\|g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x})\| \leq p \max_{1 \leq j \leq p} |g_j(\mathbf{y}) - g_j(\mathbf{x})|$ und $U_\delta(\mathbf{x}) \subseteq U_{\delta_j}(\mathbf{x})$ für alle j gilt dann auch $\|g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x})\| < \varepsilon$ für alle $\mathbf{y} \in U_\delta(\mathbf{x}) \cap D$, das heißt g ist im Punkt \mathbf{x} stetig. \square

2. Integration im Mehrdimensionalen

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ eine beschränkte Menge und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Gesucht ist das Volumen über der Menge B und unter dem Graphen von f , wobei Volumsanteile, die unter der x - y -Ebene liegen, negativ genommen werden. Wir gehen vor wie im Eindimensionalen.

Sei $Q = [a, b] \times [c, d]$ ein Rechteck, das B enthält. Wir setzen $f(\mathbf{x}) = 0$ für $\mathbf{x} \in Q \setminus B$, sodass f dann auf dem Rechteck Q definiert ist. Wir definieren wieder Riemannsummen. Seien $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ und $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$ Zerlegungen der Intervalle $[a, b]$ und $[c, d]$. Dann ist $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \sup_{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]} f$ die Obersumme und $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \inf_{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]} f$ die Untersumme zu diesen Zerlegungen. Und die Summen $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) f(\xi_{ij})$ mit $\xi_{ij} \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ nennen wir Riemannsummen zu den gegebenen Zerlegungen. Es gelten dieselben Resultate wie im Eindimensionalen. Bei Verfeinerung der Zerlegungen wird die Untersumme größer oder bleibt gleich und die Obersumme wird kleiner oder bleibt gleich. Es existiert das Supremum $U(f)$ der Untersummen und das Infimum $O(f)$ der Obersummen und es gilt $U(f) \leq O(f)$. Ist $U(f) = O(f)$, dann sagt man, dass f



über die Menge B integrierbar ist, und schreibt $\int_B f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ für $U(f) = O(f)$. In diesem Fall kann man auch wieder zeigen, dass für Folgen von Zerlegungen, deren Gitterweiten gegen 0 geht, jede zugehörige Folge von Riemannsummen gegen $\int_B f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ konvergiert.

Um Integrale ausrechnen zu können, muss der Integrationsbereich B eine spezielle Gestalt haben. Man nennt B einen Normalbereich bezüglich der x -Achse, wenn ein Intervall $[a, b]$ und stetige Funktionen $g_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g_1 \leq g_2$ existieren, sodass $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ gilt. Ganz analog nennt man B einen Normalbereich bezüglich der y -Achse, wenn ein Intervall $[c, d]$ und stetige Funktionen $h_1 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ und $h_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h_1 \leq h_2$ existieren, sodass $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$ gilt. Der oben gezeichnete Bereich ist ein Normalbereich bezüglich der x -Achse, nicht aber bezüglich der y -Achse. Wir haben dann folgenden Satz

Satz 1.5 (Satz von Fubini) Sei $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ ein Normalbereich bezüglich der x -Achse und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f über die Menge B integrierbar und es gilt $\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$.

Sei $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$ ein Normalbereich bezüglich der y -Achse und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f über die Menge B integrierbar und es gilt $\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$.

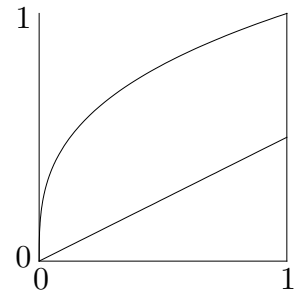
Wir führen keinen genauen Beweis. Aber man kann die Richtigkeit dieses Resultats leicht erkennen. Das Integral $\int_B f(x, y) d(x, y)$ ist der Grenzwert der Riemannsummen $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) f(x_i, y_j)$ über Folgen von Zerlegungen, deren Gitterweiten gegen 0 gehen. Wenn wir jetzt $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ annehmen, dann ist $\sum_{j=1}^n (y_j - y_{j-1}) f(x_i, y_j)$ eine Riemannsumme für das eindimensionale Integral $\int_{g_1(x_i)}^{g_2(x_i)} f(x_i, y) dy$. Man beachte, dass f außerhalb von B gleich 0 gesetzt wurde. Setzt man $u(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$, dann gilt also $u(x_i) \approx \sum_{j=1}^n (y_j - y_{j-1}) f(x_i, y_j)$, wobei bei feiner werdenden Zerlegungen die Approximation immer genauer wird. Setzt man das ein, so erhält man $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) f(x_i, y_j) \approx \sum_{i=1}^m (x_i - x_{i-1}) u(x_i)$. Hier steht links eine Riemannsumme für $\int_B f(x, y) d(x, y)$ und rechts eine Riemannsumme für $\int_a^b u(x) dx$. Im Grenzwert für immer feiner werdende Zerlegungen wird aus der ungefähren Gleichheit eine Gleichheit, die linke Seite geht gegen $\int_B f(x, y) d(x, y)$ und die rechte Seite gegen $\int_a^b u(x) dx$. Somit erhalten wir $\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_a^b u(x) dx$. Das ist bereits das gesuchte Resultat.

Analoge Überlegungen gelten für einen Normalbereich bezüglich der y -Achse. Es werden nur die beiden Koordinaten vertauscht.

Beispiel: Wir berechnen $\int_B f(x, y) d(x, y)$ mit $f(x, y) = 2x + 3y + 1$ und $B = [-1, 1] \times [0, 2]$. Wir erhalten $\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_0^2 \int_{-1}^1 2x + 3y + 1 dx dy = \int_0^2 (x^2 + 3xy + x) \Big|_{-1}^1 dy = \int_0^2 1 + 3y + 1 - (1 - 3y - 1) dy = \int_0^2 6y + 2 dy = 3y^2 + 2y \Big|_0^2 = 12 + 4 = 16$. Man kann auch die Reihenfolge der Integrale vertauschen $\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_{-1}^1 \int_0^2 2x + 3y + 1 dy dx = \int_{-1}^1 (2xy + \frac{3}{2}y^2 + y) \Big|_0^2 dx = \int_{-1}^1 4x + 6 + 2 dx = \int_{-1}^1 4x + 8 dx = 2x^2 + 8x \Big|_{-1}^1 = 2 + 8 - (2 - 8) = 16$.

Beispiel: Sei $f(x, y) = 2x + 3y + 1$ und B die Fläche zwischen den Parabeln $y^2 = x$ und $y^2 = 4(x - 3)$. Wir berechnen $\int_B f(x, y) d(x, y)$. Die erste der Parabeln hat Scheitel $(0, 0)$, die zweite $(3, 0)$. Sie schneiden sich in den Punkten $(4, 2)$ und $(4, -2)$. Wir erhalten für B den Normalbereich $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq \frac{1}{4}y^2 + 3\}$ bezüglich der y -Achse. Es gilt $\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_{-2}^2 \int_{y^2}^{\frac{1}{4}y^2 + 3} 2x + 3y + 1 dx dy = \int_{-2}^2 (x^2 + 3xy + x) \Big|_{y^2}^{\frac{1}{4}y^2 + 3} dy = \int_{-2}^2 (\frac{1}{4}y^2 + 3)^2 + 3y(\frac{1}{4}y^2 + 3) + \frac{1}{4}y^2 + 3 - y^4 - 3y^3 - y^2 dy = \int_{-2}^2 -\frac{15}{16}y^4 - \frac{9}{4}y^3 + \frac{3}{4}y^2 + 9y + 12 dy = -\frac{3}{16}y^5 - \frac{9}{16}y^4 + \frac{1}{4}y^3 + \frac{9}{2}y^2 + 12y \Big|_{-2}^2 = -12 + 4 + 48 = 40$.

Beispiel: Wir schreiben den Normalbereich $B = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \frac{x}{2} \leq y \leq \sqrt[3]{x}\}$ in einen Normalbereich bezüglich der y -Achse um. Es ergibt sich $0 \leq \frac{x}{2} \leq y$ und $y \leq \sqrt[3]{x} \leq 1$, woraus $0 \leq y \leq 1$ folgt. Weiters gilt $y \leq \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow y^3 \leq x$ und $\frac{x}{2} \leq y \Leftrightarrow x \leq 2y$. Man muss auch noch $0 \leq x \leq 1$ berücksichtigen, sodass $y^3 \leq x \leq \min(2y, 1)$ folgt. Wir erhalten $B = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, y^3 \leq x \leq \min(2y, 1)\}$. Will man über diesen Normalbereich B integrieren, so schreibt man $B = B_1 \cup B_2$ mit $B_1 = \{(x, y) : 0 \leq y \leq \frac{1}{2}, y^3 \leq x \leq 2y\}$ und $B_2 = \{(x, y) : \frac{1}{2} \leq y \leq 1, y^3 \leq x \leq 1\}$ und berechnet die Integrale über B_1 und B_2 getrennt und addiert sie dann.



Beispiel: Wir berechnen das Volumen des Schnittkörpers zweier Zylinder, die beide Radius r haben und deren Achsen die x -Achse bzw. die y -Achse sind. Aus Symmetriegründen

genügt es, den Teil des Schnittkörpers zu betrachten, der über der Fläche $B = \{(x, y) : 0 \leq x \leq r, 0 \leq y \leq x\}$ liegt. Das ist ein Sechzehntel des Schnittkörpers. Oberhalb von B wird der Schnittkörper durch die Funktion $f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2}$ begrenzt. Wir berechnen $\int_B f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_0^r \int_0^x \sqrt{r^2 - x^2} dy dx = \int_0^r x \sqrt{r^2 - x^2} dx = -\frac{1}{3}(r^2 - x^2)^{3/2} \Big|_0^r = \frac{1}{3}r^3$. Das Volumen des Schnittkörpers ist daher $\frac{16}{3}r^3$.

Analog definiert man Integrale $\int_B f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ für eine beschränkte Teilmenge B des \mathbb{R}^d und eine beschränkte Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$. Man kann wieder Normalbereiche einführen und Integrale über Normalbereiche als d -fache Integrale schreiben. Ein Normalbereich im \mathbb{R}^3 ist eine Menge $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\}$, wobei $a < b$ gilt, g_1 und g_2 sind stetige Funktionen von $[a, b]$ nach \mathbb{R} mit $g_1 \leq g_2$, und h_1 und h_2 sind stetige Funktionen von $\{(x, y) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ nach \mathbb{R} mit $h_1 \leq h_2$. Dann gilt $\int_B f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x, y)}^{h_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx$. Man kann also ein Integral über einen Normalbereich im \mathbb{R}^3 als dreifaches Integral berechnen.

Beispiel: Sei B der Bereich, der oberhalb der x - y -Ebene und der x - z -Ebene liegt und unterhalb der Fläche $x^2 + y + z = 4$. Das ist der Bereich, der durch die Ungleichungen $z \geq 0$, $y \geq 0$ und $x^2 + y + z \leq 4$ bestimmt wird. Sei $f(x, y, z) = 1 + x$. Wir berechnen $\int_B f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$. Wir schreiben B als Normalbereich. Aus obigen Ungleichungen folgt $x^2 \leq 4$, das heißt $x \in [-2, 2]$. Wegen $z \geq 0$ erhalten wir $y \leq 4 - x^2$. Schließlich gilt auch $z \leq 4 - x^2 - y$. Somit haben wir $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4 - x^2, 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y\}$. Damit können wir dann das Integral berechnen: $\int_B f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^{4-x^2-y} 1+x dz dy dx = \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} (1+x)z \Big|_0^{4-x^2-y} dy dx = \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} (1+x)(4-x^2-y) dy dx = \int_{-2}^2 (1+x)(4y - x^2y - \frac{1}{2}y^2) \Big|_0^{4-x^2} dx = \int_{-2}^2 (1+x)(8-4x^2 + \frac{1}{2}x^4) dx = \int_{-2}^2 8-4x^2 + \frac{1}{2}x^4 + 8x-4x^3 + \frac{1}{2}x^5 dx = 8x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + 4x^2 - x^4 + \frac{1}{12}x^6 \Big|_{-2}^2 = 2(16 - \frac{32}{3} + \frac{32}{10}) = \frac{512}{15}$.

Als Anwendung des dreidimensionalen Integrals bestimmen wir die *Masse eines Körpers*. Sei B eine integrierbare Teilmenge des \mathbb{R}^3 und $\rho : B \rightarrow \mathbb{R}^+$ stetig. Durch $\rho(x, y, z)$ ist die Dichte im Punkt (x, y, z) gegeben. Wir bilden eine Zerlegung des Körpers B in kleine Würfel. Die Masse eines kleinen Würfels $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$ ist näherungsweise das Produkt des Würfelvolumens mit der Dichte $\rho(x_i, y_j, z_k)$. Die Masse des Körpers B wird daher approximiert durch $\sum_i \sum_j \sum_k (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})\rho(x_i, y_j, z_k)$, wobei die Approximation umso genauer wird, je kleiner die Gitterweite der Zerlegung ist. Das sind Riemannsummen. Im Grenzwert erhält man das Integral $\int_B \rho(x, y, z) d(x, y, z)$, das dann die Masse des Körpers angibt.

Beispiel: Wir berechnen die Masse einer Halbkugel mit Radius r und $(0, 0, 0)$ als Mittelpunkt, die unterhalb der x - y -Ebene liegt und deren Dichte $\rho(x, y, z) = |z|$ ist, das heißt mit der Entfernung von der x - y -Ebene zunimmt. Zu berechnen ist $\int_B \rho(x, y, z) d(x, y, z)$ mit $B = \{(x, y, z) : -r \leq x \leq r, -(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \leq y \leq (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}, -(r^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \leq z \leq 0\}$, das ist $\int_{-r}^r \int_{-(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}^{(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{-(r^2-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}^0 -z dz dy dx = \int_{-r}^r \int_{-(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}^{(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{2}(r^2 - x^2 - y^2) dy dx = \frac{1}{2} \int_{-r}^r 2(r^2 - x^2)(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{3} \int_{-r}^r (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx$. Bereits früher wurde $\int_0^r (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{3\pi}{16}r^4$ berechnet. Da $x \mapsto (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$ eine gerade Funktion ist, folgt $\int_{-r}^r (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{3\pi}{8}r^4$. Wir haben also $\int_B \rho(x, y, z) d(x, y, z) = \frac{\pi}{4}r^4$.

Als weitere Anwendung des Integrals bestimmen wir den *Schwerpunkt eines Körpers*. Seien B und $\varrho : B \rightarrow \mathbb{R}^+$ wie oben. Wir bestimmen das Drehmoment des Körpers bezüglich der Ebene $x = s_1$. Das Drehmoment eines kleinen Würfels $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$ bezüglich der Ebene $x = s_1$ ist das Produkt der Würfelmasse und des Abstands des Würfels zur Ebene. Durch Aufsummieren über die Würfel in einer Zerlegung erhalten wir $\sum_i \sum_j \sum_k (x_i - s_1)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})\varrho(x_i, y_j, z_k)$ als Approximation des Drehmoments des Körpers bezüglich der Ebene. Die Approximation ist umso genauer, je kleiner die Gitterweite der Zerlegung ist. Das sind Riemannsummen. Im Grenzwert erhält man das Integral $\int_B (x - s_1)\varrho(x, y, z) d(x, y, z)$. Es gibt das Drehmoment des Körpers bezüglich der Ebene $x = s_1$ an. Genauso erhält man $\int_B (y - s_2)\varrho(x, y, z) d(x, y, z)$ als Drehmoment des Körpers bezüglich der Ebene $y = s_2$ und $\int_B (z - s_3)\varrho(x, y, z) d(x, y, z)$ als Drehmoment des Körpers bezüglich der Ebene $z = s_3$. Setzt man diese Momente = 0 und berechnet s_1, s_2 und s_3 , so erhält man die Koordinaten des Schwerpunkts:

$$\left(\frac{1}{M} \int_B x\varrho(x, y, z) d(x, y, z), \frac{1}{M} \int_B y\varrho(x, y, z) d(x, y, z), \frac{1}{M} \int_B z\varrho(x, y, z) d(x, y, z)\right)$$

Dabei ist $M = \int_B \varrho(x, y, z) d(x, y, z)$ die Masse des Körpers.

Beispiel: Wir berechnen den Schwerpunkt des Körpers mit Dichte 1, der von den Koordinatenebenen und der Ebene $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ begrenzt wird, wobei $a, b, c > 0$ gilt. Da die Dichte 1 ist, ist die Masse gleich dem Volumen. Der Körper ist ein Kegel, dessen Grundfläche ein Dreieck mit Fläche $\frac{ab}{2}$ und dessen Höhe c ist, sodass er Volumen $\frac{1}{6}abc$ hat.

Um die x -Koordinate des Schwerpunkts zu erhalten, ist $\int_0^a \int_0^{b-\frac{xc}{a}} \int_0^{c-\frac{xc}{a}-\frac{yc}{b}} x dz dy dx$ zu berechnen. Das ist nicht schwer. Man erhält $\frac{1}{24}a^2bc$. Die x -Koordinate des Schwerpunkts ist daher $\frac{a}{4}$. Aus Symmetriegründen ist der Schwerpunkt gleich $(\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, \frac{c}{4})$.

Beispiel: Wir berechnen den Schwerpunkt einer Achtelkugel mit Radius r und Dichte 1. Das ist der Bereich $B = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq r, 0 \leq y \leq (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}, 0 \leq z \leq (r^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}\}$. Aus Symmetriegründen sind alle Koordinaten des Schwerpunkts gleich. Die y -Koordinate folgt aus $\int_0^r \int_0^{(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{(r^2-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}} y dz dy dx = \int_0^r \int_0^{(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} y(r^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} dy dx = \int_0^r -\frac{1}{3}(r^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} dx = \int_0^r \frac{1}{3}(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{\pi}{16}r^4$. Es wurde ja früher schon berechnet, dass $\int_0^r (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{3\pi}{16}r^4$ gilt. Da das Volumen der Achtelkugel $\frac{1}{6}r^3\pi$ ist, ist die y -Koordinate des Schwerpunkts $\frac{3}{8}r$. Der Schwerpunkt ist also $(\frac{3}{8}r, \frac{3}{8}r, \frac{3}{8}r)$.

3. Differenzieren im Mehrdimensionalen

Wir erinnern uns, wie die Ableitung einer Funktion f in einer Variablen definiert wurde. Wenn $\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ existiert, dann heißt f im Punkt x differenzierbar und dieser Grenzwert, nennen wir ihn a , heißt Ableitung von f im Punkt x . Wir können das schreiben als $\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x) - a(y - x)}{y - x} = 0$. Denken wir an die Definition des Grenzwerts, dann heißt das folgendes: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ sodass $|\frac{f(y) - f(x) - a(y - x)}{y - x}| < \varepsilon$ für alle $y \in (x - \delta, x + \delta) \setminus \{x\}$ gilt. Sei $\ell_x(y) = f(x) + a(y - x)$ für $y \in \mathbb{R}$. Das ist die Gleichung einer Geraden, die Anstieg a hat und im Punkt x den Wert $f(x)$. Da a die Ableitung von f im Punkt x ist, ist ℓ_x die Tangente an die Funktion f im Punkt x . Obige Aussage, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $\frac{|f(y) - \ell_x(y)|}{|y - x|} < \varepsilon$ für alle $y \in (x - \delta, x + \delta) \setminus \{x\}$, bringt die Tatsache zum Ausdruck, dass ℓ_x Tangente an f im Punkt x ist.

Sei jetzt G eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^d und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Es soll die Differenzierbarkeit von f in einem Punkt $\mathbf{x} \in G$ definiert werden. Wenn $d = 2$ ist, dann ist

f eine Funktion in zwei Variablen. Man kann sich f als Fläche vorstellen. Die Gleichung einer Ebene, die im Punkt \mathbf{x} den Wert $f(\mathbf{x})$ hat, ist $\ell_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle$, wobei \mathbf{a} ein Element von \mathbb{R}^d ist. Für $d = 2$ hat man $\ell_{\mathbf{x}}(y_1, y_2) = f(x_1, x_2) + a_1(y_1 - x_1) + a_2(y_2 - x_2)$. Wenn es ein $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ gibt, sodass $\ell_{\mathbf{x}}$ Tangentialebene an f im Punkt \mathbf{x} ist, dann nennt man f im Punkt \mathbf{x} differenzierbar. Für $d > 2$ ist die Tangentialebene natürlich keine echte Ebene mehr, sondern hat Dimension $d - 1$. Das führt zu folgender Definition.

Definition: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $\mathbf{x} \in G$. Gibt es ein $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$, sodass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $\frac{|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle|}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|} < \varepsilon$ für alle $\mathbf{y} \in U_\delta(\mathbf{x}) \setminus \{\mathbf{x}\}$, dann sagt man, die Funktion f ist im Punkt \mathbf{x} differenzierbar und nennt den Vektor \mathbf{a} den Gradienten von f im Punkt \mathbf{x} , der mit $\text{grad } f(\mathbf{x})$ bezeichnet wird.

Diese Definition besagt, dass $\ell_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle$ Tangentialebene an die Funktion f im Punkt \mathbf{x} ist. Es bleibt noch, den Gradienten \mathbf{a} zu berechnen, falls er existiert.

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $\mathbf{x} \in G$ differenzierbar mit $\mathbf{a} = \text{grad } f(\mathbf{x})$. Sei \mathbf{e}_j der j -te Einheitsvektor, das ist der Vektor mit Eintragung 1 in der j -ten Koordinate und Eintragungen 0 sonst. Für $h \in \mathbb{R}$ setzen wir $\mathbf{y} = \mathbf{x} + h\mathbf{e}_j$ in obiger Definition und erhalten: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $\frac{|f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x}) - \langle \mathbf{a}, h\mathbf{e}_j \rangle|}{|h|} < \varepsilon$ für alle $h \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$. Das heißt $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x}) - \langle \mathbf{a}, h\mathbf{e}_j \rangle}{h} = 0$ oder $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{e}_j \rangle = a_j$. Die j -te Koordinate a_j des Gradienten erhält man also als $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h}$. In Koordinatenschreibweise ist das $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_d) - f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_d)}{h}$. Das ist die Ableitung der Funktion f , wobei man aber nur x_j als Variable auffasst und die anderen Koordinaten fest hält. Das führt zu folgender

Definition: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Für $\mathbf{x} \in G$ und $1 \leq j \leq d$ definiert man $D_j f(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h}$, falls dieser Grenzwert existiert, und nennt ihn die partielle Ableitung von f nach der j -ten Variable. Statt $D_j f$ schreibt man auch $\frac{\partial f}{\partial x_j}$.

Beispiel: Sei $f(x, y) = 3x^2y + y^4$. Dann ist $D_1 f(x, y) = 6xy$ und $D_2 f(x, y) = 3x^2 + 4y^3$.

Mit dieser Definition ergibt sich dann $\text{grad } f(\mathbf{x}) = (D_1 f(\mathbf{x}), D_2 f(\mathbf{x}), \dots, D_d f(\mathbf{x}))$, falls f im Punkt \mathbf{x} differenzierbar ist.

Beispiel: Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ für $(x, y) \neq 0$ und $f(0, 0) = 0$. Es gilt $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$ und $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0$, das heißt $D_1 f(0, 0) = 0$ und $D_2 f(0, 0) = 0$. Wäre f im Punkt $(0, 0)$ differenzierbar, dann hätten wir $\text{grad } f(0, 0) = (0, 0)$ und $\frac{|f(t, t) - f(0, 0) - 0|}{\|(t, t)\|} = \frac{t^2}{\sqrt{2t} \cdot \sqrt{2t}} = \frac{1}{2}$ müsste gegen 0 gehen, wenn t gegen 0 geht. Das tut es aber nicht. Daher ist f im Punkt $(0, 0)$ nicht differenzierbar.

Obiges Beispiel zeigt, dass aus der Existenz der partiellen Ableitungen in einem Punkt nicht die Differenzierbarkeit in diesem Punkt folgt. Der folgende Satz ist von praktischer Bedeutung, da er ein Kriterium für die Differenzierbarkeit angibt.

Satz 1.6: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $\mathbf{x} \in G$. Existieren alle partiellen Ableitungen $D_j f$ für $1 \leq j \leq d$ und sind diese stetig im Punkt \mathbf{x} , dann ist f im Punkt \mathbf{x} auch differenzierbar.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Da die partiellen Ableitungen im Punkt \mathbf{x} stetig sind, existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(\mathbf{x}) \subseteq G$ und $|\mathrm{D}_j f(\mathbf{y}) - \mathrm{D}_j f(\mathbf{x})| < \frac{\varepsilon}{d}$ für $1 \leq j \leq d$ und alle $\mathbf{y} \in U_\delta(\mathbf{x})$. Für $\mathbf{y} \in G$ gilt $f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^d f(x_1, \dots, x_{j-1}, y_j, y_{j+1}, \dots, y_d) - f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, y_{j+1}, \dots, y_d)$ und $f(x_1, \dots, x_{j-1}, y_j, y_{j+1}, \dots, y_d) - f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, y_{j+1}, \dots, y_d) = (y_j - x_j) \mathrm{D}_j f(\mathbf{z}_j)$ mit $\mathbf{z}_j = (x_1, \dots, x_{j-1}, \eta_j, y_{j+1}, \dots, y_d)$ nach dem Mittelwertsatz für Funktionen in einer Variablen, wobei η_j zwischen x_j und y_j liegt. Es folgt $f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^d (y_j - x_j) \mathrm{D}_j f(\mathbf{z}_j)$. Sei jetzt $\mathbf{y} \in U_\delta(\mathbf{x})$. Für $1 \leq j \leq d$ gilt $\|\mathbf{z}_j - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ und daher auch $\mathbf{z}_j \in U_\delta(\mathbf{x})$. Wegen obiger Wahl von δ folgt $|\mathrm{D}_j f(\mathbf{z}_j) - \mathrm{D}_j f(\mathbf{x})| < \frac{\varepsilon}{d}$ für $1 \leq j \leq d$ und daraus $|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^d (y_j - x_j) \mathrm{D}_j f(\mathbf{x})| \leq \sum_{j=1}^d |y_j - x_j| \cdot |\mathrm{D}_j f(\mathbf{z}_j) - \mathrm{D}_j f(\mathbf{x})| \leq \sum_{j=1}^d |y_j - x_j| \frac{\varepsilon}{d}$. Wegen $|y_j - x_j| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ für $1 \leq j \leq n$ folgt $\sum_{j=1}^d |y_j - x_j| \frac{\varepsilon}{d} \leq d \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \frac{\varepsilon}{d} = \varepsilon \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$. Damit ist $\frac{|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle|}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|} < \varepsilon$ mit $\mathbf{a} = (\mathrm{D}_1 f(\mathbf{x}), \mathrm{D}_2 f(\mathbf{x}), \dots, \mathrm{D}_d f(\mathbf{x}))$ gezeigt. Nach Definition ist f im Punkt \mathbf{x} differenzierbar. \square

Beispiele für Funktionen mit stetigen partiellen Ableitungen sind Polynome in mehreren Variablen. Wir können auch die partiellen Ableitungen einer Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ bilden, wobei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen ist. Das sind die partiellen Ableitungen ihrer Komponenten f_1, f_2, \dots, f_p , also $\mathrm{D}_j f_i$ für $1 \leq i \leq p$ und $1 \leq j \leq d$.

Beispiel: Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x, y) = (xy, x^2 + y^2)$. Dann besteht f aus den Komponenten f_1 und f_2 mit $f_1(x, y) = xy$ und $f_2(x, y) = x^2 + y^2$. Die partiellen Ableitungen dieser Komponenten sind $\mathrm{D}_1 f_1(x, y) = y$, $\mathrm{D}_2 f_1(x, y) = x$, $\mathrm{D}_1 f_2(x, y) = 2x$ und $\mathrm{D}_2 f_2(x, y) = 2y$. Diese partiellen Ableitungen sind stetig.

Schließlich beweisen wir noch eine mehrdimensionale Version der Kettenregel. Sei (a, b) ein Intervall und $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Seien $g : (a, b) \rightarrow G$ und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, wobei g aus den Komponenten g_1, g_2, \dots, g_d besteht. Dann können wir die Funktion $h = f \circ g$ bilden, die von (a, b) nach \mathbb{R} geht. Es macht also Sinn nach der Ableitung $h'(t)$ für $t \in (a, b)$ zu fragen. Wir schreiben $g'(t)$ für $(g'_1(t), g'_2(t), \dots, g'_d(t))$.

Satz 1.7: Sei (a, b) ein Intervall und $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Sei $g : (a, b) \rightarrow G$ eine Funktion mit stetigen Ableitungen und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ habe stetige partielle Ableitungen. Dann ist die Funktion $h = f \circ g$ von (a, b) nach \mathbb{R} ebenfalls differenzierbar und für alle $t \in (a, b)$ gilt

$$h'(t) = \langle \text{grad } f(g(t)), g'(t) \rangle = \sum_{j=1}^d \mathrm{D}_j f(g(t)) g'_j(t)$$

Beweis: Sei $t \in (a, b)$ und $\mathbf{x} = g(t)$. Weiters sei $s \in (a, b)$, aber $s \neq t$, und $\mathbf{y} = g(s)$. Wir berechnen den Differenzenquotienten mit Hilfe des Mittelwertsatzes

$$\begin{aligned} \frac{h(s) - h(t)}{s - t} &= \frac{f(g(s)) - f(g(t))}{s - t} = \frac{f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})}{s - t} \\ &= \sum_{j=1}^d \frac{f(x_1, \dots, x_{j-1}, y_j, y_{j+1}, \dots, y_d) - f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, y_{j+1}, \dots, y_d)}{s - t} \\ &= \sum_{j=1}^d \mathrm{D}_j f(x_1, \dots, x_{j-1}, \eta_j, y_{j+1}, \dots, y_d) \frac{y_j - x_j}{s - t} = \sum_{j=1}^d \mathrm{D}_j f(\mathbf{z}_j) g'_j(\xi_j) \end{aligned}$$

wobei gemäß dem Mittelwertsatz ξ_j zwischen s und t liegt und η_j zwischen y_j und x_j . Außerdem haben wir \mathbf{z}_j für den Punkt $(x_1, \dots, x_{j-1}, \eta_j, y_{j+1}, \dots, y_d)$ geschrieben.

Nun lassen wir s gegen t gehen. Da alle Komponenten von g differenzierbar und damit stetig sind, geht dann $\mathbf{y} = g(s)$ gegen $\mathbf{x} = g(t)$ und daher wegen $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}_j\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ auch \mathbf{z}_j gegen \mathbf{x} für $1 \leq j \leq d$. Da die Funktionen $\mathrm{D}_j f$ für $1 \leq j \leq d$ nach Voraussetzung stetig sind, konvergiert dann auch $\mathrm{D}_j f(\mathbf{z}_j)$ gegen $\mathrm{D}_j f(\mathbf{x}) = \mathrm{D}_j f(g(t))$. Weiters sind für

$1 \leq j \leq d$ die Funktionen g'_j nach Voraussetzung stetig und ξ_j liegt zwischen s und t , sodass mit s auch ξ_j gegen t geht und somit $g'_j(\xi_j)$ gegen $g'_j(t)$ konvergiert.

