Geometrie

und

Lineare Algebra

für das Lehramt

Franz Hofbauer

Juni 2018

Vorwort

Mit Mathematik kommt man frühzeitig in Berührung. Kinder lernen Zählen und Rechnen durch beständiges Wiederholen. Ebenso lernen sie geometrische Figuren kennen, die sie in ihrer Umgebung wahrnehmen. Später werden durch einfache Konstruktionsübungen geometrische Grundkenntnisse erworben. Es wird dann selbstverständlich, dass man durch zwei Punkte eine Gerade legen kann, dass es zu einer Gerade genau eine Parallele und genau eine Senkrechte durch einen vorgegebenen Punkt gibt, dass zwei nicht parallele Gerade einander in genau einem Punkt schneiden, und dergleichen mehr. Darauf baut der weiterführende Geometrieunterricht auf. Es sind dann auch schon sehr einfache Beweise möglich, zum Beispiel für die Winkelsumme im Dreieck und für den Satz von Pythagoras.

Die Lehramtsausbildung wird nur dann erfolgreich sein, wenn sie sich an der Berufsrealität der Lehrer orientiert. Deshalb werden in diesem Skriptum die durch Einüben erworbenen geometrischen Grundkenntnisse ebenfalls als bekannt vorausgesetzt.

In der Geometrie werden verschiedenste Beweismethoden verwendet. Dieses Skriptum konzentriert sich hauptsächlich auf die für die Schule relevanten Methoden. Die damit bewiesenen Sätze gehen jedoch über den üblichen Schulstoff hinaus. Ein entsprechendes Hintergrundwissen ist ja auch wichtig.

Der erste Teil bringt die Elementargeometrie (synthetische Geometrie), die hauptsächlich mit dem Strahlensatz, mit dem Satz von Pythagoras und mit dem Peripheriewinkelsatz arbeitet. Der zweite Teil bringt die Trigonometrie, wo natürlich Sinus- und Cosinussatz die wichtigsten Werkzeuge sind. Dort wird auch gezeigt, wie man mit Hilfe komplexer Zahlen Geometrie betreiben kann. Im dritten Teil wird dann im Koordinatensystem gearbeitet, insbesondere mit Vektoren, Geradengleichungen und Determinanten (analytische Geometrie). Mit den jeweiligen Methoden werden Sätze der ebenen Geometrie bewiesen. Unter anderem findet man die Sätze von Menelaos und Ceva, den Sehnen- und Sekantensatz, den Südpolsatz, die Formeln von Heron und Stewart, die Sätze von Napoleon und Morley, die Steinerschen Geraden und den Satz von Feuerbach. Die besonderen Punkte des Dreiecks werden in allen drei Teilen behandelt.

Im vierten Teil wird Lineare Algebra im $\mathbb{R}^2$ betrieben. Es werden lineare Abbildungen, Matrizen, Eigenwerte und Eigenvektoren eingeführt und Isometrien der Ebene (Drehungen, Spiegelungen, Translationen) untersucht. Dann kommen Kegelschnitte, Tangentenkonstruktion, Tangentengleichung, und die Hauptachsentransformation. Um das räumliche Vorstellungsvermögen zu üben, werden auch die Flächen zweiter Ordnung besprochen.

Schließlich wird noch in einem fünften Teil das systematische Lösen von linearen Gleichungssystemen mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens behandelt. Auf theoretische Resultate aus der Linearen Algebra wird weitgehend verzichtet. Statt dessen wird eine Vorgangsweise gewählt, die für den Schulunterricht taugliches Hintergrundwissen darstellt.

Literatur: Zwei Lehrbücher der Elementargeometrie
Johnson: *Advanced Euclidean Geometry*
Coxeter, Greitzer: *Geometry revisited*

Das Buch von Johnson kann man als Standardlehrbuch der Elementargeometrie bezeichnen. Es wird üblicherweise zitiert, wenn man einen einführenden Text zitieren will. Der Inhalt des Buches geht natürlich weit über eine Lehramtsvorlesung hinaus.

I. Elementargeometrie

1. Einleitung

Punkte bezeichnen wir mit Großbuchstaben, Geraden und Kreise mit Kleinbuchstaben und Winkel mit griechischen Buchstaben. Für Längen, zum Beispiel Seitenlängen eines Dreiecks, verwenden wir meistens Kleinbuchstaben und für Flächen Großbuchstaben. Wir führen folgende Abkürzungen ein:

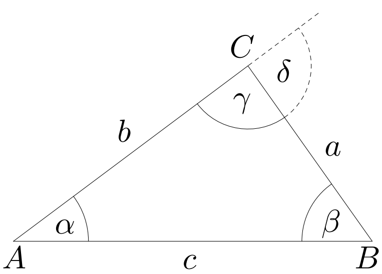
$\ell(A,B)$	Gerade durch die Punkte A und B
$\overline{AB}$	Strecke zwischen den Punkten A und B
$\overrightarrow{AB}$	Vektor vom Punkt A zum Punkt B
$\lvert AB\rvert$	Abstand der Punkte A und B
AB	orientierter Abstand vom Punkt A zum Punkt B
$\triangle\, ABC$	Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C
$\measuredangle\, ABC$	Winkel bei B im Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C
$\#ABC$	Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten A, B und C

Den orientierten Abstand AB erhält man, indem man die Gerade g durch A und B mit der Zahlengerade $\mathbb{R}$ identifiziert und die Koordinate von A von der von B subtrahiert. Es gilt daher $AB = -BA$. Liegen drei Punkte A, B und C auf einer Geraden g, ganz egal in welcher Reihenfolge, dann gilt immer $AB + BC = AC$.

Der orientierte Abstand AB hängt davon ab, wie man g orientiert, das heißt welche Richtung die positive ist. Dreht man die Orientierung um, dann ändert AB das Vorzeichen. Wir werden jedoch den orientierten Abstand immer nur in Verhältnissen und Produkten verwenden: Seien zum Beispiel P, Q und R drei voneinander verschiedene Punkte auf einer Geraden g. Dann ist das Verhältnis $\frac{PQ}{PR}$ eindeutig bestimmt, unabhängig davon, wie man die Gerade g orientiert, da bei Änderung der Orientierung beide Abstände PQ und PR das Vorzeichen ändern. Liegt P nicht zwischen Q und R, dann haben PQ und PR gleiches Vorzeichen, sodass $\frac{PQ}{PR} > 0$ und $\frac{PQ}{PR} = \frac{|PQ|}{|PR|}$ gilt. Liegt P zwischen Q und R, dann haben PQ und PR verschiedenes Vorzeichen, sodass $\frac{PQ}{PR} < 0$ gilt und wegen $QP = -PQ$ auch $-\frac{PQ}{PR} = \frac{QP}{PR} = \frac{|QP|}{|PR|} = \frac{|PQ|}{|PR|}$. Ähnliches gilt auch für Produkte $PQ \cdot PR$.

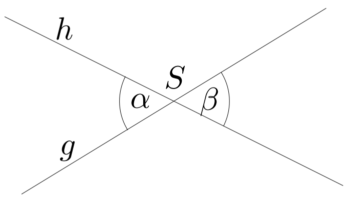
Bemerkung: Wir benötigen sowohl den üblichen, nicht orientierten Abstand als auch den orientierten Abstand, den wir mit AB bezeichnen (wenn die Punkte A und B heißen). Der übliche Abstand ist der Betrag der Zahl AB, daher bezeichnen wir ihn mit $|AB|$.

Für Dreiecke verwenden wir die Standardbezeichnung. Die Eckpunkte bezeichnen wir mit A, B und C, die Längen der Dreieckseiten mit den Kleinbuchstaben a, b und c, entsprechend dem der Seite gegenüberliegenden Eckpunkt, und den (Innen)Winkel bei jedem Eckpunkt mit dem entsprechenden griechischen Buchstaben α, β oder γ. Der Winkel δ ist ein Außenwinkel. Bei jedem Eckpunkt gibt es zwei Außenwinkel.

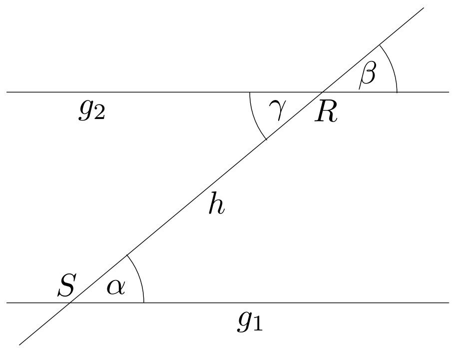


Als Beweismethode werden wir oft kongruente Figuren verwenden. Zwei Figuren heißen kongruent, wenn sich die eine durch Verschieben, Drehen, Spiegeln in die andere überführen lässt. Bei kongruenten Figuren stimmen einander entsprechende Seitenlängen, Winkel und Flächen überein.

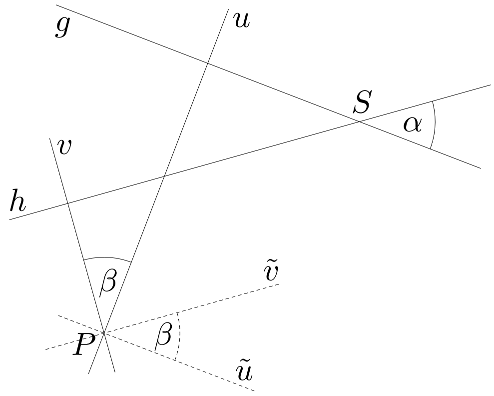
Diese Methode verwenden wir jetzt, um zuerst Aussagen über die Gleichheit von Winkeln zu finden, und dann zum Berechnen von Flächen.



Seien g und h zwei Gerade, die einander in einem Punkt S schneiden. Dann sind einander gegenüberliegende Winkel, die von den beiden Geraden eingeschlossen werden, gleich groß. In der Zeichnung sind zwei solche Winkel mit α und β bezeichnet. Dreht man die gesamte Figur um den Punkt S um 180^0, dann gehen die Geraden g und h in sich selbst über. Der Winkel β kommt dann auf dem Winkel α zu liegen. Somit sind die beiden Winkel gleich groß. (Scheitelwinkel)



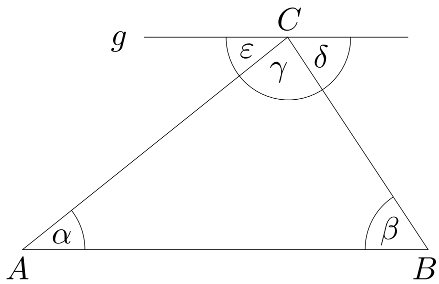
Zwei parallele Geraden g_1 und g_2 werden von einer dritten Geraden h geschnitten. Der Schnittpunkt von g_1 mit h sei S und der Schnittpunkt von g_2 mit h sei R. Dann sind die in der Zeichnung mit α und β bezeichneten Winkel gleich groß. Durch die Parallelverschiebung, die den Punkt S in den Punkt R überführt, wird ja g_1 auf g_2 abgebildet und h auf sich selbst. Der Winkel α liegt dann auf dem Winkel β, womit die Gleichheit dieser Winkel gezeigt ist (Stufenwinkel). Aus obigem Resultat folgt dann, dass auch der mit γ bezeichnete Winkel gleich α ist (Wechselwinkel).



Seien g und h zwei Gerade, die einander in einem Punkt S schneiden und den Winkel α einschließen. Sei u eine senkrechte Gerade auf g und v eine senkrechte Gerade auf h. Der von u und v eingeschlossene Winkel β ist dann gleich α (Orthogonalwinkel). Das sieht man so: Wir drehen die Geraden u und v um ihren Schnittpunkt P um 90^0 und erhalten die Geraden $\tilde{u}$ und $\tilde{v}$, die dann ebenfalls den Winkel β einschließen. Da $\tilde{u}$ parallel zu g liegt und $\tilde{v}$ parallel zu h, muss $\beta = \alpha$ gelten. Durch die Parallelverschiebung, die P in S überführt, wird ja $\tilde{u}$ auf g und $\tilde{v}$ auf h abgebildet, sodass der Winkel β dann auf dem Winkel α liegt.

Wir wenden das auf das Dreieck an.

Satz 1: *Die Summe der (Innen)Winkel eines Dreiecks beträgt* 180^0.

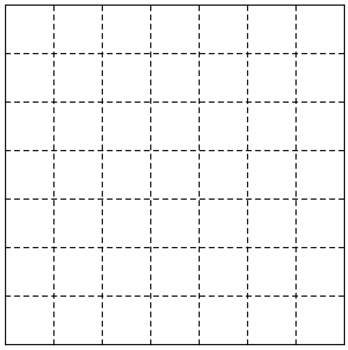


Beweis: Die Eckpunkte und Winkel des Dreiecks werden wie üblich bezeichnet. Wir zeichnen die zur Dreieckseite $\overline{AB}$ parallele Gerade g durch den Eckpunkt C des Dreiecks. Diese bildet mit der Dreieckseite $\overline{AC}$ einen Winkel ε und mit der Dreieckseite $\overline{BC}$ einen Winkel δ, die beide außerhalb des Dreicks liegen. Nach dem obigen Resultat über Wechselwinkel gilt $\varepsilon = \alpha$ und $\delta = \beta$, da die Gerade g parallel zur Seite $\overline{AB}$ liegt. Klarerweise gilt $\varepsilon + \gamma + \delta = 180^0$. Damit ist auch $\alpha + \gamma + \beta = 180^0$ gezeigt. □

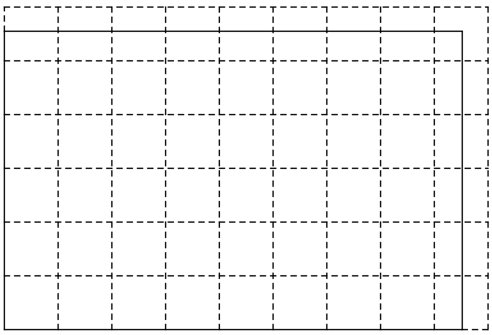
Bemerkung: Aus diesem Satz folgt, dass die beiden Außenwinkel bei einem Eckpunkt eines Dreiecks gleich sind der Summe der Innenwinkel bei den anderen beiden Eckpunkten.

Wie kann man die Fläche einer ebenen Figur, zum Beispiel eines Rechtecks, bestimmen? Dazu legen wir eine geeignete Einheitsfläche fest. Wir müssen ja von irgendwo ausgehen. Wir können die Einheitsfläche in gleich große Teile zerlegen, deren Fläche wir dann kennen, und versuchen, das Rechteck damit möglichst gut auszufüllen.

Als Einheitsfläche wird üblicherweise das Quadrat mit Seitenlänge 1 gewählt. Wir nennen es Einheitsquadrat. Die Fläche des Einheitsquadrats wird mit 1 festgelegt.



Sei n eine natürliche Zahl. Wir bestimmen die Fläche des Quadrats mit Seitenlänge $\frac{1}{n}$. Dazu teilen wir die Seiten des Einheitsquadrats in n gleich lange Teile. Durch diese Unterteilungspunkte zeichnen wir senkrechte Geraden auf die jeweilige Seite des Einheitsquadrats. Dadurch wird das Einheitsquadrat in kleine Quadrate unterteilt, deren Anzahl gleich n^2 ist. Diese kleinen Quadrate haben alle Seitenlänge $\frac{1}{n}$ und sind zueinander kongruent. Sie haben daher auch die gleiche Fläche, die wir G nennen. Da diese Quadrate das Einheitsquadrat vollständig ausfüllen, muss $n^2G = 1$ gelten. Es folgt $G = \frac{1}{n^2}$. Damit ist die Fläche des Quadrats mit Seitenlänge $\frac{1}{n}$ berechnet.



Seien a und b positive reelle Zahlen. Wir bestimmen die Fläche F des Rechtecks mit Seitenlängen a und b. Wir wählen k und m in $\mathbb{N}$ so, dass

$(*)$ $\quad \frac{k}{n} \le a < \frac{k+1}{n} \quad$ und $\quad \frac{m}{n} \le b < \frac{m+1}{n}$

gilt. Beginnend im linken Endpunkt zeichnen wir auf einer Rechteckseite der Länge a Unterteilungspunkte, die zueinander Abstand $\frac{1}{n}$ haben. Der k-te Unterteilungspunkt liegt noch auf der Rechteckseite, der $k+1$-te bereits auf deren Verlängerung. Durch diese Unterteilungspunkte zeichnen wir Senkrechte auf die Rechteckseite. Ebenso zeichnen wir auf einer Rechteckseite der Länge b Unterteilungspunkte, die zueinander Abstand $\frac{1}{n}$ haben. Der m-te Unterteilungspunkt liegt noch auf der Rechteckseite, der $m+1$-te bereits auf deren Verlängerung. Durch diese Unterteilungspunkte zeichnen wir ebenfalls Senkrechte auf die Rechteckseite. Dadurch erhalten wir wieder Quadrate, deren Seitenlänge gleich $\frac{1}{n}$ ist. Die Anzahl dieser Quadrate ist $(k+1)(m+1)$. Sie überdecken das Rechteck. Es gilt daher $F \le (k+1)(m+1)\frac{1}{n^2}$. Aus $(*)$ folgt $ab \ge \frac{km}{n^2}$. Wir erhalten

$$F - ab \le \frac{(k+1)(m+1)}{n^2} - \frac{km}{n^2} = \frac{k+m+1}{n^2}$$

Die Anzahl der Quadrate, die ganz im Rechteck liegen, ist km. Es gilt daher $F \ge km\frac{1}{n^2}$. Aus $(*)$ folgt auch $ab \le \frac{(k+1)(m+1)}{n^2}$. Wir erhalten

$$ab - F \le \frac{(k+1)(m+1)}{n^2} - \frac{km}{n^2} = \frac{k+m+1}{n^2}$$

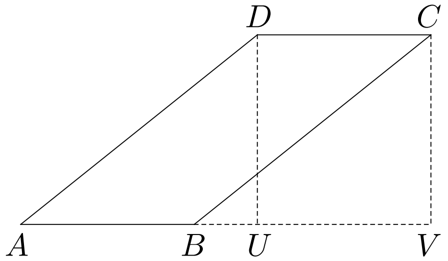
Da $|F - ab|$ entweder gleich $F - ab$ oder gleich $ab - F$ ist, folgt aus diesen Umgleichungen, dass $|F - ab| \le \frac{k+m+1}{n^2}$ gilt. Mit Hilfe von $(*)$ erhalten wir schließlich

$$|F - ab| \le \frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{1}{n}$$

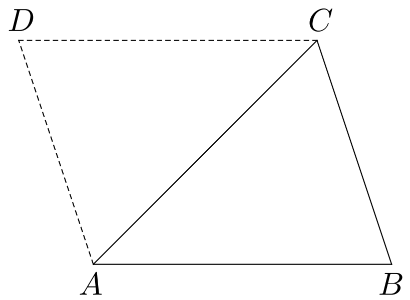
Da n beliebig groß gewählt werden kann, muss $|F - ab| = 0$ gelten. (Wäre $|F - ab|$ nicht null, dann würde $n \le \frac{a+b+1}{|F-ab|}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten.) Damit ist $F = ab$ gezeigt.

Mit Hilfe dieser Formel für die Fläche des Rechtecks können wir auch die Parallelogramm- und die Dreiecksfläche bestimmen.

Satz 2: *Sei $ABCD$ ein Paralellogramm. Sei c die Länge der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ und h die Länge der Höhe des Parallelogramms (Normalabstand der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$). Die Fläche des Parallelogramms ist dann $c \cdot h$. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Sei c die Länge der Seite $\overline{AB}$ und h die Länge der Höhe durch C. Die Dreiecksfläche ist dann $\frac{c \cdot h}{2}$.*



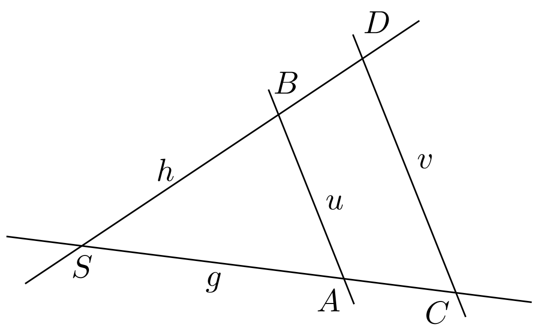
Beweis: Sei V der Fußpunkt des Lots von C und U der des Lots von D auf die Gerade $\ell(A, B)$. Wir gehen vom Viereck $AVCD$ aus. Die beiden Dreiecke $\triangle BVC$ und $\triangle AUD$ sind kongruent (das eine geht durch eine Parallelverschiebung in das andere über) und daher flächengleich. Schneidet man aus dem Viereck $AVCD$ das Dreieck $\triangle BVC$ heraus, dann bleibt das Parallelogramm $ABCD$. Schneidet man aus dem Viereck $AVCD$ das Dreieck $\triangle AUD$ heraus, dann bleibt das Rechteck $UVCD$. Die beiden verbleibenden Figuren haben gleiche Fläche. Das Parallelogramm $ABCD$ hat dieselbe Fläche wie das Rechteck $UVCD$. Diese ist gleich $c \cdot h$.
Wenn der Winkel bei A stumpf ist, dann muss man vom Viereck $UBCD$ ausgehen.

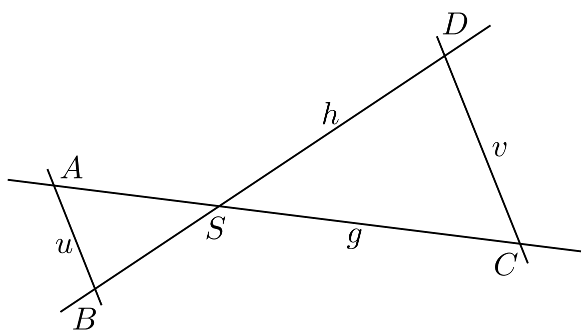


Das Dreieck $\triangle ABC$ ergänzen wir zu einem Parallelogramm $ABCD$, indem wir für D den Schnittpunkt der Parallele zu $\ell(A, B)$ durch C und der Parallele zu $\ell(B, C)$ durch A wählen. Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ADC$ sind dann kongruent (die Drehung um 180^0 um den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$ führt das eine in das andere über) und daher auch flächengleich. Somit ist die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$ gleich der Hälfte der Fläche des Paralellogramms $ABCD$. Wie wir gesehen haben, ist $c \cdot h$ die Paralellogrammfläche. Daher ist $\frac{c \cdot h}{2}$ die Dreiecksfläche. $\square$

2. Der Strahlensatz

Der Strahlensatz macht Aussagen über die Verhältnisse von gewissen orientierten Abständen in der folgenden Situation:

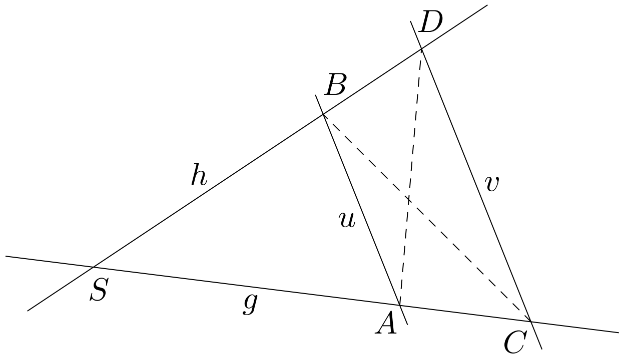




Zwei Gerade g und h schneiden einander in einem Punkt S. Eine weitere Gerade u schneidet die Geraden g und h in den Punkten A und B, die ungleich S sind. Eine zu u parallele Gerade v schneidet g und h in den Punkten C und D, die ebenfalls ungleich S sind. Dadurch entstehen die beiden Dreiecke $\triangle SAB$ und $\triangle SCD$. Es können zwei Fälle auftreten. Entweder die beiden parallelen Geraden u und v liegen auf derselben Seite von S, wie es in der linken Zeichnung dargestellt ist, oder sie liegen auf verschiedenen Seiten von S, wie es in der rechten Zeichnung dargestellt ist.

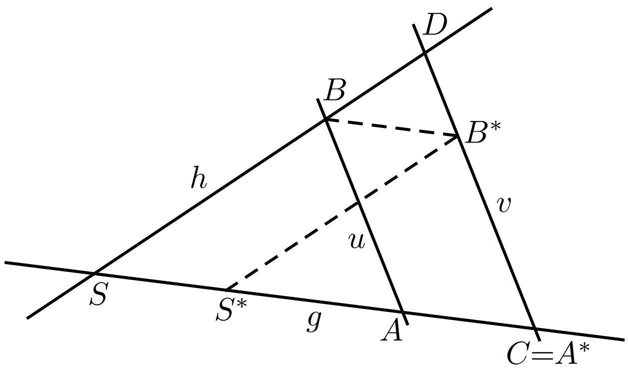
Satz 3 (Strahlensatz) *In der oben beschriebenen Situation gilt* $\frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SD} = \frac{AB}{CD}$.

Beweis: Wir nehmen an, dass die Geraden u und v auf derselben Seite von S liegen. Das ist der oben links dargestellte Fall. In diesem Fall gilt $\frac{SA}{SC} > 0$, $\frac{SB}{SD} > 0$ und $\frac{AB}{CD} > 0$.
Wir arbeiten mit den Dreiecksflächen $U = \#SAB$, $V = \#ABC$ und $W = \#ABD$. Es gilt $U+V = \#SCB$ und $U+W = \#SDA$. Sei d der Abstand der parallelen Geraden u und v. Weiters sei a der Normalabstand des Punktes A von der Geraden h und b der des Punktes B von der Geraden g. Es gilt $\frac{SA}{SC} = \frac{|SA|}{|SC|} = \frac{|SA|\frac{b}{2}}{|SC|\frac{b}{2}} = \frac{\#SAB}{\#SCB} = \frac{U}{U+V}$ und $\frac{SB}{SD} = \frac{|SB|}{|SD|} = \frac{|SB|\frac{a}{2}}{|SD|\frac{a}{2}} = \frac{\#SBA}{\#SDA} = \frac{U}{U+W}$. Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ABD$ haben Grundlinie $\overline{AB}$ und Höhe gleicher Länge d. Daher haben sie auch gleiche Fläche, also gilt $V = W$. Damit ist $\frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SD}$, der erste Teil des Satzes, bereits bewiesen.

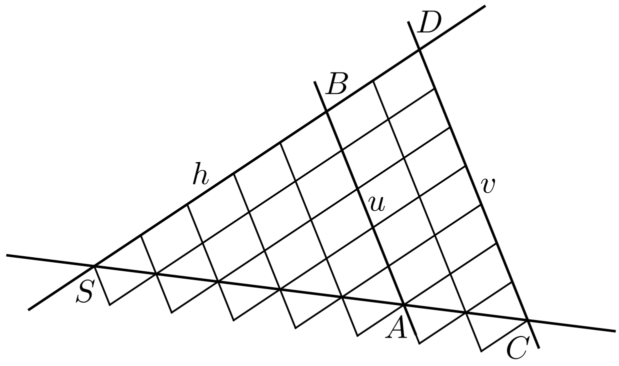


Um auch $\frac{SA}{SC} = \frac{AB}{CD}$ zu beweisen, arbeiten wir mit den Dreiecksflächen $R = \#SCD$ und $T = \#BCD$. Ist c der Normalabstand des Punktes S von der Geraden u, dann gilt $R = \frac{c+d}{2} \cdot |CD|$ und $T = \frac{d}{2} \cdot |CD|$, woraus $R - T = \frac{c}{2} \cdot |CD|$ folgt. Wegen $U = \frac{c}{2} \cdot |AB|$ erhalten wir $\frac{AB}{CD} = \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{U}{R-T}$. Da sowohl $U+V$ als auch $R-T$ die Fläche des Dreiecks $\triangle SBC$ ergeben, gilt $U+V = R-T$. Somit ist auch $\frac{AB}{CD} = \frac{U}{U+V} = \frac{SA}{SC}$ bewiesen.
Der Satz ist gezeigt, wenn die parallelen Geraden auf derselben Seite des Punktes S liegen. Den Fall, wo die parallelen Geraden auf verschiedenen Seiten von S liegen, kann man auf diesen zurückführen, indem man die links von S liegende Gerade am Punkt S spiegelt. Es ist zu beachten, dass dabei die Zahlen SA, SB und AB ihr Vorzeichen ändern. □

Bemerkung: Der Beweis des Strahlensatzes besteht aus zwei Teilen. Im ersten Teil wird die Gleichung $\frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SD}$ bewiesen, im zweiten die Gleichung $\frac{SA}{SC} = \frac{AB}{CD}$. Anstatt einen eigenen Beweis für die zweite Gleichung zu geben, kann man sie auch auf die erste zurückführen. Dazu verschieben wir das Dreieck $\triangle SAB$ so, dass der Punkt A auf dem Punkt C zu liegen kommt. Dabei wird der Punkt S in einen Punkt S^* auf der Gerade g verschoben und der Punkt B in einen Punkt B^* auf der Gerade v, da ja u parallel zu v liegt und somit beim Verschieben in v übergeht. Es gilt dann $SA = S^*C$ und $AB = CB^*$, da $\overline{SA}$ beim Verschieben in $\overline{S^*C}$ übergeht und $\overline{AB}$ in $\overline{CB^*}$. Weiters sind die Geraden $\ell(S, B)$ und $\ell(S^*, B^*)$ zueinander parallel. Wenn wir jetzt die im ersten Teil bewiesene Gleichung anwenden, dann ergibt sich $\frac{CS^*}{CS} = \frac{CB^*}{CD}$. Wegen $SA = S^*C$ erhalten wir $\frac{SA}{SC} = \frac{S^*C}{SC} = \frac{CS^*}{CS}$. Wegen $AB = CB^*$ erhalten wir $\frac{AB}{CD} = \frac{CB^*}{CD}$. Damit ist dann $\frac{SA}{SC} = \frac{AB}{CD}$ bewiesen.



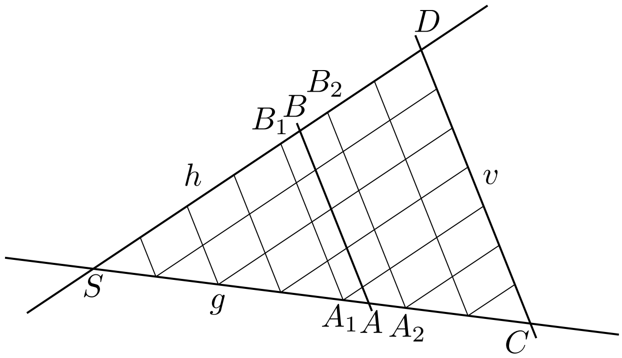
Wir geben einen zweiten Beweis des Strahlensatzes. In diesem Beweis wird der Strahlensatz zuerst für rationale Verhältnisse bewiesen. Durch Approximation erhält man dann den allgemeinen Fall.



Zweiter Beweis: Wir nehmen wieder an, dass die beiden parallelen Geraden u und v auf derselben Seite von S liegen. Wir behandeln zuerst den Fall, dass $\frac{SA}{SC}$ rational ist. Es existieren Zahlen k und n in $\mathbb{N}$ mit $\frac{SA}{SC} = \frac{|SA|}{|SC|} = \frac{k}{n}$. Wir setzen $q = \frac{|SC|}{n}$. Es gilt $|SC| = nq$ und $|SA| = |SC|\,\frac{k}{n} = kq$. Wir teilen die Strecke $\overline{SC}$ in n gleich lange Teile der Länge q und zeichnen durch diese Unterteilungspunkte Geraden, die parallel zur Gerade v liegen. Ebenso zeichnen wir durch diese Unterteilungspunkte Geraden, die parallel zur Gerade h liegen. Dadurch entstehen zueinander kongruente Parallelogramme. Sie sind kongruent, da sie durch geeignete Parallelverschiebungen ineinander übergehen.

Die an der Srecke $\overline{SD}$ anliegenden Parallelogramme teilen diese Strecke in n gleich lange Teile, deren Länge wir mit r bezeichnen. Der k-te der so entstehenden Unterteilungspunkte fällt mit B zusammen, da ja wegen $|SA| = kq$ die k-te der zu v parallelen Geraden mit u zusammenfällt. Somit gilt $|SD| = nr$ und $|SB| = kr$. Es folgt $\frac{SB}{SD} = \frac{|SB|}{|SD|} = \frac{k}{n}$.

Die an der Strecke $\overline{CD}$ anliegenden Parallelogramme teilen diese Strecke in n gleich lange Teile, deren Länge wir mit s bezeichnen. Die Strecke $\overline{AB}$ wird durch die an sie anliegenden Parallelogramme ebenfalls in gleich lange Teile der Länge s unterteilt. Wegen $|SA| = kq$ ist k die Anzahl dieser Teile. Es gilt also $|CD| = ns$ und $|AB| = ks$. Es folgt $\frac{AB}{CD} = \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{k}{n}$. Für den Fall, dass $\frac{SA}{SC}$ rational ist, haben wir $\frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SD} = \frac{AB}{CD}$ bewiesen.



Um den Beweis zu führen, wenn $\frac{SA}{SC}$ nicht rational ist, teilen wir wie oben die Strecke $\overline{SC}$ in n gleiche Teile der Länge $q = \frac{|SC|}{n}$ und zeichnen parallele Geraden zu v bzw. zu h, die $\overline{SD}$ in n gleiche Teile der Länge r und $\overline{CD}$ in n gleiche Teile der Länge s teilen. Die Punkte A und B liegen jetzt nicht auf einem Unterteilungspunkt. Seien A_1 und A_2 die Unterteilungspunkte auf der Strecke $\overline{SC}$, zwischen denen A liegt. Seien B_1 und B_2 die Unterteilungspunkte auf der Strecke $\overline{SD}$, zwischen denen B liegt. Die Strecken $\overline{A_1B_1}$ und $\overline{A_2B_2}$ liegen dann parallel zur Strecke $\overline{AB}$. Und da es sich bei den Punkten A_1, A_2, B_1, B_2 um Unterteilungspunkte handelt, erhalten wir $\frac{|SA_1|}{|SC|} = \frac{|SB_1|}{|SD|} = \frac{|A_1B_1|}{|CD|}$ und $\frac{|SA_2|}{|SC|} = \frac{|SB_2|}{|SD|} = \frac{|A_2B_2|}{|CD|}$ aus dem ersten Teil des Beweises.

Es gilt $|SA| < |SA_2|$ und $|SB_1| < |SB|$. Wegen $|SA_2| = |SA_1| + q$ folgt $|SA| - q < |SA_1|$ und $\frac{|SA|-q}{|SC|} < \frac{|SA_1|}{|SC|} = \frac{|SB_1|}{|SD|} < \frac{|SB|}{|SD|}$. Setzt man für q ein, so erhält man $\frac{|SA|}{|SC|} - \frac{1}{n} < \frac{|SB|}{|SD|}$.
Es gilt $|SA| > |SA_1|$ und $|SB_2| > |SB|$. Wegen $|SA_1| = |SA_2| - q$ folgt $|SA| + q > |SA_2|$ und $\frac{|SA|+q}{|SC|} > \frac{|SA_2|}{|SC|} = \frac{|SB_2|}{|SD|} > \frac{|SB|}{|SD|}$. Setzt man für q ein, so erhält man $\frac{|SA|}{|SC|} + \frac{1}{n} > \frac{|SB|}{|SD|}$.

Wir haben somit $\frac{|SA|}{|SC|} - \frac{1}{n} < \frac{|SB|}{|SD|} < \frac{|SA|}{|SC|} + \frac{1}{n}$ gezeigt. Das gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus ergibt sich die Gleichheit $\frac{|SA|}{|SC|} = \frac{|SB|}{|SD|}$, das heißt $\frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SD}$.

Da aber auch $|A_1B_1| < |AB|$ und $|A_2B_2| > |AB|$ gelten, kann man diesen Beweisschritt auch mit $|A_1B_1|$ statt $|SB_1|$, mit $|A_2B_2|$ statt $|SB_2|$, mit $|AB|$ statt $|SB|$ und mit $|CD|$ statt $|SD|$ durchführen und erhält $\frac{|SA|}{|SC|} - \frac{1}{n} < \frac{|AB|}{|CD|} < \frac{|SA|}{|SC|} + \frac{1}{n}$. Da dies für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist auch $\frac{|SA|}{|SC|} = \frac{|AB|}{|CD|}$ gezeigt, das heißt $\frac{SA}{SC} = \frac{AB}{CD}$.
Der Fall, in dem die parallelen Geraden auf verschiedenen Seiten von S liegen, lässt sich wie im ersten Beweis behandeln. □

Wenn die oben vorausgesetzte Situation vorliegt mit zwei einander schneidenden Geraden g und h, die von zwei parallelen Geraden u und v geschnitten werden, dann verwendet man die in Satz 3 formulierte Version des Strahlensatzes mit orientierten Verhältnissen.

Oft wendet man den Strahlensatz auch auf ähnliche Dreiecke an. Zwei Dreiecke nennt man ähnlich, wenn sie gleiche Winkel haben. Zwei zueinander ähnliche Dreiecke $\triangle\,ABC$ und $\triangle\,DEF$ schreiben wir immer so auf, dass die Winkel bei den erstgenannten Eckpunkten übereinstimmen, (hier sind das A und D), ebenso die bei den zweitgenannten (hier B und E), und daher auch die bei den drittgenannten (hier C und F). Wir können die Dreiecke so übereinanderlegen, dass der Punkt A auf D liegt, die Seite $\overline{AB}$ auf $\overline{DE}$ und die Seite $\overline{AC}$ auf $\overline{DF}$. Dann sind $\overline{BC}$ und $\overline{EF}$ parallel. Aus dem Strahlensatz folgt

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|}.$$

In diesem Fall arbeiten wir mit nichtorientierten Abständen, da die Dreiecke $\triangle\,ABC$ und $\triangle\,DEF$ ja irgendwie liegen können und man daher nicht von gleicher oder entgegengesetzter Orientierung der Abstände sprechen kann. Man kann auch drei getrennte Gleichungen aufschreiben und diese ein wenig umformen. Dann erhält man

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|DF|}, \quad \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|} \quad \text{und} \quad \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|DF|}{|EF|}.$$

Wir werden den Strahlensatz oft in dieser Form verwenden.

Wir beweisen noch eine Umkehrung des Strahlensatzes und zuvor einen Hilfssatz.

Hilfssatz A: *Wenn die Punkte P, Q und S auf einer Geraden liegen und $PS = QS$ gilt, dann sind P und Q identisch. Wenn die Punkte P, Q, R und S auf einer Geraden liegen und $\frac{PR}{PS} = \frac{QR}{QS}$ gilt, dann sind P und Q identisch.*

Beweis: Da P, Q und S auf einer Geraden liegen und $PS = QS$ gilt, haben die Punkte P und Q denselben Abstand von S und liegen auch auf der selben Seite von S, da die Abstände in einer Richtung positives und in der anderen Richtung negatives Vorzeichen haben. Also sind P und Q identisch und die erste Aussage ist gezeigt.

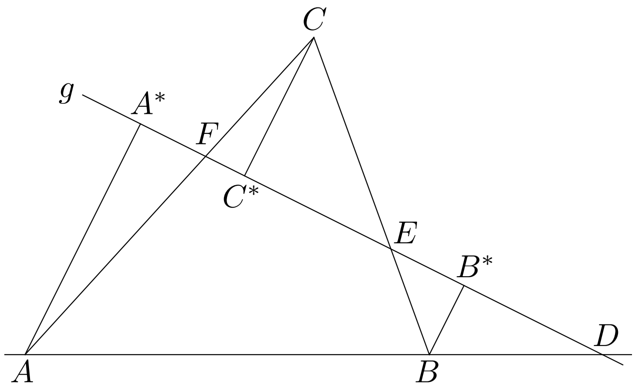
Jetzt zur zweiten Aussage. Da die Punkte P, Q, R und S auf einer Gerade liegen, gilt auch $PR = PS + SR$ und $QR = QS + SR$. Setzt man das in $\frac{PR}{PS} = \frac{QR}{QS}$ ein, so erhält man $1 + \frac{SR}{PS} = 1 + \frac{SR}{QS}$. Also gilt $PS = QS$. Nach der ersten Aussage sind P und Q identisch. □

Satz 4 (Umkehrung des Strahlensatzes) *Seien g und h zwei Gerade, die einander im Punkt S schneiden. Seien A und C Punkte auf g und B und D Punkte auf h, die alle ungleich S sind. Wenn $\frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SD}$ gilt, dann liegt die Gerade $\ell(A,B)$ parallel zur Geraden $\ell(C,D)$.*

Beweis: Sei u die Gerade durch den Punkt A, die parallel zu $\ell(C,D)$ liegt. Sei B^* der Schnittpunkt von u mit h. Man beachte, dass $\ell(C,D)$ und damit auch u nicht parallel zu h liegen kann. Aus Satz 3 folgt dann $\frac{SA}{SC} = \frac{SB^*}{SD}$. Wegen $\frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SD}$ erhalten wir $SB^* = SB$. Daraus folgt $B^* = B$ nach Hilfssatz A, da S, B und B^* alle auf der Geraden h liegen. Daraus folgt wieder, dass $\ell(A,B)$ mit der Geraden u zusammenfällt, womit bewiesen ist, dass $\ell(A,B)$ parallel zu $\ell(C,D)$ liegt. □

Wir kommen zu den Anwendungen des Strahlensatzes. Die Sätze von Menelaos und Ceva machen Aussagen über drei Punkte, die auf den Trägergeraden der Seiten eines Dreiecks liegen. Der Satz von Menelaos gibt eine Bedingung dafür, dass die drei Punkte auf einer Gerade liegen. Der Satz von Ceva gibt eine Bedingung dafür, dass die Verbindungsgeraden der drei Punkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten durch einen Punkt gehen.