Lässt man in obiger Gleichung s gegen t gehen, dann ergeben diese Überlegungen, dass $h'(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{h(s) - h(t)}{s - t} = \sum_{j=1}^d D_j f(g(t)) g'_j(t)$ gilt. Das ist das gesuchte Resultat. \square

4. Extrema für Funktionen in mehreren Variablen

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar. Um Punkte zu suchen, in denen f ein Maximum oder Minimum hat, führen wir zuerst die Richtungsableitung ein. Sei $\mathbf{x} \in G$ und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ ein Vektor der Länge 1. Sei $g(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{v}$. Durch $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wird die Funktion f entlang der Geraden g dargestellt. Die Ableitung $(f \circ g)'(0)$ heißt Richtungsableitung von f im Punkt \mathbf{x} in Richtung \mathbf{v} . Wir bezeichnen sie mit $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x})$.

Ist $g(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{v}$, dann gilt $g_j(t) = x_j + tv_j$ und $g'_j(t) = v_j$ für $1 \leq j \leq d$, das heißt $g'(t) = \mathbf{v}$. Aus Satz 1.7 mit $g(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{v}$ folgt, dass die Richtungsableitung $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x})$ gleich $\langle \text{grad } f(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle$ ist. Sie nimmt ihr Maximum für $\mathbf{v} = \text{grad } f(\mathbf{x}) / \|\text{grad } f(\mathbf{x})\|$ an, da das innere Produkt dann am größten ist, wenn \mathbf{v} in Richtung $\text{grad } f(\mathbf{x})$ zeigt. Daher gibt $\text{grad } f(\mathbf{x})$ die Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion an.

Man erhält die zweiten partiellen Ableitungen, indem man die partiellen Ableitungen nochmals differenziert. Ist $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, dann sind $D_i D_j f$ für $1 \leq i \leq d$ und $1 \leq j \leq d$ die zweiten partiellen Ableitungen, falls sie existieren. Für $i \neq j$ muss $D_i D_j f = D_j D_i f$ nicht immer gelten. Es gilt jedoch

Satz 1.8: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Sind die zweiten partiellen Ableitungen stetige Funktionen auf G , dann gilt $D_i D_j f = D_j D_i f$ auch für $i \neq j$.

Beweis: Sei $i \neq j$ und \mathbf{e}_k der k -te Einheitsvektor. Für beliebiges $\mathbf{x} \in G$ sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass $U_\varepsilon(\mathbf{x}) \subseteq G$ gilt. Weiters seien a und b im Intervall $(0, \frac{\varepsilon}{2})$. Dann gilt $\mathbf{x} + \alpha a \mathbf{e}_i \in G$, $\mathbf{x} + \beta b \mathbf{e}_j \in G$ und $\mathbf{x} + \alpha a \mathbf{e}_i + \beta b \mathbf{e}_j \in G$ für alle α und β in $(0, 1)$.

Sei $\varphi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + b\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})$ und $\psi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + a\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})$. Dann gilt $\varphi(\mathbf{x} + a\mathbf{e}_i) - \varphi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x} + b\mathbf{e}_j) - \psi(\mathbf{x})$. Aus dem Mittelwertsatz ergibt sich die Existenz von Zahlen α_1 und α_2 im Intervall $(0, 1)$, sodass $a D_i \varphi(\mathbf{x} + \alpha_1 a \mathbf{e}_i) = b D_j \psi(\mathbf{x} + \alpha_2 b \mathbf{e}_j)$ gilt, das heißt

$a(D_i f(\mathbf{x} + \alpha_1 a \mathbf{e}_i + b\mathbf{e}_j) - D_i f(\mathbf{x} + \alpha_1 a \mathbf{e}_i)) = b(D_j f(\mathbf{x} + \alpha_2 b \mathbf{e}_j + a\mathbf{e}_i) - D_j f(\mathbf{x} + \alpha_2 b \mathbf{e}_j))$
 Da die Funktionen $D_i f$ und $D_j f$ nach Voraussetzung Ableitungen haben, folgt wieder aus dem Mittelwertsatz, dass Zahlen α_3 und α_4 im Intervall $(0, 1)$ existieren mit

$$ab D_j D_i f(\mathbf{x} + \alpha_1 a \mathbf{e}_i + \alpha_3 b \mathbf{e}_j) = ba D_i D_j f(\mathbf{x} + \alpha_2 b \mathbf{e}_j + \alpha_4 a \mathbf{e}_i)$$

das heißt $D_j D_i f(\mathbf{x} + \alpha_1 a \mathbf{e}_i + \alpha_3 b \mathbf{e}_j) = D_i D_j f(\mathbf{x} + \alpha_2 b \mathbf{e}_j + \alpha_4 a \mathbf{e}_i)$. Da die beiden Funktionen $D_j D_i f$ und $D_i D_j f$ als stetig vorausgesetzt werden und man a und b beliebig klein wählen kann, erhalten wir $D_j D_i f(\mathbf{x}) = D_i D_j f(\mathbf{x})$, das gewünschte Resultat. \square

Für $\mathbf{x} \in G$ bildet man $H_f(\mathbf{x}) = (D_i D_j f(\mathbf{x}))_{1 \leq i, j \leq d}$, die sogenannte Hessesche Matrix. Sind die zweiten partiellen Ableitungen von f stetig, dann ist sie symmetrisch.

Beispiel: Sei $f(x, y) = 3x^2y + y^4$. Dann ist $D_1 f(x, y) = 6xy$ und $D_2 f(x, y) = 3x^2 + 4y^3$. Durch weiteres Differenzieren erhält man daraus dann die zweiten partiellen Ableitungen: $D_1 D_1 f(x, y) = 6y$, $D_2 D_1 f(x, y) = D_1 D_2 f(x, y) = 6x$ und $D_2 D_2 f(x, y) = 12y^2$.

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Man sagt, dass die Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $\mathbf{x} \in G$ ein lokales Maximum besitzt, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $f(\mathbf{y}) < f(\mathbf{x})$ gilt für alle $\mathbf{y} \in U_\varepsilon(\mathbf{x}) \setminus \{\mathbf{x}\}$. Sie hat ein lokales Minimum, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $f(\mathbf{y}) > f(\mathbf{x})$ gilt für alle $\mathbf{y} \in U_\varepsilon(\mathbf{x}) \setminus \{\mathbf{x}\}$. Man kann dabei ε so klein wählen, dass $U_\varepsilon(\mathbf{x}) \subseteq G$ gilt. Ein lokales Extremum ist entweder ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum.

Satz 1.9: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ habe stetige zweite partielle Ableitungen.

(a) Wenn f im Punkt $\mathbf{x} \in G$ ein lokales Extremum besitzt, dann gilt $\text{grad } f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

(b) Sei umgekehrt $\mathbf{x} \in G$ und $\text{grad } f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Ist $H_f(\mathbf{x})$ positiv definit, dann hat f an der Stelle \mathbf{x} ein lokales Minimum. Ist $H_f(\mathbf{x})$ negativ definit, dann hat f an der Stelle \mathbf{x} ein lokales Maximum. Ist $H_f(\mathbf{x})$ indefinit, dann hat f an der Stelle \mathbf{x} kein lokales Extremum.

Beweis: Sei $\mathbf{x} \in G$ ein Punkt, in dem f ein lokales Maximum hat. Es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $f(\mathbf{y}) < f(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{y} \in U_\varepsilon(\mathbf{x}) \setminus \{\mathbf{x}\}$. Sei $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ ein Vektor der Länge 1 und $g(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{v}$. Sei $\alpha > 0$ so gewählt, dass $g(t) \in U_\varepsilon(\mathbf{x})$ für $t \in (-\alpha, \alpha)$ gilt. Dann hat $f \circ g : (-\alpha, \alpha) \rightarrow \mathbb{R}$ ein Maximum im Punkt 0. Aus Satz 1.7 folgt $0 = (f \circ g)'(0) = \langle \text{grad } f(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle$. Für $1 \leq i \leq d$ kann man $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$ wählen. Es folgt, dass die i -te Koordinate von $\text{grad } f(\mathbf{x})$ null ist. Somit gilt $\text{grad } f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Der Beweis für ein Minimum ist analog. Damit ist (a) gezeigt.

Sei $\mathbf{x} \in G$ mit $\text{grad } f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Sei $\varepsilon > 0$ so klein gewählt, dass $U_\varepsilon(\mathbf{x}) \subseteq G$ gilt, und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ mit $\|\mathbf{v}\| < \varepsilon$. Dann ist die Funktion $h(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$ auf $[0, 1]$ definiert und zweimal stetig differenzierbar. Nach dem Satz von Taylor gilt dann $h(1) = h(0) + h'(0) + \frac{1}{2}h''(\xi)$ für ein $\xi \in (0, 1)$. Aus Satz 1.7 folgt, da die i -te Komponente von $\mathbf{x} + t\mathbf{v}$ ja $x_i + tv_i$ ist

$$h'(t) = \sum_{i=1}^d D_i f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})v_i = \sum_{i=1}^d s_i(t)v_i \quad \text{mit} \quad s_i(t) = D_i f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$$

und daraus wieder mit Hilfe von Satz 1.7

$$h''(t) = \sum_{i=1}^d s_i'(t)v_i = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d D_j D_i f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})v_j v_i$$

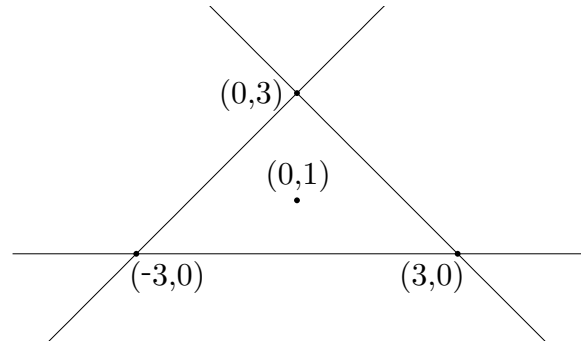
Setzt man das in die Gleichung $h(1) = h(0) + h'(0) + \frac{1}{2}h''(\xi)$ ein und verwendet Vektorschreibweise, so hat man

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + \langle \text{grad } f(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(\mathbf{x} + \xi\mathbf{v})\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$$

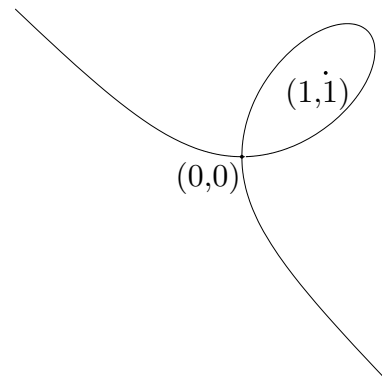
Wegen $\text{grad } f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ folgt $f(\mathbf{x} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \langle H_f(\mathbf{x} + \xi\mathbf{v})\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$. Ist nun $H_f(\mathbf{x})$ positiv definit, dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $H_f(\mathbf{x} + \xi\mathbf{v})$ positiv definit ist, wenn $\|\mathbf{v}\| < \varepsilon$ gilt, da die zweiten partiellen Ableitungen stetig sind. Daraus folgt, dass $\langle H_f(\mathbf{x} + \xi\mathbf{v})\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ für alle $\mathbf{v} \in U_\varepsilon(\mathbf{0}) \setminus \{\mathbf{0}\}$, also für alle $\mathbf{x} + \mathbf{v} \in U_\varepsilon(\mathbf{x}) \setminus \{\mathbf{x}\}$ gilt. Das aber heißt, dass f im Punkt \mathbf{x} ein lokales Minimum hat. Ganz analog erhält man ein lokales Maximum, wenn $H_f(\mathbf{x})$ negativ definit ist. Ist nun $H_f(\mathbf{x})$ indefinit, dann auch $H_f(\mathbf{x} + \xi\mathbf{v})$ für kleine \mathbf{v} . Daher kann $\langle H_f(\mathbf{x} + \xi\mathbf{v})\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ für beliebig kleine $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ sowohl positives als auch negatives Vorzeichen haben. Es liegt kein Extremum vor. \square

Sei $d = 2$ und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ wie in Satz 1.9. Sei $(x, y) \in G$ mit $\text{grad } f(x, y) = \mathbf{0}$. Sei $\Delta(x, y) = D_1 D_1 f(x, y) \cdot D_2 D_2 f(x, y) - (D_1 D_2 f(x, y))^2$ die Determinante von $H_f(x, y)$. Ein Satz (lineare Algebra) über positive und negative Definitheit von 2×2 -Matrizen ergibt: Ist $\Delta(x, y) > 0$ und $D_1 D_1 f(x, y) > 0$, dann hat f an der Stelle (x, y) ein lokales Minimum. Ist $\Delta(x, y) > 0$ und $D_1 D_1 f(x, y) < 0$, dann hat f an der Stelle (x, y) ein lokales Maximum. Ist $\Delta(x, y) < 0$, dann hat f an der Stelle (x, y) kein lokales Extremum. In diesem Fall nennt man (x, y) einen Sattelpunkt, da die quadratische Form $\mathbf{v} \mapsto \langle H_f(x, y)\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ zur Matrix $H_f(x, y)$ eine sattelförmige Gestalt hat, was dann auch für die Funktion f in der Nähe des Punktes (x, y) gilt. Ist $\Delta(x, y) = 0$, dann machen wir keine Aussage. Dazu würde man noch höhere als die zweiten Ableitungen brauchen.

Beispiel: Wir suchen die lokalen Extrema der Funktion $f(x, y) = yx^2 - y^3 + 6y^2 - 9y$. Es gilt $D_1f(x, y) = 2xy$ und $D_2f(x, y) = x^2 - 3y^2 + 12y - 9$. Wir setzen diese Ableitungen gleich null und erhalten die vier Punkte $(0, 1)$, $(0, 3)$, $(3, 0)$ und $(-3, 0)$ als Lösungen. Die zweiten partiellen Ableitungen sind $D_1D_1f(x, y) = 2y$, $D_2D_2f(x, y) = -6y + 12$ und $D_1D_2f(x, y) = D_2D_1f(x, y) = 2x$, womit wir $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & -6y+12 \end{pmatrix}$ erhalten. Es folgt $H_f(0, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, sodass $\Delta(0, 1) = 12 > 0$ und $D_1D_1f(0, 1) = 2 > 0$ gilt und somit im Punkt $(0, 1)$ ein lokales Minimum vorliegt. Für die anderen drei Punkte berechnen wir $H_f(0, 3) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, $H_f(3, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$ und $H_f(-3, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$. Alle drei Punkte sind Sattelpunkte, da die Determinanten < 0 sind. Es gilt $f(x, y) = y(x - y + 3)(x + y - 3)$. Somit ist die Funktion gleich 0 auf der x -Achse und den Geraden $y = x + 3$ und $y = -x + 3$. Diese drei Geraden zerlegen die Ebene in Bereiche. Im Dreieck und in den drei Bereichen, die an die Eckpunkte des Dreiecks stoßen, hat f Werte < 0 . In den drei Bereichen, die an die Seiten des Dreiecks angrenzen, hat f Werte > 0 . Man kann sich bereits ein gutes Bild machen, wie die Funktion aussieht.



Beispiel: Wir bestimmen die lokalen Extrema der Funktion $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Es gilt $D_1f(x, y) = 3x^2 - 3y$ und $D_2f(x, y) = 3y^2 - 3x$. Setzt man diese Ableitungen gleich null, dann ergeben sich $(0, 0)$ und $(1, 1)$ als Lösungen. Die zweiten partiellen Ableitungen sind $D_1D_1f(x, y) = 6x$, $D_2D_2f(x, y) = 6y$ und $D_1D_2f(x, y) = D_2D_1f(x, y) = -3$, woraus $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$ folgt. Wir erhalten $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, sodass $\Delta(0, 0) = -9$ gilt und somit im Punkt $(0, 0)$ ein Sattelpunkt vorliegt. Weiters erhalten wir $H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$, sodass $\Delta(1, 1) = 27$ und $D_1D_1f(1, 1) = 6$ gilt und somit im Punkt $(1, 1)$ ein lokales Minimum vorliegt. Nebenstehend ist die Kurve gezeichnet, auf der die Funktion f gleich null ist. Im eingeschlossenen Bereich und links unterhalb der Kurve hat f negative Werte. Im restlichen Teil der Ebene hat f positive Werte. Damit hat man bereits eine gute Vorstellung, wie die Fläche aussieht.



Beispiel: Im \mathbb{R}^d seien k Punkte $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ gegeben. Man beweise, dass die Funktion $f(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^k \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_m\|^2$ ihr Minimum für $\mathbf{x} = \frac{1}{k} \sum_{m=1}^k \mathbf{a}_m$ annimmt. Sei $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ und $g(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 = \sum_{i=1}^d (x_i - b_i)^2$. Für $1 \leq j \leq d$ gilt $D_jg(\mathbf{x}) = 2(x_j - b_j)$, woraus $\text{grad } g(\mathbf{x}) = 2(\mathbf{x} - \mathbf{b})$ folgt. Für $1 \leq i, j \leq d$ gilt $D_iD_jg(\mathbf{x}) = 0$, wenn $i \neq j$, und $= 2$, wenn $i = j$, woraus folgt, dass $H_g(\mathbf{x}) = 2I$ mit Einheitsmatrix I ist. Da die Ableitung linear ist, folgt $\text{grad } f(\mathbf{x}) = 2 \sum_{m=1}^k (\mathbf{x} - \mathbf{a}_m) = 2k\mathbf{x} - 2 \sum_{m=1}^k \mathbf{a}_m$ und $H_f(\mathbf{x}) = 2kI$. Da $\text{grad } f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ nur für $\mathbf{x} = \frac{1}{k} \sum_{m=1}^k \mathbf{a}_m$ gilt, ist das das einzige Extremum, und dieses ist ein lokales Minimum, da die Matrix $2kI$ positiv definit ist. Das ist auch ein globales Minimum, da $f(\mathbf{x})$ für $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ gegen ∞ geht.

II. Kurven und Flächen

Wir behandeln Kurven und Flächen, Tangenten, Tangentialebenen und Krümmung, berechnen Bogenlängen und Oberflächen und bestimmen Maxima und Minima einer Funktion unter Nebenbedingungen.

1. Parameterdarstellungen

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, das auch unbeschränkt sein kann. Durch eine stetige Funktion $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ ist eine (Parameterdarstellung einer) Kurve im \mathbb{R}^d gegeben. Für $d = 2$ hat man eine Kurve in der Ebene und für $d = 3$ eine im Raum. Das Intervall I heißt Parametermenge oder Parameterintervall. Durch γ wird jedem Parameter $t \in I$ ein Punkt $\gamma(t) \in \mathbb{R}^d$ zugeordnet. Wir können $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_d(t))$ schreiben. Für $1 \leq j \leq d$ ist γ_j eine stetige Funktion vom Parameterintervall I nach \mathbb{R} . Zum Beispiel ist $\gamma(t) = (1 + 2t, -1 - t)$ mit $t \in I = \mathbb{R}$ eine Gerade im \mathbb{R}^2 , wobei $\gamma_1(t) = 1 + 2t$ und $\gamma_2(t) = -1 - t$ gilt. Durch $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$ wird ein Kreis dargestellt, und durch $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$ eine Ellipse. Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, dann ist $\gamma(t) = (t, f(t))$ mit $t \in I$ eine Darstellung des Graphen von f als Kurve.

Sei B ein Rechteck (oder ein Normalbereich) im \mathbb{R}^2 , das auch unbeschränkt sein kann. Durch eine stetige Funktion $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}^d$ ist eine (Parameterdarstellung einer) Fläche im \mathbb{R}^d gegeben. Die Menge B heißt Parametermenge. Durch φ wird jedem Parameter $\mathbf{t} \in B$ ein Punkt $\varphi(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^d$ zugeordnet. Wir können also $\varphi(\mathbf{t}) = (\varphi_1(\mathbf{t}), \varphi_2(\mathbf{t}), \dots, \varphi_d(\mathbf{t}))$ schreiben. Für $1 \leq j \leq d$ ist φ_j eine stetige Funktion von B nach \mathbb{R} . Wir werden im Folgenden nur Flächen im \mathbb{R}^3 untersuchen. Zum Beispiel ist $\varphi(u, v) = (1 + 2u - v, -1 - u + 2v, 3 - u - v)$ mit $(u, v) \in B = \mathbb{R}^2$ eine Ebene im \mathbb{R}^3 , wobei $\varphi_1(u, v) = 1 + 2u - v$, $\varphi_2(u, v) = -1 - u + 2v$ und $\varphi_3(u, v) = 3 - u - v$ gilt. Ist $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$ mit $(u, v) \in B = \mathbb{R}^2$ eine Darstellung des Graphen von f als Fläche.

Neben der Parameterdarstellung gibt es auch noch die Darstellung von Kurven und Flächen durch Gleichungen. Kurven im \mathbb{R}^2 werden als Lösungsmenge einer Gleichung $g(x, y) = 0$ mit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dargestellt. Durch $x + 2y + 1 = 0$ ist obige Gerade gegeben und $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ stellt eine Ellipse dar. Ist $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Parameterdarstellung der Kurve, dann muss $g(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = 0$ für alle $t \in I$ gelten. Analog werden Flächen im \mathbb{R}^3 als Lösungsmenge einer Gleichung $g(x, y, z) = 0$ mit $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dargestellt. Durch $x + y + z - 3 = 0$ ist obige Ebene gegeben und $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ stellt eine Kugel dar. Ist $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parameterdarstellung der Fläche, dann muss $g(\varphi_1(\mathbf{t}), \varphi_2(\mathbf{t}), \varphi_3(\mathbf{t})) = 0$ für alle $\mathbf{t} \in B$ gelten.

Beispiel: Zykloide: Der Kreis mit Radius r und Mittelpunkt $(0, r)$ ist mit dem Punkt $A = (0, r - a)$ fest verbunden. Der Kreis rollt auf der x -Achse. Wir suchen eine Parameterdarstellung der Kurve, die der Punkt A beschreibt. Sei t der Winkel (im Bogenmaß) um den sich der Kreis gedreht hat. Da ein Stück des Umfangs der Länge rt abgerollt ist, befindet sich der Mittelpunkt des Kreises jetzt im Punkt (rt, r) . Relativ zum Mittelpunkt des Kreises hat der Punkt A jetzt die Koordinaten $(-a \sin t, -a \cos t)$, sodass er relativ zum Koordinatenursprung die Koordinaten $(rt - a \sin t, r - a \cos t)$ hat. Also ist $\gamma(t) = (rt - a \sin t, r - a \cos t)$ mit $t \in [0, \infty)$ die gesuchte Parameterdarstellung.

Beispiel: Astroide: Der Kreis mit Radius r und Mittelpunkt $(3r, 0)$ rollt im Innern des festgehaltenen Kreises mit Radius $4r$ und Mittelpunkt $(0, 0)$. Wir suchen eine Parame-

terdarstellung der Kurve, die der Punkt $A = (4r, 0)$ beschreibt. Sei t der Winkel (im Bogenmaß) um den sich der Mittelpunkt des kleinen Kreises weiterbewegt hat. Dieser Mittelpunkt befindet sich jetzt im Punkt $(3r \cos t, 3r \sin t)$. Das Stück des Umfangs auf dem der kleine Kreis gerollt ist, hat Länge $4rt$. Relativ zum Mittelpunkt des kleinen Kreises hat der Punkt A jetzt die Koordinaten $(r \cos 3t, -r \sin 3t)$, sodass er relativ zum Koordinatenursprung die Koordinaten $(3r \cos t + r \cos 3t, 3r \sin t - r \sin 3t)$ hat. Nun gilt $4 \cos^3 t = 3 \cos t + \cos 3t$ und $4 \sin^3 t = 3 \sin t - \sin 3t$. Somit ist $\gamma(t) = (4r \cos^3 t, 4r \sin^3 t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$ die gesuchte Parameterdarstellung.

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ stetig. Dreht man den Punkt $(u, f(u), 0)$ um den Winkel v um die x -Achse, so erhält man den Punkt $(u, f(u) \cos v, f(u) \sin v)$. Eine Parameterdarstellung der Rotationsfläche, die man erhält, wenn der Graph von f um die x -Achse rotiert, ist daher $\varphi(u, v) = (u, f(u) \cos v, f(u) \sin v)$ mit $(u, v) \in [a, b] \times [0, 2\pi]$

Beispiel: Wir suchen eine Parameterdarstellung der Mantelfläche des Kegels mit Höhe h , dessen Basiskreis in der y - z -Ebene liegt, den Nullpunkt als Mittelpunkt und Radius r hat. Man erhält diese Mantelfläche, wenn das Geradenstück $f(u) = r(1 - \frac{u}{h})$ mit $u \in [0, h]$ um die x -Achse rotiert. Eine Parameterdarstellung der Mantelfläche des Kegels ist daher $\varphi(u, v) = (u, r(1 - \frac{u}{h}) \cos v, r(1 - \frac{u}{h}) \sin v)$ mit $(u, v) \in [0, h] \times [0, 2\pi]$.

Beispiel: Sei $f : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}^+$ definiert durch $f(u) = \sqrt{r^2 - u^2}$. Der Graph von f ist ein Halbkreis mit Radius r und Mittelpunkt $\mathbf{0}$, der oberhalb der x -Achse liegt. Rotiert er um die x -Achse, so erhält man eine Kugel mit Radius r und Mittelpunkt $\mathbf{0}$. Eine Parameterdarstellung dieser Kugel ist daher $\varphi(u, v) = (u, \sqrt{r^2 - u^2} \cos v, \sqrt{r^2 - u^2} \sin v)$ mit $(u, v) \in [-r, r] \times [0, 2\pi]$.

Rotiert die Kurve $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ mit $t \in [a, b]$ um die x -Achse, so erhält man wie oben durch $\varphi(u, v) = (\gamma_1(u), \gamma_2(u) \cos v, \gamma_2(u) \sin v)$ mit $(u, v) \in [a, b] \times [0, 2\pi]$ eine Parameterdarstellung der Rotationsfläche.

Beispiel: Durch $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$ mit $t \in [0, \pi]$ ist eine Parameterdarstellung des Halbkreises oberhalb der x -Achse mit Radius r und Mittelpunkt $\mathbf{0}$ gegeben. Rotation um die x -Achse ergibt eine Kugel. Daher ist $\varphi(u, v) = (r \cos u, r \sin u \cos v, r \sin u \sin v)$ mit $(u, v) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ eine Parameterdarstellung der Kugel mit Radius r und Mittelpunkt $\mathbf{0}$.

Bemerkung: Sei $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen. Die Lösungsmenge der Gleichung $g(x, y) = 0$ stellt dann eine Kurve in der Ebene dar, wenn sie nicht leer ist. Ist (x_0, y_0) ein Punkt auf der Kurve, dann kann man zeigen, dass sich die Kurve in einer Umgebung des Punktes (x_0, y_0) durch eine differenzierbare Parameterdarstellung darstellen lässt. Wir zeigen das nicht, da der Beweis zu schwierig ist, werden dieses Resultat aber in einigen Beweisen verwenden. In Beispielen lässt sich das oft direkt nachweisen, indem man die Gleichung $g(x, y) = 0$ nach einer Variablen auflöst. Zum Beispiel lässt sich die Gleichung $x^2 + y^2 - 1 = 0$ in einer Umgebung des Punktes $(1, 0)$ nach x auflösen. Es gilt $x = \sqrt{1 - y^2}$ und $\gamma(t) = (\sqrt{1 - t^2}, t)$ mit $-1 < t < 1$ ist eine Parameterdarstellung, die die rechte Hälfte des Kreises darstellt. In einer Umgebung des Punktes $(0, 1)$ kann man die Gleichung $x^2 + y^2 - 1 = 0$ nach y auflösen. Es gilt $y = \sqrt{1 - x^2}$ und $\gamma(t) = (t, \sqrt{1 - t^2})$ mit $-1 < t < 1$ ist eine Parameterdarstellung, die die obere Hälfte des Kreises darstellt. Analoge Resultate gelten auch für Flächen.

2. Tangente und Tangentialebene

Vom geometrischen Standpunkt ist eine Kurve die Menge $\{\gamma(t) : t \in I\}$, wobei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine Parameterdarstellung der Kurve ist. Es gibt verschiedene Parameterdarstellungen derselben Kurve. So stellen zum Beispiel $t \mapsto (1 + 2t, -1 - t)$ und $t \mapsto (-1 - 4t, 2t)$ dieselbe Gerade dar. Geometrische Sachverhalte wie Bogenlänge und Tangente hängen nicht von der Parameterdarstellung ab.

Vom physikalischen Standpunkt stellt die Funktion $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ die Bahn eines Teilchens in der Ebene oder im Raum dar, wobei $\gamma(t)$ der Ort des Teilchens zum Zeitpunkt t ist. Das Intervall I heißt dann auch Zeitintervall. Wir suchen die Geschwindigkeit des Teilchens zum Zeitpunkt t . Sei $h > 0$. Den Weg, den das Teilchen im Zeitintervall $[t, t+h]$ zurücklegt, approximieren wir durch die Sehne $\gamma(t+h) - \gamma(t)$. Der Geschwindigkeitsvektor, das ist Weg dividiert durch Zeit, ist dann $\frac{1}{h}(\gamma(t+h) - \gamma(t))$. Im Grenzwert für $h \rightarrow 0$ hat man $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \dots, \gamma'_d(t))$, vorausgesetzt die Ableitungen existieren. Das ist die Geschwindigkeit des Teilchens zum Zeitpunkt t . Als Grenzwert der Sehnen ist das auch der Vektor, der die Richtung der Tangente angibt. Die Richtung des Geschwindigkeitsvektors hängt nicht von der Parameterdarstellung ab, wohl aber seine Länge.

Beispiel: Wir berechnen die Flugbahn eines geworfenen Balles. Der Ball wird vom Nullpunkt eines Koordinatensystems zum Zeitpunkt 0 mit Anfangsgeschwindigkeit v im Winkel α abgeworfen, wobei $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ gilt. Sei $\gamma(t)$ die Position des Balles zum Zeitpunkt t . Dann ist $\gamma'(t)$ der Geschwindigkeitsvektor zum Zeitpunkt t . Es gilt dann $\gamma'(0) = \begin{pmatrix} v \cos \alpha \\ v \sin \alpha \end{pmatrix}$. Wir greifen auf ein physikalisches Gesetz zurück. Die Ableitung des Geschwindigkeitsvektors ist der Beschleunigungsvektor. Da dieser Wurf nur unter Einfluss der Erdanziehung stattfindet, ist die auf den Ball wirkende Beschleunigung zu jedem Zeitpunkt gleich $\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$. Es gilt somit $\gamma''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$ für alle $t \geq 0$. Mit Hilfe obiger Gleichung für $\gamma'(0)$ erhalten wir daraus $\gamma'(t) = t \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v \cos \alpha \\ v \sin \alpha \end{pmatrix}$ für $t \geq 0$. Und wegen $\gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt schließlich $\gamma(t) = \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v \cos \alpha \\ v \sin \alpha \end{pmatrix}$ für alle $t \geq 0$.

Wir berechnen den höchsten Punkt der Flugbahn. Dieser wird bei horizontalem Geschwindigkeitsvektor erreicht, das heißt wenn $\gamma'_2(t) = 0$ ist. Das ist zum Zeitpunkt $t = \frac{v \sin \alpha}{g}$ der Fall. Zu diesem Zeitpunkt befindet sich der Ball im Punkt $\gamma\left(\frac{v \sin \alpha}{g}\right) = \frac{1}{2g} \begin{pmatrix} 2v^2 \sin \alpha \cos \alpha \\ v^2 \sin^2 \alpha \end{pmatrix}$. Die Flugbahn erreicht die Höhe $\frac{1}{2g} v^2 \sin^2 \alpha$.

Schließlich berechnen wir die Weite des Wurfs. Der Ball landet am Boden, wenn $\gamma_2(t) = 0$ gilt, das heißt $-g \frac{t^2}{2} + tv \sin \alpha = 0$. Die Lösung $t = 0$ interessiert uns nicht, das ist der Abwurfzeitpunkt. Also ist die andere Lösung $t = \frac{2v \sin \alpha}{g}$ der Zeitpunkt, zu dem der Ball landet. Die Weite des Wurfs ist $\gamma_1\left(\frac{2v \sin \alpha}{g}\right) = \frac{2v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$. Die größte Weite erzielt man, wenn $\sin 2\alpha = 1$ ist, das heißt bei einem Abwurfwinkel $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Flächen betrachten wir nur vom geometrischen Standpunkt aus. Sei $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parameterdarstellung einer Fläche im \mathbb{R}^3 . Es gilt $\varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v))$ für $(u, v) \in B$. Wir nehmen an, dass diese Funktionen stetige partielle Ableitungen haben.

Wir suchen die Tangentialebene im Punkt $\varphi(u, v)$. Dazu sei I ein offenes Intervall mit $0 \in I$ und $\gamma : I \rightarrow B$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit $\gamma(0) = (u, v)$. Dann ist $\delta = \varphi \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve, die in der Fläche durch den Punkt $\varphi(u, v)$ verläuft. Als Tangentialvektor im Punkt $\delta(0) = \varphi(u, v)$ an diese Kurve erhalten wir wegen Satz 1.7

$$\delta'(0) = (\langle \text{grad } \varphi_1(\gamma(0)), \gamma'(0) \rangle, \langle \text{grad } \varphi_2(\gamma(0)), \gamma'(0) \rangle, \langle \text{grad } \varphi_3(\gamma(0)), \gamma'(0) \rangle)$$

Das ist eine Linearkombination von $D_1\varphi(u, v) = (D_1\varphi_1(u, v), D_1\varphi_2(u, v), D_1\varphi_3(u, v))$ und $D_2\varphi(u, v) = (D_2\varphi_1(u, v), D_2\varphi_2(u, v), D_2\varphi_3(u, v))$. Alle Tangentialvektoren an die Fläche im Punkt $\varphi(u, v)$ sind von dieser Form. Daher hat die Fläche im Punkt $\varphi(u, v)$ eine Tangentialebene, die von den Vektoren $D_1\varphi(u, v)$ und $D_2\varphi(u, v)$ aufgespannt wird. Der Vektor $D_1\varphi(u, v) \times D_2\varphi(u, v)$ ist dann ein Normalvektor im Punkt $\varphi(u, v)$ an die Fläche, da er ja senkrecht auf die beiden Vektoren $D_1\varphi(u, v)$ und $D_2\varphi(u, v)$ steht.

Satz 2.1: Sei $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen. Durch $g(x, y) = 0$ wird eine Kurve im \mathbb{R}^2 dargestellt. Sei (x_0, y_0) ein Punkt auf der Kurve, das heißt $g(x_0, y_0) = 0$. Dann ist der Vektor $(D_1g(x_0, y_0), D_2g(x_0, y_0))$ ein Normalvektor im Punkt (x_0, y_0) an die Kurve, vorausgesetzt dieser Vektor ist nicht der Nullvektor.

Beweis: Für ein kleines Stück der Kurve um den Punkt (x_0, y_0) existiert eine differenzierbare Parameterdarstellung $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. Es gilt dann $g(\gamma(t)) = 0$. Aus Satz 1.7 folgt $D_1g(\gamma(t))\gamma'_1(t) + D_2g(\gamma(t))\gamma'_2(t) = 0$. Ist t_0 so gewählt, dass $(x_0, y_0) = \gamma(t_0)$ gilt, und setzen wir $t = t_0$, so ergibt sich, dass der Vektor $(D_1g(x_0, y_0), D_2g(x_0, y_0))$ senkrecht auf dem Vektor $\gamma'(t_0) = (\gamma'_1(t_0), \gamma'_2(t_0))$ steht. Da $\gamma'(t_0)$ ein Tangentialvektor an die Kurve im Punkt (x_0, y_0) ist, ist $(D_1g(x_0, y_0), D_2g(x_0, y_0))$ ein Normalvektor im Punkt (x_0, y_0) . \square

Um das zu Satz 2.1 analoge Resultat für Flächen zu zeigen, beweisen wir eine einfache Folgerung aus Satz 1.7, die wir auch später noch brauchen werden.

Satz 2.2: Seien $B \subseteq \mathbb{R}^p$ und $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Seien $\varphi : B \rightarrow G$ und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit stetigen partiellen Ableitungen. Dann ist die Funktion $\psi = f \circ \varphi$ von B nach \mathbb{R} ebenfalls differenzierbar und für $1 \leq m \leq p$ und alle $\mathbf{u} \in B$ gilt

$$D_m\psi(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^d D_j f(\varphi(\mathbf{u})) D_m\varphi_j(\mathbf{u})$$

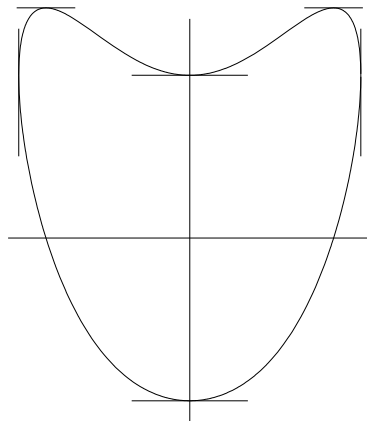
Beweis: Sei $\mathbf{u} \in B$ und $1 \leq m \leq p$. Das Intervall (a, b) enthalte u_m und sei so klein gewählt, dass der Punkt $(u_1, \dots, u_{m-1}, t, u_{m+1}, \dots, u_p)$ für alle $t \in (a, b)$ in B liegt. Sei $g : (a, b) \rightarrow G$ definiert durch $g(t) = \varphi(u_1, \dots, u_{m-1}, t, u_{m+1}, \dots, u_p)$ und $h = f \circ g$. Wir können Satz 1.7 anwenden und erhalten $h'(t) = \sum_{j=1}^d D_j f(g(t)) g'_j(t)$ für alle $t \in (a, b)$. Setzt man $t = u_m$, so hat man bereits das gesuchte Resultat wegen $h'(u_m) = D_m\psi(\mathbf{u})$, $g(u_m) = \varphi(\mathbf{u})$ und $g'_j(u_m) = D_m\varphi_j(\mathbf{u})$ für $1 \leq j \leq d$. \square

Satz 2.3: Sei $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen. Durch $g(x, y, z) = 0$ wird eine Fläche im \mathbb{R}^3 dargestellt. Sei (x_0, y_0, z_0) ein Punkt auf der Fläche, das heißt $g(x_0, y_0, z_0) = 0$. Dann ist $(D_1g(x_0, y_0, z_0), D_2g(x_0, y_0, z_0), D_3g(x_0, y_0, z_0))$ ein Normalvektor im Punkt (x_0, y_0, z_0) an die Fläche, vorausgesetzt dieser Vektor ist nicht der Nullvektor.

Beweis: Für ein Stück Fläche um den Punkt (x_0, y_0, z_0) existiert eine Parameterdarstellung $\varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v))$ mit stetigen partiellen Ableitungen. Es gilt $g(\varphi(u, v)) = 0$. Differenziert man diese Gleichung nach u und v mit Hilfe von Satz 2.2 so erhält man $D_1g(\varphi(u, v))D_1\varphi_1(u, v) + D_2g(\varphi(u, v))D_1\varphi_2(u, v) + D_3g(\varphi(u, v))D_1\varphi_3(u, v) = 0$ und $D_1g(\varphi(u, v))D_2\varphi_1(u, v) + D_2g(\varphi(u, v))D_2\varphi_2(u, v) + D_3g(\varphi(u, v))D_2\varphi_3(u, v) = 0$. Wählt man u_0 und v_0 so, dass $(x_0, y_0, z_0) = \varphi(u_0, v_0)$ gilt, und setzt man $(u, v) = (u_0, v_0)$, so ergibt sich, dass der Vektor $(D_1g(x_0, y_0, z_0), D_2g(x_0, y_0, z_0), D_3g(x_0, y_0, z_0))$ senkrecht steht auf den beiden Vektoren $D_1\varphi(u_0, v_0) = (D_1\varphi_1(u_0, v_0), D_1\varphi_2(u_0, v_0), D_1\varphi_3(u_0, v_0))$ und $D_2\varphi(u_0, v_0) = (D_2\varphi_1(u_0, v_0), D_2\varphi_2(u_0, v_0), D_2\varphi_3(u_0, v_0))$. Da die beiden letzteren Vektoren die Tangentialebene an die Fläche im Punkt (x_0, y_0, z_0) aufspannen, ist der Vektor $(D_1g(x_0, y_0, z_0), D_2g(x_0, y_0, z_0), D_3g(x_0, y_0, z_0))$ ein Normalvektor im Punkt (x_0, y_0, z_0) . \square

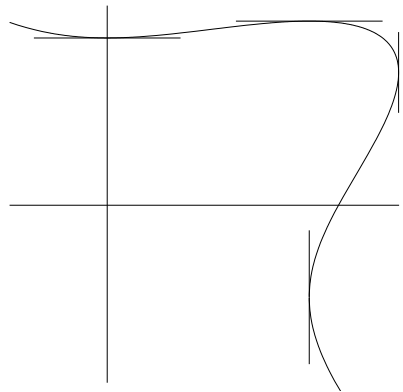
Beispiel: Die Gleichung $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ stellt einen Kreis dar. Aus Satz 2.1 folgt, dass $(2x_0, 2y_0)$ ein Normalvektor im Punkt (x_0, y_0) ist. Die Gleichung der Tangente im Punkt (x_0, y_0) ist dann $2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) = 0$, das heißt $x_0x + y_0y - r^2 = 0$, da der Punkt (x_0, y_0) ja auf dem Kreis liegt und somit $x_0^2 + y_0^2 = r^2$ gilt.

Beispiel: Sei $g(x, y) = x^4 - x^2y + \frac{1}{2}y^2 - 1$. Wir untersuchen die durch die Gleichung $g(x, y) = 0$ gegebene Kurve. Es gilt $g(x, y) = (x^2 - \frac{1}{2}y)^2 + \frac{1}{4}y^2 - 1$. Es folgt $g(x, y) > 0$, wenn $|y| > 2$ oder $|x| > 2$ gilt. Daran erkennt man, dass die Kurve im Quadrat $[-2, 2] \times [-2, 2]$ liegt. Die Kurve ist symmetrisch zur y -Achse, da x nur mit geraden Potenzen auftritt. Wir berechnen die Punkte auf der Kurve, die eine horizontale oder vertikale Tangente haben. Nach Satz 2.1 ist $D_1g(x, y) = 4x^3 - 2xy$ die x -Koordinate des Normalvektors im Punkt (x, y) . Genau dann, wenn sie null ist, ist die Tangente horizontal. Aus $4x^3 - 2xy = 0$ folgt $x = 0$ oder $y = 2x^2$. Da der Punkt auch auf der Kurve liegen muss, setzen wir in die Gleichung $x^4 - x^2y + \frac{1}{2}y^2 - 1 = 0$ ein. Setzt man $x = 0$ ein, so folgt $y^2 = 2$ und man erhält die beiden Punkte $(0, \sqrt{2})$ und $(0, -\sqrt{2})$. Setzt man $y = 2x^2$ ein, so folgt $x^4 = 1$ und man erhält die beiden Punkte $(1, 2)$ und $(-1, 2)$. Die y -Koordinate des Normalvektors im Punkt (x, y) ist $D_2g(x, y) = -x^2 + y$. Genau dann, wenn sie null ist, ist die Tangente vertikal. Es gilt dann $y = x^2$. Setzt man das in die Gleichung der Kurve ein, so folgt $x^4 = 2$ und man erhält die beiden Punkte $(\sqrt[4]{2}, \sqrt{2})$ und $(-\sqrt[4]{2}, \sqrt{2})$.



Wir haben vier Punkte $(0, \sqrt{2})$, $(0, -\sqrt{2})$, $(1, 2)$, $(-1, 2)$ mit horizontaler Tangente und zwei Punkte $(\sqrt[4]{2}, \sqrt{2})$, $(-\sqrt[4]{2}, \sqrt{2})$ mit vertikaler Tangente gefunden. Sonst gibt es keine Punkte auf der Kurve, die horizontale oder vertikale Tangente haben. Daher muss die Kurve zwischen diesen Punkten monoton verlaufen. Daraus erhält man bereits eine Vorstellung, wie die Kurve aussehen muss.

Beispiel: Sei $g(x, y) = 2x^3 - 3x^2y + 4y^3 - 216$. Wir untersuchen die durch die Gleichung $g(x, y) = 0$ gegebene Kurve. Wir berechnen die Punkte auf der Kurve, die eine horizontale oder eine vertikale Tangente haben. Nach Satz 2.1 ist $D_1g(x, y) = 6x^2 - 6xy$ die x -Koordinate des Normalvektors im Punkt (x, y) . Genau dann, wenn sie null ist, ist die Tangente horizontal. Aus $6x^2 - 6xy = 0$ folgt $x = 0$ oder $x = y$. Da der Punkt auch auf der Kurve liegen muss, setzen wir in die Gleichung $2x^3 - 3x^2y + 4y^3 - 216 = 0$ ein. Setzt man $x = 0$ ein, so folgt $y^3 = 54$ und man erhält den Punkt $(0, 3\sqrt[3]{2})$. Setzt man $x = y$ ein, so folgt $x^3 = 72$ und man erhält den Punkt $(2\sqrt[3]{9}, 2\sqrt[3]{9})$. Die y -Koordinate des Normalvektors im Punkt (x, y) ist $D_2g(x, y) = -3x^2 + 12y^2$. Genau dann, wenn sie null ist, ist die Tangente vertikal. Aus $-3x^2 + 12y^2 = 0$ folgt $x = 2y$ oder $x = -2y$. Setzt man $x = 2y$ in die Gleichung $2x^3 - 3x^2y + 4y^3 - 216 = 0$ ein, so folgt $y^3 = 27$ und man erhält den Punkt $(6, 3)$. Setzt man $x = -2y$ ein, so folgt $y^3 = -9$ und man erhält den Punkt $(2\sqrt[3]{9}, -\sqrt[3]{9})$.



Wir haben zwei Punkte $(0, 3\sqrt[3]{2})$, $(2\sqrt[3]{9}, 2\sqrt[3]{9})$ mit horizontaler Tangente und zwei Punkte

$(6, 3)$, $(2\sqrt[3]{9}, -\sqrt[3]{9})$ mit vertikaler Tangente gefunden. Sonst gibt es keine Punkte auf der Kurve, die horizontale oder vertikale Tangente haben. Daher muss die Kurve zwischen diesen Punkten monoton verlaufen. Die Kurve läuft durch den Punkt $(0, 3\sqrt[3]{2})$, wo sie horizontale Tangente hat. Dabei ändert die x -Koordinate des Normalvektors das Vorzeichen. Somit bleibt die Kurve auf derselben Seite der Tangente. Unmittelbar links von diesem Punkt ist sie daher monoton fallend. Da sie links von der x -Achse keine horizontale oder vertikale Tangente hat, ist sie dort immer monoton fallend. Auf dieselbe Weise stellt man fest, dass sie unterhalb des Punktes $(2\sqrt[3]{9}, -\sqrt[3]{9})$ ebenfalls monoton fallend verläuft.

Beispiel: Die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ stellt eine Kugel dar. Aus Satz 2.3 folgt, dass $(2x_0, 2y_0, 2z_0)$ ein Normalvektor im Punkt (x_0, y_0, z_0) ist. Die Gleichung der Tangentialebene im Punkt (x_0, y_0, z_0) ist dann $2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0$, das heißt $x_0x + y_0y + z_0z - r^2 = 0$, da der Punkt (x_0, y_0, z_0) ja auf der Kugel liegt und somit $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = r^2$ gilt.

Beispiel: Sei $g(x, y, z) = xyz - 8$. Durch $g(x, y, z) = 0$ ist eine Fläche im \mathbb{R}^3 gegeben. Wir suchen die Tangentialebene im Punkt $(2, 2, 2)$. Es gilt $D_1g(x, y, z) = yz$, $D_2g(x, y, z) = xz$ und $D_3g(x, y, z) = xy$. Ein Normalvektor im Punkt $(2, 2, 2)$ ist somit $(4, 4, 4)$. Es ergibt sich $4(x-2) + 4(y-2) + 4(z-2) = 0$ als Gleichung der Tangentialebene, das ist $x + y + z = 6$.

3. Krümmung einer Kurve in der Ebene

Wir stellen zuerst einmal die Kurve in der Ebene durch den Graphen einer Funktion f dar. Dann ist $y = f(x)$ die Gleichung der Kurve. Sei (x_0, y_0) ein Punkt auf der Kurve, das heißt $y_0 = f(x_0)$. Wir versuchen im Punkt (x_0, y_0) möglichst gut einen Kreis an die Kurve anzupassen. Die Krümmung eines Kreises mit Radius r definiert man als $\frac{1}{r}$ und die Krümmung der Kurve im Punkt (x_0, y_0) dann als Krümmung des angepassten Kreises.

Um einen Kreis anzupassen, sei $p = f'(x_0)$ und $q = f''(x_0)$. Sei (m_1, m_2) der Mittelpunkt und r der Radius des angepassten Kreises. Sei g die Funktion, die den Kreis darstellt, das heißt es gilt $(x - m_1)^2 + (g(x) - m_2)^2 = r^2$. Der Kreis muss durch den Punkt (x_0, y_0) gehen, das heißt $g(x_0) = y_0$, und die ersten beiden Ableitungen sollen übereinstimmen, das heißt $g'(x_0) = p$ und $g''(x_0) = q$. Es gilt die Gleichung $(x - m_1)^2 + (g(x) - m_2)^2 = r^2$. Durch Differenzieren folgt $2(x - m_1) + 2(g(x) - m_2)g'(x) = 0$ und durch nochmaliges Differenzieren erhalten wir $2 + 2g'(x)^2 + 2(g(x) - m_2)g''(x) = 0$. Setzt man in diesen drei Gleichungen $x = x_0$ und verwendet $g(x_0) = y_0$, $g'(x_0) = p$ und $g''(x_0) = q$, dann hat man $(x_0 - m_1)^2 + (y_0 - m_2)^2 = r^2$, $2(x_0 - m_1) + 2(y_0 - m_2)p = 0$ und $2 + 2p^2 + 2(y_0 - m_2)q = 0$. Aus der letzten Gleichung folgt $m_2 = y_0 + \frac{1+p^2}{q}$. Damit erhält man dann aus der vorletzten Gleichung $m_1 = x_0 - p\frac{1+p^2}{q}$, und schließlich folgt $r = \frac{(1+p^2)^{3/2}}{q}$ aus der ersten Gleichung. Die Krümmung des Graphen von f im Punkt (x_0, y_0) wird als $\frac{1}{r} = \frac{q}{(1+p^2)^{3/2}}$ definiert. Der Punkt (m_1, m_2) heißt Krümmungsmittelpunkt.

Wir bestimmen Krümmung und Krümmungsmittelpunkt für eine Kurve in Parameterdarstellung. Sei $t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ die Parameterdarstellung einer Kurve. Sei (x_0, y_0) ein Punkt auf der Kurve und s so, dass $(x_0, y_0) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ gilt. Sei f eine Funktion, deren Graph ebenfalls die Kurve darstellt. Dann gilt $f(\gamma_1(t)) = \gamma_2(t)$. Differenziert man nach t so hat man $f'(\gamma_1(t))\gamma_1'(t) = \gamma_2'(t)$. Durch nochmaliges Differenzieren erhält man $f''(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)^2 + f'(\gamma_1(t))\gamma_1''(t) = \gamma_2''(t)$. Setzt man $t = s$ ein und schreibt wieder p für $f'(x_0)$ und q für $f''(x_0)$ so erhält man $p\gamma_1'(s) = \gamma_2'(s)$ und $q\gamma_1'(s)^2 + p\gamma_1''(s) = \gamma_2''(s)$. Aus

der ersten Gleichung folgt $p = \frac{\gamma_2'(s)}{\gamma_1'(s)}$ und aus der zweiten $q = \frac{\gamma_1'(s)\gamma_2''(s) - \gamma_2'(s)\gamma_1''(s)}{\gamma_1'(s)^3}$. Setzt man das in die oben gefundenen Formeln für Krümmung und Krümmungsmittelpunkt ein, so erhält man $\frac{1}{r} = \frac{\gamma_1'(s)\gamma_2''(s) - \gamma_2'(s)\gamma_1''(s)}{(\gamma_1'(s)^2 + \gamma_2'(s)^2)^{3/2}}$ als Krümmung und $m_1 = x_0 - \frac{\gamma_1'(s)^2\gamma_2'(s) + \gamma_2'(s)^3}{\gamma_1'(s)\gamma_2''(s) - \gamma_2'(s)\gamma_1''(s)}$ und $m_2 = y_0 + \frac{\gamma_1'(s)^3 + \gamma_1'(s)\gamma_2'(s)^2}{\gamma_1'(s)\gamma_2''(s) - \gamma_2'(s)\gamma_1''(s)}$ als Koordinaten des Krümmungsmittelpunkts.

Beispiel: Wir berechnen die Krümmungsmittelpunkte einer Ellipse. Sie hat Parameterdarstellung $\gamma_1(t) = a \cos t$ und $\gamma_2(t) = b \sin t$ mit $t \in [0, 2\pi]$. Die ersten Ableitungen sind $\gamma_1'(t) = -a \sin t$ und $\gamma_2'(t) = b \cos t$. Die zweiten Ableitungen sind $\gamma_1''(t) = -a \cos t$ und $\gamma_2''(t) = -b \sin t$. Es folgt $\gamma_1'(s)\gamma_2''(s) - \gamma_2'(s)\gamma_1''(s) = ab$. Damit erhalten wir $m_1 = a \cos s - \frac{a^2 b \sin^2 s \cos s + b^3 \cos^3 s}{ab} = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 s$ und $m_2 = b \sin s + \frac{-a^3 \sin^3 s - ab^2 \sin s \cos^2 s}{ab} = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 s$. Die Krümmungsmittelpunkte liegen auf der Kurve $(\frac{a}{a^2 - b^2} x)^{2/3} + (\frac{b}{b^2 - a^2} y)^{2/3} = 1$.

4. Bogenlänge

Durch $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ ist die Parameterdarstellung einer Kurve im \mathbb{R}^d gegeben. Wir berechnen die Bogenlänge der Kurve, indem wir sie durch Polygonzüge approximieren. Zu jeder Zerlegung $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ des Parameterintervalls $[a, b]$ gehört ein Polygonzug durch die Punkte $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \gamma(t_2), \dots, \gamma(t_n)$. Die Länge dieses Polygonzuges ist $\sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$. Führt man einen zusätzlichen Unterteilungspunkt s ein, dann wird in dieser Summe $\|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|$ durch $\|\gamma(s) - \gamma(t_{j-1})\| + \|\gamma(t_j) - \gamma(s)\|$ ersetzt, wenn der zusätzliche Unterteilungspunkt s zwischen t_j und t_{j+1} liegt. Nach der Dreiecksungleichung wird der Polygonzug dadurch länger. Das führt zu

Definition: Die Bogenlänge einer Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ wird definiert als Supremum von $\sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$ über alle Zerlegungen $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ des Parameterintervalls $[a, b]$.

Man erhält dieses Supremum, wenn man eine Folge von Zerlegungen wählt, deren Gitterweite gegen null geht, und den Grenzwert der Längen der zugehörigen Polygonzüge bestimmt. Dazu brauchen wir Differenzierbarkeit.

Definition: Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine Kurve mit Komponenten $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_d$. Sie heißt stückweise differenzierbar, wenn es eine endliche Menge $M = \{a, r_1, \dots, r_m, b\} \subseteq [a, b]$ gibt, sodass $\gamma_j'(t)$ für $1 \leq j \leq d$ und alle $t \in [a, b] \setminus M$ existiert, und die Funktionen $t \mapsto \gamma_j'(t)$ stetig sind auf der Menge $[a, b] \setminus M$ mit Sprungstellen in den Punkten in M . Wir schreiben dann $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \dots, \gamma_d'(t))$ und nennen M die Ausnahmemenge.

Beispiel: Sei $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) = (t, |t|)$. Dann ist γ stückweise differenzierbar mit Ausnahmemenge $M = \{-1, 0, 1\}$. Es gilt $\gamma_1'(t) = 1$ für $t \in (-1, 1)$, aber $\gamma_2(t) = -1$ für $t \in (-1, 0)$ und $= 1$ für $t \in (0, 1)$.

Sei jetzt $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine stückweise differenzierbare Kurve mit Ausnahmemenge M . Wir wählen eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ des Parameterintervalls $[a, b]$, die alle Punkte aus M enthält. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right\| (t_i - t_{i-1}) \approx \sum_{i=1}^n \|\gamma'(t_i)\| (t_i - t_{i-1})$$

nach dem Mittelwertsatz. Die Approximation wird umso genauer, je kleiner die Gitterweite ist, und wird im Grenzwert bei gegen null gehender Gitterweite zur Gleichheit. Wählt man jetzt eine Folge von solchen Zerlegungen, deren Gitterweite gegen null geht, sodass

die Längen der Polygonzüge ihr Supremum erreichen, dann erhält man im Grenzwert die Bogenlänge. Da auf der rechten Seite eine Riemannsumme steht, erhält man im Grenzwert das Integral

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^d \gamma_j'(t)^2} dt$$

Dieses Integral ist somit die Bogenlänge der Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Man kann zeigen, dass eine andere Parameterdarstellung derselben Kurve dieselbe Bogenlänge ergibt. Ist die Kurve durch den Graphen einer Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, das heißt $\gamma(x) = (x, f(x))$, dann ergibt sich die Bogenlänge als $\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$.

Beispiel: Wir berechnen die Länge eines Bogens der Zykloide mit $a = r$. Ein Bogen ist der Teil der Kurve, der bei einer Umdrehung des Kreises entsteht. Eine Parameterdarstellung ist $\gamma(t) = (rt - r \sin t, r - r \cos t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$. Es folgt $\gamma'(t) = (r - r \cos t, r \sin t)$ und $\|\gamma'(t)\| = r\sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} = r\sqrt{2 - 2 \cos t}$. Die Länge des Bogens ist daher $\int_0^{2\pi} r\sqrt{2 - 2 \cos t} dt = \int_0^{2\pi} r\sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = \int_0^{2\pi} 2r \sin \frac{t}{2} dt = -4r \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 4r + 4r = 8r$.

Beispiel: Wir berechnen die Bogenlänge der Astroide. Ihre Parameterdarstellung ist $\gamma(t) = (4r \cos^3 t, 4r \sin^3 t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$. Es folgt $\gamma'(t) = (-12r \cos^2 t \sin t, 12r \sin^2 t \cos t)$ und $\|\gamma'(t)\| = 12r |\sin t \cos t| \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 6r |\sin 2t|$. Die Länge der Astroide ist daher $\int_0^{2\pi} 6r |\sin 2t| dt$. Da \sin periodisch ist und auf dem Intervall $[0, \pi]$ nicht negativ, haben wir $\int_0^{2\pi} |\sin 2t| dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = -2 \cos 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4$. Die Länge der Astroide ist somit $24r$.

5. Oberfläche eines gekrümmten Flächenstücks

Jetzt kommen wir zur Flächenberechnung. Sei $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Parameterdarstellung einer Fläche im \mathbb{R}^3 mit einem Normalbereich $B \subseteq \mathbb{R}^2$. Wir nehmen an, dass φ im Innern von B differenzierbar ist. Wir unterteilen B in kleine Rechtecke $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$. Der Flächeninhalt des Flächenstücks $\varphi([x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j])$ ist näherungsweise gleich der Fläche des durch die Vektoren $\varphi(x_i, y_j) - \varphi(x_{i-1}, y_j) \approx (x_i - x_{i-1})D_1\varphi(x_i, y_j)$ und $\varphi(x_i, y_j) - \varphi(x_i, y_{j-1}) \approx (y_j - y_{j-1})D_2\varphi(x_i, y_j)$ aufgespannten Parallelogramms. Da die Norm des Vektorprodukts der beiden aufspannenden Vektoren die Fläche des Parallelogramms ist, ist eine Approximation der Oberfläche gegeben durch

$$\sum_i \sum_j (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \|D_1\varphi(x_i, y_j) \times D_2\varphi(x_i, y_j)\|$$

Das ist eine Riemannsumme eines Integrals über den Bereich B . Da bei feiner werdender Zerlegung in Rechtecke sowohl die Approximation immer besser wird als auch die Riemannsumme gegen das Integral

$$\int_B \|D_1\varphi(x, y) \times D_2\varphi(x, y)\| d(x, y)$$

konvergiert, gibt dieses Integral die Oberfläche an.

Ist die Fläche durch den Graphen einer differenzierbaren Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, dann ist $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ mit $(x, y) \in B$ eine Parameterdarstellung dieser Fläche. Wegen $D_1\varphi(x, y) = (1, 0, D_1f(x, y))$ und $D_2\varphi(x, y) = (0, 1, D_2f(x, y))$ ergibt sich die Oberfläche als $\int_B \sqrt{1 + D_1f(x, y)^2 + D_2f(x, y)^2} d(x, y)$.