Satz 5 (Satz von Menelaos) *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Sei D auf der Geraden $\ell(A,B)$, sei E auf der Geraden $\ell(B,C)$ und sei F auf der Geraden $\ell(C,A)$ so gewählt, dass die Punkte D, E und F keine Eckpunkte des Dreiecks sind und alle auf einer Gerade g liegen. Dann gilt $\frac{DA}{DB} \cdot \frac{EB}{EC} \cdot \frac{FC}{FA} = 1$ (oft auch als $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = -1$ geschrieben).*

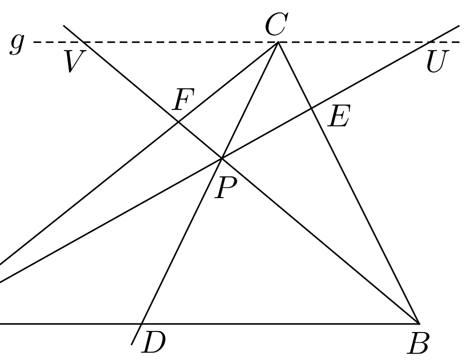


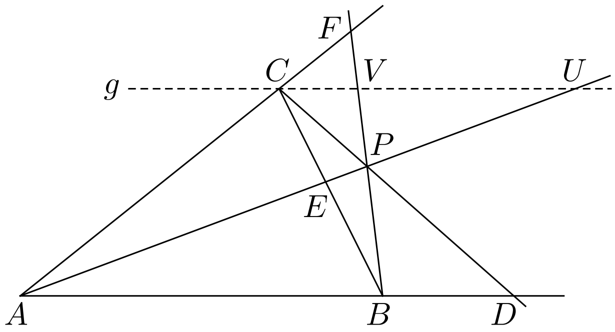
Beweis: Sei A^* der Fußpunkt des Lots vom Punkt A auf die Gerade g, sei B^* der Fußpunkt des Lots vom Punkt B auf die Gerade g und sei C^* der Fußpunkt des Lots vom Punkt C auf die Gerade g. Da die Geraden $\ell(A,A^*)$ und $\ell(B,B^*)$ parallel liegen, folgt $\frac{DA}{DB} = \frac{AA^*}{BB^*}$ aus dem Strahlensatz. Ebenso folgt $\frac{EB}{EC} = \frac{BB^*}{CC^*}$, da $\ell(B,B^*)$ und $\ell(C,C^*)$ parallel liegen, und auch $\frac{FC}{FA} = \frac{CC^*}{AA^*}$, da $\ell(A,A^*)$ und $\ell(C,C^*)$ parallel liegen. Damit ergibt sich $\frac{DA}{DB} \cdot \frac{EB}{EC} \cdot \frac{FC}{FA} = \frac{AA^*}{BB^*} \cdot \frac{BB^*}{CC^*} \cdot \frac{CC^*}{AA^*} = 1$. □

Es gibt eine Umkehrung des Satzes von Menelaos, die wir nicht behandeln.

Satz 6 (Satz von Ceva) *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Sei D auf der Geraden $\ell(A,B)$, sei E auf der Geraden $\ell(B,C)$ und sei F auf der Geraden $\ell(C,A)$ so gewählt, dass diese Punkte keine Eckpunkte des Dreiecks sind und dass die Geraden $\ell(A,E)$, $\ell(B,F)$ und $\ell(C,D)$ durch einen gemeinsamen Punkt P gehen. Dann gilt $\frac{DA}{DB} \cdot \frac{EB}{EC} \cdot \frac{FC}{FA} = -1$ (oft auch als $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$ geschrieben).*

Beweis: Sei g die Gerade durch C parallel zu $\ell(A,B)$. Da E kein Eckpunkt ist, existiert der Schnittpunkt U der Geraden g mit $\ell(A,E)$ und ist $\neq C$. Da F kein Eckpunkt ist, existiert der Schnittpunkt V der Geraden g mit $\ell(B,F)$ und ist $\neq C$. In der linken Zeichnung liegt der Punkt P im Dreieck, in der rechten Zeichnung liegt P außerhalb. Aus

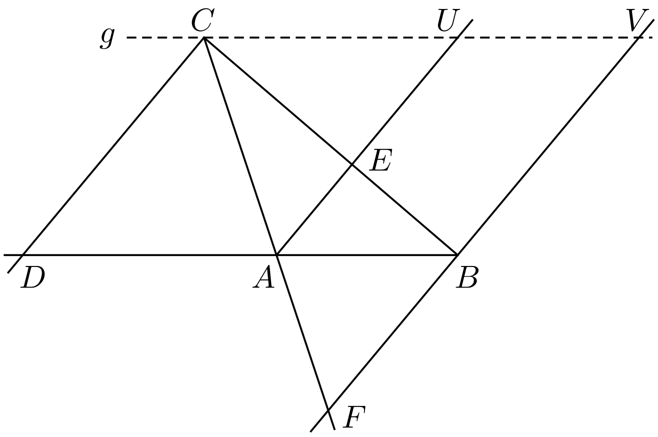




dem Strahlensatz folgt $\frac{PD}{PC} = \frac{DA}{CU}$ und $\frac{PD}{PC} = \frac{DB}{CV}$. Es gilt also $\frac{DA}{DB} = \frac{CU}{CV}$. Ebenfalls aus dem Strahlensatz erhalten wir $\frac{EB}{EC} = \frac{BA}{CU}$ und $\frac{FC}{FA} = \frac{CV}{AB}$. Multiplikation der letzten drei Gleichungen ergibt $\frac{DA}{DB} \cdot \frac{EB}{EC} \cdot \frac{FC}{FA} = \frac{BA}{AB}$. Wegen $BA = -AB$ folgt $\frac{DA}{DB} \cdot \frac{EB}{EC} \cdot \frac{FC}{FA} = -1$. □

Es gibt auch eine Version des Satzes von Ceva für parallele Geraden.

Satz 7: *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Sei D auf der Geraden $\ell(A,B)$, sei E auf der Geraden $\ell(B,C)$ und sei F auf der Geraden $\ell(C,A)$ so gewählt, dass diese Punkte keine Eckpunkte des Dreiecks sind und dass die Geraden $\ell(A,E)$, $\ell(B,F)$ und $\ell(C,D)$ parallel liegen. Dann gilt $\frac{DA}{DB} \cdot \frac{EB}{EC} \cdot \frac{FC}{FA} = -1$ (was man wieder als $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$ schreiben kann).*

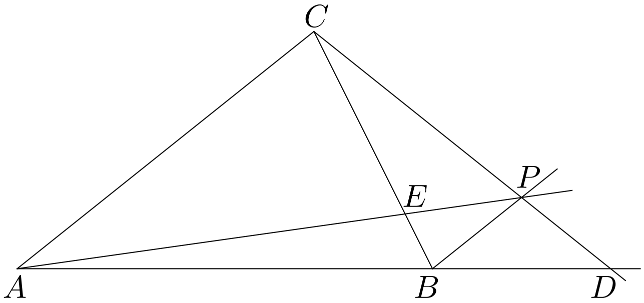


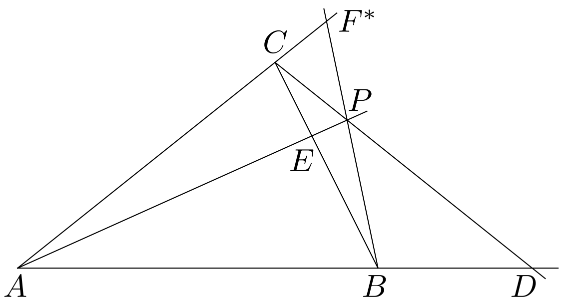
Beweis: Wir gehen vor wie im letzten Beweis. Sei g die Gerade parallel zu $\ell(A,B)$ durch C. Da E kein Eckpunkt ist, existiert der Schnittpunkt U der Geraden g mit $\ell(A,E)$ und ist $\neq C$. Da F kein Eckpunkt ist, existiert der Schnittpunkt V der Geraden g mit $\ell(B,F)$ und ist $\neq C$. Aus dem Strahlensatz folgt dann $\frac{EB}{EC} = \frac{BA}{CU}$ und $\frac{FA}{FC} = \frac{AB}{CV}$. Da auch die Geraden $\ell(A,E)$, $\ell(B,F)$ und $\ell(C,D)$ zueinander parallel liegen, erhalten wir $CU = DA$ und $CV = DB$. Es gilt also $\frac{EB}{EC} = \frac{BA}{DA}$ und $\frac{FC}{FA} = \frac{DB}{AB}$. Wir multiplizieren diese Gleichungen und berücksichtigen, dass $AB = -BA$ gilt. Wir erhalten $\frac{EB}{EC} \cdot \frac{FC}{FA} = -\frac{DB}{DA}$. Daraus folgt dann $\frac{DA}{DB} \cdot \frac{EB}{EC} \cdot \frac{FC}{FA} = -1$. □

Wir beweisen noch folgende Umkehrung des Satzes von Ceva.

Satz 8: *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Sei D auf der Geraden $\ell(A,B)$, sei E auf der Geraden $\ell(B,C)$ und sei F auf der Geraden $\ell(C,A)$ so gewählt, dass $\frac{DA}{DB} \cdot \frac{EB}{EC} \cdot \frac{FC}{FA} = -1$ gilt. Dann liegen die Geraden $\ell(A,E)$, $\ell(B,F)$ und $\ell(C,D)$ entweder parallel oder sie schneiden einander in einem Punkt.*

Beweis: Liegen die Geraden $\ell(A,E)$, $\ell(B,F)$ und $\ell(C,D)$ parallel, dann ist nichts zu zeigen. Nehmen wir also an, dass zwei von ihnen, sagen wir $\ell(A,E)$ und $\ell(C,D)$, einander in einem Punkt P schneiden. Angenommen die Geraden $\ell(B,P)$ und $\ell(A,C)$ wären parallel. Diese Situation sieht man in der Zeichnung links. Aus Satz 3 folgt dann $\frac{DB}{DA} = \frac{BP}{AC}$ und $\frac{EB}{EC} = \frac{BP}{CA}$. Mit Hilfe der Voraussetzung $\frac{DA}{DB} \cdot \frac{EB}{EC} \cdot \frac{FC}{FA} = -1$ erhalten wir $\frac{FC}{FA} = 1$ und

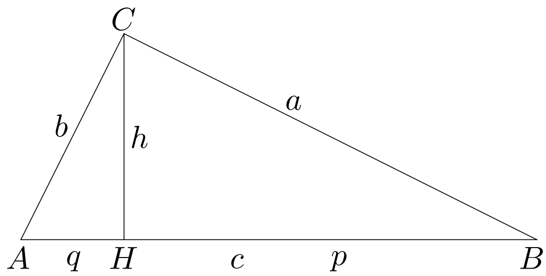




somit $FC = FA$. Es folgt $C = A$ wegen Hilfssatz A, da C, A und F alle auf der Geraden $\ell(A,C)$ liegen. Dieser Widerspruch zeigt, dass die Geraden $\ell(B,P)$ und $\ell(A,C)$ nicht parallel sein können. Sei F^* ihr Schnittpunkt. Das ist in der rechten Zeichnung dargestellt. Aus Satz 6 folgt $\frac{DA}{DB} \cdot \frac{EB}{EC} \cdot \frac{F^*C}{F^*A} = -1$. Mit Hilfe der Voraussetzung erhalten wir $\frac{F^*C}{F^*A} = \frac{FC}{FA}$. Wegen Hilfssatz A folgt $F^* = F$, da die Punkte A, C, F und F^* alle auf der Gerade $\ell(A,C)$ liegen. Damit ist gezeigt, dass der Punkt F auf der Gerade $\ell(B,P)$ liegt, oder anders ausgedrückt, dass auch die Gerade $\ell(B,F)$ durch den Punkt P geht. □

3. Der Satz von Pythagoras

Wir legen die Bezeichnung für ein rechtwinkeliges Dreieck fest. Den Eckpunkt beim rechten Winkel nennen wir C, die anderen beiden A und B. Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite heißt Hypotenuse, ihre Länge ist c, die anderen beiden Seiten heißen Katheten, ihre Längen sind a und b. Die Winkel heißen wie üblich α, β und γ mit $\gamma = 90^0$. Die Höhe durch den Eckpunkt C hat Länge h und Fußpunkt H. Die Hypothenuse $\overline{AB}$ wird durch H in zwei Teile geteilt, deren Längen wir q und p nennen, sodass $c = p + q$ gilt.



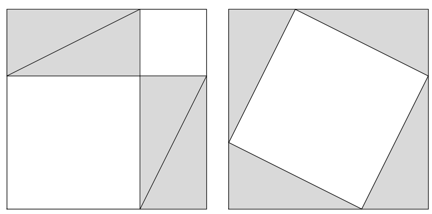
Satz 9: *Für ein rechtwinkeliges Dreieck mit den oben eingeführten Bezeichnungen gilt*

$$\begin{array}{ll} c^2 = a^2 + b^2 & \textit{Satz von Pythagoras} \\ a^2 = pc \;\; \textit{und} \;\; b^2 = qc & \textit{Kathetensatz} \\ h^2 = pq & \textit{Höhensatz} \end{array}$$

Erster Beweis: Die Dreiecke $\triangle\, AHC$ und $\triangle\, ACB$ sind ähnlich, da sie beim Eckpunkt A denselben Winkel haben, und das erste Dreieck bei H und das zweite bei C einen rechten Winkel hat. Aus dem Strahlensatz folgt $\frac{q}{b} = \frac{b}{c}$ und $\frac{h}{b} = \frac{a}{c}$, das heißt $b^2 = qc$ und $h^2 = \frac{a^2b^2}{c^2}$. Ebenso sind die Dreiecke $\triangle\, BHC$ und $\triangle\, BCA$ ähnlich, woraus $\frac{p}{a} = \frac{a}{c}$ und damit $a^2 = pc$ folgt. Somit ist der Kathetensatz bereits bewiesen.

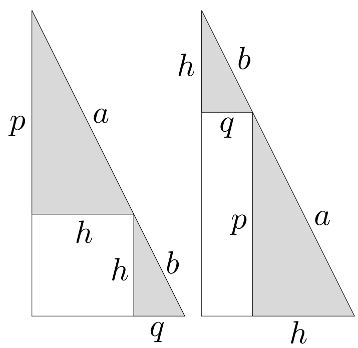
Addiert man $a^2 = pc$ und $b^2 = qc$, die beiden Gleichungen aus dem Kathetensatz, so folgt $a^2 + b^2 = (p + q)c = c^2$, der Satz von Pythagoras. Setzt man die beiden Gleichungen aus dem Kathetensatz in $h^2 = \frac{a^2b^2}{c^2}$ ein, so folgt $h^2 = \frac{pqc^2}{c^2} = pq$, der Höhensatz. □

Zweiter Beweis: Wir zeichnen zwei Quadrate Q_1 und Q_2 mit Seitenlänge $a + b$. Aus jedem der beiden Quadrate schneiden wir vier Mal das Dreieck heraus, wie es in der Zeichnung zu sehen ist. Vom Quadrat Q_1 bleiben zwei Quadrate, das eine mit Seitenlänge a, das andere mit Seitenlänge b. Vom Quadrat Q_2 bleibt ein Quadrat mit Seitenlänge c. Es ist ein Quadrat, da jeder der Winkel dieses Vierecks aus einem Winkel von 180^0 durch Wegnahme von α und β entsteht und $\alpha + \beta = 90^0$ gilt.



Da die verbleibende Fläche in beiden Fällen gleich sein muss, ist $a^2 + b^2 = c^2$ gezeigt.

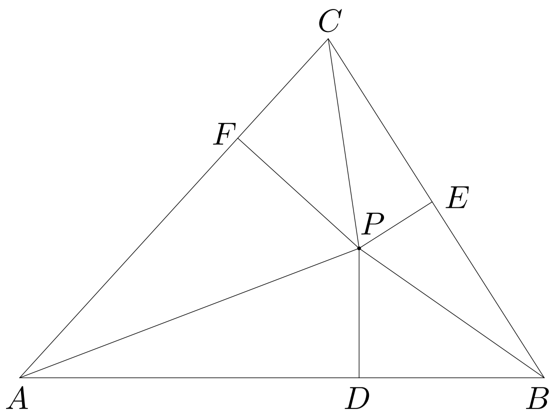
Die Höhe teilt das rechtwinkelige Dreieck in zwei kleinere rechtwinkelige Dreiecke Δ_1 mit Seitenlängen h, p, a und Δ_2 mit Seitenlängen h, q, b. Sei Δ das Dreieck mit den Seitenlängen $p + h$, $q + h$ und $a + b$. In der linken Zeichnung werden Δ_1 und Δ_2 aus dem Dreieck Δ so herausgeschnitten, dass ein Quadrat mit Seitenlänge h übrigbleibt. In der rechten Zeichnung werden Δ_1 und Δ_2 aus dem Dreieck Δ so herausgeschnitten, dass ein Rechteck mit Seitenlängen p und q übrigbleibt. Die Rechteckfläche ist somit gleich der Quadratfläche. Es gilt $pq = h^2$. Damit ist der Höhensatz bewiesen. Der Kathetensatz folgt aus dem Satz von Pythagoras angewandt auf Δ_1 und Δ_2 und dem Höhensatz. Wir erhalten $a^2 = p^2 + h^2 = p^2 + pq = pc$ und $b^2 = q^2 + h^2 = q^2 + pq = cq$. □



Wir kommen zu den Anwendungen des Satzes von Pythagoras. Der folgende Satz ist der Satz von Carnot. Man kann ihn als Gegenstück zum Satz von Ceva auffassen. Sind E, F und D Punkte auf den Trägergeraden der drei Seiten eines Dreiecks $\triangle ABC$, dann gibt der Satz von Ceva eine Bedingung dafür an, dass die Verbindungsgeraden dieser Punkte mit dem jeweils gegenüberliegenden Eckpunkt des Dreiecks einander in einem Punkt schneiden. Der Satz von Carnot hingegen gibt eine Bedingung dafür an, dass die Senkrechten durch diese drei Punkte auf die jeweilige Trägergerade einander in einem Punkt schneiden. Es folgt der Satz von Carnot und dann seine Umkehrung.

Satz 10: *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Sei D ein Punkt auf $\ell(A,B)$, sei E ein Punkt auf $\ell(B,C)$ und F ein Punkt auf $\ell(C,A)$, sodass die Gerade durch D senkrecht auf $\ell(A,B)$, die Gerade durch E senkrecht auf $\ell(B,C)$ und die Gerade durch F senkrecht auf $\ell(C,A)$ einander in einem Punkt P schneiden. Dann gilt $|AD|^2-|DB|^2+|BE|^2-|EC|^2+|CF|^2-|FA|^2=0$.*

Beweis: Wir zeichnen die Lote vom Punkt P auf die (Verlängerungen der) drei Dreieckseiten, das sind die Strecken von P nach D, von P nach E und von P nach F. Weiters zeichnen wir die Strecken vom Punkt P zu den drei Eckpunkten A, B und C. Dadurch entstehen sechs rechtwinkelige Dreiecke, wobei die rechten Winkel jeweils bei den Punkten D, E und F liegen. Wir wenden den Satz von Pythagoras auf diese sechs Dreiecke an und erhalten die Gleichungen: $|AD|^2=|AP|^2-|DP|^2$, $|DB|^2=|BP|^2-|DP|^2$, $|BE|^2=|BP|^2-|EP|^2$, $|EC|^2=|CP|^2-|EP|^2$, $|CF|^2=|CP|^2-|FP|^2$, $|FA|^2=|AP|^2-|FP|^2$. Das alles gilt auch, wenn der Punkt P außerhalb des Dreiecks liegt. Die Lage dieser rechtwinkeligen Dreiecke ist dann nur etwas komplizierter.