Beispiel: Wir berechnen die Oberfläche des Schnittkörpers zweier Zylinder, die beide Radius r haben und deren Achsen die x -Achse beziehungsweise die y -Achse sind. Aus Symmetriegründen genügt es, das Stück der Oberfläche zu betrachten, das über der Fläche

$B = \{(x, y) : 0 \leq x \leq r, 0 \leq y \leq x\}$ liegt. Das ist ein Sechzehntel der Oberfläche. Dieses Stück der Oberfläche ist durch den Graphen der Funktion $f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2}$ gegeben. Wir berechnen daher die partiellen Ableitungen $D_1f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ und $D_2f(x, y) = 0$ und damit dann $\int_B \sqrt{1 + D_1f(x, y)^2 + D_2f(x, y)^2} d(x, y) = \int_0^r \int_0^x \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dy dx = \int_0^r xr(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = -r(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^r = r^2$. Die Oberfläche des Schnittkörpers ist $16r^2$.

Beispiel: Sei $f(x, y) = \frac{16}{3} - \frac{1}{3}|x|^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}|y|^{\frac{3}{2}}$. Wir berechnen die Fläche des Graphen dieser Funktion über dem Quadrat $[-4, 4] \times [-4, 4]$. In den Ecken des Quadrats ist die Funktion null. Sie stellt so etwas wie ein Dach über dem Quadrat dar. Aus Symmetriegründen reicht es, die Fläche über $B = [0, 4] \times [0, 4]$ zu berechnen. Dort gilt $f(x, y) = \frac{16}{3} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}}$.

Wir berechnen zuerst $D_1f(x, y) = -\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$ und $D_2f(x, y) = -\frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}}$ und damit das Integral $\int_B \sqrt{1 + D_1f(x, y)^2 + D_2f(x, y)^2} d(x, y) = \int_0^4 \int_0^4 (1 + \frac{x}{4} + \frac{y}{4})^{\frac{1}{2}} dy dx = \int_0^4 \frac{8}{3} (1 + \frac{x}{4} + \frac{y}{4})^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 dx = \frac{8}{3} \int_0^4 (2 + \frac{x}{4})^{\frac{3}{2}} - (1 + \frac{x}{4})^{\frac{3}{2}} dx = \frac{64}{15} ((2 + \frac{x}{4})^{\frac{5}{2}} - (1 + \frac{x}{4})^{\frac{5}{2}}) \Big|_0^4 = \frac{64}{15} (3^{\frac{5}{2}} - 2^{\frac{5}{2}} - 2^{\frac{5}{2}} + 1) = 22, 51$. Die gesamte Oberfläche ist das Vierfache, also $90, 04$.

Beispiel: Sei $f(x, y) = \sqrt{2(1-x)(1-y)}$. Wir berechnen die Fläche des Graphen über dem Quadrat $B = [0, 1] \times [0, 1]$. Die Funktion ist am rechten und oberen Rand des Quadrats gleich 0, wölbt sich über das Quadrat und erreicht im Punkt $(0, 0)$ den Wert $\sqrt{2}$.

Wir berechnen zuerst $D_1f(x, y) = \frac{-(1-y)}{\sqrt{2(1-x)(1-y)}}$ und $D_2f(x, y) = \frac{-(1-x)}{\sqrt{2(1-x)(1-y)}}$ und damit das Integral $\int_B \sqrt{1 + D_1f(x, y)^2 + D_2f(x, y)^2} d(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 (1 + \frac{1-y}{2(1-x)} + \frac{1-x}{2(1-y)})^{\frac{1}{2}} dy dx = \int_0^1 \int_0^1 (\frac{1-y}{2(1-x)})^{\frac{1}{2}} + (\frac{1-x}{2(1-y)})^{\frac{1}{2}} dy dx = \int_0^1 \int_0^1 (\frac{1-y}{2(1-x)})^{\frac{1}{2}} dy dx + \int_0^1 \int_0^1 (\frac{1-x}{2(1-y)})^{\frac{1}{2}} dy dx$. Die letzten beiden Integrale sind gleich (Vertauschen der Integrationsreihenfolge). Wir berechnen $\int_0^1 \int_0^1 (\frac{1-y}{2(1-x)})^{\frac{1}{2}} dy dx = \int_0^1 \frac{2}{3} \frac{-(1-y)^{3/2}}{\sqrt{2(1-x)^{1/2}}} \Big|_0^1 dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{3(1-x)^{1/2}} dx = -\frac{2\sqrt{2}}{3} (1-x)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Die gesamte Oberfläche ist das Doppelte, also $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Die Mantelfläche eines Drehkörpers ist ein Spezialfall obiger Formel. Der Graph der Funktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ rotiert um die x -Achse. Durch $\varphi(x, y) = (x, g(x) \cos y, g(x) \sin y)$ mit $(x, y) \in [a, b] \times [0, 2\pi)$ ist eine Parameterdarstellung der Rotationsfläche gegeben. Es gilt $D_1\varphi(x, y) = (1, g'(x) \cos y, g'(x) \sin y)$ und $D_2\varphi(x, y) = (0, -g(x) \sin y, g(x) \cos y)$, woraus $\|D_1\varphi(x, y) \times D_2\varphi(x, y)\| = \sqrt{g(x)^2 g'(x)^2 + g(x)^2}$ folgt. Setzt man das in die Formel für die Oberfläche ein und rechnet das Integral über y aus, so ergibt sich

$$2\pi \int_a^b g(x) \sqrt{1 + g'(x)^2} dx$$

als Mantelfläche des Drehkörpers.

6. Mehrdimensionale Substitutionsregel

Es gibt auch eine Substitutionsregel für mehrdimensionale Integrale, die wir jetzt behandeln, da man sie so ähnlich herleiten kann wie die Oberflächenformel. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ und $h : G \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine differenzierbare Funktion. Seien h_1, h_2, \dots, h_d die Komponenten von h , die Funktionen von G nach \mathbb{R} sind. Für $\mathbf{x} \in G$ sei $Dh(\mathbf{x})$ die Matrix $(D_i h_j(\mathbf{x}))_{1 \leq i, j \leq d}$. Sie heißt Jacobimatrix und ihre Determinante $\det Dh(\mathbf{x})$ heißt Funktionaldeterminante.

Satz 2.4 (Substitutionsregel) Sei $B \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Normalbereich und $g : B \rightarrow \mathbb{R}^d$ injektiv. Sei $C = g(B)$ und $h : C \rightarrow B$ die Umkehrfunktion von g . Diese Umkehrfunktion h habe stetige partielle Ableitungen. Dann gilt $\int_B f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_C f(h(\mathbf{u})) |\det Dh(\mathbf{u})| d\mathbf{u}$.

Dieser Satz besagt, wie man neue Integrationsvariable $\mathbf{u} = g(\mathbf{x})$ einführt. Für \mathbf{x} wird $h(\mathbf{u})$ eingesetzt und $d\mathbf{x}$ wird durch $|\det Dh(\mathbf{u})| d\mathbf{u}$ ersetzt. Weiters ist $C = g(B)$ der Bereich, den \mathbf{u} durchläuft, wenn \mathbf{x} den Bereich B durchläuft.

Der Beweis verläuft so wie wir oben die Formel für die Oberfläche bestimmt haben. Wir geben die Idee des Beweises für zwei Dimensionen. Wir fassen die Funktion $h : C \rightarrow B$ als Parameterdarstellung des Bereichs B auf. Wir unterteilen C in kleine Rechtecke $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$. Das Flächenstück $h([x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j])$ hat näherungsweise den selben Flächeninhalt wie das durch die Vektoren $h(x_i, y_j) - h(x_{i-1}, y_j) \approx (x_i - x_{i-1})D_1h(x_i, y_j)$ und $h(x_i, y_j) - h(x_i, y_{j-1}) \approx (y_j - y_{j-1})D_2h(x_i, y_j)$ aufgespannten Parallelogramm, wobei wir $D_1h(x, y)$ für $\begin{pmatrix} D_1h_1(x, y) \\ D_1h_2(x, y) \end{pmatrix}$ und $D_2h(x, y)$ für $\begin{pmatrix} D_2h_1(x, y) \\ D_2h_2(x, y) \end{pmatrix}$ schreiben. Die Fläche dieses Parallelogramms ist dann $(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) |\det Dh(x_i, y_j)|$ und das Volumen über dem Flächenstück $h([x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j])$ und unter der Funktion f ist näherungsweise gleich $f(h(x_i, y_j)) |\det Dh(x_i, y_j)| (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$. Wir erhalten somit

$$\sum_i \sum_j f(h(x_i, y_j)) |\det Dh(x_i, y_j)| (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

als Approximation des Volumens über dem Bereich B und unter der Funktion f . Das ist eine Riemannsumme eines Integrals über den Bereich C . Da bei feiner werdender Zerlegung in Rechtecke sowohl die Approximation immer besser wird als auch die Riemannsumme gegen das Integral $\int_C f(h(x, y)) |\det Dh(x, y)| d(x, y)$ konvergiert, stellt dieses Integral das Volumen über dem Bereich B und unter der Funktion f dar. Da auch $\int_B f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ dieses Volumen darstellt, ist

$$\int_B f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_C f(h(x, y)) |\det Dh(x, y)| d(x, y)$$

gezeigt. In höheren Dimensionen verläuft der Beweis analog.

Die wichtigste Anwendung von Satz 2.4 ist der Übergang zu Polarkoordinaten im \mathbb{R}^2 . In diesem Fall ist $g(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arg(x, y))$, wobei $\arg(x, y)$ der im Gegenuhrzeigersinn gemessene Winkel zwischen der x -Achse und dem Vektor vom Nullpunkt zum Punkt (x, y) ist. Wir bezeichnen die neuen Koordinaten mit $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\varphi = \arg(x, y)$. Für die Umkehrfunktion h von g gilt dann $h(\varrho, \varphi) = (\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi)$. Wir können das als $x = \varrho \cos \varphi$ und $y = \varrho \sin \varphi$ schreiben. Es gilt $\det Dh(\varrho, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\varrho \sin \varphi & \varrho \cos \varphi \end{vmatrix} = \varrho$, sodass $d(x, y)$ durch $\varrho d(\varrho, \varphi)$ zu ersetzen ist. Wir rechnen dazu zwei Beispiele.

Beispiel: Wir berechnen das Volumen eines Zylinders mit Radius r , dessen Achse die z -Achse ist, und der unten durch die x - y -Ebene und oben durch die Fläche $z = a + bx^2$ mit $a > 0$ und $b > 0$ begrenzt wird. Zu berechnen ist daher das Integral $\int_B a + bx^2 d(x, y)$, wobei B der Kreis mit Mittelpunkt $\mathbf{0}$ und Radius r ist. Wir führen Polarkoordinaten ein, das heißt $x = \varrho \cos \varphi$ und $y = \varrho \sin \varphi$. Dann gilt $d(x, y) = \varrho d(\varrho, \varphi)$ und der Kreis B hat jetzt die Darstellung $C = \{(\varrho, \varphi) : 0 \leq \varrho \leq r, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$. Wegen Satz 2.4 erhalten wir $\int_B a + bx^2 d(x, y) = \int_C (a + b\varrho^2 \cos^2 \varphi) \varrho d(\varrho, \varphi) = \int_0^{2\pi} \int_0^r a\varrho d\varrho d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^r b\varrho^3 \cos^2 \varphi d\varrho d\varphi$. Somit berechnen wir $\int_0^{2\pi} \int_0^r a\varrho d\varrho d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{ar^2}{2} d\varphi = ar^2\pi$ und $\int_0^{2\pi} \int_0^r b\varrho^3 \cos^2 \varphi d\varrho d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{br^4}{4} \cos^2 \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{br^4}{8} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{br^4}{8} (\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi) \Big|_0^{2\pi} = \frac{br^4}{4} \pi$. Als Volumen ergibt sich $ar^2\pi + \frac{br^4}{4}\pi$.

Beispiel: Wir berechnen $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Dieses uneigentliche Integral ist gleich $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ mit $a_n = \int_{-n}^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Sei $Q_n = [-n, n] \times [-n, n]$. Dann gilt $\int_{Q_n} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} d(x, y) = \int_{-n}^n \int_{-n}^n e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} dx dy = \int_{-n}^n e^{-\frac{y^2}{2}} \int_{-n}^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx dy = \int_{-n}^n e^{-\frac{y^2}{2}} a_n dy = a_n^2$. Für $t > 0$

sei K_t der Kreis mit Mittelpunkt $\mathbf{0}$ und Radius t und $b_t = \int_{K_t} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} d(x, y)$. Wir berechnen $b_t = \int_0^t \int_0^{2\pi} e^{-\frac{\varrho^2}{2}} \varrho d\varphi d\varrho = \int_0^t 2\pi e^{-\frac{\varrho^2}{2}} \varrho d\varrho = -2\pi e^{-\frac{\varrho^2}{2}} \Big|_0^t = 2\pi(1 - e^{-\frac{t^2}{2}})$ durch Einführen von Polarkoordinaten. Es folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2\pi$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{2n} = 2\pi$. Wegen $K_n \subseteq Q_n \subseteq K_{2n}$ gilt $b_n \leq a_n^2 \leq b_{2n}$. Somit folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = 2\pi$ und wegen der Stetigkeit der Wurzelfunktion auch $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2\pi}$. Damit ist $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$ gezeigt.

7. Extrema unter Nebenbedingungen

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $g : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ mit $p < d$ habe stetige partielle Ableitungen. Sei $M = \{\mathbf{y} \in G : g(\mathbf{y}) = \mathbf{0}\}$. Die Bedingung $g(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ besteht aus p Gleichungen $g_i(\mathbf{y}) = 0$ für $1 \leq i \leq p$, wobei g_1, g_2, \dots, g_p die Komponenten von g sind. Die Menge M ist dann eine Fläche im \mathbb{R}^d der Dimension $d - p$. Ist $d = 2$ und $p = 1$, dann hat man eine Kurve im \mathbb{R}^2 . Zum Beispiel ist $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ein Kreis im \mathbb{R}^2 . Ist $d = 3$ und $p = 2$, dann hat man eine Kurve im \mathbb{R}^3 . Die beiden Gleichungen $x + 2y - z = 0$ und $2x - 3y - 4z - 2 = 0$ stellen eine Gerade im \mathbb{R}^3 dar, nämlich die Schnittgerade dieser beiden Ebenen. Ist $d = 3$ und $p = 1$, dann hat man eine Fläche im \mathbb{R}^3 . Durch $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 1 = 0$ ist ein Ellipsoid im \mathbb{R}^3 gegeben. Wir suchen Maxima und Minima einer Funktion auf so einer Menge M .

Satz 2.5: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ mit $p < d$ seien Funktionen mit stetigen partiellen Ableitungen. Sei $M = \{\mathbf{y} \in G : g(\mathbf{y}) = \mathbf{0}\}$ und die Funktion f eingeschränkt auf die Menge M habe in $\mathbf{x} \in M$ ein lokales Extremum. Die Matrix $Dg(\mathbf{x}) = (D_j g_i(\mathbf{x}))_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq d}$ habe Rang p . Dann existieren p Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sodass

$$D_j f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p \lambda_i D_j g_i(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{für } 1 \leq j \leq d$$

gilt. Die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ heißen Lagrangesche Multiplikatoren.

Beweis: Wir nehmen an (ohne es zu beweisen), dass M in einer Umgebung von \mathbf{x} eine Parameterdarstellung $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $B \subseteq \mathbb{R}^{d-p}$ besitzt. Seien $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_d$ die Komponenten von φ . Wir können annehmen, dass B offen ist und $D\varphi(\mathbf{v}) = (D_m \varphi_j(\mathbf{v}))_{1 \leq m \leq d-p, 1 \leq j \leq d}$ Rang $d - p$ hat, wobei $\mathbf{v} \in B$ derjenige Punkt ist, für den $\varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{x}$ gilt. Es gilt dann $g(\varphi(\mathbf{u})) = \mathbf{0}$ für alle $\mathbf{u} \in B$. Für $1 \leq i \leq p$ sei \mathbf{a}_i der Vektor $(D_j g_i(\mathbf{x}))_{1 \leq j \leq d}$, für $1 \leq m \leq d - p$ sei \mathbf{b}_m der Vektor $(D_m \varphi_j(\mathbf{v}))_{1 \leq j \leq d}$ und \mathbf{c} sei der Vektor $(D_j f(\mathbf{x}))_{1 \leq j \leq d}$.

Mit Hilfe von Satz 2.2 für $f = g_i$ differenzieren wir die Gleichung $g(\varphi(\mathbf{u})) = \mathbf{0}$ nach der Variablen u_m . Für $1 \leq i \leq p$ und $1 \leq m \leq d - p$ erhält man $\sum_{j=1}^d D_j g_i(\varphi(\mathbf{u})) D_m \varphi_j(\mathbf{u}) = 0$, insbesondere $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{b}_m \rangle = 0$, indem man $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ setzt. Das heißt, dass der von den Vektoren \mathbf{a}_i mit $1 \leq i \leq p$ aufgespannte Vektorraum U und der von den Vektoren \mathbf{b}_m mit $1 \leq m \leq d - p$ aufgespannte Vektorraum V aufeinander orthogonal stehen. Nach Voraussetzung sind die Vektoren \mathbf{a}_i mit $1 \leq i \leq p$ linear unabhängig, sodass U Dimension p hat. Da die Matrix $D\varphi(\mathbf{v})$ Rang $d - p$ hat, sind die Vektoren \mathbf{b}_m mit $1 \leq m \leq d - p$ linear unabhängig und V hat Dimension $d - p$. Wegen $\dim U + \dim V = d$ ist V der Orthogonalraum zu U .

Nach Voraussetzung hat $f \circ \varphi : B \rightarrow \mathbb{R}$ ein lokales Extremum im Punkt \mathbf{v} . Nach Satz 1.9 gilt $0 = D_m f \circ \varphi(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^d D_j f(\mathbf{x}) D_m \varphi_j(\mathbf{v})$ für $1 \leq m \leq d - p$, wobei Satz 2.2 und $\varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{x}$ verwendet wurde. Das aber heißt, dass der Vektor \mathbf{c} orthogonal auf V steht, also ein Element von U ist. Er lässt sich somit als Linearkombination der Vektoren \mathbf{a}_i mit $1 \leq i \leq p$ schreiben, die U aufspannen. Es gibt also $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, sodass $\mathbf{c} = -\sum_{i=1}^p \lambda_i \mathbf{a}_i$ gilt. Das ist aber gerade das gewünschte Resultat. \square

Um diesen Satz zur Bestimmung der Extrema einer Funktion f unter den Nebenbedingungen $g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ anzuwenden, bildet man die Funktion $f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i(\mathbf{x})$, berechnet

deren partielle Ableitungen und setzt diese gleich null. Das gibt d Gleichungen, also so viele, wie f Variable hat. Dazu kommen noch die Nebenbedingungen $g_i(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ für $1 \leq i \leq p$. Das sind weitere p Gleichungen. Diese $d + p$ Gleichungen löst man nach den p Lagrangeschen Multiplikatoren und den d Variablen auf. Unter den Lösungen befinden sich dann alle Punkte, in denen f ein Extremum unter den Nebenbedingungen $g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ annimmt.

Beispiel: Gesucht sind die Extrema der Funktion $f(x, y) = xy$ auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$. Wir setzen die partiellen Ableitungen der Funktion $xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ nach den beiden Variablen x und y gleich null und erhalten $y + 2\lambda x = 0$ und $x + 2\lambda y = 0$. Es folgt $x(1 - 4\lambda^2) = 0$. Wäre $x = 0$ dann auch $y = 0$ und $x^2 + y^2 = 1$ würde nicht gelten. Also ist $x \neq 0$ und wir erhalten $\lambda = \frac{1}{2}$ oder $\lambda = -\frac{1}{2}$. Im ersten Fall gilt $y = -x$ und wegen $x^2 + y^2 = 1$ erhalten wir die beiden Punkte $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ und $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Im zweiten Fall gilt $y = x$ und wegen $x^2 + y^2 = 1$ erhalten wir die beiden Punkte $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ und $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Als Extrema kommen nur diese vier Punkte in Frage. Rechnet man die Funktionswerte in diesen Punkten aus, so erhält man für die ersten beiden Punkte $-\frac{1}{2}$, dort hat man Minima, und für die anderen beiden Punkte $\frac{1}{2}$, dort hat man Maxima.

Beispiel: Dem Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ist der volumsgrößte achsenparallele Quader einzuschreiben. Gesucht ist das Maximum von xyz unter der Bedingung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Wir setzen die partiellen Ableitungen der Funktion $xyz + \lambda(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1)$ gleich null und erhalten $yz + \lambda\frac{2x}{a^2} = 0$, $xz + \lambda\frac{2y}{b^2} = 0$ und $xy + \lambda\frac{2z}{c^2} = 0$. Multipliziert man die erste Gleichung mit $\frac{x}{2}$, die zweite mit $\frac{y}{2}$ und die dritte mit $\frac{z}{2}$, und addiert diese Gleichungen, dann erhält man $\frac{3}{2}xyz + \lambda = 0$, wobei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ verwendet wurde. Das ergibt $\lambda = -\frac{3}{2}xyz$. Ist eine der Variablen gleich null, dann ist das Volumen null und daher sicher nicht maximal. Somit sind alle drei Variablen $\neq 0$. Setzt man λ in die obigen drei Gleichungen ein, kürzt die erste durch yz , die zweite durch xz und die dritte durch xy , so erhält man $\frac{3x^2}{a^2} = 1$, $\frac{3y^2}{b^2} = 1$ und $\frac{3z^2}{c^2} = 1$. Als Lösung dieser Gleichungen erhält man den Punkt $(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}})$ und sieben weitere Punkte durch Ändern der Vorzeichen. Damit sind die halben Seitenlängen des volumsgrößten achsenparallelen Quaders gefunden. Das Produkt der Koordinaten ist ein Achtel des Quadvolumens. Das Volumen ist $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

Beispiel: Wir bestimmen Maximum und Minimum der Funktion $f(x, y, z) = 5x + y - 3z$ auf dem Schnitt der Ebene $x + y + z = 0$ mit der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Wir setzen die partiellen Ableitungen der Funktion $5x + y - 3z + \lambda(x + y + z) + \mu(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ gleich null und erhalten $5 + \lambda + 2\mu x = 0$, $1 + \lambda + 2\mu y = 0$ und $-3 + \lambda + 2\mu z = 0$. Addition dieser Gleichungen ergibt $3 + 3\lambda + 2\mu(x + y + z) = 0$, woraus wegen $x + y + z = 0$ dann $\lambda = -1$ folgt. Damit hat man $\mu x = -2$, $\mu y = 0$ und $\mu z = 2$. Wegen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ folgt $\mu^2 = 8$ und $\mu = \sqrt{8}$ oder $\mu = -\sqrt{8}$. Im ersten Fall erhalten wir den Punkt $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ und im zweiten Fall den Punkt $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Nur diese beiden Punkte kommen als Extrema in Frage. Die Funktionswerte sind $-4\sqrt{2}$ und $4\sqrt{2}$. Daraus erkennt man, dass die Funktion im Punkt $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ein Minimum und im Punkt $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ein Maximum hat.

III. Kurvenintegrale und Vektorfelder

In diesem Kapitel geht es eher um physikalisch motivierte Konzepte, um Vektorfelder und deren Stammfunktion, die man als Potenzial eines Kraftfeldes auffassen kann, und um Kurvenintegrale, mit denen die Arbeit berechnet wird.

1. Vektorfelder

In der Geometrie werden Vektoren verwendet, um Richtungen anzugeben, zum Beispiel die Richtung der Tangente an eine Kurve. In der Physik verwendet man Vektoren, um Geschwindigkeiten und Kräfte darzustellen. Fasst man die Parameterdarstellung einer Kurve als Bewegung eines Teilchens auf, dann lässt sich der Tangentialvektor an die Kurve als Geschwindigkeitsvektor interpretieren.

Definition: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene Menge. Ein Vektorfeld ist eine Funktion V von G nach \mathbb{R}^d . Im Punkt $\mathbf{x} \in G$ wird der Vektor $V(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^d$ angeheftet.

Ist ein Vektorfeld V vorgegeben, dann kann man eine Kurve γ suchen, sodass $\gamma'(t) = V(\gamma(t))$ für alle t gilt, das heißt in jedem Punkt, durch den die Kurve hindurchgeht, hat sie den dort angehefteten Vektor als Geschwindigkeitsvektor. Solche Gleichungen nennt man Differentialgleichungen, auf die wir hier nicht eingehen.

In diesem Kapitel werden wir ein Vektorfeld $V : G \rightarrow \mathbb{R}^d$, wobei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen ist, als Kraftfeld interpretieren. In jedem Punkt $\mathbf{x} \in G$ wirkt die Kraft $V(\mathbf{x})$. Bringt man ein Teilchen in den Punkt \mathbf{x} und lässt es los, so wird es sich in Richtung $V(\mathbf{x})$ bewegen, und zwar umso schneller, je größer die Länge des Vektors $V(\mathbf{x})$ ist. Man denke an das Gravitationsfeld der Erde. Lässt man einen Gegenstand los, dann fällt er nach unten.

Ist $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, dann ist durch $V(\mathbf{x}) = \text{grad } f(\mathbf{x})$ ein Vektorfeld auf G definiert. In jedem Punkt $\mathbf{x} \in G$ gibt $V(\mathbf{x})$ die Richtung an, in der f am stärksten ansteigt. Für gegebenes V suchen wir eine Funktion f mit $V(\mathbf{x}) = \text{grad } f(\mathbf{x})$.

Beispiel: Sei $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $V(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \sin y \\ x^2 \cos y + 2y \end{pmatrix}$. Wir suchen eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ deren Gradient dieses Vektorfeld ist. Wegen $D_1 f(x, y) = 2x \sin y$ folgt $f(x, y) = x^2 \sin y + c(y)$. Die Integrationskonstante $c(y)$ kann eine Funktion in y sein, da ja nach x integriert wird. Es folgt $D_2 f(x, y) = x^2 \cos y + c'(y)$. Da auch $D_2 f(x, y) = x^2 \cos y + 2y$ gilt, erhalten wir $c'(y) = 2y$. Es folgt $c(y) = y^2 + c$ wobei c jetzt tatsächlich eine Konstante ist. Somit ist $f(x, y) = x^2 \sin y + y^2 + c$ mit beliebiger Konstante c eine Funktion für die $V(x, y) = \text{grad } f(x, y)$ gilt. Man sagt V ist ein Gradientenfeld.

Beispiel: Sei $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $V(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \sin y \\ 2y \end{pmatrix}$. Wir suchen eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ deren Gradient dieses Vektorfeld ist. Wegen $D_1 f(x, y) = 2x \sin y$ ergibt sich $f(x, y) = x^2 \sin y + c(y)$. Es folgt $D_2 f(x, y) = x^2 \cos y + c'(y)$. Wegen $D_2 f(x, y) = 2y$ erhalten wir $c'(y) = 2y - x^2 \cos y$. Da $c'(y)$ nicht von x abhängen darf, gibt es keine Lösung. Es gibt keine Funktion f mit $V(x, y) = \text{grad } f(x, y)$. Somit ist V kein Gradientenfeld.

Beispiel: Sei $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ und $V : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch $V(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^3} \mathbf{x}$. Das ist ein Gravitationsfeld einer Masse im Punkt $\mathbf{0}$. Die Vektoren sind alle zum Punkt $\mathbf{0}$ gerichtet und der Betrag der Vektoren (die Stärke des Feldes) nimmt mit dem Quadrat der Entfernung ab. Es gilt ja $\|V(\mathbf{x})\| = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2}$. Dieses Vektorfeld ist auch ein Gradientenfeld. Ist $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}$, dann gilt $\text{grad } f(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^3} \mathbf{x}$.

2. Kurvenintegrale

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $V : G \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein Vektorfeld, das wir als Kraftfeld interpretieren, sodass $V(\mathbf{x})$ die Kraft angibt, die auf einen Massenpunkt wirkt, wenn er sich im Punkt \mathbf{x} befindet. Wir nehmen ein stetiges Vektorfeld an, das heißt die Funktion $V : G \rightarrow \mathbb{R}^d$ ist stetig. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ ein stückweise differenzierbarer Weg. Wir berechnen die Arbeit, die geleistet wird, wenn sich der Massenpunkt entlang des Weges bewegt.

Die Arbeit ist gleich dem zurückgelegten Weg mal der Kraftkomponente in die Wegrichtung. Wir wählen eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ des Zeitintervalls $[a, b]$, wobei die Punkte, in denen γ nicht differenzierbar ist, unter den Zerlegungspunkten vorkommen, und wenden obige Definition der Arbeit auf die kleinen Zeitintervalle $[t_{i-1}, t_i]$ an. Den im Zeitintervall $[t_{i-1}, t_i]$ zurückgelegten Weg approximieren wir durch $\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$, das ist die Länge der Sehne. Als Wegrichtung wählen wir $\frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|}$, das ist die Richtung der Sehne. Wegen der Stetigkeit des Vektorfeldes können wir $V(\gamma(t_i))$ näherungsweise als Kraft, die auf diesem Wegstück wirkt, nehmen. Die Kraftkomponente in Wegrichtung ist daher $\langle V(\gamma(t_i)), \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|} \rangle$. Die gesamte Arbeit, die entlang des Weges verrichtet wird, kann daher approximiert werden durch

$$\sum_{i=1}^n \langle V(\gamma(t_i)), \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|} \rangle \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^n \langle V(\gamma(t_i)), \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \rangle$$

Weiters gilt $\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \approx \gamma'(t_i)(t_i - t_{i-1})$ sodass wir

$$\sum_{i=1}^n \langle V(\gamma(t_i)), \gamma'(t_i) \rangle (t_i - t_{i-1})$$

als Approximation der Arbeit erhalten. Machen wir die gewählte Zerlegung immer feiner, dann wird die Approximation immer besser und gleichzeitig konvergiert diese Summe gegen das Integral $\int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$. Dieses gibt somit die Arbeit an, die geleistet wird, wenn der Massenpunkt entlang des Weges bewegt wird.

Definition: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $V : G \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein stetiges Vektorfeld. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ ein stückweise differenzierbarer Weg. Dann heißt $\int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$ Kurvenintegral oder Wegintegral des Vektorfeldes V entlang der Kurve γ . Es wird durch $\int_{\gamma} V(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ abgekürzt.

Beispiel: Das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei durch $V(x, y) = \begin{pmatrix} -x^2 \\ y \end{pmatrix}$ definiert. Wir berechnen das Kurvenintegral entlang des Weges $\gamma(t) = (t, t^3)$ mit $t \in [0, 1]$. Zu berechnen ist $\int_0^1 \langle \begin{pmatrix} -t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix} \rangle dt = \int_0^1 -t^2 + 3t^5 dt = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Beispiel: Das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei durch $V(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ definiert. Wir berechnen das Kurvenintegral entlang des Weges $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$. Zu berechnen ist $\int_0^{2\pi} \langle \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \rangle dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$.

Der folgende Satz zeigt, dass das Kurvenintegral nur vom Weg und nicht von der Parameterdarstellung abhängt. Wir sagen, dass $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ und $\beta : [c, d] \rightarrow G$ Parameterdarstellungen desselben Weges sind, wenn eine streng monoton wachsende bijektive stetige Funktion $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$ existiert, die stückweise differenzierbar ist, sodass $\beta = \gamma \circ h$ gilt. Durch β und γ wird derselbe Weg dargestellt, der zeitliche Ablauf ist jedoch ein anderer.

Satz 3.1: Sind $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ und $\beta : [c, d] \rightarrow G$ zwei Parameterdarstellungen desselben Weges, dann gilt $\int_c^d \langle V(\beta(s)), \beta'(s) \rangle ds = \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$.

Beweis: Nach Voraussetzung existiert eine Funktion $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$, die stückweise differenzierbar und streng monoton wachsend ist, sodass $\beta = \gamma \circ h$ gilt. Wir haben dann

$\int_c^d \langle V(\beta(s)), \beta'(s) \rangle ds = \int_c^d \langle V(\gamma \circ h(s)), \gamma'(h(s))h'(s) \rangle ds = \int_c^d \langle V(\gamma \circ h(s)), \gamma'(h(s)) \rangle h'(s) ds$.
 Es folgt $\int_c^d \langle V(\beta(s)), \beta'(s) \rangle ds = \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$ durch Einführen der neuen Integrationsvariablen $t = h(s)$. Wenn h nur stückweise differenzierbar ist, dann zerlegt man das Integral in Integrale über Teilintervalle, auf denen h stetig differenzierbar ist. \square

Satz 3.2: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und V und \tilde{V} seien Vektorfelder auf G . Weiters sei c in \mathbb{R} . Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ ein stückweise differenzierbarer Weg. Für $a < d < b$ sei $\alpha : [a, d] \rightarrow G$ definiert durch $\alpha(t) = \gamma(t)$ und $\beta : [d, b] \rightarrow G$ durch $\beta(t) = \gamma(t)$, sodass γ die Zusammensetzung der Wege α und β ist. Weiters sei $\gamma^- : [-b, -a] \rightarrow G$ definiert durch $\gamma^-(t) = \gamma(-t)$, sodass γ^- den umgekehrt durchlaufenen Weg γ darstellt. Dann gilt

$$(a) \int_\gamma V(\mathbf{x}) + \tilde{V}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_\alpha V(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_\beta \tilde{V}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \text{ und } \int_\gamma cV(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = c \int_\gamma V(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$(b) \int_\gamma V(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_\alpha V(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_\beta V(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \text{ und } \int_{\gamma^-} V(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_\gamma V(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$(c) \left| \int_\gamma V(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \leq \max_{t \in [a, b]} \|V(\gamma(t))\| \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Beweis: Wir erhalten (a) aus $\langle V(\gamma(t)) + \tilde{V}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle + \langle \tilde{V}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$ und $\langle cV(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = c \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$ durch Integration von a bis b . Die Gleichungen in (b) gelten wegen $\int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^d \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt + \int_d^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$ und wegen $\int_{-a}^{-b} \langle V(\gamma(-t)), -\gamma'(-t) \rangle dt = \int_b^a \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = - \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$. Wir erhalten (c) aus $|\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle| \leq \|V(\gamma(t))\| \cdot \|\gamma'(t)\| \leq \max_{t \in [a, b]} \|V(\gamma(t))\| \cdot \|\gamma'(t)\|$ durch Integration von a bis b . \square

Nach Satz 3.1 kann man für α , β und γ^- auch irgendetwas anderen Parameterdarstellungen als die in Satz 3.2 angegebenen verwenden.

Beispiel: Das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei durch $V(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ definiert. Sei γ der im Gegenuhrzeigersinn durchlaufene Rand des Halbkreises mit Mittelpunkt $\mathbf{0}$ und Radius r , der oberhalb der x -Achse liegt. Wir berechnen das Kurvenintegral $\int_\gamma V(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$. Wegen Satz 3.2 (b) können wir den Weg in zwei Teile zerlegen und wegen Satz 3.1 beliebige Parameterdarstellungen wählen. Für den Kreisbogen wählen wir die Parameterdarstellung $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$ mit $t \in [0, \pi]$. Für das Geradenstück auf der x -Achse wählen wir die Parameterdarstellung $\beta(t) = (t, 0)$ mit $t \in [-r, r]$. Wir berechnen $\int_\alpha V(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_0^\pi \langle \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \end{pmatrix} \rangle dt = \int_0^\pi r^2 dt = \pi r^2$ und $\int_\beta V(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{-r}^r \langle \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle dt = 0$. Wegen Satz 3.2 (b) erhalten wir $\int_\gamma V(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \pi r^2 + 0 = \pi r^2$.

Satz 3.3 (Satz von Green) Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich sowohl bezüglich der x -Achse als auch bezüglich der y -Achse. Sei γ der positiv orientierte (im Gegenuhrzeigersinn durchlaufene) Rand von B , der außerdem stückweise differenzierbar sei. Sei $V : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein stetiges Vektorfeld, das im Innern von B stetige partielle Ableitungen hat. Dann gilt

$$\int_B D_1 V_2(\mathbf{x}) - D_2 V_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_\gamma V(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

wobei V_1 und V_2 die beiden Komponenten des Vektorfeldes V sind.

Beweis: Da B ein Normalbereich bezüglich der x -Achse ist, existieren ein Intervall $[a, b]$ und stetige Funktionen $g_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g_1 \leq g_2$, die außerdem stückweise differenzierbar sind, sodass $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ gilt. Wir zeigen $-\int_B D_2 V_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_\gamma \begin{pmatrix} V_1(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix} d\mathbf{x}$.

Wir zerlegen den Weg γ in vier Teile. Eine Parameterdarstellung des unteren Randes von B ist $\alpha(t) = (t, g_1(t))$ mit $t \in [a, b]$. Eine Parameterdarstellung des oberen Randes von B

ist $\beta(t) = (-t, g_2(-t))$ mit $t \in [-b, -a]$. Die Minusvorzeichen sind notwendig, damit der Weg in der richtigen Richtung durchlaufen wird. Wenn $g_1(b) < g_2(b)$ gilt, dann haben wir noch ein senkrechtes Wegstück $\sigma(t) = (b, t)$ mit $t \in [g_1(b), g_2(b)]$. Wenn $g_1(a) < g_2(a)$ gilt, dann haben wir ebenso ein senkrechtes Wegstück $\varrho(t) = (a, -t)$ mit $t \in [-g_2(a), -g_1(a)]$.

Wir berechnen zuerst $\int_{\alpha} (V_1(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \int_a^b \langle (V_1(t, g_1(t))), (g_1'(t)) \rangle dt = \int_a^b V_1(t, g_1(t)) dt$ und $\int_{\beta} (V_1(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \int_{-b}^{-a} \langle (V_1(-t, g_2(-t))), (-g_2'(-t)) \rangle dt = \int_b^a V_1(t, g_2(t)) dt = -\int_a^b V_1(t, g_2(t)) dt$. Wegen $\langle (V_1(b, t)), (0) \rangle = 0$ und $\langle (V_1(a, -t)), (0) \rangle = 0$ erhalten wir $\int_{\sigma} (V_1(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = 0$ und $\int_{\varrho} (V_1(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = 0$. Aus Satz 3.2 (b) folgt dann $\int_{\gamma} (V_1(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \int_a^b V_1(t, g_1(t)) - V_1(t, g_2(t)) dt$.

Weiters gilt $\int_B D_2 V_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} D_2 V_1(x, y) dy dx = \int_a^b V_1(x, g_2(x)) - V_1(x, g_1(x)) dx$. Damit ist $-\int_B D_2 V_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\gamma} (V_1(\mathbf{x})) d\mathbf{x}$ gezeigt.

Indem man B als Normalbereich bezüglich der y -Achse darstellt, kann man ganz analog auch $\int_B D_1 V_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\gamma} (V_2(\mathbf{x})) d\mathbf{x}$ beweisen. Addition dieser beiden Gleichungen ergibt $\int_B D_1 V_2(\mathbf{x}) - D_2 V_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\gamma} V(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$, das gewünschte Resultat. \square

Man kann Satz 3.3 zum Berechnen der Fläche eines Bereichs $B \subseteq \mathbb{R}^2$ verwenden, wenn eine Parameterdarstellung des Randes von B vorliegt. Ist γ der positiv orientierte Rand von B , dann ist die Fläche von B sowohl durch $\int_{\gamma} \binom{0}{x} d(x, y)$ als auch durch $\int_{\gamma} \binom{-y}{0} d(x, y)$ gegeben. Für $V(x, y) = \binom{0}{x}$ und $V(x, y) = \binom{-y}{0}$ gilt $D_1 V_2(x, y) - D_2 V_1(x, y) = 1$, sodass $\int_B D_1 V_2(\mathbf{x}) - D_2 V_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ und damit nach Satz 3.3 auch $\int_{\gamma} V(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ die Fläche von B ist.

Beispiel: Wir berechnen die Fläche zwischen x -Achse und einem Bogen der Zykloide mit $a = r$. Der positiv orientierte Rand dieses Bereichs besteht aus den beiden Wegstücken $\alpha(t) = (t, 0)$ mit $t \in [0, 2\pi r]$ und $\beta(t) = (-rt + r \sin t, r - r \cos t)$ mit $t \in [-2\pi, 0]$, wobei wir das Vorzeichen von t in der Parameterdarstellung der Zykloide geändert haben, um die richtige Orientierung zu erhalten. Wir berechnen $\int_{\alpha} \binom{0}{x} d(x, y) = \int_0^{2\pi r} \langle \binom{0}{t}, (1) \rangle dt = 0$ und $\int_{\beta} \binom{0}{x} d(x, y) = \int_{-2\pi}^0 \langle \binom{0}{-rt+r \sin t}, \binom{-r+r \cos t}{r \sin t} \rangle dt = \int_{-2\pi}^0 -r^2 t \sin t + r^2 \sin^2 t dt = r^2 \int_{-2\pi}^0 -t \sin t + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t dt = r^2 (t \cos t - \sin t + \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t) \Big|_{-2\pi}^0 = 3\pi r^2$. Die gesuchte Fläche ist die Summe dieser beiden Kurvenintegrale, also $3\pi r^2$.

3. Gradientenfelder

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Ein stetiges Vektorfeld $V : G \rightarrow \mathbb{R}^d$ heißt Gradientenfeld, wenn eine differenzierbare Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, für die $V = \text{grad } f$ gilt. Die Funktion f heißt Stammfunktion oder Potential des Gradientenfeldes V .

Satz 3.4: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und V ein stetiges Gradientenfeld auf G mit Stammfunktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ ein stückweise differenzierbarer Weg. Dann gilt

$$\int_{\gamma} V(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Beweis: Sei $h = f \circ \gamma$. Wegen Satz 1.7 gilt $h'(t) = \langle \text{grad } f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$ für alle $t \in [a, b]$ bis auf endlich viele, da γ stückweise differenzierbar ist. Es folgt $\int_{\gamma} V(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b h'(t) dt = h(b) - h(a)$, da h stückweise differenzierbar und stetig ist. Das ist bereits die gesuchte Gleichung. \square

Beispiel: Das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei durch $V(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^3} \mathbf{x}$ definiert. Gesucht sind die Kurvenintegrale entlang des Weges $\gamma(t) = (t, 3-t, 4-2t)$ mit $t \in [0, 1]$ und des Weges $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, 0)$ mit $t \in [0, 2\pi]$. Wir könnten diese Kurvenintegrale direkt berechnen. Aber V ist ein Gradientenfeld mit Stammfunktion $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}$. Somit hat das erste der beiden Kurvenintegrale den Wert $f(1, 2, 2) - f(0, 3, 4) = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$. Das zweite Kurvenintegral hat den Wert 0, da Anfangspunkt und Endpunkt des Weges zusammenfallen.

Nun stellt sich die Frage, wie man einem Vektorfeld ansieht, ob es ein Gradientenfeld ist. Dazu führen wir zwei Begriffe ein. Ein Dreiecksweg ist ein Weg, der den Rand eines Dreiecks durchläuft. Eine Menge $G \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt konvex, wenn mit zwei Punkten auch deren Verbindungsgerade in G liegt.

Satz 3.5: Das Vektorfeld V sei auf der offenen und konvexen Menge $G \subseteq \mathbb{R}^d$ definiert und habe stetige partielle Ableitungen. Dann sind äquivalent

- (a) V ist ein Gradientenfeld
- (b) für $1 \leq i < j \leq d$ gilt $D_j V_i = D_i V_j$ (Integrabilitätsbedingung)
- (c) $\int_\gamma V(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$ für jeden Dreiecksweg γ in G

Beweis: Wir zeigen (a) \Rightarrow (b). Wegen (a) besitzt V eine Stammfunktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$. Für $1 \leq i < j \leq d$ gilt $V_i = D_i f$ und $V_j = D_j f$, woraus $D_j V_i = D_j D_i f$ und $D_i V_j = D_i D_j f$ folgt. Nach Voraussetzung hat V stetige partielle Ableitungen. Somit sind $D_j D_i f$ und $D_i D_j f$ stetige Funktionen. Aus Satz 1.8 folgt $D_j D_i f = D_i D_j f$, das heißt $D_j V_i = D_i V_j$. Damit ist (b) gezeigt.

Wir zeigen (b) \Rightarrow (c). Für $d = 2$ ist das einfach. Sei γ ein Dreiecksweg in G . Nach Satz 3.3 gilt $\int_\gamma V(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \pm \int_B D_1 V_2(\mathbf{x}) - D_2 V_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$, wobei B das Dreieck bezeichnet, dessen Rand γ ist. Das Vorzeichen hängt von der Orientierung des Weges γ ab. Da $D_1 V_2 = D_2 V_1$ wegen (b) gilt, erhalten wir $\int_\gamma V(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$, womit (c) bereits gezeigt ist.

Wir zeigen (b) \Rightarrow (c) für beliebiges d . Dazu benötigen wir Kenntnisse aus der linearen Algebra über orthogonale Abbildungen. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ eine Parameterdarstellung eines Dreiecksweges in G . Da γ in einer Ebene liegt, gibt es eine orthogonale Abbildung φ , die diese Ebene parallel zur x_1 - x_2 -Ebene bringt, und zwar so, dass der Weg nach dieser Abbildung positive Orientierung aufweist. Sei $\beta = \varphi \circ \gamma$. Dann ist β ein positiv orientierter Dreiecksweg, der parallel zur x_1 - x_2 -Ebene liegt, das heißt $\beta'_j = 0$ für $j \geq 3$. Weiters sei A die zur orthogonalen Abbildung φ gehörige orthogonale Matrix und $\tilde{V}(\mathbf{x}) = AV(A^t \mathbf{x})$. Wegen $A^t = A^{-1}$ und $\varphi^{-1}(\mathbf{x}) = A^{-1} \mathbf{x}$ ist das Vektorfeld \tilde{V} auf der Menge $C = \varphi(G)$ definiert. Da G eine offene konvexe Menge und φ linear ist, ist auch C eine offene konvexe Menge. Weiters gilt $\gamma(t) = A^t \beta(t)$ für alle $t \in [a, b]$. Daraus folgt $\gamma'(t) = A^t \beta'(t)$ und damit erhalten wir $\int_\gamma V(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \langle V(A^t \beta(t)), A^t \beta'(t) \rangle dt = \int_a^b \langle AV(A^t \beta(t)), \beta'(t) \rangle dt$. Setzt man jetzt \tilde{V} ein und berücksichtigt, dass $\beta'_j = 0$ für $j \geq 3$ gilt, dann ergibt sich $\int_\gamma V(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_a^b \langle \tilde{V}(\beta(t)), \beta'(t) \rangle dt = \int_a^b \langle (\tilde{V}_1(\beta(t))), (\beta'_1(t)) \rangle dt$.

Wir berechnen $D_2 \tilde{V}_1$. Sei $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ und $\psi_j(\mathbf{x}) = V_j(A^t \mathbf{x})$ für $\mathbf{x} \in C$. Wegen Satz 2.2 folgt $D_i \psi_j(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^d D_k V_j(A^t \mathbf{x}) a_{ik}$, da die k -te Komponente der linearen Funktion $\mathbf{x} \mapsto A^t \mathbf{x}$ gleich $\sum_{i=1}^d a_{ik} x_i$ und die Ableitung dieser k -ten Komponente nach der i -ten Variablen gleich a_{ik} ist. Nun gilt $\tilde{V}_1(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^d a_{1j} \psi_j(\mathbf{x})$. Damit ergibt sich

$$D_2 \tilde{V}_1(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^d a_{1j} D_2 \psi_j(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_{1j} a_{2k} D_k V_j(A^t \mathbf{x})$$

Auf dieselbe Art erhalten wir $D_1 \tilde{V}_2(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_{2j} a_{1k} D_k V_j(A^t \mathbf{x})$. Da j und k Summationsindices sind, können wir j durch k und k durch j ersetzen und erhalten dadurch $D_1 \tilde{V}_2(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^d a_{2k} a_{1j} D_j V_k(A^t \mathbf{x})$. Weiters gilt $D_k V_j = D_j V_k$ für $1 \leq j, k \leq d$, da wir (b) voraussetzen. Damit ist $D_2 \tilde{V}_1 = D_1 \tilde{V}_2$ gezeigt.

Der Weg $t \mapsto \begin{pmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \end{pmatrix}$ mit $t \in [a, b]$ ist der positiv orientierte Rand eines Dreiecks B parallel zur x_1 - x_2 -Ebene. Seien $c_3, c_4, \dots, c_d \in \mathbb{R}$ so, dass $\{(x_1, x_2, c_3, \dots, c_d) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ die Ebene darstellt, die den Weg β enthält. Aus Satz 3.3 folgt

$$\int_a^b \langle \begin{pmatrix} \tilde{V}_1(\beta(t)) \\ \tilde{V}_2(\beta(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta'_1(t) \\ \beta'_2(t) \end{pmatrix} \rangle dt = \int_B D_1 \tilde{V}_2(x_1, x_2, c_3, \dots, c_d) - D_2 \tilde{V}_1(x_1, x_2, c_3, \dots, c_d) d(x_1, x_2)$$

Da wir $D_2 \tilde{V}_1 = D_1 \tilde{V}_2$ gezeigt haben, erhalten wir $\int_a^b \langle \begin{pmatrix} \tilde{V}_1(\beta(t)) \\ \tilde{V}_2(\beta(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta'_1(t) \\ \beta'_2(t) \end{pmatrix} \rangle dt = 0$ und damit auch $\int_\gamma V(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$. Das beweist (c).

Schließlich zeigen wir (c) \Rightarrow (a). Wir fixieren irgendeinen Punkt $\mathbf{a} \in G$. Für $\mathbf{x} \in G$ sei $\gamma_{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ mit $t \in [0, 1]$. Der Weg $\gamma_{\mathbf{x}}$ ist das Geradenstück von \mathbf{a} nach \mathbf{x} . Da G konvex ist, liegt $\gamma_{\mathbf{x}}$ ganz in G .

Wir definieren die Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(\mathbf{u}) = \int_{\gamma_{\mathbf{u}}} V(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ für $\mathbf{u} \in G$. Sei \mathbf{e}_j der j -te Einheitsvektor, das ist der Vektor, der in der j -ten Koordinate Eintragung 1 hat und sonst Eintragungen 0. Sei $\mathbf{y} \in G$. Wir berechnen $D_j f(\mathbf{y})$. Dazu sei $h > 0$ und $\mathbf{z} = \mathbf{y} + h\mathbf{e}_j$. Weiters sei $\beta(t) = \mathbf{y} + t\mathbf{e}_j$ mit $t \in [0, h]$. Die Zusammensetzung der Wege $\gamma_{\mathbf{y}}$, β und $\gamma_{\mathbf{z}}$ ist ein Dreiecksweg. Wegen (c) haben wir $\int_{\gamma_{\mathbf{y}}} V(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\beta} V(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\gamma_{\mathbf{z}}} V(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$ das heißt $\frac{f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{y})}{h} = \frac{1}{h} \int_{\beta} V(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$. Nun gilt $\frac{1}{h} \int_{\beta} V(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{h} \int_0^h \langle V(\mathbf{y} + t\mathbf{e}_j), \mathbf{e}_j \rangle dt = \frac{1}{h} \int_0^h V_j(\mathbf{y} + t\mathbf{e}_j) dt$. Da V_j eine stetige Funktion ist, erhalten wir $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{y})}{h} = V_j(\mathbf{y})$. Damit ist $D_j f(\mathbf{y}) = V_j(\mathbf{y})$ für alle $\mathbf{y} \in G$ gezeigt. Somit ist f eine Stammfunktion von V und (a) ist bewiesen. \square

Beispiel: Sei $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ und $V(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$. Die Integrabilitätsbedingung ist erfüllt, da $D_1 V_2(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ und $D_2 V_1(x, y) = \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ gilt. Aber $V : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist kein Gradientenfeld. Sei $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$. Dann gilt $\int_\gamma V(x, y) d(x, y) = \int_0^{2\pi} \langle \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \rangle dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$. Wäre $V : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Gradientenfeld, dann müsste $\int_\gamma V(x, y) d(x, y) = 0$ gelten wegen Satz 3.4. Das ist kein Widerspruch zu Satz 3.5, da G nicht konvex ist.

Wir kehren zur Frage zurück, ob zu einem vorgegebenem Vektorfeld V eine Stammfunktion existiert, also eine Funktion f mit $V(\mathbf{x}) = \text{grad } f(\mathbf{x})$. Für ein Vektorfeld V auf einer offenen konvexen Menge G gibt Satz 3.5 eine Bedingung an, unter der eine Stammfunktion existiert. Ist diese Integrabilitätsbedingung erfüllt, dann können wir die Stammfunktion berechnen, wie wir es bereits früher getan haben. Jetzt tun wir es in drei Dimensionen.

Beispiel: Durch $V_1(x, y, z) = y$, $V_2(x, y, z) = x + e^z$ und $V_3(x, y, z) = ye^z$ ist ein Vektorfeld auf \mathbb{R}^3 gegeben. Da $D_2 V_1(x, y, z) = D_1 V_2(x, y, z) = 1$, $D_3 V_1(x, y, z) = D_1 V_3(x, y, z) = 0$ und $D_2 V_3(x, y, z) = D_3 V_2(x, y, z) = e^z$ gelten, ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt. Nach Satz 3.5 existiert eine Stammfunktion, da \mathbb{R}^3 eine konvexe Menge ist. Wir berechnen eine Stammfunktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Wegen $V_1(x, y, z) = y$ gilt $D_1 f(x, y, z) = y$, woraus $f(x, y, z) = xy + u(y, z)$ folgt. Wegen $V_2(x, y, z) = x + e^z$ gilt $x + D_2 u(y, z) = x + e^z$, woraus $D_2 u(y, z) = e^z$ und $u(y, z) = ye^z + v(z)$ folgt. Wegen $V_3(x, y, z) = ye^z$ gilt schließlich $ye^z + v'(z) = ye^z$, woraus $v'(z) = 0$ folgt, sodass v eine Konstante c ist. Wir haben also $f(x, y, z) = xy + ye^z + c$ erhalten.

IV. Anhang: Divergenz und Rotation

Es geht wieder um Vektorfelder, die wir jetzt als Geschwindigkeitsfelder interpretieren. Es wird das Oberflächenintegral eingeführt, das den Fluss durch ein Flächenstück berechnet, Divergenz und Rotation werden definiert und die Integralsätze von Gauß und Stokes behandelt.

1. Das Oberflächenintegral

Das Oberflächenintegral ist dem Kurvenintegral ähnlich. Es berechnet aber nicht die Arbeit, sondern das Flüssigkeitsvolumen, das pro Zeiteinheit durch ein Flächenstück fließt. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $V : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld, das wir als Geschwindigkeitsfeld interpretieren. Der Vektor $V(\mathbf{x})$ ist der Geschwindigkeitsvektor im Punkt \mathbf{x} einer im Gebiet G strömenden Flüssigkeit. Sei $\varphi : B \rightarrow G$ eine Parameterdarstellung einer Fläche in G , wobei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich ist. Wir nehmen an, dass φ im Innern von B stetige partielle Ableitungen besitzt. Wir berechnen das Flüssigkeitsvolumen, das pro Zeiteinheit durch die Fläche $\varphi(B)$ fließt.

Dazu unterteilen wir B in kleine Rechtecke $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$. Der Flächeninhalt des Flächenstücks $R = \varphi([x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j])$ ist dann näherungsweise gleich dem Flächeninhalt des durch die Vektoren $\varphi(x_i, y_j) - \varphi(x_{i-1}, y_j) \approx (x_i - x_{i-1})D_1\varphi(x_i, y_j) = \mathbf{a}$ und $\varphi(x_i, y_j) - \varphi(x_i, y_{j-1}) \approx (y_j - y_{j-1})D_2\varphi(x_i, y_j) = \mathbf{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Sei $\mathbf{c} = V(\varphi(x_i, y_j))$ der Geschwindigkeitsvektor im Punkt $\varphi(x_i, y_j)$. Da V stetig ist, ist \mathbf{c} näherungsweise der Geschwindigkeitsvektor auf dem gesamten Flächenstück R . Das Flüssigkeitsvolumen, das pro Zeiteinheit durch das Flächenstück R fließt, ist daher gleich dem Volumen, das durch das Flächenstück R bei Verschiebung um den Vektor \mathbf{c} überstrichen wird. Approximieren wir R noch durch das von den Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannte Parallelogramm, dann ist dieses Volumen gleich

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle = \langle V(\varphi(x_i, y_j)), D_1\varphi(x_i, y_j) \times D_2\varphi(x_i, y_j) \rangle (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

Das Flüssigkeitsvolumen, das pro Zeiteinheit durch die gesamte Fläche $\varphi(B)$ fließt, wird dann durch die Summe dieser Volumina approximiert

$$\sum_i \sum_j \langle V(\varphi(x_i, y_j)), D_1\varphi(x_i, y_j) \times D_2\varphi(x_i, y_j) \rangle (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

Das ist eine Riemannsumme eines Integrals über den Bereich B . Da bei feiner werdender Zerlegung in Rechtecke sowohl die Approximation immer besser wird als auch die Riemannsumme gegen das Integral

$$\int_B \langle V(\varphi(x, y)), D_1\varphi(x, y) \times D_2\varphi(x, y) \rangle d(x, y)$$

konvergiert, gibt dieses Integral das Flüssigkeitsvolumen an, das pro Zeiteinheit durch die Fläche $\varphi(B)$ fließt. Man nennt dieses Integral ein Oberflächenintegral und verwendet dafür die symbolische Schreibweise $\int_{\varphi} V \cdot d\sigma$, wobei der Punkt für das innere Produkt steht und $d\sigma$ für $D_1\varphi(x, y) \times D_2\varphi(x, y) d(x, y)$.

Allerdings muss noch etwas zur Orientierung der Fläche gesagt werden. Der Normalvektor $D_1\varphi(x, y) \times D_2\varphi(x, y)$ auf die von der Parameterdarstellung $\varphi : B \rightarrow G$ bestimmte Fläche soll immer auf dieselbe Seite der Fläche zeigen. (Da φ stetige partielle Ableitungen besitzt, ist das erfüllt, wenn $D_1\varphi(x, y) \times D_2\varphi(x, y)$ nie der Nullvektor ist.) Die Seite der Fläche, zu der der Normalvektor zeigt, nennen wir positiv, die andere Seite negativ. Damit ist die Orientierung der Fläche festgelegt. Da $\langle V(\varphi(x, y)), D_1\varphi(x, y) \times D_2\varphi(x, y) \rangle$

positives Vorzeichen hat, wenn der Geschwindigkeitsvektor $V(\varphi(x, y))$ mit dem Normalvektor $D_1\varphi(x, y) \times D_2\varphi(x, y)$ einen spitzen Winkel einschließt (Strömung zur positiven Seite der Fläche), und sonst negatives Vorzeichen, gibt das Oberflächenintegral $\int_{\varphi} V \cdot d\sigma$ das Flüssigkeitsvolumen pro Zeiteinheit an, das von der negativen zur positiven Seite der Fläche fließt, minus dem Flüssigkeitsvolumen, das von der positiven zur negativen Seite fließt.

Bemerkung: Das Oberflächenintegral $\int_{\varphi} V \cdot d\sigma$ hängt zwar von der Orientierung der Fläche, nicht aber von der gewählten Parameterdarstellung ab. Hat man zwei Parameterdarstellungen, für die dieselbe Seite der Fläche die positive ist, dann hat das Oberflächenintegral für beide Parameterdarstellungen denselben Wert. Das ergibt sich aus obiger Herleitung. Der Fluss durch die Fläche ist derselbe, unabhängig von der gewählten Parameterdarstellung. Vertauscht man die Orientierung, dann ändert das Oberflächenintegral das Vorzeichen.

Es folgt ein Beispiel. Wir schreiben Vektoren nicht als Spalten, sondern als Zeilen, da das besser in den Text passt. Die Koordinaten im \mathbb{R}^3 werden mit x, y, z bezeichnet.

Beispiel: Das Vektorfeld $V(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ ist auf $G = \mathbb{R}^3$ definiert. Als Fläche nehmen wir die Oberfläche des Zylinders, dessen Basis der Einheitskreis in der x - y -Ebene ist und der Höhe 1 hat. Die Orientierung dieser Fläche sei so gewählt, dass die Außenseite des Zylinders die positive Seite der Fläche ist, das heißt die Normalvektoren zeigen nach außen. Zu berechnen ist das Oberflächenintegral.

Wir teilen die Oberfläche in drei Teile, in die Mantelfläche, in die Grundfläche und die Deckfläche. Wir können das Oberflächenintegral über jeden dieser drei Teile separat berechnen und dann addieren.

Wir beginnen mit der Mantelfläche. Wir können eine beliebige Parameterdarstellung wählen, zum Beispiel $\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ mit $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$. Allerdings muss der Normalvektor im Punkt $\varphi(u, v)$, das ist der Vektor $D_1\varphi(u, v) \times D_2\varphi(u, v)$ nach außen zeigen. Es gilt $D_1\varphi(u, v) \times D_2\varphi(u, v) = (-\sin u, \cos u, 0) \times (0, 0, 1) = (\cos u, \sin u, 0)$. Das ist der Normalvektor im Punkt $\varphi(u, v)$ an die Fläche und er zeigt nach außen. Es folgt $\langle V(\varphi(u, v)), D_1\varphi(u, v) \times D_2\varphi(u, v) \rangle = \cos^2 u \cos u + \sin^2 u \sin u + v^2 \cdot 0 = \cos^3 u + \sin^3 u$. Somit ergibt sich $\int_{\varphi} V \cdot d\sigma = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \cos^3 u + \sin^3 u \, du \, dv$. Es ist leicht zu sehen, dass dieses Integral null ergibt, da die Funktionen $\cos^3 u$ und $\sin^3 u$ dieselbe Fläche oberhalb und unterhalb der Koordinatenachse eingrenzen.