Subtrahiert man die ersten beiden Gleichungen, die darauffolgenden beiden Gleichungen und die letzten beiden Gleichungen, so hat man $|AD|^2-|DB|^2=|AP|^2-|BP|^2$, $|BE|^2-|EC|^2=|BP|^2-|CP|^2$ und $|CF|^2-|FA|^2=|CP|^2-|AP|^2$. Addiert man diese drei Gleichungen, so folgt schließlich $|AD|^2-|DB|^2+|BE|^2-|EC|^2+|CF|^2-|FA|^2=0$. Das ist bereits das gewünschte Resultat. □

Satz 11: *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Sei D ein Punkt auf $\ell(A,B)$, sei E ein Punkt auf $\ell(B,C)$ und sei F ein Punkt auf $\ell(C,A)$, sodass $|AD|^2-|DB|^2+|BE|^2-|EC|^2+|CF|^2-|FA|^2=0$ gilt. Die Gerade durch D senkrecht auf $\ell(A,B)$, die Gerade durch E senkrecht auf $\ell(B,C)$ und die Gerade durch F senkrecht auf $\ell(C,A)$ schneiden dann einander in einem Punkt.*

Beweis: Sei g_a die Gerade durch den Punkt E senkrecht auf $\ell(B,C)$ und g_b die Gerade durch den Punkt F senkrecht auf $\ell(C,A)$. Sei P der Schnittpunkt der Geraden g_a und g_b. Weiters sei D^* der Fußpunkt des Lots vom Punkt P auf die Gerade $\ell(A,B)$. Aus Satz 10 erhalten wir $|AD^*|^2-|D^*B|^2+|BE|^2-|EC|^2+|CF|^2-|FA|^2=0$. Nach Vorassetzung gilt $|AD|^2-|DB|^2+|BE|^2-|EC|^2+|CF|^2-|FA|^2=0$. Es folgt $|AD^*|^2-|D^*B|^2=|AD|^2-|DB|^2$. Setzt man $x=DD^*$, dann gilt $AD^*=AD+x$ und $x+D^*B=DB$. Setzt man das ein, so folgt $|AD|^2+2AD\cdot x+x^2-|DB|^2+2DB\cdot x-x^2=|AD|^2-|DB|^2$, das heißt $2AD\cdot x+2DB\cdot x=0$. Wegen $AD+DB=AB\neq 0$ folgt $AB\cdot x=0$ und daraus $x=0$. Damit ist $DD^*=0$ gezeigt, also $D^*=D$. Das Lot von P auf die Gerade $\ell(A,B)$ geht durch D. Somit liegt P auch auf der Gerade durch D senkrecht auf $\ell(A,B)$. □

Wir beschäftigen uns noch ein wenig mit dem Kreis.

Satz 12: *Sei k ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r. Sei P ein Punkt auf k und g eine Gerade durch P. Wenn g senkrecht auf die Strecke $\overline{MP}$ steht, dann liegen alle Punkte der Geraden g mit Ausnahme von P außerhalb des Kreises (g ist eine Tangente an den Kreis k und P ist der Berührpunkt). Wenn g nicht senkrecht auf die Strecke $\overline{MP}$ steht, dann hat g neben P einen zweiten Schnittpunkt Q mit dem Kreis k, die Punkte auf g zwischen P und Q liegen innerhalb des Kreises und alle anderen Punkte auf g liegen außerhalb des Kreises (g ist eine Sekante und die Strecke $\overline{PQ}$ ist eine Sehne des Kreises k).*

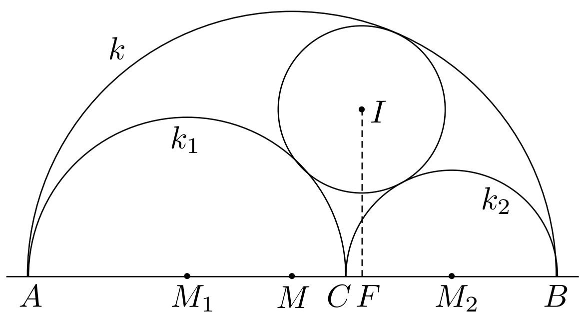
Beweis: Wir nehmen an, dass g senkrecht auf $\overline{MP}$ steht. Ist R ein Punkt $\neq P$ auf g, dann gilt $\measuredangle MPR = 90^0$ und $|MR|^2 = |MP|^2 + |PR|^2$ nach dem Satz von Pythagoras. Es folgt $|MR| > |MP| = r$. Alle Punkte R auf g, die $\neq P$ sind, liegen außerhalb des Kreises. Wir nehmen an, dass g nicht senkrecht auf $\overline{MP}$ steht. Sei F der Fußpunkt des Lots von M auf g. Wir spiegeln P an F und erhalten den Punkt Q. Wegen $|FQ| = |FP|$ folgt $|MQ|^2 = |MF|^2 + |FQ|^2 = |MF|^2 + |FP|^2 = |MP|^2 = r^2$ aus dem Satz von Pythagoras. Somit liegt auch Q auf dem Kreis. Ist R ein Punkt auf g zwischen P und Q, dann gilt $|FR| < |FP|$ und es folgt $|MR|^2 < r^2$ wie oben. Somit liegt R im Kreis. Ist R ein Punkt auf g außerhalb der Strecke $\overline{PQ}$, dann gilt $|FR| > |FP|$ und es folgt $|MR|^2 > r^2$. Somit liegt R außerhalb des Kreises. □

Bemerkung: Zwei Kreise mit Mittelpunkten M_1 und M_2 und Radien r_1 und r_2 berühren einander im Punkt P, wenn sie dort eine gemeinsame Tangente g haben. Die Senkrechte auf g durch P geht dann durch M_1 und M_2. Es gilt $|M_1M_2| = r_1 + r_2$, wenn sie einander von außen berühren, und $|M_1M_2| = |r_1 - r_2|$, wenn einer den anderen von innen berührt.

Wir wenden das auf den Arbelos an. Sei $\overline{AB}$ eine Strecke, auf der ein Punkt C gewählt wird. Über der Strecke $\overline{AB}$ als Durchmesser errichten wir einen Halbkreis k. Aus diesem Halbkreis schneiden wir den Halbkreis k_1 mit Durchmesser $\overline{AC}$ und den Halbkreis k_2 mit Durchmesser $\overline{CB}$ heraus. Die verbleibende Figur ist der Arbelos (Archimedes). Seien r, r_1 und r_2 die Radien und M, M_1 und M_2 die Mittelpunkte der Halbkreise k, k_1 und k_2. Es gilt $|AB| = 2r$, $|AC| = 2r_1$ und $|CB| = 2r_2$. Wegen $|AB| = |AC| + |CB|$ erhalten wir $r = r_1 + r_2$. Weiters berechnen wir $|MM_1| = |MA| - |M_1A| = r - r_1 = r_2$ und $|MM_2| = |MB| - |M_2B| = r - r_2 = r_1$. Ein Arbelos hat einen Inkreis. Es ist der Kreis, der den Halbkreis k von innen und die beiden Halbkreise k_1 und k_2 von außen berührt.

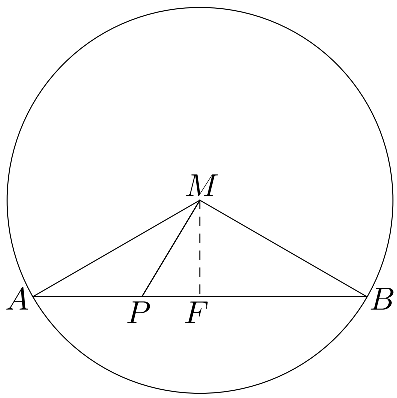
Satz 13: *Für den Radius ϱ des Inkreises gilt $\varrho = \frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}$.*

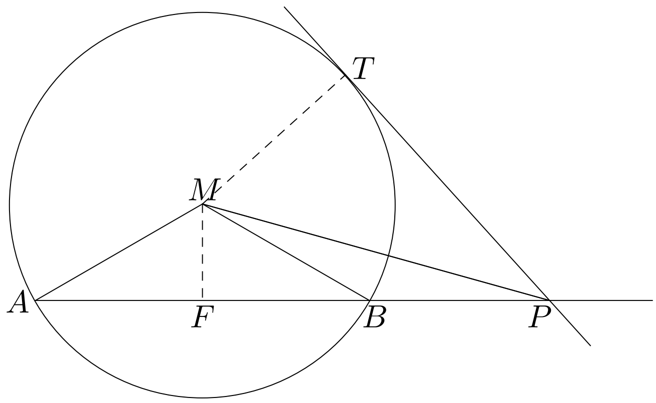
Beweis: Sei I der Mittelpunkt des Inkreises und F der Fußpunkt des Lots von I auf $\overline{AB}$. Wir setzen $d = |MF|$ und $h = |IF|$. Wir verwenden den Satz von Pythagoras. Es gilt $(r - \varrho)^2 = |IM|^2 = d^2 + h^2$, da der Inkreis den Halbkreis k von innen berührt. Es gilt $(r_1 + \varrho)^2 = |IM_1|^2 = (r_2 + d)^2 + h^2$ und $(r_2 + \varrho)^2 = |IM_2|^2 = (r_1 - d)^2 + h^2$, da der Inkreis die Halbkreise k_1 und k_2 von außen berührt. Wir lösen diese drei Gleichungen. Subtraktion der ersten Gleichung von den beiden anderen gibt $r_1^2 + 2r_1\varrho - r^2 + 2r\varrho = r_2^2 + 2r_2 d$ und $r_2^2 + 2r_2\varrho - r^2 + 2r\varrho = r_1^2 + 2r_1 d$. Aus diesen beiden Gleichungen eliminieren wir d und setzen $r = r_1 + r_2$ ein. Dadurch erhalten wir dann $\varrho = \frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}$. □



Satz 14: *Sei k ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r. Eine Gerade g schneide k in den Punkten A und B. Sei P ein weiterer Punkt auf g. Dann gilt $PA \cdot PB = |MP|^2 - r^2$.*

Beweis: Sei h die Länge des Lots von M auf g und F dessen Fußpunkt. Wenn g durch M geht, dann gilt $h = 0$ und $F = M$. Sei $a = PA$ und $b = PB$. Aus den Rechenregeln für den orientierten Abstand folgt $AB = AP + PB = PB - PA = b - a$ und $AF = \frac{1}{2}AB = \frac{b-a}{2}$. Damit ergibt sich $PF = PA + AF = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$. Setzt man $c = |MP|$ dann folgen





$c^2 = h^2 + (\frac{a+b}{2})^2$ und $r^2 = h^2 + (\frac{b-a}{2})^2$ aus dem Satz von Pythagoras. Subtrahiert man diese Gleichungen, dann erhält man $c^2 - r^2 = ab$, das heißt $|MP|^2 - r^2 = PA \cdot PB$. □

Satz 14 heißt Sehnensatz, wenn P auf der Sehne $\overline{AB}$ liegt (linke Zeichnung). In diesem Fall gilt $|PA| \cdot |PB| = r^2 - |MP|^2$, da PA und PB verschiedene Vorzeichen haben. Liegt P außerhalb des Kreises auf der Sekante durch A und B, dann heißt Satz 14 Sekantensatz (rechte Zeichnung). In diesem Fall gilt $|PA| \cdot |PB| = |MP|^2 - r^2$, da PA und PB gleiches Vorzeichen haben. Ist T der Berührpunkt einer Tangente an den Kreis und P ein Punkt auf dieser Tangente, dann folgt $|PT|^2 = |MP|^2 - r^2$ aus dem Satz von Pythagoras. Der Sekantensatz gilt auch, wenn A und B in einem Punkt T zusammenfallen und P auf der Tangente durch diesen Punkt liegt.

Wir beweisen noch eine andere Version des Sehnen-Sekanten-Satzes.

Satz 15: *Seien g und h Gerade, die einander in einem Punkt P schneiden. Seien A und B Punkte auf g und C und D Punkte auf h, die alle ungleich P sind. Dann sind äquivalent*
(a) *es gilt $PA \cdot PB = PC \cdot PD$*
(b) *die Punkte A, B, C und D liegen auf einem Kreis*
Fallen zwei Punkte, die auf einer Gerade liegen, zusammen, dann bedeutet die Aussage "die Punkte liegen auf einem Kreis", dass der Kreis die Gerade in diesem Punkt berührt.

Beweis: Es gelte (b). Sei M der Mittelpunkt und r der Radius des Kreises. Nach Satz 14 gilt $PA \cdot PB = |MP|^2 - r^2$ und $PC \cdot PD = |MP|^2 - r^2$. Daraus erhalten wir (a).

Es gelte (a). Sei k der Kreis durch die Punkte A, B und C. Da C ungleich P ist und somit nicht auf g liegt, existiert dieser Kreis. (Im Fall $A \neq B$ ist k der Umkreis des Dreiecks $\triangle ABC$. Im Fall $A = B$ ist k der Kreis durch C, der g im Punkt A berührt; sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Symmetrale der Strecke $\overline{AC}$ und der Senkrechten durch A auf g – hier werden auch Resultate aus dem nächsten Kapitel verwendet). Die Gerade h ist entweder Sekante oder Tangente des Kreises k. Im ersten Fall sei D^* der Schnittpunkt $\neq C$ von h und k. Im zweiten Fall sei D^* gleich C. Aus dem ersten Teil dieses Beweises folgt dann $PA \cdot PB = PC \cdot PD^*$. Da wir $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ voraussetzen, ergibt sich $PD = PD^*$ (wegen $P \neq C$ gilt ja $PC \neq 0$). Da P, D und D^* auf der Gerade h liegen, muss $D = D^*$ nach Hilfssatz A gelten. Damit ist (b) gezeigt. □

4. Das Dreieck

Zwei Dreiecke heißen kongruent, wenn sich das eine durch Verschieben, Drehen, Spiegeln in das andere überführen lässt. Zwei zueinander kongruente Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle PQR$ schreiben wir immer so auf, dass die erstgenannten Eckpunkte einander entsprechen (hier sind das A und P), ebenso die zweitgenannten (hier B und Q), und daher dann auch die drittgenannten (hier C und R). Sind zwei Dreiecke kongruent, dann sind die einander entsprechenden Seiten gleich lang und die einander entsprechenden Winkel gleich groß. Kongruente Dreiecke haben natürlich auch gleiche Fläche und so weiter. Um festzustellen, ob zwei Dreiecke kongruent sind, verwendet man folgenden Kongruenzsatz.

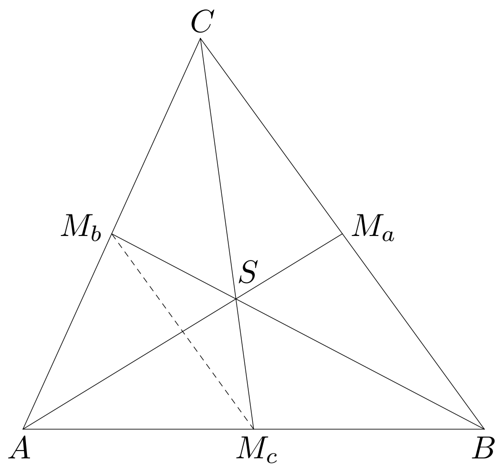
Satz 16: *Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn folgende Größen übereinstimmen*
(a) die Längen der drei Seiten
(b) die Längen zweier Seiten und der von diesen eingeschlossene Winkel
(c) die Längen zweier Seiten und der der längeren Seite gegenüberliegende Winkel
(d) die Länge einer Seite und die beiden daran anliegenden Winkel

Der Beweis ergibt sich aus der Tatsache, dass man in allen vier Fällen das Dreieck aus den angegebenen Größen eindeutig konstruieren kann. In (c) ist es wichtig, dass der der längeren Seite gegenüberliegende Winkel übereinstimmt. Gibt man zwei Seiten vor und den der kürzeren Seite gegenüberliegenden Winkel, dann kann es passieren, dass man aus diesen Angaben zwei Dreiecke konstruieren kann, die nicht kongruent sind.

Hat man zwei rechtwinkelige Dreiecke, dann sind diese nach (b) kongruent, wenn die Längen der beiden Katheten übereinstimmen. Stimmen die Längen der Hypotenuse und einer Kathete überein, dann sind sie nach (c) kongruent, da die Hypotenuse dem rechten Winkel gegenüber liegt und länger als die Kathete ist.

Wir behandeln die besonderen Punkte des Dreiecks. Wir beginnen mit dem Schwerpunkt und dem Höhenschnittpunkt, da wir dafür den Strahlensatz verwenden. Für Umkreis- und Inkreismittelpunkt verweden wir dann den Kongruenzsatz. Die Schwerlinien verbinden die Mittelpunkte der Dreieckseiten mit dem jeweils gegenüberliegenden Eckpunkt.

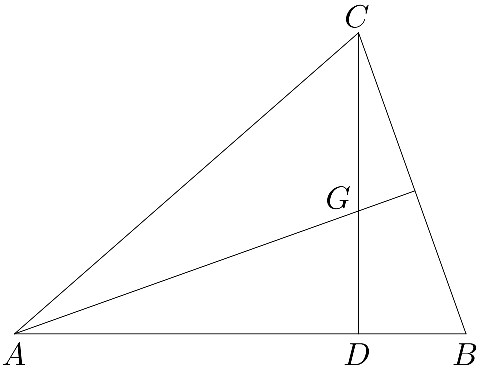
Satz 17: *Die drei Schwerlinien eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt S, dem sogenannten Schwerpunkt, der jede Schwerlinie im Verhältnis $1:2$ teilt.*



Beweis: Sei M_a der Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$, sei M_b der Mittelpunkt der Seite $\overline{CA}$ und sei M_c der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$. Der Schnittpunkt der Geraden $\ell(C, M_c)$ und $\ell(B, M_b)$ sei S. Wegen $\frac{AM_b}{AC} = \frac{1}{2} = \frac{AM_c}{AB}$ folgt aus Satz 4, dass die Geraden $\ell(M_c, M_b)$ und $\ell(B, C)$ parallel liegen. Aus Satz 3 folgt jetzt $\frac{1}{2} = \frac{AM_c}{AB} = \frac{M_cM_b}{BC}$. Wieder mit Satz 3 ergibt sich $\frac{SM_c}{SC} = \frac{M_cM_b}{CB} = -\frac{M_cM_b}{BC} = -\frac{1}{2}$ und $\frac{SM_b}{SB} = \frac{M_bM_c}{BC} = -\frac{M_cM_b}{BC} = -\frac{1}{2}$.
Ist T der Schnittpunkt der Geraden $\ell(C, M_c)$ und $\ell(A, M_a)$, dann folgt analog $\frac{TM_c}{TC} = \frac{M_cM_a}{CA} = -\frac{1}{2}$ und $\frac{TM_a}{TA} = \frac{M_aM_c}{AC} = -\frac{1}{2}$. Da die Punkte C, S, T und M_c auf der Geraden $\ell(C, M_c)$ liegen und $\frac{SM_c}{SC} = \frac{TM_c}{TC}$ gilt, erhalten wir $S = T$ aus Hilfssatz A. Die Schwerlinien schneiden einander im Punkt S. Da $\frac{SM_c}{SC} = -\frac{1}{2}$, $\frac{SM_b}{SB} = -\frac{1}{2}$ und $\frac{SM_a}{SA} = -\frac{1}{2}$ gilt, teilt der Schwerpunkt S jede Schwerlinie im Verhältnis $1:2$. □

Die Höhen gehen durch die Eckpunkte des Dreiecks und stehen senkrecht auf die jeweils gegenüberliegende Dreieckseite.

Satz 18: *Die drei Höhen eines Dreiecks $\triangle ABC$ schneiden einander in einem Punkt H, dem sogenannten Höhenschnittpunkt.*



Beweis: Ist das Dreieck nicht spitzwinkelig, dann wählen wir die Bezeichnungen so, dass γ der Winkel $\geq 90^0$ ist. Die Winkel α und β sind jedenfalls spitz. Sei D der Fußpunkt der Höhe durch C. Er liegt zwischen A und B, da die Winkel α und β spitz sind. Weiters sei G der Schnittpunkt der Höhe durch den Eckpunkt C mit der durch den Eckpunkt A. Die Dreiecke $\triangle ADG$ und $\triangle CDB$ sind ähnlich. Beide Dreiecke haben bei D einen rechten Winkel und der Winkel bei G im ersten stimmt mit dem Winkel β bei B im zweiten Dreieck überein, da die Höhen senkrecht auf den Seiten stehen (Orthogonalwinkel). Aus dem Strahlensatz folgt $\frac{|AD|}{|DG|} = \frac{|CD|}{|DB|}$, das heißt $|DG| \cdot |CD| = |AD| \cdot |DB|$. Ist jetzt H der Schnittpunkt der Höhe durch den Eckpunkt C mit der durch den Eckpunkt B, dann zeigt ein analoger Beweis, dass auch $|DH| \cdot |CD| = |BD| \cdot |DA|$ gilt. Es folgt $|DG| = |DH|$. Da die Punkte D, G und H alle auf einer Geraden, der Höhe durch C, liegen und G und H auch auf derselben Seite von D wie C (α und β sind ja spitze Winkel), erhalten wir $G = H$. Somit schneiden die Höhen eines Dreiecks einander in einem Punkt. □

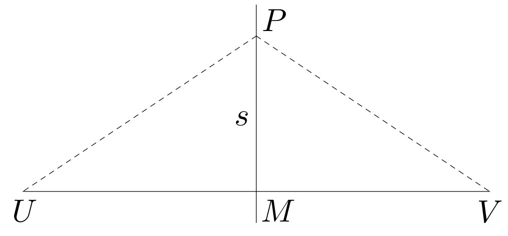
Wir kommen zum Umkreis- und Inkreismittelpunkt.

Seien U und V zwei Punkte. Die Symmetrale der Strecke $\overline{UV}$ ist die Gerade s, die senkrecht auf die Strecke $\overline{UV}$ steht und durch deren Mittelpunkt M geht.

Zu jedem Dreieck $\triangle ABC$ kann man das Seitenmittendreieck zeichnen, das ist das Dreieck, dessen Eckpunkte die Mittelpunkte der Seiten des ursprüglichen Dreiecks sind. Die Symmetralen der Seiten des ursprünglichen Dreiecks $\triangle ABC$ sind die Höhen des Seitenmittendreiecks. Daher folgt bereits aus Satz 18, dass diese Symmetralen einander in einem Punkt schneiden. Wir werden das aber noch auf andere Art beweisen. Dazu zeigen wir

Satz 19: *Seien U und V zwei Punkte und s die Symmetrale der Strecke $\overline{UV}$. Ein Punkt P liegt genau dann auf s, wenn er von U und V gleichen Abstand hat.*

Beweis: Sei M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{UV}$. Weiters sei P ein beliebiger Punkt.

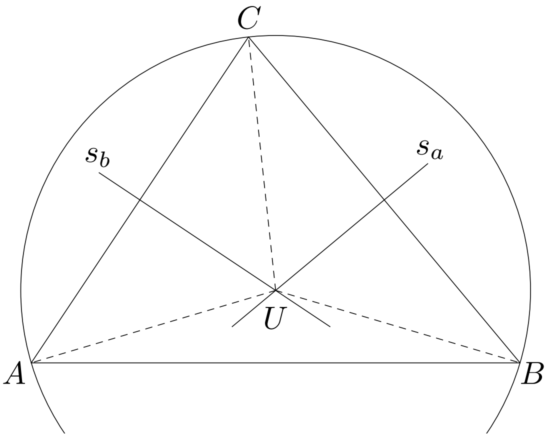


Liegt P auf s, dann sind die Dreiecke $\triangle PMU$ und $\triangle PMV$ kongruent, da sie die Seite $\overline{PM}$ gemeinsam haben, da $\overline{MU}$ und $\overline{MV}$ gleich lang sind, und da wegen P auf s die Winkel $\measuredangle PMU$ und $\measuredangle PMV$ beide 90^0 sind. Es folgt, dass $\overline{PU}$ und $\overline{PV}$ gleich lang sind. Somit hat der Punkt P gleichen Abstand von den Punkten U und V. Hat P gleichen Abstand von U und von V, dann sind die Dreiecke $\triangle PMU$ und $\triangle PMV$ kongruent, da sie die Seite $\overline{PM}$ gemeinsam haben, die Strecken $\overline{MU}$ und $\overline{MV}$ gleich lang sind, und ebenso die Strecken $\overline{PU}$ und $\overline{PV}$. Es folgt, dass die Winkel $\measuredangle PMU$ und $\measuredangle PMV$ gleich groß sind, also beide gleich 90^0. Somit liegt P auf der Streckensymmetrale s. □

Aus Satz 19 folgt, dass der Mittelpunkt M eines Kreises k auf der Streckensymmetrale jeder Sehne des Kreises k liegt, da deren Endpunkte gleichen Abstand von M haben.

Die Streckensymmetralen der Seiten eines Dreiecks nennen wir die Seitensymmetralen.

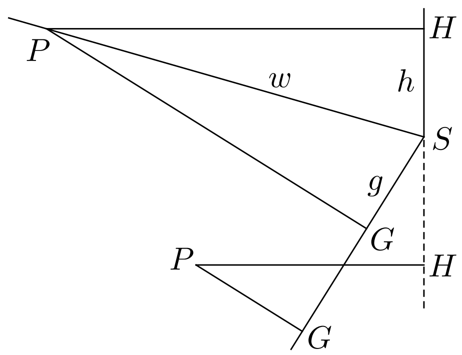
Satz 20: *Die drei Seitensymmetralen eines Dreiecks $\triangle ABC$ schneiden einander in einem Punkt U, dem Mittelpunkt des Umkreises.*



Beweis: Sei U der Schnittpunkt der Seitensymmetrale s_a der Seite $\overline{BC}$ mit der Seitensymmetrale s_b der Seite $\overline{CA}$. Da U sowohl auf s_a als auch auf s_b liegt, ergibt sich $|UB| = |UC|$ und $|UA| = |UC|$ aus Satz 19. Es folgt $|UA| = |UB|$. Wegen Satz 19 liegt U dann auch auf der Seitensymmetrale s_c der Seite $\overline{AB}$. Das zeigt, dass die drei Seitensymmetralen einander im Punkt U schneiden. Da U gleichen Abstand r von den Eckpunkten A, B und C hat, geht der Kreis mit Mittelpunkt U und Radius r durch die Eckpunkte A, B und C. □

Ein Winkel wird von zwei Halbgeraden, den Schenkeln des Winkels, gebildet. Sie gehen von einem Punkt, dem Scheitel des Winkels, aus und schließen einen Winkel $< 180^0$ ein. Das von den Schenkeln begrenzte Gebiet nennen wir Winkelfeld. Die Winkelsymmetrale ist dann ebenfalls eine Halbgerade, die vom Scheitel ausgeht und den Winkel halbiert.

Satz 21: *Seien g und h die Schenkel eines Winkels mit Scheitel S und P ein Punkt im Winkelfeld zwischen g und h. Der Punkt P liegt genau dann auf der Winkelsymmetrale w, wenn er von g und h gleichen Normalabstand hat. In diesem Fall hat auch der Scheitel S gleichen Abstand von den Fußpunkten der Lote von P auf die Schenkel g und h.*



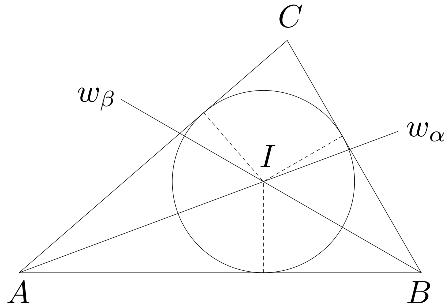
Beweis: Seien G und H die Fußpunkte der Lote von P auf die Halbgeraden g und h, die auch auf deren Verlängerungen liegen können (siehe Zeichnung).
Wir nehmen zuerst an, dass P auf w liegt. Da der Winkel zwischen den Schenkeln g und h kleiner als 180^0 ist, ist der Winkel zwischen w und jedem der beiden Schenkel kleiner als 90^0. Die Fußpunkte G und H der Lote von P auf g und h liegen daher auf diesen Halbgeraden und nicht auf deren Verlängerungen. Die Dreiecke $\triangle PSG$ und $\triangle PSH$ sind kongruent, da sie die Seite $\overline{PS}$ gemeinsam haben, da die Winkel $\measuredangle SGP$ und $\measuredangle SHP$ beide gleich 90^0 sind, und da P auf w liegt und somit $\measuredangle PSG = \measuredangle PSH$ gilt. Es folgt, dass die Strecken $\overline{PG}$ und $\overline{PH}$ gleich lang sind. Somit hat der Punkt P gleichen Normalabstand von g und h.

Wir nehmen an, dass P gleichen Normalabstand von g und h hat. Dann sind die Dreiecke $\triangle PSG$ und $\triangle PSH$ kongruent, da sie die Seite $\overline{PS}$ gemeinsam haben, die Winkel $\measuredangle SGP$ und $\measuredangle SHP$ beide gleich 90^0 sind, und da $|PG| = |PH|$ gilt. Es folgt $\measuredangle PSG = \measuredangle PSH$. Die Dreiecke $\triangle PSG$ und $\triangle PSH$ können nicht auf derselben Seite von $\overline{PS}$ liegen (siehe Zeichnung), sonst würden die beiden Schenkel g und h wegen $\measuredangle PSG = \measuredangle PSH$ auf einer Gerade liegen. Sie würden dann einen Winkel von 180^0 einschließen, was wir oben ausgeschlossen haben. Somit müssen die Dreiecke $\triangle PSG$ und $\triangle PSH$ auf verschiedenen Seiten von $\overline{PS}$ liegen. Wegen $\measuredangle PSG = \measuredangle PSH$ liegt dann der Punkt P auf w.

Aus der Kongruenz der Dreiecke $\triangle PSG$ und $\triangle PSH$ folgt auch, dass $\overline{SG}$ und $\overline{SH}$ gleich lang sind. Der Punkt S hat gleichen Abstand von den Fußpunkten der beiden Lote. □

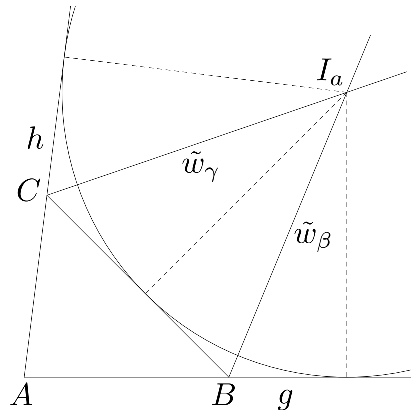
Bemerkung: Sei k ein Kreis mit Mittelpunkt M und S ein Punkt außerhalb des Kreises. Seien g und h die Tangenten vom Punkt S an den Kreis k und G und H die Berührpunkte. Dann sind $\overline{MG}$ und $\overline{MH}$ die Lote vom Mittelpunkt M auf die Tangenten g und h. Sie haben gleiche Länge, da sie ja Radien des Kreises sind. Aus Satz 21 folgt dann, dass der Mittelpunkt M auf der Symmetrale des Winkels, der von den Tangenten g und h gebildet wird, liegt. Weiters gilt $|SG| = |SH|$, das heißt die Abschnitte der Tangenten von S bis zu den Berührpunkten sind gleich lang.

Satz 22: *Die drei Symmetralen der Innenwinkel eines Dreiecks $\triangle ABC$ schneiden einander in einem Punkt I, dem Mittelpunkt des Inkreises.*



Beweis: Sei I der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale w_α durch den Eckpunkt A mit der Winkelsymmetrale w_β durch den Eckpunkt B. Er liegt im Durchschnitt der Winkelfelder der Winkel α und β und somit innerhalb des Dreiecks. Da I auf w_α liegt, hat I nach Satz 21 den gleichen Normalabstand von den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$. Da I auf w_β liegt, hat I den gleichen Normalabstand von den Seiten $\overline{BA}$ und $\overline{BC}$. Es folgt, dass I den gleichen Normalabstand von den Seiten $\overline{CA}$ und $\overline{CB}$ hat. Wegen Satz 21 liegt I auch auf der Winkelsymmetrale w_γ durch den Eckpunkt C. Somit schneiden die drei Winkelsymmetralen einander im Punkt I. Da I den gleichen Normalabstand ϱ von allen drei Dreiecksseiten hat, berührt der Kreis mit Mittelpunkt I und Radius ϱ alle drei Seiten des Dreiecks. $\square$

Satz 23: *Sei $\triangle ABC$ ein beliebiges Dreieck. Wir wählen eine Seite des Dreiecks und den dieser Seite gegenüberliegneden Eckpunkt. Die Symmetralen der beiden Außenwinkel, die an die gewählte Seite anliegen, und die Symmetrale des Innenwinkels beim gewählten Eckpunkt schneiden einander in einem Punkt, dem Mittelpunkt eines Ankreises.*



Beweis: Wir führen den Beweis nur für die Seite $\overline{BC}$ und den dieser Seite gegenüberliegenden Eckpunkt A. Sei I_a der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale $\tilde{w}_\beta$ des an der Seite $\overline{BC}$ anliegenden Außenwinkels beim Eckpunkt B mit der Winkelsymmetralen $\tilde{w}_\gamma$ des an der Seite $\overline{BC}$ anliegenden Außenwinkels beim Eckpunkt C. Sei g die Halbgerade, die man erhält, wenn man die Seite $\overline{AB}$ über B hinaus verlängert, und h die Halbgerade, die man erhält, wenn man die Seite $\overline{AC}$ über C hinaus verlängert. Der Schnittpunkt I_a liegt im Durchschnitt der Winkelfelder der beiden Außenwinkel und somit im Winkelfeld des Innenwinkels bei A, dessen Schenkel g und h sind. Da I_a auf $\tilde{w}_\beta$ liegt, hat I_a nach Satz 21 den gleichen Normalabstand von g und der Seite $\overline{BC}$. Da I_a auf $\tilde{w}_\gamma$ liegt, hat I_a nach Satz 21 den gleichen Normalabstand von h und der Seite $\overline{BC}$. Es folgt, dass I_a den gleichen Normalabstand von g und h hat. Wegen Satz 21 liegt I_a auch auf der Symmetrale w_α des Innenwinkels beim Eckpunkt A. Somit schneiden die drei Winkelsymmetralen $\tilde{w}_\beta$, $\tilde{w}_\gamma$ und w_α einander im Punkt I_a. Da I_a den gleichen Normalabstand ϱ_a von g, h und der Dreieckseite $\overline{BC}$ hat, berührt der Kreis mit Mittelpunkt I_a und Radius ϱ_a die Dreieckseite $\overline{BC}$ und die Verlängerungen der beiden anderen Seiten. $\square$

Mit ähnlichen Methoden wie Satz 19 und Satz 21 beweisen wir auch den folgenden Satz.

Satz 24: *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Dann ist $|AC| = |BC|$ äquivalent zu $\measuredangle BAC = \measuredangle ABC$.*

Beweis: Sei F der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale durch C mit der Seite $\overline{AB}$.

Es gelte $|AC| = |BC|$. Die Dreiecke $\triangle AFC$ und $\triangle BFC$ sind kongruent, da sie die Seite $\overline{CF}$ gemeinsam haben, da $\measuredangle ACF = \measuredangle BCF$ gilt und da $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ gleich lang sind. Es folgt $\measuredangle FAC = \measuredangle FBC$, das heißt $\measuredangle BAC = \measuredangle ABC$, da F ja zwischen A und B liegt.

Es gelte $\measuredangle BAC = \measuredangle ABC$. Die Dreiecke $\triangle AFC$ und $\triangle BFC$ sind kongruent, da sie die Seite $\overline{CF}$ gemeinsam haben und da $\measuredangle ACF = \measuredangle BCF$ und $\measuredangle BAC = \measuredangle ABC$ gilt. Es folgt, dass die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ gleich lang sind, also $|AC| = |BC|$ gilt. ∎

5. Die besonderen Punkte mit Ceva und Carnot

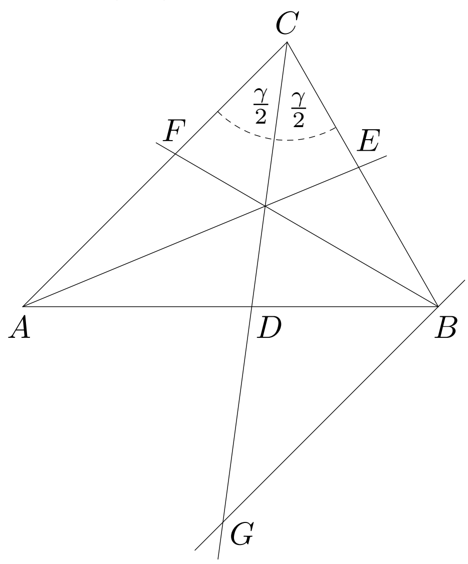
Wir beweisen die Sätze über die besonderen Punkte eines Dreiecks $\triangle ABC$ mit Hilfe der Umkehrung des Satzes von Ceva (Satz 8) oder der des Satzes von Carnot (Satz 11).

Wir beginnen mit den Schwerlinien und den Seitensymmetralen. Sei D der Mittelpunkt der Dreieckseite $\overline{AB}$, sei E der der Dreieckseite $\overline{BC}$ und F der der Dreieckseite $\overline{CA}$. Dann gilt $DB = -DA$, $EC = -EB$ und $FA = -FC$. Es folgt $\frac{DA}{DB} \cdot \frac{EB}{EC} \cdot \frac{FC}{FA} = -1$. Aus Satz 8 ergibt sich daher, dass die drei Geraden $\ell(A, E)$, $\ell(B, F)$ und $\ell(C, D)$, das sind die drei Schwerlinien, einander in einem Punkt schneiden. Die Schwerlinien können ja nicht parallel liegen. Weiters erhalten wir $|AD|^2 - |DB|^2 + |BE|^2 - |EC|^2 + |CF|^2 - |FA|^2 = 0$. Aus Satz 11 folgt daher, dass die drei Senkrechten durch D, E und F auf die jeweilige Dreieckseite, das sind die drei Seitensymmetralen, einander in einem Punkt schneiden.

Für die Winkelsymmetralen verwenden wir die Umkehrung des Satzes von Ceva. Als Vorbereitung beweisen wir folgenden Satz.

Satz 25: *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Sei D der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale durch C mit $\overline{AB}$, E der der Winkelsymmetrale durch A mit $\overline{BC}$ und F der der Winkelsymmetrale durch B mit $\overline{AC}$. Dann gilt $\frac{AD}{DB} = \frac{|AC|}{|BC|}$, $\frac{BE}{EC} = \frac{|BA|}{|CA|}$ und $\frac{CF}{FA} = \frac{|CB|}{|AB|}$.*

Beweis: Wir führen den Beweis nur für die Winkelsymmetrale durch C. Ihr Schnittpunkt mit der Seite $\overline{AB}$ wurde mit D bezeichnet. Wir zeichnen die Parallele zur Seite $\overline{AC}$ durch den Eckpunkt B. Sie schneidet die Winkelsymmetrale durch C in einem Punkt, den wir G nennen. Aus dem Strahlensatz folgt $\frac{DA}{DB} = \frac{AC}{BG}$. Da D immer zwischen A und B liegt, hat $\frac{DA}{DB}$ negatives Vorzeichen. Es folgt $\frac{AD}{DB} = \frac{|DA|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|BG|}$. Da $\overline{BG}$ parallel zu $\overline{AC}$ liegt, erhalten wir $\measuredangle BGD = \measuredangle ACD = \frac{\gamma}{2}$. Da auch $\measuredangle BCD = \frac{\gamma}{2}$ gilt, ist das Dreieck $\triangle CBG$ gleichschenkelig (Satz 24). Es gilt $|BG| = |BC|$. Damit ist $\frac{AD}{DB} = \frac{|AC|}{|BC|}$ gezeigt. Die beiden anderen Gleichungen beweist man ganz analog. ∎



Sind D, E und F die Schnittpunkte der Winkelsymmetralen mit den gegenüberliegenden Seiten, wie sie in Satz 25 eingeführt wurden, dann ergibt sich aus diesem Satz sofort, dass $\frac{DA}{DB} \cdot \frac{EB}{EC} \cdot \frac{FC}{FA} = \frac{-|AC|}{|BC|} \cdot \frac{-|BA|}{|CA|} \cdot \frac{-|CB|}{|AB|} = -1$ gilt. Aus Satz 8 erhalten wir dann, dass die drei Geraden $\ell(A, E)$, $\ell(B, F)$ und $\ell(C, D)$, das sind die drei Winkelsymmetralen, einander in einem Punkt schneiden. Die Winkelsymmetralen können ja nicht parallel liegen.

Für die Höhen können wir beide Sätze verwenden. Wir verwenden die Umkehrung des Satzes von Carnot. Als Vorbereitung beweisen wir folgenden Satz.

Satz 26: *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Seitenlängen a, b und c. Sei D der Fußpunkt der Höhe durch C, sei E der Fußpunkt der Höhe durch A und sei F der Fußpunkt der Höhe durch B. Dann gilt $|AD|^2 - |DB|^2 = b^2 - a^2$, $|BE|^2 - |EC|^2 = c^2 - b^2$ und $|CF|^2 - |FA|^2 = a^2 - c^2$.*

Beweis: Die Höhe durch C mit Fußpunkt D teilt das Dreieck $\triangle ABC$ in zwei rechtwinkelige Dreiecke, für die $|AD|^2 + |DC|^2 = b^2$ und $|BD|^2 + |DC|^2 = a^2$ nach dem Satz von Pythagoras gilt. Subtrahieren wir die zweite von der ersten Gleichung, so ergibt sich $|AD|^2 - |DB|^2 = b^2 - a^2$. Die anderen beiden Gleichungen beweist man analog. $\square$

Sind D, E und F die Höhenfußpunkte, wie sie in Satz 26 eingeführt wurden, dann folgt $|AD|^2 - |DB|^2 + |BE|^2 - |EC|^2 + |CF|^2 - |FA|^2 = b^2 - a^2 + c^2 - b^2 + a^2 - c^2 = 0$ aus eben diesem Satz. Aus Satz 11 erhalten wir dann, dass die drei Senkrechten durch D, E und F auf die jeweilige Dreieckseite, das sind die drei Höhen, einander in einem Punkt schneiden.