Für die Grundfläche ist $\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, 0)$ mit $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$ eine geeignete Parameterdarstellung. Sie ist so gewählt, dass der Normalvektor im Punkt $\varphi(u, v)$ an die Fläche, das ist $D_1\varphi(u, v) \times D_2\varphi(u, v) = (-v \sin u, v \cos u, 0) \times (\cos u, \sin u, 0) = (0, 0, -v)$, nach außen zeigt. Für alle $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$ ist die dritte Koordinate von $V(\varphi(u, v))$ gleich 0 und daher auch $\langle V(\varphi(u, v)), D_1\varphi(u, v) \times D_2\varphi(u, v) \rangle = 0$. Es folgt $\int_{\varphi} V \cdot d\sigma = 0$.

Für die Deckfläche ist $\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 1)$ mit $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$ eine geeignete Parameterdarstellung. Die Parameter u und v sind vertauscht, damit der Normalvektor $D_1\varphi(u, v) \times D_2\varphi(u, v) = (\cos v, \sin v, 0) \times (-u \sin v, u \cos v, 0) = (0, 0, u)$ wieder nach außen zeigt. Für alle $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$ ist die dritte Koordinate von $V(\varphi(u, v))$ gleich 1 und somit $\langle V(\varphi(u, v)), D_1\varphi(u, v) \times D_2\varphi(u, v) \rangle = u$. Es folgt $\int_{\varphi} V \cdot d\sigma = \int_0^1 \int_0^{2\pi} u \, dv \, du = \pi$.

Das Oberflächenintegral über die gesamte Oberfläche des Zylinders ist die Summe der drei oben berechneten Integrale, also $0 + 0 + \pi = \pi$.

2. Divergenz

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Der Gradient transformiert eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ in ein Vektorfeld auf G . Bei der Divergenz ist es umgekehrt. Sie transformiert ein Vektorfeld $V : G \rightarrow \mathbb{R}^d$ in eine Funktion auf G . Man kann die Divergenz in jeder Dimension d definieren, wir tun es hier nur für Dimension $d = 3$.

Sei also $G \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $V : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld mit stetigen partiellen Ableitungen, das wir als Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit interpretieren. Sei $\mathbf{x} = (x, y, z) \in G$. Wir wollen herausfinden, ob Flüssigkeit im Punkt \mathbf{x} verschwindet – dann ist \mathbf{x} eine Senke – oder ob Flüssigkeit aus dem Punkt \mathbf{x} entspringt – dann ist \mathbf{x} eine Quelle. Natürlich kann \mathbf{x} auch keines von beiden sein. Die Komponenten von V seien V_1, V_2 und V_3 und \mathbf{e}_k sei der k -te Einheitsvektor, der in der k -ten Koordinate 1 und sonst Nullen hat.

Sei $h > 0$ und $W = [x - \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}] \times [y - \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}] \times [z - \frac{h}{2}, z + \frac{h}{2}]$ ein kleiner Würfel mit Seitenlänge h und Mittelpunkt $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Für die linke Seitenfläche des Würfels ist $-\mathbf{e}_1$ der nach außen zeigende Normalvektor der Länge 1. Das Flüssigkeitsvolumen, das durch diese Seitenfläche aus dem Würfel pro Zeiteinheit herausströmt, lässt sich daher durch $h^2 \langle V(x - \frac{h}{2}, y, z), -\mathbf{e}_1 \rangle = -h^2 V_1(x - \frac{h}{2}, y, z)$ approximieren. (Das Herausströmen eines negativen Flüssigkeitsvolumens bedeutet dabei ein Hineinströmen.) Für die rechte Seitenfläche des Würfels ist \mathbf{e}_1 der nach außen zeigende Normalvektor der Länge 1. Das Flüssigkeitsvolumen, das durch diese Seitenfläche aus dem Würfel pro Zeiteinheit herausströmt, lässt sich durch $h^2 \langle V(x + \frac{h}{2}, y, z), \mathbf{e}_1 \rangle = h^2 V_1(x + \frac{h}{2}, y, z)$ approximieren. Das Flüssigkeitsvolumen, das durch die rechte und linke Seitenfläche aus dem Würfel pro Zeiteinheit herausströmt, lässt sich dann durch

$$h^2 V_1(x + \frac{h}{2}, y, z) - h^2 V_1(x - \frac{h}{2}, y, z) \approx h^3 D_1 V_1(x, y, z)$$

approximieren. Ebenso lässt sich das Flüssigkeitsvolumen, das durch die vordere und hintere Seitenfläche aus dem Würfel pro Zeiteinheit herausströmt, durch

$$h^2 V_2(x, y + \frac{h}{2}, z) - h^2 V_2(x, y - \frac{h}{2}, z) \approx h^3 D_2 V_2(x, y, z)$$

und das Flüssigkeitsvolumen, das durch die obere und untere Seitenfläche aus dem Würfel pro Zeiteinheit herausströmt, durch

$$h^2 V_3(x, y, z + \frac{h}{2}) - h^2 V_3(x, y, z - \frac{h}{2}) \approx h^3 D_3 V_3(x, y, z)$$

approximieren.

Definition: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $V : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Die Funktion $\operatorname{div} V : G \rightarrow \mathbb{R}$, die durch $\operatorname{div} V(\mathbf{x}) = D_1 V_1(\mathbf{x}) + D_2 V_2(\mathbf{x}) + D_3 V_3(\mathbf{x})$ definiert ist, nennt man die Divergenz des Vektorfeldes.

Nach obigen Überlegungen gibt $h^3 \operatorname{div} V(\mathbf{x}) = h^3 D_1 V_1(\mathbf{x}) + h^3 D_2 V_2(\mathbf{x}) + h^3 D_3 V_3(\mathbf{x})$ näherungsweise das Flüssigkeitsvolumen an, das pro Zeiteinheit aus einem kleinen Würfel der Seitenlänge h mit Mittelpunkt \mathbf{x} herausströmt, wenn V das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit ist. Das Herausströmen eines negativen Flüssigkeitsvolumens bedeutet dabei ein Hineinströmen. Man nennt den Punkt \mathbf{x} eine Quelle, wenn $\operatorname{div} V(\mathbf{x}) > 0$ gilt, und eine Senke, wenn $\operatorname{div} V(\mathbf{x}) < 0$ gilt. In einer Quelle entspringt Flüssigkeit, in einer Senke verschwindet sie. Das Vektorfeld $V : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt quellenfrei, wenn $\operatorname{div} V(\mathbf{x}) = 0$ für alle $\mathbf{x} \in G$ gilt.

Beispiel: Sei $V(\mathbf{x}) = \frac{-\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^c}$. Dieses Vektorfeld ist auf $G = \mathbb{R}^3$ definiert, wenn $c \leq 0$ ist, und auf $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$, wenn $c > 0$ ist. Von jedem Punkt aus strömt die Flüssigkeit Richtung

Nullpunkt. Mit Hilfe der Quotientenregel erhalten wir wegen $V_i(\mathbf{x}) = \frac{-x_i}{\|\mathbf{x}\|^c} = \frac{-x_i}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{c/2}}$

$$D_i V_i(\mathbf{x}) = \frac{-\|\mathbf{x}\|^{c+x_i c} \|\mathbf{x}\|^{c-2} x_i}{\|\mathbf{x}\|^{2c}} \quad \text{für } 1 \leq i \leq 3$$

Es folgt $\operatorname{div} V(\mathbf{x}) = \frac{-3+c}{\|\mathbf{x}\|^c}$. Für $c = 3$ gilt $\operatorname{div} V(\mathbf{x}) = 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. In diesem Fall wird die Geschwindigkeit zum Nullpunkt immer schneller, sodass in jedem Punkt genausoviel abfließt wie zufließt.

3. Rotation

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ offen. Die Rotation transformiert ein Vektorfeld $V : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ in ein Vektorfeld auf G .

Definition: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $V : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Das Vektorfeld $\operatorname{rot} V : G \rightarrow \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$\operatorname{rot} V(\mathbf{x}) = (D_2 V_3(\mathbf{x}) - D_3 V_2(\mathbf{x}), D_3 V_1(\mathbf{x}) - D_1 V_3(\mathbf{x}), D_1 V_2(\mathbf{x}) - D_2 V_1(\mathbf{x}))$$

nennt man die Rotation des Vektorfeldes V .

Wieder interpretieren wir das Vektorfeld $V : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ als Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit. Befindet man sich im Punkt \mathbf{x} und beobachtet in der Umgebung von \mathbf{x} eine Rotation der strömenden Flüssigkeit, dann ist $\operatorname{rot} V(\mathbf{x})$ ein Vektor, der senkrecht auf der Rotationsebene steht, dessen Orientierung die Richtung der Rotation angibt und dessen Länge der Rotationsgeschwindigkeit entspricht.

Beispiel: Wir untersuchen ein einfaches Beispiel. Sei $V(\mathbf{x}) = (0, cx, 0)$ auf $G = \mathbb{R}^3$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Wir betrachten nur die x - y -Ebene. Denn in jeder Ebene parallel dazu hat man dieselbe Strömung, da das Vektorfeld nicht von z abhängt. Die Geschwindigkeitsvektoren liegen alle parallel zur y -Achse.

Da $V_3(\mathbf{x}) = 0$ ist, haben wir $D_1 V_3(\mathbf{x}) = 0$ und $D_2 V_3(\mathbf{x}) = 0$ für $\mathbf{x} \in G$. Da $V_1(\mathbf{x})$ und $V_2(\mathbf{x})$ nicht von z abhängen, haben wir $D_3 V_1(\mathbf{x}) = 0$ und $D_3 V_2(\mathbf{x}) = 0$ für $\mathbf{x} \in G$. Daher sind die ersten beiden Komponenten von $\operatorname{rot} V(\mathbf{x})$ gleich null. Die dritte Komponente von $\operatorname{rot} V(\mathbf{x})$ ist $D_1 V_2(\mathbf{x}) - D_2 V_1(\mathbf{x}) = c - 0 = c$. Es gilt $\operatorname{rot} V(\mathbf{x}) = (0, 0, c)$ für alle $\mathbf{x} \in G$.

Wir schwimmen mit der Strömung in der x - y -Ebene und beobachten die Umgebung. Ist $c = 0$, dann sind alle Geschwindigkeitsvektoren null. Die Strömung steht still. Daher gibt es auch keine Rotation, wir haben $\operatorname{rot} V(\mathbf{x}) = (0, 0, 0)$ für alle $\mathbf{x} \in G$. Ist $c < 0$, dann schwimmen wir parallel zur y -Achse und beobachten dass die Strömung links von uns vorausseilt und die Strömung rechts von uns zurückbleibt. Wir beobachten in einer kleinen Umgebung eine Rotation in der x - y -Ebene im Uhrzeigersinn (negative Richtung). Dementsprechend steht $\operatorname{rot} V(\mathbf{x})$ senkrecht auf die x - y -Ebene, das ist die Rotationsebene, und zeigt nach unten. Ist $c > 0$, dann schwimmen wir wieder parallel zur y -Achse, aber wir beobachten, dass jetzt die Strömung links von uns zurückbleibt und die Strömung rechts von uns vorausseilt. Wir beobachten in einer kleinen Umgebung eine Rotation in der x - y -Ebene im Gegenuhrzeigersinn (positive Richtung). Wieder steht $\operatorname{rot} V(\mathbf{x})$ senkrecht auf die x - y -Ebene, das ist die Rotationsebene, zeigt aber nach oben.

Bemerkung: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ offen. Ein Vektorfeld $V : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt Gradientenfeld, wenn eine integrierbare Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, sodass $V = \operatorname{grad} f$ gilt. Ist G konvex und hat das Vektorfeld V stetige partielle Ableitungen, dann ist V genau dann ein Gradientenfeld, wenn die Integrabilitätsbedingungen $D_1 V_2 = D_2 V_1$, $D_1 V_3 = D_3 V_1$ und

$D_2V_3 = D_3V_2$ gelten. Man sieht sofort, dass diese Integrabilitätsbedingungen äquivalent zu $\operatorname{rot} V = \mathbf{0}$ sind. Ein Vektorfeld auf einer offenen konvexen Teilmenge des \mathbb{R}^3 ist genau dann ein Gradientenfeld, wenn es Rotation null hat. Ein Gradientenfeld zeigt immer in Richtung des stärksten Anstiegs der Stammfunktion f . Daher gibt es keine Rotation.

4. Integralsätze

Der Integralsatz von Gauß ist eine direkte Verallgemeinerung des Satzes von Green. Auch der Beweis verläuft ganz analog.

Satz 4.1 (Satz von Gauß) *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ konvex, sodass der Rand von M eine Fläche ist, die eine stückweise differenzierbare Parameterdarstellung hat. Sei φ irgendeine Parameterdarstellung des Randes von M , die so orientiert ist, dass der Normalvektor $D_1\varphi \times D_2\varphi$ immer nach außen zeigt. Sei V ein stetig differenzierbares Vektorfeld, das auf einer offenen Umgebung der Menge M definiert ist. Dann gilt $\int_M \operatorname{div} V(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_\varphi V \cdot d\sigma$.*

Beweis: Sei B die Projektion der konvexen Menge M auf die x - y -Ebene. Dann ist B eine konvexe Teilmenge des \mathbb{R}^2 . Es existieren Funktionen $g_1 : B \rightarrow \mathbb{R}$ und $g_2 : B \rightarrow \mathbb{R}$ für die $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in B, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$ gilt. Wir können eine beliebige Parameterdarstellung des Randes wählen, da das Oberflächenintegral davon nicht abhängt. Dazu zerlegen wir den Rand von M in drei Teile. Eine Parameterdarstellung für den oberen Rand von M ist $\varphi_o(x, y) = (x, y, g_2(x, y))$ und eine für den unteren Rand ist $\varphi_u(x, y) = (x, y, g_1(x, y))$ jeweils mit $(x, y) \in B$. Die nach außen zeigenden Normalvektoren sind $D_1\varphi_o(x, y) \times D_2\varphi_o(x, y) = (-D_1g_2(x, y), -D_2g_2(x, y), 1)$ und $D_2\varphi_u(x, y) \times D_1\varphi_u(x, y) = (D_1g_1(x, y), D_2g_1(x, y), -1)$. Der dritte Teil des Randes von M , der auch leer sein kann, besteht aus dem senkrecht zur x - y -Ebene stehenden Teil über dem Rand von B . Sei φ_s eine Parameterdarstellung dieses Teils. Der Normalvektor darauf hat immer Null als dritte Koordinate.

Sei $W(\mathbf{x}) = (0, 0, V_3(\mathbf{x}))$. Dann gilt $\langle W(\varphi_o(x, y)), D_1\varphi_o(x, y) \times D_2\varphi_o(x, y) \rangle = V_3(\varphi_o(x, y))$ und $\langle W(\varphi_u(x, y)), D_2\varphi_u(x, y) \times D_1\varphi_u(x, y) \rangle = -V_3(\varphi_u(x, y))$. Da der Normalvektor des dritten Teils des Randes von M Null als dritte Koordinate hat, ist das innere Produkt von $W(\varphi_s(x, y))$ mit diesem Normalvektor ebenfalls Null. Wir erhalten daher

$$\begin{aligned} \int_\varphi (0, 0, V_3) \cdot d\sigma &= \int_\varphi W \cdot d\sigma = \int_{\varphi_o} W \cdot d\sigma + \int_{\varphi_u} W \cdot d\sigma + \int_{\varphi_s} W \cdot d\sigma \\ &= \int_B V_3(\varphi_o(x, y)) d(x, y) - \int_B V_3(\varphi_u(x, y)) d(x, y) + 0 \\ &= \int_B V_3(x, y, g_2(x, y)) d(x, y) - \int_B V_3(x, y, g_1(x, y)) d(x, y) \end{aligned}$$

Andererseits gilt auch unter Verwendung obiger Darstellung von M als Normalbereich

$$\begin{aligned} \int_M D_3V_3(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_B \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} D_3V_3(x, y, z) dz d(x, y) \\ &= \int_B V_3(x, y, g_2(x, y)) d(x, y) - \int_B V_3(x, y, g_1(x, y)) d(x, y) \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass $\int_M D_3V_3(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_\varphi (0, 0, V_3) \cdot d\sigma$ gilt. Indem man M als Normalbereich bezüglich anderer Koordinatenebenen schreibt, beweist man analog, dass auch $\int_M D_1V_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_\varphi (V_1, 0, 0) \cdot d\sigma$ und $\int_M D_2V_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_\varphi (0, V_2, 0) \cdot d\sigma$ gilt. Die Addition dieser drei Gleichungen ergibt $\int_M \operatorname{div} V(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_\varphi V \cdot d\sigma$, das gewünschte Resultat. \square

Beispiel: Das Vektorfeld $V(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ ist auf $G = \mathbb{R}^3$ definiert. Sei M der Zylinder, dessen Basis der Einheitskreis in der x - y -Ebene ist und der Höhe 1 hat. In

einem früheren Beispiel wurde $\int_{\varphi} V \cdot d\sigma$ berechnet, wobei φ eine Parameterdarstellung der Oberfläche von M mit nach außen zeigendem Normalvektor war. Das Ergebnis war π . Wir berechnen $\int_M \operatorname{div} V(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$. Es gilt $\operatorname{div} V(x, y, z) = 2x + 2y + 2z$. Damit erhalten wir $\int_M \operatorname{div} V(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 2 \int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x + y + z \, dx \, dy \, dz$. Das innerste Integral ergibt $2y\sqrt{1-y^2} + 2z\sqrt{1-y^2}$. Es folgt dann $\int_{-1}^1 2y\sqrt{1-y^2} + 2z\sqrt{1-y^2} \, dy = -\frac{2}{3}\sqrt{1-y^2}^3 + zy\sqrt{1-y^2} - z \arccos y \Big|_{-1}^1 = z\pi$. Schließlich berechnet man noch $\int_0^1 z\pi \, dz = \frac{\pi}{2}$. Wir erhalten somit $\int_M \operatorname{div} V(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \pi$. Nach Satz 4.1 muss das auch so sein. Es muss dasselbe Ergebnis herauskommen wie beim Oberflächenintegral.

Der Integralsatz von Stokes lässt sich auf den Satz von Green zurückführen.

Satz 4.2 (Satz von Stokes) *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ offen. Sei $\varphi : B \rightarrow G$ eine zweimal stetig differenzierbare Parameterdarstellung einer Fläche, wobei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich ist. Sei $\delta : [a, b] \rightarrow B$ eine stückweise differenzierbare positiv orientierte (im Gegenuhrzeigersinn durchlaufene) Parameterdarstellung des Randes von B , sodass $\gamma = \varphi \circ \delta : [a, b] \rightarrow G$ eine Parameterdarstellung des Randes der Fläche $\varphi(B)$ ist. Sei $V : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt $\int_{\gamma} V(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\varphi} \operatorname{rot} V \cdot d\sigma$.*

Beweis: Sei $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $g(\mathbf{u}) = V_1(\varphi(\mathbf{u}))$. Dann gilt $V_1(\gamma(t)) = g(\delta(t))$ und $\gamma'_1(t) = D_1\varphi_1(\delta(t))\delta'_1(t) + D_2\varphi_1(\delta(t))\delta'_2(t)$ nach der Kettenregel. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (V_1(\mathbf{x}), 0, 0) \, d\mathbf{x} &= \int_a^b V_1(\gamma(t))\gamma'_1(t) \, dt = \int_a^b g(\delta(t))(D_1\varphi_1(\delta(t))\delta'_1(t) + D_2\varphi_1(\delta(t))\delta'_2(t)) \, dt \\ &= \int_{\delta} (g(\mathbf{u})D_1\varphi_1(\mathbf{u}), g(\mathbf{u})D_2\varphi_1(\mathbf{u})) \, d\mathbf{u} = \int_B D_1(g D_2\varphi_1)(\mathbf{u}) - D_2(g D_1\varphi_1)(\mathbf{u}) \, d\mathbf{u} \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung eine Anwendung des Satzes von Green ist. Es sind die Ableitungen im letzten Integral zu berechnen. Nach der Produktregel ist $D_1(g D_2\varphi_1) - D_2(g D_1\varphi_1)$ gleich $D_1g D_2\varphi_1 + g D_1D_2\varphi_1 - D_2g D_1\varphi_1 - g D_2D_1\varphi_1 = D_1g D_2\varphi_1 - D_2g D_1\varphi_1$. Wir setzen $\mathbf{a} = D_1\varphi(\mathbf{u}) \times D_2\varphi(\mathbf{u})$, das ist der Normalvektor an die Fläche im Punkt $\varphi(\mathbf{u})$. Im nächsten Schritt berechnet man $D_1g(\mathbf{u})$ und $D_2g(\mathbf{u})$ unter Verwendung von $g(\mathbf{u}) = V_1(\varphi(\mathbf{u}))$ mit Hilfe der Kettenregel. Setzt man das Ergebnis oben ein und formt entsprechend um, so erhält man $D_1(g D_2\varphi_1)(\mathbf{u}) - D_2(g D_1\varphi_1)(\mathbf{u}) = -D_2V_1(\varphi(\mathbf{u}))a_3 + D_3V_1(\varphi(\mathbf{u}))a_2$. Das ist aber gleich $\langle (0, D_3V_1(\varphi(\mathbf{u})), -D_2V_1(\varphi(\mathbf{u}))), \mathbf{a} \rangle$. Ganz oben eingesetzt ergibt das

$$\int_{\gamma} (V_1(\mathbf{x}), 0, 0) \, d\mathbf{x} = \int_B \langle (0, D_3V_1(\varphi(\mathbf{u})), -D_2V_1(\varphi(\mathbf{u}))), \mathbf{a} \rangle \, d\mathbf{u} = \int_{\varphi} (0, D_3V_1, -D_2V_1) \cdot d\sigma$$

Ganz analog beweist man die Gleichungen $\int_{\gamma} (0, V_2(\mathbf{x}), 0) \, d\mathbf{x} = \int_{\varphi} (-D_3V_2, 0, D_1V_2) \cdot d\sigma$ und $\int_{\gamma} (0, 0, V_3(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} = \int_{\varphi} (D_2V_3, -D_1V_3, 0) \cdot d\sigma$. Addiert man diese drei Gleichungen, so erhält man $\int_{\gamma} V(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\varphi} \operatorname{rot} V \cdot d\sigma$. \square

V. Anhang: Fundamentalsatz der Algebra

Wir verallgemeinern den Satz von Bolzano–Weierstraß und den Satz über Maxima und Minima von stetigen Funktionen. Damit beweisen wir den Fundamentalsatz der Algebra.

1. Teilfolgen und Extrema

Wir beweisen den Satz von Bolzano–Weierstraß im \mathbb{R}^d und verwenden ihn dann, um zu zeigen, dass eine stetige Funktion auf einer beschränkten abgeschlossenen Teilmenge des \mathbb{R}^d mit Werten in \mathbb{R} ihr Maximum und ihr Minimum annimmt.

Ist $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ eine Folge im \mathbb{R}^d , dann nennt man jede Folge $\mathbf{x}_{n_0}, \mathbf{x}_{n_1}, \mathbf{x}_{n_2}, \mathbf{x}_{n_3}, \dots$ mit $n_0 < n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ eine Teilfolge. Man schreibt so eine Teilfolge dann als $(\mathbf{x}_{n_k})_{k \geq 0}$.

Eine Folge $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ im \mathbb{R}^d heißt beschränkt, wenn ein $c > 0$ existiert, sodass $\mathbf{x}_n \in [-c, c]^d$ für alle $n \geq 0$ gilt.

Satz 5.1 (Satz von Bolzano–Weierstraß im \mathbb{R}^d) *Jede beschränkte Folge $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ im \mathbb{R}^d hat eine konvergente Teilfolge.*

Beweis: Der Satz von Bolzano–Weierstraß in \mathbb{R} wird in der Analysis für eine Variable bewiesen. Wir setzen ihn daher als bekannt voraus. Wir führen den Beweis mit Induktion. Wir nehmen an, dass der Satz von Bolzano–Weierstraß für Folgen im \mathbb{R}^{d-1} bereits bewiesen ist und beweisen ihn für eine Folge $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ im \mathbb{R}^d .

Sei $c > 0$ so, dass $\mathbf{x}_n \in [-c, c]^d$ für alle $n \geq 0$ gilt. Sei \hat{x}_n die letzte Koordinate von \mathbf{x}_n und $\tilde{\mathbf{x}}_n \in \mathbb{R}^{d-1}$ der Punkt, den man erhält, wenn man die letzte Koordinate von \mathbf{x}_n weglässt, sodass $\mathbf{x}_n = (\tilde{\mathbf{x}}_n, \hat{x}_n)$ gilt. Weiters gilt $\tilde{\mathbf{x}}_n \in [-c, c]^{d-1}$ für $n \geq 0$. Die Folge $(\tilde{\mathbf{x}}_n)_{n \geq 0}$ liegt im \mathbb{R}^{d-1} und ist beschränkt. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, dass eine Teilfolge $(\tilde{\mathbf{x}}_{n_j})_{j \geq 0}$ von $(\tilde{\mathbf{x}}_n)_{n \geq 0}$ existiert, die gegen einen Grenzwert $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{d-1}$ konvergiert.

Sei $\mathbf{y}_j = \mathbf{x}_{n_j}$, $\tilde{\mathbf{y}}_j = \tilde{\mathbf{x}}_{n_j}$ und $\hat{y}_j = \hat{x}_{n_j}$. Dann gilt $\mathbf{y}_j = (\tilde{\mathbf{y}}_j, \hat{y}_j)$ und $\lim_{j \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{y}}_j = \tilde{\mathbf{x}}$. Es genügt eine konvergente Teilfolge von $(\mathbf{y}_j)_{j \geq 0}$ zu finden, da diese dann auch eine Teilfolge von $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ ist.

Nun gilt $\hat{y}_j \in [-c, c]$ für alle $j \geq 0$. Die Folge $(\hat{y}_j)_{j \geq 0}$ liegt in \mathbb{R} und ist beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß für Folgen in \mathbb{R} existiert eine Teilfolge $(\hat{y}_{j_m})_{m \geq 0}$ von $(\hat{y}_j)_{j \geq 0}$, die gegen einen Grenzwert $\hat{x} \in \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist aber auch $(\tilde{\mathbf{y}}_{j_m})_{m \geq 0}$ eine Teilfolge von $(\tilde{\mathbf{y}}_j)_{j \geq 0}$ und wegen $\lim_{j \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{y}}_j = \tilde{\mathbf{x}}$ gilt auch $\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{y}}_{j_m} = \tilde{\mathbf{x}}$ (eine Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert ebenfalls und zwar gegen denselben Grenzwert).

Sei jetzt $\mathbf{x} = (\tilde{\mathbf{x}}, \hat{x}) \in \mathbb{R}^d$. Wegen $\mathbf{y}_{j_m} = (\tilde{\mathbf{y}}_{j_m}, \hat{y}_{j_m})$ erhalten wir $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{y}_{j_m} = \mathbf{x}$, da Grenzwerte koordinatenweise berechnet werden können. Damit ist eine Teilfolge $(\mathbf{y}_{j_m})_{m \geq 0}$ von $(\mathbf{y}_j)_{j \geq 0}$ gefunden, die einen Grenzwert $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ hat. Da diese Teilfolge dann auch eine Teilfolge der ursprünglichen Folge $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ ist, ist der Satz bewiesen. \square

Satz 5.2: *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ eine abgeschlossene Menge. Dann hat jede konvergente Folge, die in K liegt, auch ihren Grenzwert in K .*

Beweis: Sei $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ eine Folge in K und $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ für ein $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Wir müssen $\mathbf{x} \in K$ zeigen. Wir führen einen indirekten Beweis. Angenommen es gilt $\mathbf{x} \notin K$. Da K abgeschlossen ist und daher $\mathbb{R}^d \setminus K$ offen, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(\mathbf{x}) \cap K = \emptyset$, wobei $U_\varepsilon(\mathbf{x})$ die ε -Umgebung von \mathbf{x} bezeichnet. Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ existiert ein n_0 mit $\mathbf{x}_n \in U_\varepsilon(\mathbf{x})$ für alle $n \geq n_0$. Das würde aber bedeuten, dass $\mathbf{x}_n \notin K$ für alle $n \geq n_0$ gilt, ein Widerspruch zur Annahme, dass $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ in K liegt. \square

Satz 5.3: Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränkt und abgeschlossen (kompakt). Jede stetige Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt ihr Maximum und ihr Minimum an, das heißt es gibt ein $\mathbf{a} \in K$, sodass $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$ für alle $\mathbf{x} \in K$ gilt, und ein $\mathbf{b} \in K$, sodass $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{b})$ für alle $\mathbf{x} \in K$ gilt.

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass f nach oben beschränkt ist. Wäre das nicht der Fall, dann würde für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $\mathbf{x}_n \in K$ existieren, sodass $f(\mathbf{x}_n) \geq n$ gilt. Nach Satz 5.1 hat $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ eine Teilfolge $(\mathbf{x}_{n_j})_{j \geq 0}$ mit $\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{x}_{n_j} = \mathbf{x}$ für ein $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Wegen Satz 5.2 liegt \mathbf{x} in K . Da f stetig ist, folgt $\lim_{j \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_{n_j}) = f(\mathbf{x})$. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass $f(\mathbf{x}_n) \geq n$ für alle n gilt. Also kann f nicht nach oben unbeschränkt sein.

Sei $M = \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in K\}$. Wir haben soeben gezeigt, dass diese Menge nach oben beschränkt ist. Nach einem Satz aus der Analysis in einer Variable hat M eine kleinste obere Schranke s , ein sogenanntes Supremum. Wir zeigen, dass ein $\mathbf{a} \in K$ existiert mit $f(\mathbf{a}) = s$. Wir führen einen indirekten Beweis und nehmen an, dass das nicht der Fall ist. Dann gilt $f(\mathbf{x}) < s$ für alle $\mathbf{x} \in K$. Die Funktion $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{s-f(\mathbf{x})}$ ist dann in allen Punkten $\mathbf{x} \in K$ definiert und stetig, da der Nenner nicht null wird und f stetig ist. Da wir gezeigt haben, dass jede auf K stetige Funktion beschränkt ist, gibt es ein $c > 0$, sodass $g(\mathbf{x}) \leq c$ für alle $\mathbf{x} \in K$ gilt. Daraus folgt aber $f(\mathbf{x}) \leq s - \frac{1}{c}$ für alle $\mathbf{x} \in K$ und wir haben eine obere Schranke für M gefunden, die kleiner als s ist. Das ist ein Widerspruch, da s die kleinste obere Schranke von M ist. Daher muss es ein $\mathbf{a} \in K$ geben mit $f(\mathbf{a}) = s$. Wegen $f(\mathbf{x}) \leq s$ für alle $\mathbf{x} \in K$ ist ein $\mathbf{a} \in K$ gefunden, sodass $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$ für alle $\mathbf{x} \in K$ gilt.