Neben den vier besonderen Punkten, die wir hier behandelt haben, gibt es noch viele weitere Punkte, die ebenfalls als besondere Punkte des Dreiecks bezeichnet werden. Im folgenden Satz behandeln wir einen dieser Punkte, den sogenannten Gergonnepunkt.

Satz 27: *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Sei D der Punkt, in dem der Inkreis die Seite $\overline{AB}$ berührt, E der Punkt, in dem der Inkreis die Seite $\overline{BC}$ berührt und F der Punkt, in dem der Inkreis die Seite $\overline{AC}$ berührt. Dann schneiden die drei Geraden $\ell(A,E)$, $\ell(B,F)$ und $\ell(C,D)$ einander in einem Punkt. Dieser Punkt heißt Gergonnepunkt des Dreiecks.*

Beweis: Es gilt $|AD| = |AF|$, da D und F die Berührpunkte der Tangenten von A an den Inkreis sind. Ebenso gilt $|BD| = |BE|$ und $|CE| = |CF|$. Da D immer zwischen A und B liegt und DA und DB daher entgegengesetzt orientiert sind, ergibt sich $\frac{DA}{DB} = -\frac{|AD|}{|BD|}$. Ebenso folgt $\frac{EB}{EC} = -\frac{|BE|}{|CE|}$ und $\frac{FC}{FA} = -\frac{|CF|}{|AF|}$. Wir erhalten damit $\frac{DA}{DB} \cdot \frac{EB}{EC} \cdot \frac{FC}{FA} = -1$. Aus Satz 8 folgt, dass die Geraden $\ell(A,E)$, $\ell(B,F)$ und $\ell(C,D)$ einander in einem Punkt schneiden. Sie können ja nicht parallel liegen. $\square$

6. Eulergerade, Neunpunktkreis und zentrische Streckungen

Sei $c \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ und Z ein beliebiger Punkt in der Ebene. Wir definieren eine Abbildung φ der Ebene in sich selbst. Ist P ein Punkt in der Ebene, aber ungleich Z, dann sei $\varphi(P)$ der eindeutig bestimmte Punkt V auf der Geraden $\ell(Z,P)$, für den $\frac{ZV}{ZP} = c$ gilt. Weiters sei $\varphi(Z) = Z$. Durch diese Abbildung wird die Ebene vom Punkt Z aus um den Faktor c gestreckt. (Ist $|c| < 1$, dann wird sie gestaucht.) Bei negativem c wird außerdem am Punkt Z gespiegelt. Man nennt diese Abbildung die zentrische Streckung mit Zentrum Z und Streckungsfaktor c. Zuerst beweisen wir Eigenschaften dieser zentrischen Streckung.

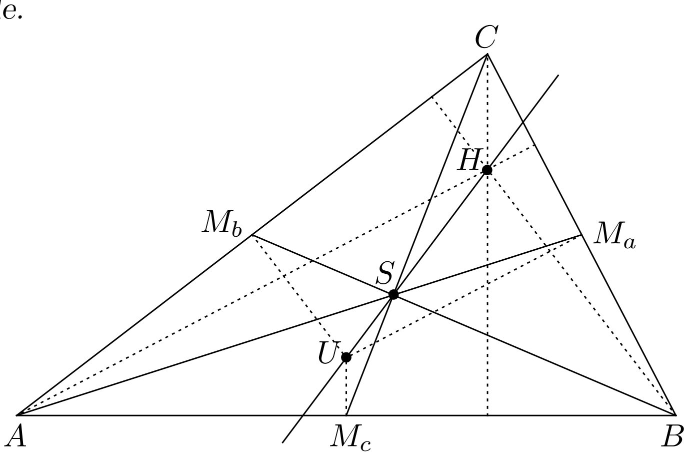
Hilfssatz B: *Sei φ die zentrische Streckung mit Zentrum Z und Streckungsfaktor c. Seien P und Q Punkte, die ungleich Z sind. Sei $V = \varphi(P)$ und $W = \varphi(Q)$. Dann liegt $\ell(P,Q)$ parallel zu $\ell(V,W)$ und es gilt $|VW| = |c| \cdot |PQ|$.*

Beweis: Wenn Z auf der Gerade $\ell(P,Q)$ liegt, dann tun das auch V und W, da nach Definition von φ ja V auf $\ell(Z,P)$ und W auf $\ell(Z,Q)$ liegt. Es gilt also $\ell(P,Q) = \ell(V,W)$. Weiters gilt $VW = VZ + ZW = c \cdot PZ + c \cdot ZQ = c \cdot (PZ + ZQ) = c \cdot PQ$. Setzt man Beträge, so ergibt sich $|VW| = |c| \cdot |PQ|$.

Es bleibt der Fall, dass Z nicht auf $\ell(P,Q)$ liegt. Nach Definition von φ haben wir zwei Gerade g und h, die einander im Punkt Z schneiden, mit P und V auf der Geraden g und mit Q und W auf der Geraden h, sodass $\frac{ZV}{ZP} = c$ und $\frac{ZW}{ZQ} = c$ gilt. Aus Satz 4 folgt, dass die Geraden $\ell(P,Q)$ und $\ell(V,W)$ parallel zueinander liegen. Aus Satz 3 folgt jetzt, dass $\frac{VW}{PQ} = \frac{ZV}{ZP}$, also $\frac{VW}{PQ} = c$ gilt. Daraus ergibt sich $|VW| = |c| \cdot |PQ|$. □

Damit können wir die Eulergerade und den Neunpunktkreis behandeln.

Satz 28: *In einem Dreieck $\triangle ABC$ liegen der Höhenschnittpunkt H, der Schwerpunkt S und der Umkreismittelpunkt U auf einer Geraden und es gilt $\frac{SU}{SH} = -\frac{1}{2}$. Die Gerade durch diese drei Punkte heißt Eulersche Gerade.*



Beweis: Sei φ die zentrische Streckung mit Streckungsfaktor $c = -\frac{1}{2}$, die den Schwerpunkt S des Dreiecks als Zentrum hat. Sei M_c der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ und M_a der der Seite $\overline{BC}$. Nach Satz 17 liegen die Punkte S, M_c und C auf einer Schwerlinie und es gilt $\frac{SM_c}{SC} = -\frac{1}{2}$, woraus $\varphi(C) = M_c$ folgt. Sei $G = \varphi(H)$. Nach Hilfssatz B liegt $\ell(G, M_c)$ parallel zur Gerade $\ell(H,C)$, die senkrecht auf $\ell(A,B)$ steht. Also steht auch $\ell(G, M_c)$ senkrecht auf $\ell(A,B)$ und ist daher die Symmetrale der Dreieckseite $\overline{AB}$. Analog zeigt man, dass $\varphi(A) = M_a$ gilt und $\ell(G, M_a)$ die Symmetrale der Dreieckseite $\overline{BC}$ ist. Also liegt der Punkt G sowohl auf der Symmetrale der Dreieckseite $\overline{AB}$ als auch auf der Symmetrale der Dreieckseite $\overline{BC}$ und ist somit der Umkreismittelpunkt U. Wir haben $\varphi(H) = U$ gezeigt. Das bedeutet, dass die Punkte U, S und H auf einer Geraden liegen und dass $\frac{SU}{SH} = -\frac{1}{2}$ gilt. □

Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H, Umkreismittelpunkt U und Umkreisradius r. Sei N der Mittelpunkt der Strecke $\overline{HU}$. Der Kreis mit Mittelpunkt N und Radius $\frac{r}{2}$ heißt Neunpunktkreis. Er wird auch Feuerbachkreis oder Eulerkreis genannt.

Satz 29: *Seien H_a, H_b und H_c die Höhenfußpunkte und M_a, M_b und M_c die Seitenmitten eines Dreiecks $\triangle ABC$. Sei H der Höhenschnittpunkt und R_a, R_b und R_c die Mittelpunkte der Strecken $\overline{HA}$, $\overline{HB}$ und $\overline{HC}$. (Diese werden manchmal Eulerpunkte genannt.) Dann liegen die neun Punkte H_a, H_b, H_c, M_a, M_b, M_c, R_a, R_b und R_c auf dem Neunpunktkreis.*

Beweis: Sei ψ die zentrische Streckung mit Streckungsfaktor $c = \frac{1}{2}$, die den Höhenschnittpunkt H als Zentrum hat. Für einen beliebigen Punkt $P \neq H$ gilt dann, dass $\psi(P)$ der Mittelpunkt der Strecke $\overline{HP}$ ist. Daraus folgt, dass $\psi(A) = R_a$, $\psi(B) = R_b$, $\psi(C) = R_c$ und $\psi(U) = N$ gilt. Aus Hilfssatz B folgt $|NR_a| = \frac{1}{2}|UA|$, $|NR_b| = \frac{1}{2}|UB|$ und $|NR_c| = \frac{1}{2}|UC|$. Da die Eckpunkte A, B und C des Dreiecks auf dem Umkreis liegen, erhalten wir $|UA| = r$, $|UB| = r$ und $|UC| = r$. Das ergibt $|NR_a| = \frac{r}{2}$, $|NR_b| = \frac{r}{2}$ und $|NR_c| = \frac{r}{2}$. Somit liegen die Punkte R_a, R_b und R_c auf dem Neunpunktkreis.

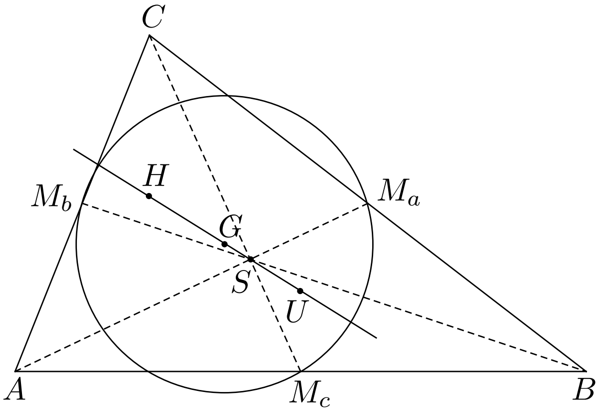
Sei φ die zentrische Streckung mit Streckungsfaktor $c = -\frac{1}{2}$, die den Schwerpunkt S des Dreiecks als Zentrum hat. Das ist die selbe, die wir im letzten Beweis verwendet haben. Dort wurde gezeigt, dass $\varphi(C) = M_c$ gilt. Analog zeigt man $\varphi(A) = M_a$ und $\varphi(B) = M_b$. Wir überlegen uns, dass auch $\varphi(U) = N$ gilt.

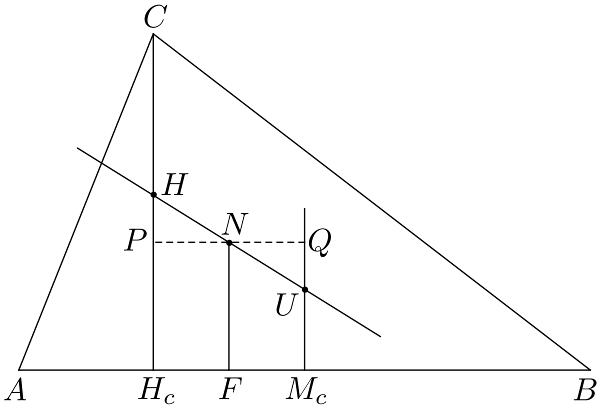
Sei $G = \varphi(U)$. Im letzten Beweis wurde $\varphi(H) = U$ gezeigt. Die vier Punkte U, S, G und H liegen dann auf einer Gerade, das ist die oben eingeführte Eulergerade (Zeichnung links unten). Wegen $SU = -\frac{1}{2}SH$ und $SG = -\frac{1}{2}SU$ gilt $SH = 2US$ und $US = 2SG$. Es folgt

$$UG = US + SG = 2SG + SG = 3SG \qquad \text{und}$$
$$GH = GS + SH = GS + 2US = -SG + 4SG = 3SG$$

Es gilt also $UG = GH$. Somit ist G der Mittelpunkt der Strecke $\overline{HU}$, das heißt $G = N$. Wir haben $\varphi(U) = N$ gezeigt.

Wie oben folgt jetzt $|NM_a| = \frac{1}{2}|UA| = \frac{r}{2}$, $|NM_b| = \frac{1}{2}|UB| = \frac{r}{2}$ und $|NM_c| = \frac{1}{2}|UC| = \frac{r}{2}$. Damit ist gezeigt, dass auch die Punkte M_a, M_b und M_c auf dem Neunpunktkreis liegen.





Wir zeigen, dass die Punkte H_a, H_b und H_c auf dem Neunpunktkreis liegen (Zeichnung rechts). Sei F der Fußpunkt des Lotes von N auf $\ell(A, B)$. Wir zeichnen die Parallele durch N zur Seite $\overline{AB}$. Sie schneidet die Höhe durch C im Punkt P und die Symmetrale der Seite $\overline{AB}$ im Punkt Q. Da die Höhe durch C, das Lot von N auf $\ell(A, B)$ und die Symmetrale der Seite $\overline{AB}$ parallel sind, gilt einerseits $|NP| = |FH_c|$ und $|NQ| = |FM_c|$, andererseits folgt $\frac{NP}{NQ} = \frac{NH}{NU}$ aus dem Strahlensatz. Da N die Strecke $\overline{HU}$ halbiert, gilt $\frac{NH}{NU} = -1$ und daher auch $\frac{NP}{NQ} = -1$. Es folgt $|NP| = |NQ|$, also auch $|FH_c| = |FM_c|$. Somit ist $\ell(F, N)$ die Symmetrale der Strecke $\overline{H_cM_c}$. Da N auf dieser Symmetrale liegt, erhalten wir $|NH_c| = |NM_c|$ aus Satz 19. Oben wurde $|NM_c| = \frac{r}{2}$ gezeigt. Es folgt $|NH_c| = \frac{r}{2}$. Somit liegt auch H_c auf dem Neunpunktkreis.

Analog zeigt man, dass auch die beiden anderen Höhenfußpunkte H_a und H_b auf dem Neunpunktkreis liegen. □

7. Der Peripheriewinkelsatz

Seien A und B Punkte auf einem Kreis k, sodass $\overline{AB}$ eine Sehne des Kreises k ist. Ist C ein weiterer Punkt auf dem Kreis k, dann nennt man den Winkel $\measuredangle ACB$ den Peripheriewinkel des Punktes C über der Sehne $\overline{AB}$. Ist M der Mittelpunkt des Kreises k, dann nennt man den Winkel $\measuredangle AMB$ den Zentriwinkel über der Sehne $\overline{AB}$.

Satz 30 (Peripheriewinkelsatz) *Sei $\overline{AB}$ eine Sehne des Kreises k, dessen Mittelpunkt M Zentriwinkel α über der Sehne $\overline{AB}$ habe. Sei C ein Punkt auf dem Kreis k, der jedoch weder A noch B ist. Sei γ der Peripheriewinkel des Punktes C über der Sehne $\overline{AB}$. Liegt M auf der selben Seite von $\overline{AB}$ wie C oder auf $\overline{AB}$, dann gilt $\gamma = \frac{1}{2}\alpha$. Liegt M auf der anderen Seite von $\overline{AB}$ als C oder auf $\overline{AB}$, dann gilt $\gamma = 180^0 - \frac{1}{2}\alpha$.*

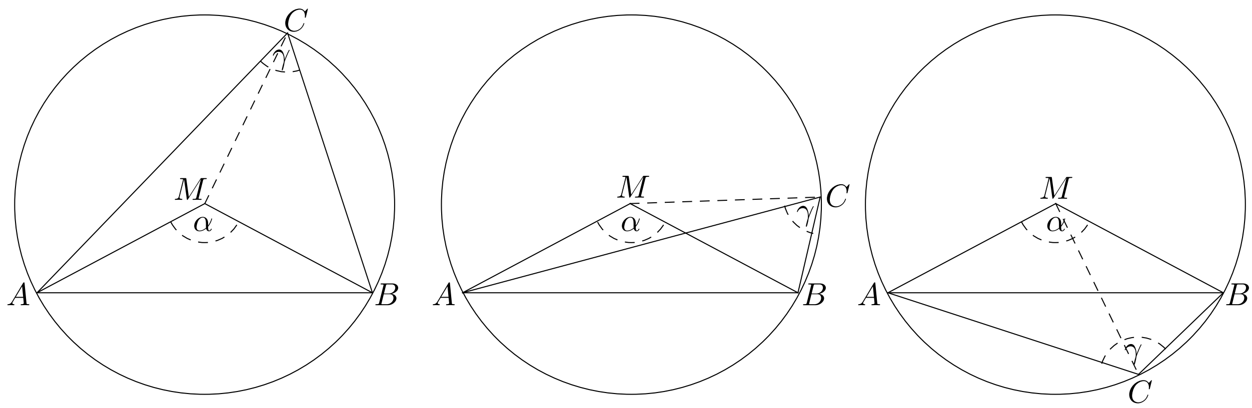
Beweis: Die Punkte A, B und C liegen auf dem Kreis k, der Mittelpunkt M hat. Den Winkel $\measuredangle MCA$ bezeichnen wir mit γ_1 und den Winkel $\measuredangle MCB$ mit γ_2. (Es kann auch $\gamma_1 = 0^0$ oder $\gamma_2 = 0^0$ gelten. Das ist der Fall, wenn M auf $\overline{AC}$ oder auf $\overline{BC}$ liegt.)

Das Dreieck $\triangle AMC$ ist gleichschenkelig. Die Schenkel $\overline{MA}$ und $\overline{MC}$ dieses Dreiecks sind ja Radien des Kreises k. Mit Satz 24 erhalten wir $\measuredangle MAC = \measuredangle MCA = \gamma_1$. Da Dreiecke Winkelsumme 180^0 haben, ergibt sich $\measuredangle AMC = 180^0 - \measuredangle MAC - \measuredangle MCA = 180^0 - 2\gamma_1$.

Ebenso ist das Dreieck $\triangle BMC$ gleichschenkelig. Die Schenkel $\overline{MB}$ und $\overline{MC}$ sind ja wieder Radien des Kreises k. Mit Satz 24 erhalten wir wieder $\measuredangle MBC = \measuredangle MCB = \gamma_2$ und daraus dann $\measuredangle BMC = 180^0 - \measuredangle MBC - \measuredangle MCB = 180^0 - 2\gamma_2$.

Diese Gleichungen gelten auch, wenn M auf $\overline{AC}$ oder auf $\overline{BC}$ liegt. In einem dieser gleichschenkeligen Dreiecke ist dann ein Winkel gleich 180^0 und die beiden andern sind gleich 0^0.

Wir unterscheiden drei Fälle. Wir behandeln zuerst den Fall, in dem M im Dreieck $\triangle ABC$ liegt oder auf einer Seite dieses Dreiecks. Dieser Fall ist in der linken Zeichnung dargestellt.



Es gilt $\gamma = \measuredangle MCA + \measuredangle MCB = \gamma_1 + \gamma_2$ und $\alpha = 360^0 - \measuredangle AMC - \measuredangle BMC = 2\gamma_1 + 2\gamma_2$, wobei obige Resultate verwendet wurden. Man sieht, dass $2\gamma = \alpha$ gilt.

Der Fall, in dem M auf der selben Seite von $\overline{AB}$ wie C liegt, aber außerhalb des Dreiecks $\triangle ABC$, ist in der mittleren Zeichnung dargestellt. Es gilt $\gamma = \measuredangle MCB - \measuredangle MCA = \gamma_2 - \gamma_1$ und $\alpha = \measuredangle AMC - \measuredangle BMC = -2\gamma_1 + 2\gamma_2$. Es folgt wieder $2\gamma = \alpha$. (Wenn C auf der anderen Seite des Kreises in der Nähe von A liegt, ist der Beweis ein wenig zu modifizieren.)

Der Fall, in dem M und C auf verschiedenen Seiten der Sehne $\overline{AB}$ liegen, ist in der dritten Zeichnung dargestellt. In diesem Fall erhalten wir $\gamma = \measuredangle MCA + \measuredangle MCB = \gamma_1 + \gamma_2$ und $\alpha = \measuredangle AMC + \measuredangle BMC = 360^0 - 2\gamma_1 - 2\gamma_2$. Man sieht, dass $2\gamma = 360^0 - \alpha$ gilt. □

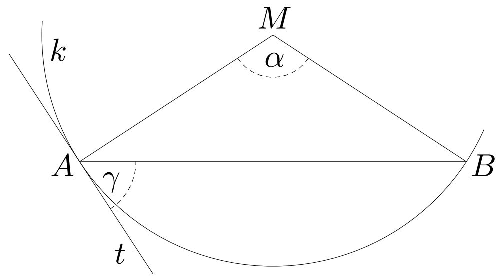
Bemerkung: Oft wird Satz 30, der Peripheriewinkelsatz, so verwendet: Ist $\overline{AB}$ eine Sehne des Kreises k und sind P und Q Punkte auf k, dann gilt $\measuredangle APB = \measuredangle AQB$, wenn P und Q auf derselben Seite der Sehne $\overline{AB}$ liegen, und $\measuredangle APB = 180^0 - \measuredangle AQB$, wenn P und Q auf verschiedenen Seiten der Sehne $\overline{AB}$ liegen. Das folgt unmittelbar aus Satz 30.

Der Spezialfall von Satz 30, in dem die Sehne durch den Mittelpunkt des Kreises geht, heißt Satz von Thales. Der Zentriwinkel ist dann 180^0 und der Peripheriwinkel somit 90^0.

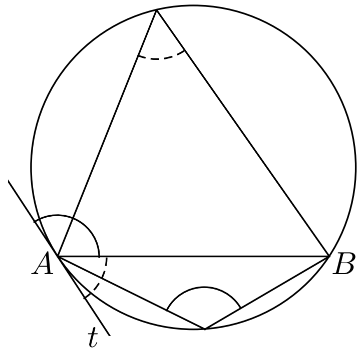
Satz 31 (Satz von Thales) *Sei k ein Kreis mit Mittelpunkt M. Sei $\overline{AB}$ eine Sehne des Kreises k, die durch M geht. Dann hat jeder Punkt C auf dem Kreis, der ungleich A und B ist, einen rechten Winkel als Peripheriewinkel über der Sehne $\overline{AB}$.*

Wandert der Punkt C den Kreis entlang in den Punkt A, dann wird aus dem Peripheriewinkel ein Tangentenwinkel. Dieser Grenzfall wird im folgenden Satz behandelt.

Satz 32 (Tangentenwinkelsatz) *Sei $\overline{AB}$ eine Sehne des Kreises k, dessen Mittelpunkt M Zentriwinkel α über der Sehne $\overline{AB}$ habe. Sei t die Tangente an den Kreis k im Punkt A und γ der Winkel zwischen $\overline{AB}$ und t, der auf der anderen Seite der Sehne $\overline{AB}$ liegt als M (oder M liegt auf $\overline{AB}$). Dann gilt $\gamma = \frac{1}{2}\alpha$.*



Beweis: Die Strecke $\overline{MA}$ vom Mittelpunkt des Kreises k zum Berührpunkt A steht senkrecht auf die Tangente t. Es folgt $\measuredangle MAB = 90^0 - \gamma$. Das Dreieck $\triangle AMB$ ist gleichschenkelig, da dessen Schenkel $\overline{MA}$ und $\overline{MB}$ Radien des Kreises k sind. Aus Satz 24 folgt $\measuredangle MBA = \measuredangle MAB = 90^0 - \gamma$. Die Winkelsumme im Dreieck $\triangle AMB$ ist 180^0. Wir erhalten daher $90^0 - \gamma + 90^0 - \gamma + \alpha = 180^0$. Daraus folgt dann $\gamma = \frac{1}{2}\alpha$. □



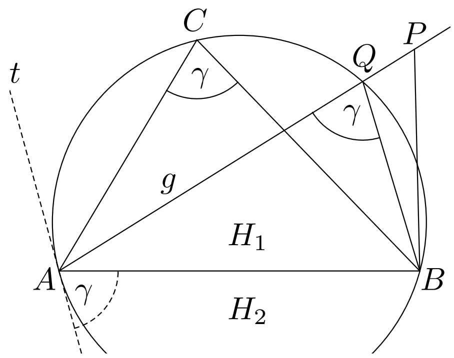
Satz 32 besagt, dass die Winkel zwischen einer Sehne $\overline{AB}$ eines Kreises k und der Tangente t im Punkt A an k gleich $\frac{\alpha}{2}$ und $180^0 - \frac{\alpha}{2}$ sind, wobei α der Zentriwinkel des Mittelpunktes des Kreises über der Sehne $\overline{AB}$ ist. Aus dem Peripheriewinkelsatz folgt dann, dass der Peripheriewinkel eines Punktes auf k gleich ist dem Winkel zwischen der Sehne $\overline{AB}$ und der Tangente t, wobei dieser Winkel jedoch auf der anderen Seite der Sehne $\overline{AB}$ liegt als der Peripheriewinkel. Nebenstehendes Bild zeigt zwei Peripheriewinkel und die jeweils gleich großen Tangentenwinkel.

Es gilt auch eine Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes. Wir formulieren sie so

Satz 33: *Sei $\overline{AB}$ eine Sehne des Kreises k. Sei C ein weiterer Punkt auf k und $\gamma = \measuredangle ACB$. Die Gerade $\ell(A,B)$ teilt die Ebene in zwei Halbebenen (die $\ell(A,B)$ nicht enthalten). Sei H_1 die Halbebene in der C liegt und H_2 die andere.*

(a) *Für einen Punkt P in H_1 gilt: P liegt auf $k \iff \measuredangle APB = \gamma$*

(b) *Für einen Punkt P in H_2 gilt: P liegt auf $k \iff \measuredangle APB = 180^0 - \gamma$*



Beweis: Wir beweisen (a). Der Punkt P liegt in H_1. Sei g die Halbgerade, die von A aus durch P geht. Wegen Satz 32 ist der Winkel in H_1, den die Tangente t im Punkt A an den Kreis k mit der Sehne $\overline{AB}$ einschließt, gleich $180^0 - \gamma$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

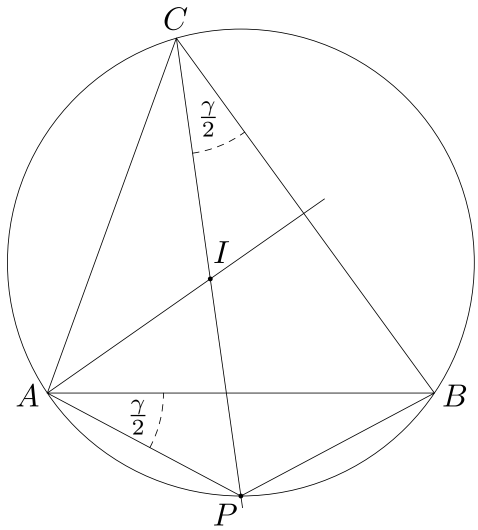
Fall 1: Es gelte $\measuredangle BAP \geq 180^0 - \gamma$. Die Halbgerade g schneidet den Kreis k nur in A. Also liegt P nicht auf k. Da die Winkelsumme eines Dreiecks 180^0 beträgt, gilt $\measuredangle BAP + \measuredangle APB < 180^0$, woraus $\measuredangle APB < \gamma$ folgt. Im Fall 1 liegt weder P auf k noch gilt $\measuredangle APB = \gamma$.

Fall 2: Es gelte $\measuredangle BAP < 180^0 - \gamma$. Jetzt hat g einen Schnittpunkt $Q \neq A$ mit k. Aus Satz 30 folgt $\measuredangle AQB = \gamma$, da Q auf derselben Seite der Sehne $\overline{AB}$ liegt wie C. Liegt P auf k, dann muss $P = Q$ gelten und somit auch $\measuredangle APB = \gamma$. Gilt umgekehrt $\measuredangle APB = \gamma$, dann sind die Dreiecke $\triangle ABP$ und $\triangle ABQ$ kongruent, da sie die Seite $\overline{AB}$ und den Winkel bei A gemeinsam haben und da $\measuredangle APB = \measuredangle AQB$ gilt. Es folgt $|AP| = |AQ|$ und somit $P = Q$. Das bedeutet, dass P auf k liegt. Damit ist gezeigt, dass im Fall 2 der Punkt P genau dann auf k liegt, wenn $\measuredangle APB = \gamma$ gilt. Die Aussage (a) ist vollständig bewiesen.

Der Beweis von (b) ist ganz analog. Statt in H_1 sind wir jetzt in H_2. Im obigen Beweis ist nur γ durch $180^0 - \gamma$ zu ersetzen und $180^0 - \gamma$ durch γ. □

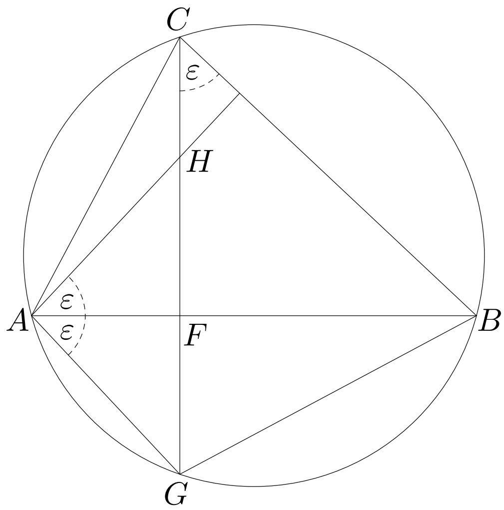
Wir kommen zu den Anwendungen des Peripheriewinkelsatzes und seiner Umkehrung.

Satz 34 (Südpolsatz) *Im Dreieck $\triangle ABC$ sei P der Schnittpunkt $\neq C$ der Winkelsymmetrale durch den Eckpunkt C mit dem Umkreis. Dann hat P gleiche Abstände von den Eckpunkten A und B und vom Inkreismittelpunkt I.*



Beweis: Wir wenden den Peripheriewinkelsatz auf die Sehnen $\overline{BP}$ und $\overline{AP}$ des Umkreises an. Es folgt $\measuredangle BAP = \measuredangle BCP = \frac{\gamma}{2}$ und $\measuredangle ABP = \measuredangle ACP = \frac{\gamma}{2}$. Das Dreieck $\triangle ABP$ ist gleichschenkelig (Satz 24). Der Punkt P hat gleich große Abstände von den Eckpunkten A und B. Es bleibt zu zeigen, dass der Punkt P den selben Abstand vom Inkreismittelpunkt I und vom Eckpunkt A hat. Es gilt $\measuredangle BAP = \frac{\gamma}{2}$ und $\measuredangle BAI = \frac{\alpha}{2}$, da I auf der Winkelsymmetrale durch A liegt. Daraus folgt $\measuredangle PAI = \frac{\alpha+\gamma}{2}$. Der Winkel $\measuredangle PIA$ ist der Außenwinkel des Dreiecks $\triangle ACI$ beim Eckpunkt I und daher gleich der Summe der beiden Innenwinkel bei den Eckpunkten A und C. Da die Seiten $\overline{AI}$ und $\overline{CI}$ auf den Winkelsymmetralen liegen, erhalten wir $\measuredangle CAI = \frac{\alpha}{2}$ und $\measuredangle ACI = \frac{\gamma}{2}$. Es folgt $\measuredangle PIA = \frac{\alpha+\gamma}{2}$. Das Dreieck $\triangle API$ ist gleichschenkelig (Satz 24). Der Punkt P hat den selben Abstand vom Inkreismittelpunkt I und vom Eckpunkt A. □

Satz 35: *Spiegelt man den Höhenschnittpunkt H eines Dreiecks $\triangle ABC$ an den (Verlängerungen der) drei Seiten, dann liegen die gespiegelten Punkte auf dem Umkreis.*

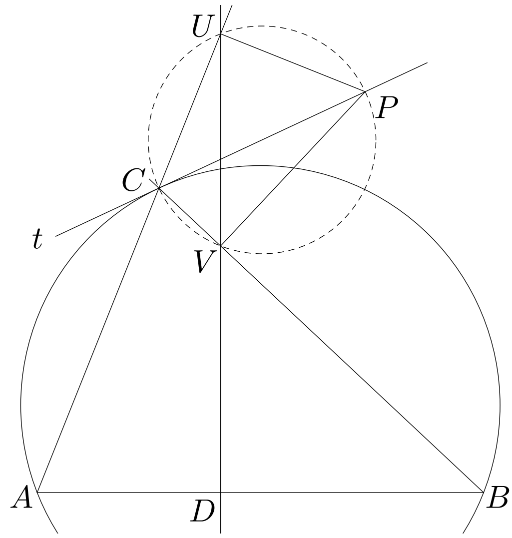


Beweis: Wir beweisen den Satz für die Spiegelung des Höhenschnittpunkts H an der Seite $\overline{AB}$. Wir können annehmen, dass $\measuredangle ABC$ kleiner als 90^0 ist. Sei G der Schnittpunkt $\neq C$ des Umkreises mit (der Verlängerung) der Höhe durch C und F ihr Fußpunkt. Den Winkel $\measuredangle FCB$ bezeichnen wir mit ε. Die Winkel $\measuredangle HAF$ und $\measuredangle FCB$ sind gleich groß, da die Schenkel $\overline{AH}$ und $\overline{AF}$ des einen Winkels senkrecht auf den Schenkeln $\overline{CB}$ und $\overline{CF}$ des anderen Winkels stehen (Orthogonalwinkel). Damit ist $\measuredangle HAF = \varepsilon$ gezeigt. Unten zeigen wir, dass auch $\measuredangle GAF = \varepsilon$ gilt. Es folgt, dass die Dreiecke $\triangle AGF$ und $\triangle AHF$ kongruent sind, da sie die Seite $\overline{AF}$ gemeinsam haben, und da beide Dreiecke bei A den Winkel ε und bei F einen rechten Winkel haben. Es folgt $|FH| = |FG|$. Somit ist G der an der Seite $\overline{AB}$ gespiegelte Höhenschnittpunkt H. Und G liegt auf dem Umkreis.

Um $\measuredangle GAF = \varepsilon$ zu zeigen, unterscheiden wir drei Fälle und wenden jedes Mal den Peripheriewinkelsatz auf die Sehne $\overline{GB}$ im Umkreis an. Ist $\alpha < 90^0$ (Zeichnung), dann gilt $\measuredangle GAF = \measuredangle GAB = \measuredangle GCB = \varepsilon$. Ist $\alpha > 90^0$, dann liegt H unterhalb und G oberhalb der Gerade $\ell(A, B)$. Liegt C oberhalb von G, dann gilt $\measuredangle GAF = 180^0 - \measuredangle GAB = \measuredangle GCB = \varepsilon$ (A und C auf verschiedenen Seiten der Sehne $\overline{GB}$). Liegt C unterhalb von G, dann gilt $\measuredangle GAF = 180^0 - \measuredangle GAB = 180^0 - \measuredangle GCB = \varepsilon$. Im Grenzfall $G = C$ ist die Höhe durch C Tangente des Umkreises. Mit dem Tangentenwinkelsatz folgt $\measuredangle GAF = 180^0 - \measuredangle GAB = \varepsilon$. Im Fall $\alpha = 90^0$ gilt $H = A$ und die Aussage des Satzes ist offensichtlich richtig. □

Die folgenden vier Sätze sind nicht wichtig. Es gibt viele derartige Sätze. Es wurden vier ausgewählt, um weitere Anwendungsbeispiele für den Peripheriewinkelsatz zu haben. Die Beweise werden auch nur für spitzwinkelige Dreiecke gegeben. Sie müssen meistens ein wenig modifiziert werden, um die Beweise für stumpfwinkelige Dreiecke zu erhalten, wie wir das ja bereits im vorhergehenden Bewies gesehen haben.

Satz 36: *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und t die Tangente im Eckpunkt C an den Umkreis. Sei P ein Punkt auf t und U und V die Fußpunkte der Lote von P auf $\ell(A,C)$ und $\ell(B,C)$. Dann steht $\ell(U,V)$ senkrecht auf $\ell(A,B)$.*

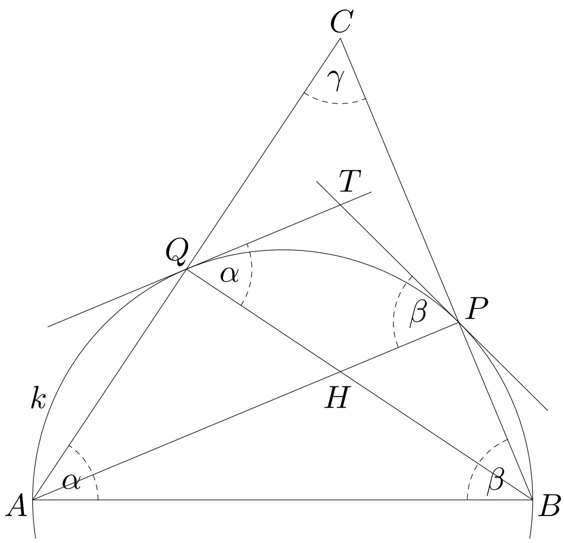


Beweis: Wir führen den Beweis für ein spitzwinkeliges Dreieck. Wir nehmen an, dass P auf der anderen Seite der Geraden $\ell(B,C)$ liegt als A.
Aus dem Tangentenwinkelsatz für die Sehne $\overline{BC}$ des Umkreises folgt $\measuredangle PCB = \alpha$. Daraus ergibt sich

$\measuredangle UCP = 180^0 - \measuredangle PCB - \gamma = 180^0 - \alpha - \gamma = \beta$.

Sei k der Kreis durch die Punkte C, P und U. Nun gilt $\measuredangle CUP = 90^0$ und $\measuredangle CVP = 90^0$. Daher liegt nach Satz 33 auch V auf dem Kreis k. Aus dem Peripheriewinkelsatz angewendet auf die Sehne $\overline{UP}$ des Kreises k folgt $\measuredangle PVU = \measuredangle PCU = \beta$. Wegen $\measuredangle CVP = 90^0$ ergibt sich $\measuredangle CVU = 90^0 - \beta$.
Sei D der Schnittpunkt der Geraden $\ell(U,V)$ und $\ell(A,B)$. Dann gilt $\measuredangle BVD = \measuredangle CVU = 90^0 - \beta$ (Scheitelwinkel). Wegen $\measuredangle DBV = \beta$ und da die Winkelsumme im Dreieck $\triangle DBV$ gleich 180^0 ist, muss der Winkel $\measuredangle VDB$ gleich 90^0 sein. □

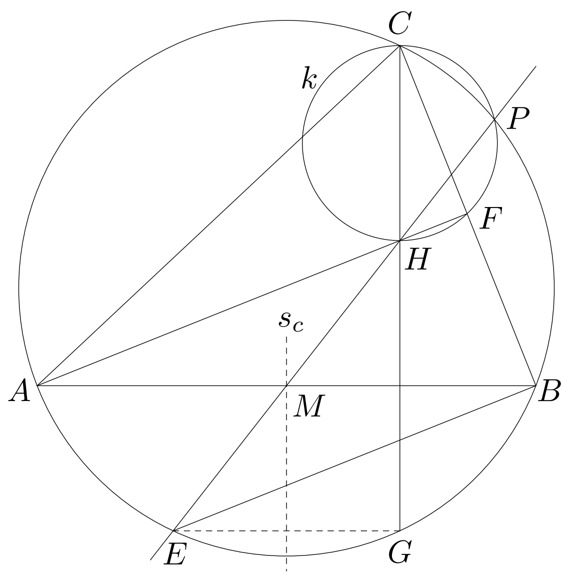
Satz 37 (Archimedes) *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H. Sei k der Kreis mit Durchmesser $\overline{AB}$. Sei P der Schnittpunkt $\neq B$ des Kreises k mit der Geraden $\ell(B,C)$ und Q der Schnittpunkt $\neq A$ des Kreises k mit der Geraden $\ell(A,C)$. Sei T der Schnittpunkt der beiden Tangenten an den Kreis k in den Punkten P und Q. Dann liegt der Punkt T auf der Höhe durch C und hat gleichen Abstand von den Punkten C, H, P und Q.*



Beweis: Wir beweisen den Satz für ein spitzwinkeliges Dreieck. Da $\overline{AB}$ ein Durchmesser des Kreises k ist und P und Q auf k liegen, folgt $\measuredangle APB = 90^0$ und $\measuredangle AQB = 90^0$ aus dem Satz von Thales. Somit ist $\overline{AP}$ die Höhe durch A und $\overline{BQ}$ die Höhe durch B. Ihr Schnittpunkt ist der Höhenschnittpunkt H.
Die Winkelsumme in einem Viereck ist 360^0, da man es sich aus zwei Dreiecken zusammengesetzt denken kann. Das Viereck $PCQH$ hat bei P und Q rechte Winkel und bei C den Winkel γ. Es folgt $\measuredangle QHP = 180^0 - \gamma$.
Der Tangentenwinkelsatz für die Sehne $\overline{QB}$ des Kreises k ergibt $\measuredangle TQB = \measuredangle QAB = \alpha$. Für die Sehne $\overline{PA}$ ergibt er $\measuredangle TPA = \measuredangle PBA = \beta$.
Das Viereck $QHPT$ hat daher bei Q und P die Winkel α und β und bei H den Winkel $180^0 - \gamma$. Es folgt $\measuredangle PTQ = 360^0 - \alpha - \beta - (180^0 - \gamma) = 2\gamma$, da ja $180^0 - \alpha - \beta = \gamma$ gilt.