Wendet man dieses Ergebnis auf die Funktion $-f$ an, die ja ebenfalls stetig ist, dann ergibt sich die Existenz eines $\mathbf{b} \in K$, sodass $-f(\mathbf{x}) \leq -f(\mathbf{b})$ für alle $\mathbf{x} \in K$ gilt. Es folgt dann $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{b})$ für alle $\mathbf{x} \in K$. \square

2. Nullstellen für Polynome in einer komplexen Variable

Wir beweisen den sogenannten Fundamentalsatz der Algebra, der besagt, dass jedes Polynom vom Grad ≥ 1 mit komplexen Koeffizienten mindestens eine Nullstelle in \mathbb{C} hat.

Satz 5.4: Sind c und d komplexe Zahlen, dann gilt $|c + d| \geq |c| - |d|$. Sind c_1, c_2, \dots, c_n komplexe Zahlen, dann gilt $|c_1 + c_2 + \dots + c_n| \leq |c_1| + |c_2| + \dots + |c_n|$.

Beweis: Die zweite Aussage folgt durch Induktion aus der Dreiecksungleichung. Ebenfalls aus der Dreiecksungleichung folgt $|c| = |c + d - d| \leq |c + d| + |-d| = |c + d| + |d|$, das heißt $|c| - |d| \leq |c + d|$, womit die erste Aussage bewiesen ist. \square

Satz 5.5: Sei $P(z)$ ein Polynom vom Grad ≥ 1 mit komplexen Koeffizienten. Dann existiert ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|P(z)| \geq |P(z_0)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Beweis: Sei $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$. Die Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_n sind komplexe Zahlen. Da $P(z)$ Grad ≥ 1 hat, können wir $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$ annehmen.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = |P(x + iy)|$. Dann ist f eine stetige Funktion. Um das zu zeigen, bezeichnen wir den Realteil von $P(x + iy)$ mit $f_1(x, y)$ und den Imaginärteil von $P(x + iy)$ mit $f_2(x, y)$. Schreibt man $r_k + is_k$ für die komplexe Zahl a_k , dann gilt $P(x + iy) = \sum_{k=0}^n (r_k + is_k)(iy + x)^k = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k (r_k \binom{k}{j} i^j y^j x^{k-j} + s_k \binom{k}{j} i^{j+1} y^j x^{k-j})$. Berücksichtigt man, dass $i^2 = -1$ gilt, dann sieht man, dass $f_1(x, y)$ und $f_2(x, y)$ Polynome in den Variablen x und y und somit stetige Funktionen sind. Es folgt dann, dass auch $f(x, y) = \sqrt{f_1(x, y)^2 + f_2(x, y)^2}$ stetig ist.

Sei $u = |a_n| > 0$ und $v = \max\{|\frac{a_{n-1}}{a_n}|, |\frac{a_{n-2}}{a_n}|, \dots, |\frac{a_0}{a_n}|\}$. Wir wählen $r > 1$ so groß, dass $ur^n(1 - \frac{v}{r-1}) > f(0,0)$ gilt, und setzen $K_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$. Sei $(x, y) \notin K_r$. Wir schreiben z für $x + iy$, sodass $|z| > r$ gilt. Wir erhalten dann mit Satz 5.4

$$\begin{aligned} f(x, y) &= |P(z)| = |a_n| \cdot |z|^n \cdot |1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \frac{a_{n-2}}{a_n z^2} + \dots + \frac{a_0}{a_n z^n}| \\ &\geq ur^n \left(1 - \left|\frac{a_{n-1}}{a_n z} + \frac{a_{n-2}}{a_n z^2} + \dots + \frac{a_0}{a_n z^n}\right|\right) \\ &\geq ur^n \left(1 - \left(\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \frac{1}{|z|} + \left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right| \frac{1}{|z|^2} + \dots + \left|\frac{a_0}{a_n}\right| \frac{1}{|z|^n}\right)\right) \\ &\geq ur^n \left(1 - \left(v \frac{1}{r} + v \frac{1}{r^2} + \dots + v \frac{1}{r^n}\right)\right) \\ &\geq ur^n \left(1 - \frac{v}{r} \frac{1}{1 - \frac{1}{r}}\right) = ur^n \left(1 - \frac{v}{r-1}\right) > f(0,0) \end{aligned}$$

Da K_r eine beschränkte abgeschlossene Teilmenge des \mathbb{R}^2 und f stetig ist, existiert nach Satz 5.3 ein $(x_0, y_0) \in K_r$ mit $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ für alle $(x, y) \in K_r$. Obige Rechnung zeigt $f(x, y) > f(0,0) \geq f(x_0, y_0)$ für alle $(x, y) \notin K_r$. Somit gilt $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Setzt man $z_0 = x_0 + iy_0$, dann hat man $|P(z)| \geq |P(z_0)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. \square

Satz 5.6 (Fundamentalsatz der Algebra) *Sei $P(z)$ ein Polynom vom Grad ≥ 1 mit komplexen Koeffizienten. Dann existiert ein $z \in \mathbb{C}$ mit $P(z) = 0$.*

Beweis: Sei $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$. Da $P(z)$ Grad ≥ 1 hat, können wir $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$ annehmen. Nach Satz 5.5 existiert $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|P(z)| \geq |P(z_0)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Wir setzen $Q(z) = P(z + z_0)$. Dann gilt $|Q(z)| \geq |Q(0)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Wir berechnen $Q(z) = \sum_{k=0}^n a_k (z + z_0)^k = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k a_k \binom{k}{j} z^j z_0^{k-j} = \sum_{j=0}^n z^j \sum_{k=j}^n a_k \binom{k}{j} z_0^{k-j}$. Setzt man $b_j = \sum_{k=j}^n a_k \binom{k}{j} z_0^{k-j}$ so erhält man $Q(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0$. Weiters ergibt sich $b_n = a_n \neq 0$.

Wir zeigen $b_0 = 0$. Angenommen es gilt $b_0 \neq 0$. Wegen $b_n \neq 0$ existiert ein $k \geq 1$ mit $b_k \neq 0$ und $b_j = 0$ für $1 \leq j < k$. Sei u eine Lösung von $u^k = -\frac{b_0}{b_k}$ (die k -te Wurzel einer Zahl in \mathbb{C} existiert). Weiters sei $q = \max\{\frac{1}{2}, |\frac{b_{k+1}u^{k+1}}{b_0}|, |\frac{b_{k+2}u^{k+2}}{b_0}|, \dots, |\frac{b_n u^n}{b_0}|\}$ und $0 < \varepsilon < \frac{1}{4q}$. Dann gilt $q \geq \frac{1}{2}$ und daher auch $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Wir setzen $w = \varepsilon u$ und berechnen

$$\begin{aligned} |Q(w)| &= |b_0| \cdot \left|1 + \frac{b_k}{b_0} w^k + \frac{b_{k+1}}{b_0} w^{k+1} + \dots + \frac{b_n}{b_0} w^n\right| && \text{da } b_1 = \dots = b_{k-1} = 0 \\ &= |b_0| \cdot \left|1 + \frac{b_k u^k \varepsilon^k}{b_0} + \frac{b_{k+1} u^{k+1} \varepsilon^{k+1}}{b_0} + \dots + \frac{b_n u^n \varepsilon^n}{b_0}\right| && \text{da } w = \varepsilon u \\ &= |b_0| \cdot \left|1 - \varepsilon^k + \frac{b_{k+1} u^{k+1} \varepsilon^{k+1}}{b_0} + \dots + \frac{b_n u^n \varepsilon^n}{b_0}\right| && \text{da } u^k = -\frac{b_0}{b_k} \\ &\leq |b_0| \cdot \left(\left|1 - \varepsilon^k\right| + \left|\frac{b_{k+1} u^{k+1} \varepsilon^{k+1}}{b_0}\right| + \dots + \left|\frac{b_n u^n \varepsilon^n}{b_0}\right|\right) && \text{nach Satz 5.4} \\ &= |b_0| \cdot \left(1 - \varepsilon^k + \left|\frac{b_{k+1} u^{k+1}}{b_0}\right| \varepsilon^{k+1} + \dots + \left|\frac{b_n u^n}{b_0}\right| \varepsilon^n\right) && \text{wegen } 0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \\ &\leq |b_0| \cdot \left(1 - \varepsilon^k + q \varepsilon^{k+1} + \dots + q \varepsilon^n\right) && \text{nach Definition von } q \\ &\leq |b_0| \cdot \left(1 - \varepsilon^k + q \varepsilon^{k+1} \frac{1}{1 - \varepsilon}\right) && \text{geometrische Reihe} \\ &\leq |b_0| \cdot \left(1 - \varepsilon^k + 2q \varepsilon^{k+1}\right) && \text{wegen } \varepsilon < \frac{1}{2} \\ &\leq |b_0| \cdot \left(1 - \varepsilon^k + 2q \varepsilon^k \frac{1}{4q}\right) = |b_0| \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon^k\right) && \text{wegen } \varepsilon < \frac{1}{4q} \end{aligned}$$

Wir haben damit $|Q(w)| \leq |b_0|(1 - \frac{1}{2} \varepsilon^k) < |b_0| = |Q(0)|$ gezeigt. Das ist ein Widerspruch zu $|Q(z)| \geq |Q(0)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Somit kann die Annahme $b_0 \neq 0$ nicht gelten und $b_0 = 0$ ist gezeigt. Es folgt $P(z_0) = Q(0) = b_0 = 0$. Das Polynom $P(z)$ hat eine Nullstelle. \square

VI. Anhang: Partielle Differentialgleichungen

1. Fourierapproximation

Wir geben ein beschränktes Intervall I vor und eine integrierbare Funktion $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ und suchen ein Polynom, das die Funktion g auf dem Intervall I möglichst gut approximiert. Wir tun das für ein verallgemeinertes Polynom $P(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \varphi_j(x)$, wobei die Funktionen φ_j vorgegebene stetige Funktionen sind, zum Beispiel $\varphi_j(x) = x^j$ für $j \geq 0$. Zum Approximieren verwenden wir eine kontinuierliche Version der Methode der kleinsten Quadrate: Die Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_{n-1} im verallgemeinerten Polynom $P(x)$ sind so zu bestimmen, dass $\int_I (P(x) - g(x))^2 dx$ minimal wird.

Satz 6.1: Sei $R = (R_{uv})_{0 \leq u, v \leq n-1}$ mit $R_{uv} = \int_I \varphi_u(x) \varphi_v(x) dx$ und sei $\mathbf{q} = (q_v)_{0 \leq v \leq n-1}$ mit $q_v = \int_I \varphi_v(x) g(x) dx$. Wir nehmen an, dass das Gleichungssystem $\mathbf{R}\mathbf{a} = \mathbf{q}$ eine eindeutige Lösung $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ besitzt. Diese Lösung gibt dann die Koeffizienten in $P(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \varphi_j(x)$ an, für die $\int_I (P(x) - g(x))^2 dx$ minimal wird.

Beweis: Wir setzen $Q(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \varphi_j(x)$, wobei die Koeffizienten die Komponenten des Lösungsvektors des Gleichungssystems $\mathbf{R}\mathbf{a} = \mathbf{q}$ sind. Dann gilt für $0 \leq i \leq n-1$

$$\begin{aligned} \int_I \varphi_i(x) (Q(x) - g(x)) dx &= \int_I \varphi_i(x) (\sum_{j=0}^{n-1} a_j \varphi_j(x) - g(x)) dx \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} a_j \int_I \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx - \int_I \varphi_i(x) g(x) dx = \sum_{j=0}^{n-1} a_j R_{ij} - q_i = 0 \end{aligned}$$

Es folgt, dass $\int_I (\sum_{j=0}^{n-1} c_j \varphi_j(x)) (Q(x) - g(x)) dx = 0$ gilt für jedes verallgemeinerte Polynom $\sum_{j=0}^{n-1} c_j \varphi_j(x)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_I (P(x) - g(x))^2 dx &= \int_I (P(x) - Q(x) + Q(x) - g(x))^2 dx \\ &= \int_I (P(x) - Q(x))^2 dx + 2 \int_I (P(x) - Q(x))(Q(x) - g(x)) dx + \int_I (Q(x) - g(x))^2 dx \\ &= \int_I (P(x) - Q(x))^2 dx + \int_I (Q(x) - g(x))^2 dx \end{aligned}$$

Da $\int_I (Q(x) - g(x))^2 dx$ nicht von $P(x)$ abhängt, ist $\int_I (P(x) - g(x))^2 dx$ minimal genau dann, wenn $\int_I (P(x) - Q(x))^2 dx = 0$ gilt, das heißt wenn $P(x)$ gleich $Q(x)$ ist (das folgt aus der Stetigkeit der Funktion $(P(x) - Q(x))^2$: wäre $P(x) \neq Q(x)$ für ein x , dann gäbe es eine Umgebung U von x und ein $\varepsilon > 0$ mit $(P(y) - Q(y))^2 > \varepsilon$ für alle $y \in U$, woraus $\int_I (P(x) - Q(x))^2 dx > 0$ folgen würde). \square

Der Fall, der uns hier interessiert, sind trigonometrische Polynome. Sei $n = 2m + 1$ für ein $m \geq 1$ und $I = [-\pi, \pi]$. Für $1 \leq j \leq m$ sei $\varphi_j(x) = \cos jx$ und $\varphi_{m+j}(x) = \sin jx$. Weiters sei $\varphi_0(x) = 1$. Wir erhalten dann $P(x) = a_0 + \sum_{j=1}^m a_j \cos jx + \sum_{j=1}^m a_{m+j} \sin jx$. Man kann sich $P(x)$ als eine Überlagerung von Schwingungen vorstellen.

Wir berechnen die Matrix $R = (R_{uv})_{0 \leq u, v \leq 2m}$. Es gilt $\int_{-\pi}^{\pi} \cos jx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin jx dx = 0$ für $j \geq 1$ und $\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$. Damit ist bereits $R_{0v} = R_{v0} = 0$ für $v \geq 1$ und $R_{00} = 2\pi$ gezeigt. Wir setzen $\delta_{uv} = 0$, wenn $u \neq v$, und $\delta_{uv} = 1$, wenn $u = v$. Wegen der Identitäten $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta)$, $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$ und $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos ux \cos vx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(u+v)x dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(u-v)x dx = \pi \delta_{uv} \quad \text{für } u, v \geq 1 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin ux \sin vx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(u-v)x dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(u+v)x dx = \pi \delta_{uv} \quad \text{für } u, v \geq 1 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin ux \cos vx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(u+v)x dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(u-v)x dx = 0 \quad \text{für } u, v \geq 1 \end{aligned}$$

Somit gilt $R_{00} = 2\pi$, $R_{uu} = \pi$ für $u \geq 1$ und $R_{uv} = 0$ für $u \neq v$. Die Matrix R ist eine Diagonalmatrix und das Gleichungssystem $R\mathbf{a} = \mathbf{q}$ leicht lösbar. Wegen $q_0 = \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx$ und da $q_j = \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos jx dx$ und $q_{m+j} = \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin jx dx$ für $1 \leq j \leq m$ gilt, haben wir

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx$$

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos jx dx \quad \text{für } 1 \leq j \leq m$$

$$b_j = a_{m+j} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin jx dx \quad \text{für } 1 \leq j \leq m$$

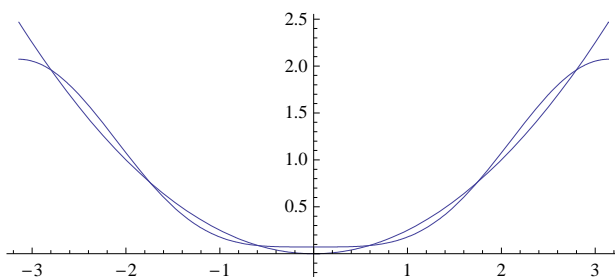
Somit ist das trigonometrische Polynom $P(x) = a_0 + \sum_{j=1}^m a_j \cos jx + \sum_{j=1}^m b_j \sin jx$ gefunden, das die Funktion g auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ am besten approximiert, wobei wir ab jetzt b_j statt a_{m+j} schreiben. Diese Approximation nennt man Fourierapproximation. Die Koeffizienten a_j für $j \geq 0$ und b_j für $j \geq 1$ heißen Fourierkoeffizienten der Funktion g .

Wir berechnen die Fourierapproximation für einige Funktionen $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$. Ist g eine gerade Funktion, das heißt $g(-x) = g(x)$, dann ist $x \mapsto g(x) \sin jx$ ungerade und es gilt $b_j = 0$ für alle $j \geq 1$. Ist g eine ungerade Funktion, das heißt $g(-x) = -g(x)$, dann ist $x \mapsto g(x) \cos jx$ ungerade und es gilt $a_j = 0$ für alle $j \geq 0$.

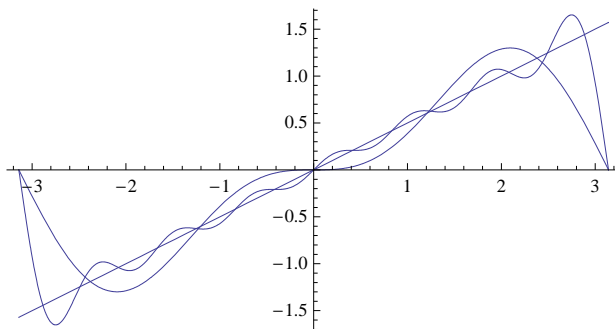
Beispiel: Sei $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g(x) = \frac{x^2}{4}$ definiert. Wir berechnen die Fourierkoeffizienten der Funktion g . Da g eine gerade Funktion ist, haben wir $b_j = 0$ für alle $j \geq 1$. Wegen $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{4} dx = \frac{\pi^3}{6}$ gilt $a_0 = \frac{\pi^2}{12}$. Schließlich berechnen wir noch mit zweimaliger partieller Integration

$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{4} \cos jx dx = \frac{x^2}{4j} \sin jx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{x}{2j^2} \cos jx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2j^3} \sin jx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi(-1)^j}{2j^2}$, wobei verwendet wurde, dass $\sin j\pi = 0$ und $\cos j\pi = \cos(-j\pi) = (-1)^j$ für alle $j \in \mathbb{Z}$ gilt. Es folgt $a_j = \frac{(-1)^j}{j^2}$ für $j \geq 1$. Damit sind die Fourierkoeffizienten berechnet und die m -te Fourier-

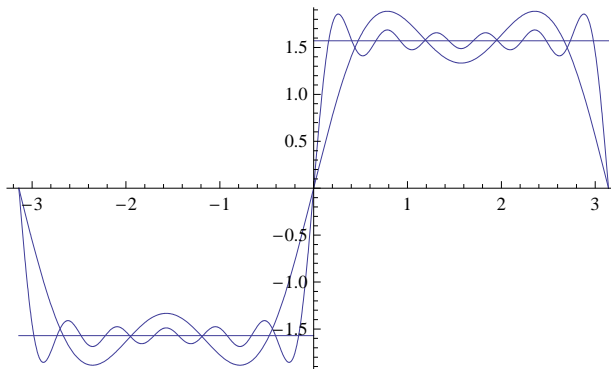
approximation $P_m(x) = a_0 + \sum_{j=1}^m a_j \cos jx + \sum_{j=1}^m b_j \sin jx = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{j=1}^m \frac{(-1)^j}{j^2} \cos jx$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ für die Funktion g ist gefunden. In obiger Zeichnung sind die Funktionen g und P_2 gezeichnet. Man sieht, dass die zweite Fourierapproximation P_2 bereits recht gut approximiert.



Beispiel: Sei $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g(x) = \frac{x}{2}$ definiert. Da g ungerade ist, gilt $a_j = 0$ für alle $j \geq 0$. Wir berechnen $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} \sin jx dx = -\frac{x}{2j} \cos jx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2j^2} \sin jx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi(-1)^{j+1}}{j}$ mit partieller Integration, ganz analog wie im letzten Beispiel. Es ergibt sich $b_j = \frac{(-1)^{j+1}}{j}$ für $j \geq 1$. Damit sind die Fourierkoeffizienten berechnet und die m -te Fourierapproximation $P_m(x) = \sum_{j=1}^m \frac{(-1)^{j+1}}{j} \sin jx$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ für die Funktion g ist gefunden. In nebenstehender Zeichnung sind zusammen mit g die Funktionen P_2 und P_7 gezeichnet. Man sieht, dass die Approximation nicht so gut ist wie im letzten Beispiel.



Beispiel: Sei $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g(x) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} x$ definiert, das heißt g ist gleich $-\frac{\pi}{2}$ auf $[-\pi, 0)$ und gleich $\frac{\pi}{2}$ auf $(0, \pi]$. Da g ungerade ist, haben wir $a_j = 0$ für alle $j \geq 0$. Wir berechnen $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} x \sin jx \, dx = 2 \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} \sin jx \, dx = -\frac{\pi}{j} \cos jx \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{j}(1 - (-1)^j)$. Es folgt $b_j = \frac{1}{j}(1 - (-1)^j)$ für $j \geq 1$, das heißt $b_j = 0$ für gerades $j \geq 1$ und $b_j = \frac{2}{j}$ für ungerades $j \geq 1$. Damit sind die Fourierkoeffizienten berechnet. Die $2k$ -te Fourierapproximation $P_{2k}(x) = \sum_{l=1}^k \frac{2}{2l-1} \sin(2l-1)x$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ für die Funktion g ist gefunden. In nebenstehender Zeichnung sind zusammen mit g die Funktionen P_4 und P_{12} gezeichnet. Man sieht, dass die Approximation nicht so gut ist wie im vorletzten Beispiel.



Die Fourierapproximation $P_m(x) = a_0 + \sum_{j=1}^m a_j \cos jx + \sum_{j=1}^m b_j \sin jx$ einer Funktion g ist eine stetige Funktion auf $[-\pi, \pi]$, für die $P_m(-\pi) = P_m(\pi)$ gilt. Hat die Funktion g eine Sprungstelle, wie es in letzten Beispiel im Punkt 0 der Fall ist, dann kann dort die Approximation nicht gut sein. Dasselbe gilt in den Endpunkten des Intervalls $[-\pi, \pi]$, wenn $g(-\pi) \neq g(\pi)$ ist. Wegen $P_m(-\pi) = P_m(\pi)$ kann dann die Approximation in der Nähe der Endpunkte nicht gut sein. Das sieht man in den beiden letzten Beispielen.

Die Frage, ob $\lim_{m \rightarrow \infty} P_m(x) = g(x)$ gilt, hat keine einfache Antwort. Wir nennen die Funktion g im Punkt x linksmonoton, wenn ein $\delta > 0$ existiert, sodass g auf dem Intervall $(x - \delta, x)$ monoton ist. Wir nennen die Funktion g im Punkt x rechtsmonoton, wenn ein $\delta > 0$ existiert, sodass g auf dem Intervall $(x, x + \delta)$ monoton ist. Ist g im Punkt $x \in (-\pi, \pi)$ stetig und sowohl links- als auch rechtsmonoton, dann kann man $\lim_{m \rightarrow \infty} P_m(x) = g(x)$ zeigen. Ist g im Punkt $-\pi$ stetig und rechtsmonoton, im Punkt π stetig und linksmonoton und gilt $g(-\pi) = g(\pi)$, dann kann man $\lim_{m \rightarrow \infty} P_m(x) = g(x)$ auch für $x = -\pi$ und $x = \pi$ beweisen. Für eine Funktion g , die auf $[-\pi, \pi]$ stetig und in allen Punkten links- und rechtsmonoton ist und die $g(-\pi) = g(\pi)$ erfüllt, kann man sich daher eine gute Approximation erwarten. Die Funktion $g(x) = \frac{x^2}{4}$ im ersten der drei Beispiele ist so eine Funktion. Man sieht auch, dass bereits P_2 gut approximiert.

Ein Punkt x heißt Sprungstelle von g wenn $g(x-) = \lim_{y \uparrow x} g(y)$ und $g(x+) = \lim_{y \downarrow x} g(y)$ existieren, aber ungleich sind. Ist $x \in (-\pi, \pi)$ eine Sprungstelle von g und g in x sowohl links- als auch rechtsmonoton, dann kann man $\lim_{m \rightarrow \infty} P_m(x) = \frac{g(x-) + g(x+)}{2}$ zeigen. Ähnlich gilt für $-\pi$ und π . Ist g im Punkt $-\pi$ stetig und rechtsmonoton und im Punkt π stetig und linksmonoton, dann gilt $\lim_{m \rightarrow \infty} P_m(-\pi) = \lim_{m \rightarrow \infty} P_m(\pi) = \frac{g(-\pi) + g(\pi)}{2}$.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, dass man die Fourierapproximation auch für Funktionen auf einem Intervall $[a, b]$ berechnen kann. Sei $\varphi(x) = \frac{b-a}{2\pi}x + \frac{a+b}{2}$. Das ist eine lineare Abbildung, die das Intervall $[-\pi, \pi]$ auf das Intervall $[a, b]$ abbildet. Ist f auf $[a, b]$ definiert, dann bildet man $g(x) = f(\varphi(x))$. Das ist eine Funktion auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$, für die man eine Fourierapproximation P_m berechnen kann. Eine Fourierapproximation für die ursprüngliche Funktion f ist dann $P_m(\varphi^{-1}(x))$.

2. Die schwingende Saite

Bevor wir uns der schwingenden Saite zuwenden beweisen wir einen Hilfssatz.

Satz 6.2: Sei I ein offenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Für $x \in I$ gilt dann $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} (f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)) = f''(x)$,

Beweis: Mit Hilfe des Taylorschen Satzes (angewendet auf $g(h) = f(x+h)$) erhalten wir

$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x+\xi)\frac{h^2}{2}$ und $f(x-h) = f(x) - f'(x)h + f''(x+\eta)\frac{h^2}{2}$ mit $\xi \in (0, h)$ und $\eta \in (-h, 0)$. Mit Hilfe dieser beiden Gleichungen erhält man dann $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} (f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+\xi) + f''(x+\eta)}{2} = f''(x)$. \square

Sei $L > 0$. Eine Saite wird in den Punkten 0 und L entlang der x -Achse eingespannt. Ihre Spannung sei r , das heißt in jedem Punkt der Saite wirkt eine Kraft der Größe r in x -Richtung. Die Saite schwingt in der x - y -Ebene. Sei $u(x, t)$ die Auslenkung des Punktes x zum Zeitpunkt t . Um eine Gleichung für $u(x, t)$ zu finden, stellen wir uns vor, dass die Saite aus Massepunkten besteht, die durch ein Gummiband verbunden sind. Dazu wählen wir $n \geq 1$ und setzen $h = \frac{L}{n}$. Die Saite bestehe dann aus $n+1$ Massepunkten, die in Ruhelage Abstand h voneinander haben. Ist m die Masse eines Stücks der Saite mit Länge 1, dann hat jeder Massepunkt Masse mh , nur die beiden Massepunkte am Ende der Saite haben Masse $\frac{mh}{2}$. Die Gesamtmasse der Saite ist $nmh = mL$, wie es ja sein muss.

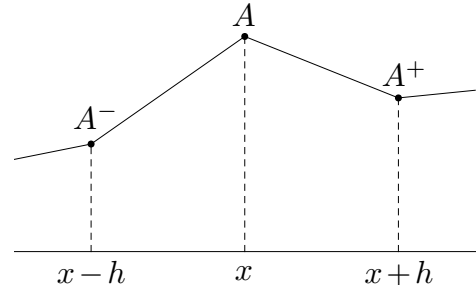
Sei x die Koordinate eines dieser Massepunkte. Die Koordinaten der beiden benachbarten Massepunkte sind dann $x-h$ und $x+h$. Sei $A = (x, u(x, t))$, $A^- = (x-h, u(x-h, t))$ und $A^+ = (x+h, u(x+h, t))$. Diese drei Punkte stellen dann die Lage der drei Massepunkte zum Zeitpunkt t dar. Die Richtung der Kraft, die der Massepunkt A^+ auf den Massepunkt A ausübt, ist $\mathbf{v}^+ = \begin{pmatrix} x+h \\ u(x+h, t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ u(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ u(x+h, t) - u(x, t) \end{pmatrix}$. Da die Kraftkomponente in x -Richtung gleich r sein muss, ist $\mathbf{k}^+ = \frac{r}{h} \mathbf{v}^+ = \begin{pmatrix} r \\ \frac{r}{h} (u(x+h, t) - u(x, t)) \end{pmatrix}$ die Kraft, die der Massepunkt A^+ auf den Massepunkt A ausübt. Genauso überlegt man sich, dass $\mathbf{k}^- = \begin{pmatrix} -r \\ \frac{-r}{h} (u(x-h, t) - u(x, t)) \end{pmatrix}$ die Kraft ist, die der Massepunkt A^- auf den Massepunkt A ausübt. Die Kraft, die insgesamt auf den Massepunkt A ausgeübt wird, ist somit $\mathbf{k} = \mathbf{k}^+ + \mathbf{k}^- = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{r}{h} (u(x+h, t) + u(x-h, t) - 2u(x, t)) \end{pmatrix}$. Die Kraftkomponente in x -Richtung ist null, das heißt der Massepunkt bewegt sich nur in y -Richtung. Wir verwenden jetzt ein physikalisches Gesetz: Masse mal Beschleunigung ist gleich Kraft. Wenden wir es auf den Massepunkt A an, dessen Beschleunigung die zweite Ableitung $u_{tt}(x, t)$ der Auslenkung $u(x, t)$ nach der Zeit t ist, so ergibt sich

$$mh u_{tt}(x, t) = \frac{r}{h} (u(x+h, t) + u(x-h, t) - 2u(x, t))$$

Satz 6.2 gibt $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} (u(x+h, t) + u(x-h, t) - 2u(x, t)) = u_{xx}(x, t)$, die zweite Ableitung von $u(x, t)$ nach x . Dividiert man obige Gleichung durch mh und bildet $\lim_{h \rightarrow 0}$, so folgt

$$u_{tt}(x, t) = \frac{r}{m} u_{xx}(x, t)$$

Das ist die partielle Differentialgleichung für die schwingende Saite. Man nennt sie auch Wellengleichung. Dabei ist m die Masse der Saite pro Längeneinheit und r die Spannung der Saite. Wir setzen $k^2 = \frac{r}{m}$.



Um eine Lösung für diese partielle Differentialgleichung zu finden, muss man Rand- und Anfangsbedingungen angeben. Da die Saite in den Punkten 0 und L eingespannt ist, ergeben sich die Randbedingungen $u(0, t) = u(L, t) = 0$ für alle $t \geq 0$. Außerdem muss man eine Funktion $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ vorgeben, die die Anfangsauslenkung angibt, und eine Funktion $g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, die die Anfangsausgeschwindigkeit angibt. Es gilt dann $u(x, 0) = f(x)$ und $u_t(x, 0) = g(x)$ für alle $x \in [0, L]$. Oft wird die Anfangsgeschwindigkeit gleich 0 gewählt.

Um eine Lösung angeben zu können, erweitern wir die auf dem Intervall $[0, L]$ definierte Funktion g (und ebenso f) zu einer Funktion \tilde{g} , die auf ganz \mathbb{R} definiert ist. Für $x \in [0, L]$ sei $\tilde{g}(x) = g(x)$ und für $x \in (-L, 0)$ sei $\tilde{g}(x) = -g(-x)$. Somit ist \tilde{g} eine ungerade Funktion auf $(-L, L]$. Jetzt setzen wir \tilde{g} periodisch auf ganz \mathbb{R} fort mit Periode $2L$: Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir $\tilde{g}(x) = \tilde{g}(x - 2Ln)$, wobei $n \in \mathbb{Z}$ so gewählt ist, dass $x - 2Ln$ in $(-L, L]$ liegt. Dann ist \tilde{g} auf ganz \mathbb{R} definiert. Weiters sei $\tilde{G}(x) = \int_0^x \tilde{g}(y) dy$ für alle $x \in \mathbb{R}$, eine Stammfunktion von \tilde{g} . Ist $h(x) = \tilde{G}(x + 2L) - \tilde{G}(x)$, dann gilt $h'(x) = \tilde{g}(x + 2L) - \tilde{g}(x) = 0$ und $h(-L) = \tilde{G}(L) - \tilde{G}(-L) = \int_{-L}^L \tilde{g}(y) dy = 0$, sodass $h(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt. Damit ist gezeigt, dass \tilde{G} ebenfalls Periode $2L$ hat.

Satz 6.3: Sei $L > 0$. Sei $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $f(0) = f(L) = 0$ und $g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ einmal stetig differenzierbar mit $g(0) = g(L) = 0$. Seien $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wie oben definiert und ebenfalls zweimal beziehungsweise einmal stetig differenzierbar. Sei $\tilde{G}(x) = \int_0^x \tilde{g}(y) dy$ für alle $x \in \mathbb{R}$, eine Stammfunktion von \tilde{g} . Dann ist

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\tilde{f}(x + kt) + \tilde{f}(x - kt)) + \frac{1}{2k}(\tilde{G}(x + kt) - \tilde{G}(x - kt))$$

die Lösung der Wellengleichung $u_{tt}(x, t) = k^2 u_{xx}(x, t)$ mit den Randbedingungen $u(0, t) = u(L, t) = 0$ für alle $t \geq 0$ und den Anfangsbedingungen $u(x, 0) = f(x)$ und $u_t(x, 0) = g(x)$ für alle $x \in [0, L]$.

Beweis: Wir führen die neuen Variablen $y = x + kt$ und $z = x - kt$ ein. Für die alten Variablen gilt dann $x = \frac{y+z}{2}$ und $t = \frac{y-z}{2k}$. Sei $u(x, t)$ eine Lösung der Wellengleichung $u_{tt}(x, t) = k^2 u_{xx}(x, t)$ und sei $v(y, z) = u(x, t) = u(\frac{y+z}{2}, \frac{y-z}{2k})$. Nach der Kettenregel gilt dann $v_y(y, z) = u_x(x, t) \frac{dx}{dy} + u_t(x, t) \frac{dt}{dy} = u_x(x, t) \frac{1}{2} + u_t(x, t) \frac{1}{2k}$. Nochmaliges Anwenden der Kettenregel ergibt $v_{yz}(y, z) = u_{xx}(x, t) \frac{1}{4} - u_{xt}(x, t) \frac{1}{4k} + u_{tx}(x, t) \frac{1}{4k} - u_{tt}(x, t) \frac{1}{4k^2}$. Wegen $u_{xt}(x, t) = u_{tx}(x, t)$ und $u_{tt}(x, t) = k^2 u_{xx}(x, t)$ erhalten wir $v_{yz}(y, z) = 0$.

Somit ist $v_y(y, z)$ von z unabhängig. Es gilt $v_y(y, z) = \varrho(y)$ für eine Funktion ϱ . Es folgt dann $v(y, z) = \varphi(y) + \psi(z)$ für eine Funktion ψ , wobei φ eine Stammfunktion von ϱ ist. Für die Lösung $u(x, t)$ der Wellengleichung gilt $u(x, t) = \varphi(y) + \psi(z) = \varphi(x + kt) + \psi(x - kt)$. Damit ist gezeigt, dass jede Lösung der Wellengleichung von dieser Form ist. Andererseits prüft man auch leicht nach, dass jede Funktion der Form $u(x, t) = \varphi(x + kt) + \psi(x - kt)$ die Wellengleichung löst.

Wir schränken uns auf die Menge $[0, L] \times [0, \infty)$ ein, das heißt x liegt in $[0, L]$ und t in $[0, \infty)$. Die Randbedingungen lauten $u(0, t) = u(L, t) = 0$ für alle $t \geq 0$. Es folgt $\varphi(y) + \psi(-y) = 0$ und $\varphi(L + y) + \psi(L - y) = 0$ für alle $y \geq 0$. Daraus ergibt sich $\varphi(2L + y) = -\psi(L - L - y) = -\psi(-y) = \varphi(y)$ für alle $y \geq 0$. Die Funktion φ hat Periode $2L$ auf $[0, \infty)$. Weiters folgt $\psi(x - y) = \psi(L - L + x - y) = -\varphi(L + L - x + y) = -\varphi(2L - x + y)$ für alle $y \geq 0$. Damit erhalten wir

$$u(x, t) = \varphi(x + kt) - \varphi(2L - x + kt) \quad \text{für alle } x \in [0, L] \text{ und } t \in [0, \infty)$$

Diese Funktion löst die Wellengleichung und erfüllt die Randbedingungen.

Wir müssen die Funktion φ so bestimmen, dass die Anfangsbedingungen $u(x, 0) = f(x)$ und $u_t(x, 0) = g(x)$ für alle $x \in [0, L]$ erfüllt sind. Es folgt $\varphi(x) - \varphi(2L - x) = f(x)$ und $k\varphi'(x) - k\varphi'(2L - x) = g(x)$. Die zweite Gleichung gibt $k\varphi(x) + k\varphi(2L - x) = \tilde{G}(x) + c$ mit einer Konstante $c \in \mathbb{R}$ durch Integration. Aus diesen Gleichungen erhalten wir dann $\varphi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2k}\tilde{G}(x) + \frac{c}{2k}$ und $\varphi(2L - x) = -\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2k}\tilde{G}(x) + \frac{c}{2k}$ für alle $x \in [0, L]$. Für $x \in [0, L]$ folgt $-f(x) = -\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x) = \tilde{f}(2L - x)$ aus der Definition von \tilde{f} und analog $-g(x) = \tilde{g}(2L - x)$. Ist $h(x) = -\tilde{G}(2L - x) + \tilde{G}(x)$ auf dem Intervall $[0, L]$, dann gilt $h'(x) = \tilde{g}(2L - x) + \tilde{g}(x) = 0$ und wegen $\tilde{G}(2L) = \tilde{G}(0) = 0$ auch $h(0) = 0$, sodass $h(x) = 0$ für alle x folgt. Damit ist $\tilde{G}(x) = \tilde{G}(2L - x)$ gezeigt. Setzt man oben ein, so hat man $\varphi(2L - x) = \frac{1}{2}\tilde{f}(2L - x) - \frac{1}{2k}\tilde{G}(2L - x) + \frac{c}{2k}$ für alle $x \in [0, L]$. Wir haben damit

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\tilde{f}(x) + \frac{1}{2k}\tilde{G}(x) + \frac{c}{2k} \quad \text{für alle } x \in [0, 2L]$$

gezeigt. Da aber sowohl φ als auch \tilde{f} und \tilde{G} Periode $2L$ haben, gilt diese Gleichung für alle $x \in [0, \infty)$. Setzt man in die oben gefundene Lösung $u(x, t)$ ein, so hat man

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\tilde{f}(x + kt) + \frac{1}{2k}\tilde{G}(x + kt) - \frac{1}{2}\tilde{f}(2L - x + kt) - \frac{1}{2k}\tilde{G}(2L - x + kt)$$

für alle $x \in [0, L]$ und $t \in [0, \infty)$. Wegen $-\tilde{f}(2L - x + kt) = \tilde{f}(x - kt)$ und $\tilde{G}(2L - x + kt) = \tilde{G}(x - kt)$ ist das die im Satz angegebene Lösung. \square

Bemerkung: Oft ist die Anfangsgeschwindigkeit g gleich null. Die in Satz 6.3 gefundene Lösung ist dann gleich $u(x, t) = \frac{1}{2}(\tilde{f}(x + kt) + \tilde{f}(x - kt))$, da \tilde{g} und \tilde{G} null sind.

Beispiel: Sei $L = \pi$. Die Anfangsauslenkung sei $f(x) = \sin nx$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und die Anfangsgeschwindigkeit sei null. Dann gilt auch $\tilde{f}(x) = \sin nx$ und die Lösung ist

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\sin n(x + kt) + \sin n(x - kt))$$

Wegen $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$ folgt

$$u(x, t) = \sin nx \cdot \cos nkt$$

Für $n = 1$ hat man $u(x, t) = \sin x \cdot \cos kt$. Die Anfangsauslenkung $\sin x$ schwingt zurück und erreicht zum Zeitpunkt $\frac{\pi}{2k}$ die Nulllage, schwingt in die andere Richtung und erreicht zum Zeitpunkt $\frac{\pi}{k}$ die Auslenkung $-\sin x$. Dann geht es zum Zeitpunkt $\frac{3\pi}{2k}$ wieder durch die Nulllage und zum Zeitpunkt $\frac{2\pi}{k}$ erreicht man wieder die Anfangsauslenkung $\sin x$. Jetzt beginnt wieder alles von vorne.

Beispiel: Sei $L = 1$ und $f(x) = \frac{1}{2}x(1 - x)$ die Anfangsauslenkung. Die Anfangsgeschwindigkeit sei null. Man kann wieder \tilde{f} bilden wie oben beschrieben und damit die Lösung $u(x, t)$ hinschreiben. Allerdings existiert \tilde{f}'' nicht überall. Es gilt $f'(x) = \frac{1}{2} - x$ und $f''(x) = -1$. Da \tilde{f}'' eine ungerade Funktion ist, erhalten wir $\tilde{f}''(x) = -1$ für $x \in (0, 1)$ und $\tilde{f}''(x) = 1$ für $x \in (-1, 0)$. Somit hat \tilde{f}'' eine Sprungstelle im Punkt 0 und da \tilde{f}'' periodisch fortgesetzt wird, auch in allen Punkten $\in \mathbb{Z}$. Man kann zwar die in Satz 6.3 gefundene Lösung hinschreiben, aber da man diese Lösung nicht überall zweimal differenzieren kann, ist es keine Lösung der partiellen Differentialgleichung $u_{tt}(x, t) = k^2 u_{xx}(x, t)$ im eigentlichen Sinn. Für $f(x) = \frac{1}{2}x^3(1 - x)^3$ hat man dieses Problem nicht. Da sind die ersten beiden Ableitungen in den Punkten 0 und 1 gleich null.

Anstatt einer schwingenden Saite kann man auch eine schwingende Platte (Trommel) untersuchen. Sei B eine beschränkte Teilmenge des \mathbb{R}^2 , deren Rand eine Kurve K ist. Sei $u(x, y, t)$ die Auslenkung des Punktes $(x, y) \in B$ zum Zeitpunkt t . Indem man sich die

Platte als durch Gummibänder verbundene Massepunkte vorstellt, die auf einem Gitter angeordnet sind, und so vorgeht wie bei der schwingenden Saite, kann man die partielle Differentialgleichung $u_{tt}(x, y, t) = k^2(u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t))$ für eine schwingende Platte herleiten. Man wählt wieder Randbedingungen $u(x, y, t) = 0$ für $(x, y) \in K$ und $t > 0$ und Anfangsbedingungen $u(x, y, 0) = f(x, y)$ und $u_t(x, y, 0) = g(x, y)$ für $(x, y) \in B$, wobei f und g vorgegebene Funktionen sind, die Anfangsauslenkung und Anfangsgeschwindigkeit angeben. Ist B ein Rechteck, zum Beispiel $B = [0, \pi] \times [0, \pi]$, dann kann man mit Hilfe des weiter unten behandelten Produktansatzes Lösungen finden. Wir gehen hier nicht darauf ein.

3. Wärmeleitung

Die Wärmeleitung überlegen wir uns gleich allgemein für einen n -dimensionalen Körper. Sei B eine beschränkte Teilmenge des \mathbb{R}^n . Wir stellen uns B als isolierten Körper vor, es erfolgt kein Wärmeaustausch mit der Umgebung. Wärme kann nur innerhalb des Körpers fließen. Sei $u(\mathbf{x}, t)$ die Temperatur im Punkt $\mathbf{x} \in B$ zum Zeitpunkt t .

Wir halten einen Zeitpunkt t fest. Sei $f(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}, t)$ die momentane Verteilung der Temperatur zu diesem Zeitpunkt t . Dann gibt $\text{grad } f(\mathbf{x})$ die Richtung des stärksten Anstiegs der Temperatur im Punkt \mathbf{x} an, und $-\text{grad } f(\mathbf{x})$ die Richtung des stärksten Abfalls. Daher wird Wärme innerhalb des Körpers von \mathbf{x} aus in Richtung $-\text{grad } f(\mathbf{x})$ fließen. Da die Länge des Vektors $-\text{grad } f(\mathbf{x})$ die Stärke des Temperaturabfalls angibt, wird die Fließgeschwindigkeit proportional zur Länge dieses Vektors sein. Man kann somit $V(\mathbf{x}) = -r \text{grad } f(\mathbf{x})$ als Geschwindigkeitsfeld für den momentanen Wärmefluss zum Zeitpunkt t innerhalb des Körpers auffassen, wobei r eine Konstante ist, die vom Material abhängt, aus dem der Körper besteht. Nun gibt $\text{div } V(\mathbf{x})$ den momentanen Wärmeabfluss zum Zeitpunkt t aus dem Punkt \mathbf{x} an und $-\text{div } V(\mathbf{x})$ den momentanen Wärmezufluss. Dieser momentane Wärmezufluss ergibt die momentane Änderung der Temperatur im Punkt \mathbf{x} zum Zeitpunkt t . Das ist auch die Ableitung von $u(\mathbf{x}, t)$ nach der Zeit t . Wir erhalten somit die Gleichung $u_t(\mathbf{x}, t) = -\text{div } V(\mathbf{x})$. Setzen wir ein, so ergibt sich

$$u_t(\mathbf{x}, t) = r \text{div grad } u(\mathbf{x}, t)$$

als Gleichung für die Wärmeleitung. Für die Wärmeleitung in einer isolierten Platte (Dimension 2) hat man dann, wobei x und y die Komponenten von \mathbf{x} bezeichnen

$$u_t(x, y, t) = r(u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t))$$

Für die Wärmeleitung in einem isolierten Stab (Dimension 1) reduziert sich sowohl der Gradient als auch die Divergenz auf die Ableitung. Daher ist

$$u_t(x, t) = r u_{xx}(x, t)$$

die partielle Differentialgleichung für die Wärmeleitung in einem Stab.

Wir geben Rand- und Anfangsbedingungen für die Wärmeleitung in einem Stab. Sind a und b in \mathbb{R} und eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) = a$ und $f(L) = b$ vorgegeben, dann suchen wir eine Lösung $u(x, t)$ dieser Wärmeleitungsgleichung, die die Randbedingungen $u(0, t) = a$ und $u(L, t) = b$ für alle $t > 0$ und die Anfangsbedingung $u(x, 0) = f(x)$ für alle $x \in [0, L]$ erfüllt. Diese Lösung $u(x, t)$ gibt dann die Temperatur zum Zeitpunkt t im Punkt x an, wenn man mit der Anfangstemperaturverteilung f startet und die Temperatur am linken Ende des Stabes konstant gleich a und am rechten Ende konstant gleich b hält.

4. Produktansatz

Bevor wir versuchen, die Wärmeleitungsgleichung zu lösen, untersuchen wir zuerst eine gewöhnliche Differentialgleichung.

Satz 6.4: Sei $L > 0$ und $s \in \mathbb{R}$. Die Differentialgleichung $v''(x) = sv(x)$ mit den Randbedingungen $v(0) = v(L) = 0$ hat nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn $s = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. In diesem Fall sind die Funktionen $v(x) = c \sin \frac{n\pi}{L}x$ mit $c \in \mathbb{R}$ Lösungen.

Beweis: Wir unterscheiden drei Fälle. Ist $s > 0$, dann lassen sich alle Lösungen der Differentialgleichung $v''(x) = sv(x)$ schreiben als $v(x) = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x}$ mit c_1 und c_2 in \mathbb{R} . Die Randbedingungen $v(0) = v(L) = 0$ ergeben die Gleichungen $c_1 + c_2 = 0$ und $c_1 e^{\sqrt{s}L} + c_2 e^{-\sqrt{s}L} = 0$. Die einzige Lösung ist $c_1 = 0$ und $c_2 = 0$, woraus $v(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt. In diesem Fall existiert keine nichttriviale Lösung.

Ist $s = 0$, dann lassen sich alle Lösungen der Differentialgleichung $v''(x) = sv(x)$ schreiben als $v(x) = c_1 x + c_2$ mit c_1 und c_2 in \mathbb{R} . Die Randbedingungen $v(0) = v(L) = 0$ ergeben die Gleichungen $c_2 = 0$ und $c_1 L + c_2 = 0$. Die einzige Lösung ist $c_1 = 0$ und $c_2 = 0$, woraus $v(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt. Auch in diesem Fall existiert keine nichttriviale Lösung.

Ist $s < 0$, dann lassen sich alle Lösungen der Differentialgleichung $v''(x) = sv(x)$ schreiben als $v(x) = c_1 \cos \sqrt{-s}x + c_2 \sin \sqrt{-s}x$ mit c_1 und c_2 in \mathbb{R} . Die Randbedingungen $v(0) = v(L) = 0$ ergeben die Gleichungen $c_1 = 0$ und $c_1 \cos \sqrt{-s}L + c_2 \sin \sqrt{-s}L = 0$. Es gilt $c_1 = 0$ und c_2 kann nur dann $\neq 0$ sein, wenn $\sin \sqrt{-s}L = 0$ gilt, das heißt wenn $s = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. In diesem Fall sind $v(x) = c_2 \sin \frac{n\pi}{L}x$ mit $c_2 \in \mathbb{R}$ die Lösungen. \square

Satz 6.4 legt nahe die Länge L des Stabes gleich π zu wählen. Wir versuchen die Wärmeleitungsgleichung $u_t(x, t) = ru_{xx}(x, t)$ mit den Randbedingungen $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ zu lösen. Dazu machen wir den Produktansatz $u(x, t) = v(x)w(t)$. Setzt man in die partielle Differentialgleichung ein, so hat man $v(x)w'(t) = rv''(x)w(t)$ oder $r\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w'(t)}{w(t)}$. Links steht eine Funktion in x und rechts steht eine Funktion in t . Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn beide Funktionen konstant sind, das heißt wenn $\frac{v''(x)}{v(x)} = s$ und $\frac{w'(t)}{w(t)} = sr$ für eine Konstante $s \in \mathbb{R}$ gilt. Da $w(t)$ nicht für alle t gleich 0 ist, sonst haben wir ja die triviale Lösung, erhalten wir aus den Randbedingungen $v(0)w(t) = u(0, t) = 0$ und $v(\pi)w(t) = u(\pi, t) = 0$, dass $v(0) = 0$ und $v(\pi) = 0$ gilt. Aus Satz 6.4 mit $L = \pi$ folgt dann, dass $s = -n^2$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gelten muss und $v(x) = c \sin nx$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Außerdem erhalten wir die Gleichung $\frac{w'(t)}{w(t)} = -n^2 r$, das heißt $w'(t) = -n^2 r w(t)$. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist $w(t) = ce^{-n^2 r t}$ mit $c \in \mathbb{R}$. Wir haben damit eine Lösung $v(x)w(t) = ce^{-n^2 r t} \sin nx$ der Wärmeleitungsgleichung $u_t(x, t) = ru_{xx}(x, t)$ mit den Randbedingungen $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ gefunden, wobei c eine beliebige reelle Konstante ist. Da Ableitungen linear sind, ist eine Linearkombination dieser Lösungen dann ebenfalls eine Lösung. Lösungen sind daher auch die Funktionen

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^m b_n e^{-n^2 r t} \sin nx \quad \text{mit } b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathbb{R}$$

Weiters gilt $u(x, 0) = \sum_{n=1}^m b_n \sin nx$. Solche Funktionen nennen wir Sinuspolynome. Wir haben also Lösungen gefunden, deren Anfangsbedingungen Sinuspolynome sind. Wir fassen dieses Ergebnis im folgenden Satz zusammen.

Satz 6.5: Sei $f(x) = \sum_{n=1}^m b_n \sin nx$ ein beliebiges Sinuspolynom. Dann ist

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^m b_n e^{-n^2 rt} \sin nx$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $u_t(x, t) = ru_{xx}(x, t)$ mit den Randbedingungen $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ für $t > 0$ und der Anfangsbedingung $u(x, 0) = f(x)$ für $x \in [0, \pi]$.

Für $t \rightarrow \infty$ konvergiert die Lösung gegen null, das heißt mit fortschreitender Zeit stellt sich überall im Stab Temperatur null ein. Das ist auch zu erwarten, da wir an den Enden des Stabes die Temperatur bei 0 halten und kein Wärmeaustausch zur Umgebung erfolgt.

Bemerkung: Die Anfangsbedingung in Satz 6.5 ist ziemlich allgemein. Ist $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(\pi) = 0$, dann lässt sich f zu einer stetigen ungeraden Funktion auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ fortsetzen, indem man $f(x) = -f(-x)$ für $x \in [-\pi, 0)$ definiert. Da f ungerade ist, ist die Fourierapproximation von f ein Sinuspolynom, da ja $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos jx dx = 0$ für alle j gilt. Das zeigt, dass jede stetige Funktion $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) = f(\pi) = 0$ sich beliebig genau durch ein Sinuspolynom approximieren lässt. Und andere Funktionen kommen als Anfangsbedingung ja gar nicht in Frage.

Man kann die Funktion $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ auch als Fourierreihe $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ schreiben. Dann ist $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 rt} \sin nx$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $u_t(x, t) = ru_{xx}(x, t)$ mit den Randbedingungen $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ für $t > 0$ und der Anfangsbedingung $u(x, 0) = f(x)$ für $x \in [0, \pi]$. Allerdings muss man zuerst noch beweisen, dass man die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 rt} \sin nx$ gliedweise differenzieren darf, was wir hier nicht tun.

Bemerkung: Wir wollen die Wärmeleitungsgleichung $u_t(x, t) = ru_{xx}(x, t)$ mit den Randbedingungen $u(0, t) = a$ und $u(\pi, t) = b$ für $t > 0$ und der Anfangsbedingung $u(x, 0) = f(x)$ für $x \in [0, \pi]$ lösen, wobei $f(0) = a$ und $f(\pi) = b$ gilt. Wir setzen $\tilde{f}(x) = f(x) - \frac{b-a}{\pi}x - a$, sodass $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(\pi) = 0$ gilt. Nach Satz 6.5 finden wir ein Lösung $\tilde{u}(x, t)$ der Wärmeleitungsgleichung mit den Randbedingungen $\tilde{u}(0, t) = 0$ und $\tilde{u}(\pi, t) = 0$ für $t > 0$ und der Anfangsbedingung $\tilde{u}(x, 0) = \tilde{f}(x)$ für $x \in [0, \pi]$. Man prüft dann leicht nach, dass $u(x, t) = \tilde{u}(x, t) + \frac{b-a}{\pi}x + a$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit den ursprünglichen Rand- und Anfangsbedingungen ist.

5. Potentialgleichung

Wir gehen von der Wärmeleitungsgleichung $u_t(x, y, t) = r(u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t))$ für eine isolierten Platte aus. Lässt man einige Zeit verstreichen, dann wird sich in der Platte eine stationäre Temperaturverteilung einstellen. Diese muss ebenfalls die Wärmeleitungsgleichung erfüllen, hängt aber nicht von t ab, sodass die partielle Ableitung nach t null ist. Ist $u(x, y)$ die Temperatur im Punkt $(x, y) \in B$ in dieser stationären Temperaturverteilung, dann muss die Funktion $u : B \rightarrow \mathbb{R}$ die partielle Differentialgleichung

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$$

erfüllen. Das ist die Wärmeleitungsgleichung für eine Funktion, die nicht von der Zeit t abhängt. Sie heißt Potentialgleichung. Dazu hat man noch die Randbedingung $u(x, y) = g(x, y)$ für $(x, y) \in K$, wobei $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ vorgegeben wird. Die Lösung $u(x, y)$ der Potentialgleichung gibt die Temperaturverteilung im Innern der Platte bei vorgegebener Temperatur $g(x, y)$ in den Punkten (x, y) des Randes an.

Wir versuchen die Potentialgleichung $u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$ für die rechteckige Platte $B = [0, \pi] \times [0, \pi]$ zu lösen. Als Randbedingung für die beiden senkrechten Ränder wählen

wir 0, das heißt $u(0, y) = u(\pi, y) = 0$ für alle $y \in [0, \pi]$. Die Randbedingung an den beiden waagrechten Rändern lassen wir offen.

Dazu machen wir wieder den Produktansatz $u(x, y) = v(x)w(y)$. Setzt man in die Potentialgleichung ein, so hat man $v''(x)w(y) + v(x)w''(y) = 0$ oder $\frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)}$. Links steht eine Funktion in x und rechts steht eine Funktion in y . Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn beide Funktionen konstant sind, das heißt wenn $\frac{v''(x)}{v(x)} = s$ und $\frac{w''(y)}{w(y)} = -s$ für eine Konstante $s \in \mathbb{R}$ gilt. Da $w(y)$ nicht für alle y gleich 0 ist, sonst haben wir ja die triviale Lösung, erhalten wir aus den Randbedingungen $v(0)w(y) = u(0, y) = 0$ und $v(\pi)w(y) = u(\pi, y) = 0$, dass $v(0) = 0$ und $v(\pi) = 0$ gilt. Aus Satz 6.4 mit $L = \pi$ folgt dann, dass $s = -n^2$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gelten muss und $v(x) = c \sin nx$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Außerdem gilt $\frac{w''(y)}{w(y)} = n^2$, das heißt $w''(y) = n^2w(y)$. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist $w(y) = c_1e^{ny} + c_2e^{-ny}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Wir haben damit eine Lösung $v(x)w(y) = (c_1e^{ny} + c_2e^{-ny}) \sin nx$ der Potentialgleichung $u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$ auf $B = [0, \pi] \times [0, \pi]$ gefunden mit $u(0, y) = u(\pi, y) = 0$ für $y \in [0, \pi]$. Eine Linearkombination dieser Lösungen ist ebenfalls eine Lösung. Lösungen sind daher auch die Funktionen

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^m (a_n e^{ny} + b_n e^{-ny}) \sin nx \quad \text{mit } a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$$

Weiters gilt $u(x, 0) = \sum_{n=1}^m (a_n + b_n) \sin nx$ und $u(x, \pi) = \sum_{n=1}^m (a_n e^{n\pi} + b_n e^{-n\pi}) \sin nx$. Gibt man am unteren Rand von B ein Sinuspolynom $f_1(x) = \sum_{n=1}^m \alpha_n \sin nx$ und am oberen Rand von B ein Sinuspolynom $f_2(x) = \sum_{n=1}^m \beta_n \sin nx$ vor, dann kann man a_n und b_n aus den Gleichungen $a_n + b_n = \alpha_n$ und $a_n e^{n\pi} + b_n e^{-n\pi} = \beta_n$ für $1 \leq m \leq n$ bestimmen. So hat man eine Lösung für die Potentialgleichung $u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$ auf der Menge $B = [0, \pi] \times [0, \pi]$ gefunden, mit $u(0, y) = u(\pi, y) = 0$ für $y \in [0, \pi]$ und mit $u(x, 0) = f_1(x)$ und $u(x, \pi) = f_2(x)$ für $x \in [0, \pi]$.

Indem man diese Berechnung noch einmal durchführt, aber die Rolle der beiden Koordinaten x und y vertauscht, erhält man eine Lösung

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^m (c_n e^{nx} + d_n e^{-nx}) \sin ny \quad \text{mit } c_1, \dots, c_m, d_1, \dots, d_m \in \mathbb{R}$$

für die Potentialgleichung $u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$ auf der Menge $B = [0, \pi] \times [0, \pi]$, mit $u(x, 0) = u(x, \pi) = 0$ für $x \in [0, \pi]$ und mit $u(0, y) = g_1(y)$ und $u(\pi, y) = g_2(y)$ für $y \in [0, \pi]$, wobei g_1 und g_2 vorgegebene Sinuspolynome auf dem linken beziehungsweise rechten Rand von B sind.

Schließlich kann man diese Lösungen zusammensetzen. Die Summe $u_1(x, y) + u_2(x, y)$ ist eine Lösung der Potentialgleichung $u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$ auf $B = [0, \pi] \times [0, \pi]$, mit den Randbedingungen $u(x, 0) = f_1(x)$ und $u(x, \pi) = f_2(x)$ für $x \in [0, \pi]$, und mit $u(0, y) = g_1(y)$ und $u(\pi, y) = g_2(y)$ für $y \in [0, \pi]$. Die Lösung stimmt also auf den Rändern mit vorgegeben Sinuspolynomen überein.

Damit können wir stetige Funktionen auf den Rändern, die in den vier Eckpunkten null sind, beliebig genau approximieren. Will man auch diese Einschränkung noch los werden, dann nimmt man $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + axy + bx + cy + d$ für geeignete $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Das ist eine Lösung der Potentialgleichung $u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$ auf $B = [0, \pi] \times [0, \pi]$, wie man leicht nachprüft. Damit kann man dann auch eine beliebige vorgegebene stetige Funktion am Rand beliebig genau approximieren.

Inhaltsverzeichnis

I. Funktionen in mehreren Variablen	1
1. Höherdimensionale Räume	1
2. Integration im Mehrdimensionalen	3
3. Differenzieren im Mehrdimensionalen	6
4. Extrema für Funktionen in mehreren Variablen	9
II. Kurven und Flächen	12
1. Parameterdarstellungen	12
2. Tangente und Tangentialebene	14
3. Krümmung einer Kurve in der Ebene	17
4. Bogenlänge	18
5. Oberfläche eines gekrümmten Flächenstücks	19
6. Mehrdimensionale Substitutionsregel	20
7. Extrema unter Nebenbedingungen	22
III. Kurvenintegrale und Vektorfelder	24
1. Vektorfelder	24
2. Kurvenintegrale	25
3. Gradientenfelder	27
IV. Anhang: Divergenz und Rotation	30
1. Das Oberflächenintegral	30
2. Divergenz	32
3. Rotation	33
4. Integralsätze	34
V. Anhang: Fundamentalsatz der Algebra	36
1. Teilfogen und Extrema	36
2. Nullstellen für Polynome in einer komplexen Variable	37
VI. Anhang: Partielle Differentialgleichungen	39
1. Fourierapproximation	39
2. Die schwingende Saite	42
3. Wärmeleitung	45
4. Produktansatz	46
5. Potentialgleichung	47