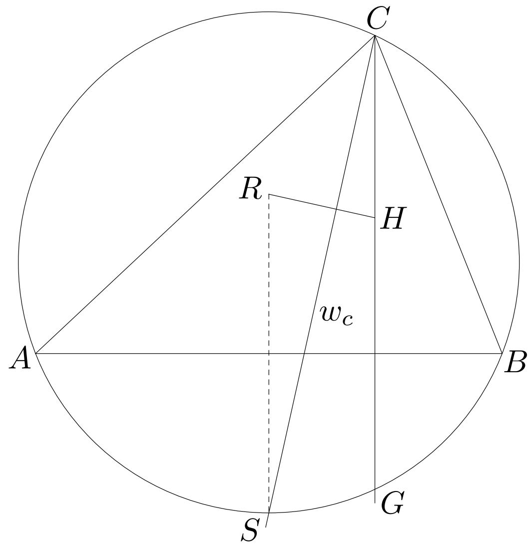
Es gilt $|TP| = |TQ|$, da P und Q die Berührpunkte der Tangenten von T aus an den Kreis k sind. Sei l der Kreis mit Mittelpunkt T durch P und Q. Der Zentriwinkel des Mittelpunkts T über der Sehne $\overline{PQ}$ ist 2γ. Ein Punkt auf l auf derselben Seite der Sehne $\overline{PQ}$ wie T hat Peripheriewinkel γ nach Satz 30. Da C auf derselben Seite der Sehne $\overline{PQ}$ liegt wie T und $\measuredangle PCQ = \gamma$ gilt, liegt C nach Satz 33 auf dem Kreis l. Ebenso ergibt sich, dass auch H auf dem Kreis l liegt, da H auf der anderen Seite der Sehne $\overline{PQ}$ liegt als T und $\measuredangle QHP = 180^0 - \gamma$ gilt. Damit ist $|TP| = |TQ| = |TC| = |TH|$ gezeigt.
Nun ist $\overline{CH}$ eine Sehne des Kreises l und P ist ein Punkt auf dem Kreis l mit Peripheriewinkel 90^0 über der Sehne $\overline{CH}$. Der Zentriwinkel des Mittelpunkts T über der Sehne $\overline{CH}$ ist daher 180^0 nach Satz 30, das heißt T liegt auf $\overline{CH}$ und somit auch auf der Höhe durch C, da H ja der Höhenschnittpunkt ist. □

Satz 38: *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H. Sei M der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$. Sei k der Kreis mit Durchmesser $\overline{HC}$ und P der Schnittpunkt $\neq C$ von k mit dem Umkreis. Dann liegen die Punkte P, H und M auf einer Gerade.*



Beweis: Wir führen den Beweis für ein spitzwinkeliges Dreieck und nehmen an, dass P auf dem Bogen des Umkreises zwischen C und B liegt. Wir führen einige Hilfspunkte ein. Sei G der an der Seite $\overline{AB}$ gespiegelte Höhenschnittpunkt H. Nach Satz 35 liegt G auf dem Umkreis. Sei E der an der Symmetrale s_c der Seite $\overline{AB}$ gespiegelte Punkt G. Da der Umkreis bei dieser Spiegelung in sich selbst übergeht, liegt E ebenfalls auf dem Umkreis. Da die beiden Spiegelungsachsen $\overline{AB}$ und s_c aufeinander senkrecht stehen, gilt auch $\measuredangle EGH = 90^0$ und der Schnittpunkt M der beiden Achsen ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{EH}$. Es genügt daher zu zeigen, dass P, H und E auf einer Gerade liegen.
Sei F der Fußpunkt der Höhe durch A und $\varphi = \measuredangle FCP = \measuredangle BCP$. Da $\overline{HC}$ ein Durchmesser des Kreises k ist, der Zentriwinkel also 180^0 beträgt, und $\measuredangle HFC = 90^0$ gilt, folgt mit Hilfe von Satz 30 und Satz 33, dass F auf k liegt. Aus dem Peripheriewinkelsatz angewendet auf die Sehne $\overline{FP}$ des Kreises k folgt $\measuredangle FHP = \measuredangle FCP = \varphi$. Aus dem Peripheriewinkelsatz angewendet auf die Sehne $\overline{BP}$ des Umkreises erhalten wir $\measuredangle BEP = \measuredangle BCP = \varphi$. Aus dem Peripheriewinkelsatz angewendet auf die Sehne $\overline{EC}$ des Umkreises folgt schließlich $\measuredangle EBC = \measuredangle EGC = \measuredangle EGH = 90^0$. Da F der Fußpunkt der Höhe durch A ist und daher auch $\measuredangle AFC = 90^0$ gilt, liegen die Strecken $\overline{AF}$ und $\overline{EB}$ parallel zueinander. Es folgt $\measuredangle AHE = \measuredangle BEH = \measuredangle BEP = \varphi$ (Wechselwinkel).
Wir haben $\measuredangle FHP = \varphi = \measuredangle AHE$ gezeigt. Da die Punkte A, H und F auf einer Geraden liegen, nämlich auf der Höhe durch A, liegen die Punkte P, H und E ebenfalls auf einer Geraden. □

Satz 39: *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H. Es gelte $\beta \neq \alpha$. Sei S der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale w_c durch C mit dem Umkreis (Südpol) und R der an der Seite $\overline{AB}$ gespiegelte Punkt S. Dann steht $\overline{RH}$ senkrecht auf w_c.*

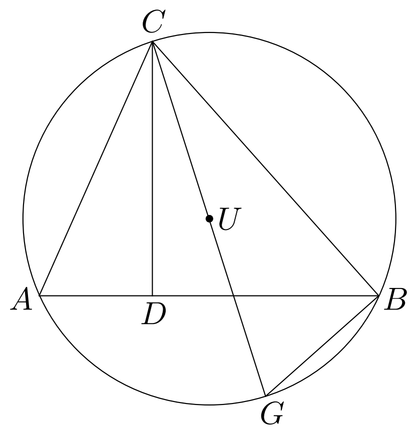


Beweis: Sei G der an der Seite $\overline{AB}$ gespiegelte Höhenschnittpunkt H. Nach Satz 35 liegt er auf dem Umkreis. Wir führen den Beweis für ein spitzwinkeliges Dreieck und nehmen an, dass $\beta > \alpha$ gilt. Es folgt $\measuredangle ACH = 90^0 - \alpha > 90^0 - \beta = \measuredangle BCH$. Daher liegen die Punkte S, G und B in dieser Reihenfolge auf dem Umkreis.
Im Beweis von Satz 34 wurde $\measuredangle SBA = \frac{\gamma}{2}$ gezeigt. Es folgt $\measuredangle SBC = \beta + \frac{\gamma}{2}$. Aus dem Peripheriewinkelsatz angewendet auf die Sehne $\overline{SC}$ des Umkreises folgt $\measuredangle SGC = \measuredangle SBC = \beta + \frac{\gamma}{2}$. Da R und H die Spiegelbilder von S und G an der Seite $\overline{AB}$ sind, gilt auch $\measuredangle RHG = \measuredangle SGH = \measuredangle SGC = \beta + \frac{\gamma}{2}$. Es folgt $\measuredangle RHC = 180^0 - \measuredangle RHG = 180^0 - \beta - \frac{\gamma}{2} = \alpha + \frac{\gamma}{2}$. Wegen $\measuredangle HCA = 90^0 - \alpha$ und $\measuredangle SCA = \frac{\gamma}{2}$ erhalten wir $\measuredangle HCS = \measuredangle HCA - \measuredangle SCA = 90^0 - \alpha - \frac{\gamma}{2}$. Wegen $\measuredangle HCS + \measuredangle RHC = 90^0$ muss der Winkel zwischen den Strecken $\overline{RH}$ und $\overline{CS}$ ebenfalls 90^0 betragen. □

8. Umkreis, Inkreis, Ankreise und Fläche

Wir berechnen zuerst die Radien des Umkreises, des Inkreises und der Ankreise. Dann beweisen wir die Heronsche Formel für die Fläche eines Dreiecks.

Satz 40: *Seien a, b und c die Längen der Seiten eines Dreiecks und sei F seine Fläche. Ist r der Umkreisradius, dann gilt $r = \frac{abc}{4F}$.*



Beweis: Wir können die Bezeichnung immer so wählen, dass $\measuredangle BAC < 90^0$ gilt. Sei G der Schnittpunkt $\neq C$ des Umkreises mit der Geraden $\ell(C, U)$. Sei h die Länge der Höhe durch den Eckpunkt C und D ihr Fußpunkt. Der Winkel $\measuredangle ADC$ ist ein rechter, da $\overline{CD}$ als Höhe auf $\overline{AB}$ senkrecht steht. Der Winkel $\measuredangle GBC$ ist ebenfalls ein rechter nach dem Satz von Thales angewendet auf den Umkreis, da $\overline{CG}$ eine Sehne des Umkreises ist, die durch dessen Mittelpunkt geht. (Daraus folgt auch, dass $\measuredangle BGC$ ein spitzer Winkel ist.) Die Dreieckseite $\overline{BC}$ ist eine Sehne des Umkreises und die Punkte A und G liegen auf dem Umkreis auf der selben Seite dieser Sehne, da die Winkel $\measuredangle BAC$ und $\measuredangle BGC$ beide spitze Winkel sind. Aus dem Peripheriewinkelsatz folgt $\measuredangle BAC = \measuredangle BGC$.
Wir haben gezeigt, dass die Dreiecke $\triangle GBC$ und $\triangle ADC$ ähnlich sind. Aus dem Strahlensatz folgt jetzt $\frac{|CG|}{|CB|} = \frac{|CA|}{|CD|}$, das heißt $\frac{2r}{a} = \frac{b}{h}$. Es gilt auch $2F = ch$. Multiplikation dieser beiden Gleichungen ergibt $\frac{4rF}{a} = cb$, also $r = \frac{abc}{4F}$. □

Satz 41: *Seien a, b und c die Längen der Seiten eines Dreiecks $\triangle ABC$, sei F seine Fläche und $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ sein halber Umfang. Ist ϱ der Inkreisradius, dann gilt $\varrho = \frac{F}{s}$.*

Beweis: Sei I der Inkreismittelpunkt. Das Dreieck $\triangle ABC$ lässt sich in die drei Dreiecke $\triangle AIB$, $\triangle AIC$ und $\triangle BIC$ zerlegen. Diese drei Dreiecke haben Höhen der Länge ϱ. Ihre Flächen sind daher $\frac{1}{2}c\varrho$, $\frac{1}{2}b\varrho$ und $\frac{1}{2}a\varrho$. Es folgt $F = \frac{1}{2}a\varrho + \frac{1}{2}b\varrho + \frac{1}{2}c\varrho = s\varrho$, also $\varrho = \frac{F}{s}$. □

Satz 42: *Seien a, b und c die Längen der Seiten eines Dreiecks $\triangle ABC$, sei F seine Fläche und $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ sein halber Umfang. Sind ϱ_a, ϱ_b und ϱ_c die Radien der Ankreise an die drei Seiten, dann gilt $\varrho_a = \frac{F}{s-a}$, $\varrho_b = \frac{F}{s-b}$ und $\varrho_c = \frac{F}{s-c}$.*

Beweis: Wir beweisen die erste der drei Formeln. Sei P der Mittelpunkt des Ankreises an die Seite $\overline{BC}$. Die Flächen der drei Dreiecke $\triangle APB$, $\triangle APC$ und $\triangle BPC$ sind dann $\frac{1}{2}c\varrho_a$, $\frac{1}{2}b\varrho_a$ und $\frac{1}{2}a\varrho_a$. Die beiden Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle BPC$ überdecken dieselbe Fläche wie die beiden Dreiecke $\triangle APB$ und $\triangle APC$. Daher gilt $F + \frac{1}{2}a\varrho_a = \frac{1}{2}c\varrho_a + \frac{1}{2}b\varrho_a$. Es folgt $F = \frac{1}{2}(b+c-a)\varrho_a = (s-a)\varrho_a$ und daraus dann $\varrho_a = \frac{F}{s-a}$. □

Satz 43 (Heronsche Formel) *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Seitenlängen a, b und c und $s = \frac{a+b+c}{2}$ sein halber Umfang. Sei F seine Fläche. Dann gilt $F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.*

Beweis: Wir können annehmen, dass der Winkel $\measuredangle BAC$ spitz ist. Dann liegt der Eckpunkt B auf derselben Seite des Eckpunkts A wie der Fußpunkt D der Höhe durch den Eckpunkt C. Sei $h = |CD|$ und $p = |AD|$. Der Satz von Pythagoras angewendet auf $\triangle ACD$ und $\triangle BCD$ ergibt $b^2 = h^2 + p^2$ und $a^2 = h^2 + (c-p)^2$. Subtrahiert man diese beiden Gleichungen, so hat man $a^2 - b^2 = c^2 - 2cp$. Es folgt $4c^2p^2 = (a^2 - b^2 - c^2)^2$. Mit Hilfe obiger Gleichungen ergibt sich $16F^2 = 4c^2h^2 = 4c^2b^2 - 4c^2p^2 = 4b^2c^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2$. Durch wiederholtes Anwenden der Formel $u^2 - v^2 = (u+v)(u-v)$ erhält man

$$\begin{aligned} 16F^2 &= 4b^2c^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2 = (2bc - a^2 + b^2 + c^2)(2bc + a^2 - b^2 - c^2) \\ &= ((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2) = (b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c) \\ &= 2s(2s-2a)(2s-2c)(2s-2b) \end{aligned}$$

Daraus folgt dann $F^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$. □

Um die Abstände der Eckpunkte eines Dreiecks zu den Berührpunkten des Inkreises und der Ankreise zu berechnen, verwenden wir die Bemerkung nach Satz 21. Legt man die beiden Tangenten von einem Punkt S an einen Kreis, dann sind die Abschnitte von S bis zu den Berührpunkten gleich lang.

Satz 44: *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Seitenlängen a, b und c und $s = \frac{a+b+c}{2}$. Der Inkreis berühre die Seite $\overline{BC}$ im Punkt P_a, die Seite $\overline{AC}$ im Punkt P_b und die Seite $\overline{AB}$ im Punkt P_c. Dann gilt $|AP_b| = |AP_c| = s-a$, $|BP_a| = |BP_c| = s-b$ und $|CP_a| = |CP_b| = s-c$.*

Beweis: Es gilt $|AP_b| = |AP_c|$, $|BP_a| = |BP_c|$ und $|CP_a| = |CP_b|$ nach der erwähnten Bemerkung. Wir bezeichnen diese Abstände der Reihe nach mit x, y und z. Dann haben wir $x+y = |AP_c| + |BP_c| = c$, $x+z = |AP_b| + |CP_b| = b$, und $y+z = |BP_a| + |CP_a| = a$. Es folgt $2x = b+c-a = 2s-2a$, $2y = a+c-b = 2s-2b$ und $2z = a+b-c = 2s-2c$. □

Satz 45: *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Seitenlängen a, b und c und $s = \frac{a+b+c}{2}$. Der Ankreis an die Seite $\overline{BC}$ berühre diese im Punkt R_a, die Verlängerung der Seite $\overline{AC}$ im Punkt R_b und die Verlängerung der Seite $\overline{AB}$ im Punkt R_c. Dann gilt $|AR_b| = |AR_c| = s$, $|BR_a| = |BR_c| = s-c$ und $|CR_a| = |CR_b| = s-b$.*

Beweis: Wie im letzten Beweis gilt $|AR_b| = |AR_c|$, $|BR_a| = |BR_c|$ und $|CR_a| = |CR_b|$. Wir bezeichnen diese Abstände der Reihe nach mit x, y und z. Damit erhalten wir dann $x-y = |AR_c| - |BR_c| = c$, $x-z = |AR_b| - |CR_b| = b$, und $y+z = |BR_a| + |CR_a| = a$. Es folgt $2x = a+b+c = 2s$, $2y = a+b-c = 2s-2c$ und $2z = a+c-b = 2s-2b$. □

Analoge Resultate gelten natürlich auch für die Ankreise an die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$.

II. Trigonometrie

1. Trigonometrische Funktionen

In der Dreiecksgeometrie hat man es mit Winkeln im Bereich von 0^0 bis 180^0 zu tun. Wir erweitern jetzt diesen Bereich und lassen sowohl Winkel $> 180^0$ als auch Winkel $< 0^0$ (negatives Vorzeichen) zu. Dabei ist jedoch zu beachten, dass Winkel, die sich um ein Vielfaches von 360^0 unterscheiden, identifiziert werden müssen.

Der Einheitskreis ist der Kreis im Koordinatensystem, der Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius 1 hat. Um $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ zu definieren, zeichnen wir vom Punkt $(0,0)$ aus eine Halbgerade, die mit der x-Achse den Winkel α einschließt (für $\alpha > 0$ im Gegenuhrzeigersinn, für $\alpha < 0$ im Uhrzeigersinn). Die Koordinaten des Schnittpunktes dieser Halbgerade mit dem Einheitskreis sind dann $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$. Da man für die Winkel α und $\alpha+360^0$ den selben Punkt am Einheitskreis erhält, ergibt sich $\sin(\alpha+360^0) = \sin\alpha$ und $\cos(\alpha+360^0) = \cos\alpha$.

Weiters definiert man $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ und $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Satz 46: *Für* sin *und* cos *gelten folgende Gleichungen*
(a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
(b) $\sin 0^0 = \sin 180^0 = 0$, $\sin 90^0 = 1$, $\cos 0^0 = 1$, $\cos 180^0 = -1$, $\cos 90^0 = 0$
(c) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
(d) $\sin(\alpha + 90^0) = \cos\alpha$, $\cos(\alpha + 90^0) = -\sin\alpha$
(e) $\sin(\alpha + 180^0) = -\sin\alpha$, $\cos(\alpha + 180^0) = -\cos\alpha$

Beweis: Es gilt (a), da der Punkt mit den Koordinaten $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ auf dem Einheitskreis liegt. Auch (b) folgt sofort aus der Definition, indem man die Koordinaten der Punkte abliest, die man für die Winkel 0, 90^0 und 180^0 erhält. Da die Punkte auf dem Einheitskreis, die man für die Winkel α und $-\alpha$ erhält, symmetrisch zur x-Achse liegen, folgt (c). Den Vektor $\binom{\cos(\alpha+90^0)}{\sin(\alpha+90^0)}$ erhält man, indem man den Vektor $\binom{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ um 90^0 im Gegenuhrzeigersinn um den Nullpunkt dreht. Daraus folgt (d). Den Vektor $\binom{\cos(\alpha+180^0)}{\sin(\alpha+180^0)}$ erhält man, indem man den Vektor $\binom{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ am Nullpunkt spiegelt. Daraus folgt (e). $\square$

Ist α ein Winkel in einem rechtwinkeligen Dreieck, der nicht der rechte ist, dann heißt die am Winkel α anliegende Kathete die Ankathete und die nicht anliegende Kathete heißt die Gegenkathete. Aus dem Strahlensatz folgt dann

$$\sin\alpha = \frac{|\text{Gegenkathete}|}{|\text{Hypotenuse}|} \qquad \cos\alpha = \frac{|\text{Ankathete}|}{|\text{Hypotenuse}|} \quad \text{und} \quad \tan\alpha = \frac{|\text{Gegenkathete}|}{|\text{Ankathete}|}$$

Satz 47 (Summensätze) *Für beliebige Winkel α und β gelten die beiden Formeln*
(a) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ (b) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

Beweis: Misst man von der x-Achse aus am Einheitskreis im Gegenuhrzeigersinn den Winkel α, so kommt man zum Punkt $(\cos\alpha, \sin\alpha)$. Misst man von der x-Achse aus am Einheitskreis im Uhrzeigersinn den Winkel β, so kommt man zum Punkt $(\cos\beta, -\sin\beta)$. Der Winkel zwischen den Halbgeraden zu diesen Punkten ist $\alpha+\beta$. Der Winkel zwischen den Halbgeraden zu den Punkten $(1,0)$ und $(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$ ist ebenfalls $\alpha+\beta$. Daher ist auch der Abstand vom Punkt $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ zum Punkt $(\cos\beta, -\sin\beta)$ gleich dem Abstand vom Punkt $(1,0)$ zum Punkt $(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$. Das heißt

$$\sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2} = \sqrt{(1 - \cos(\alpha+\beta))^2 + (\sin(\alpha+\beta))^2}$$

Man kann die Wurzeln auf beiden Seiten weglassen. Quadriert man aus, so erhält man

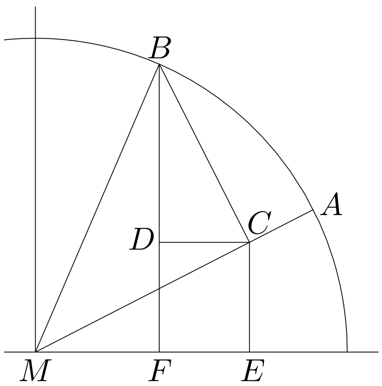
$$\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta$$
$$= 1 - 2\cos(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha+\beta)$$

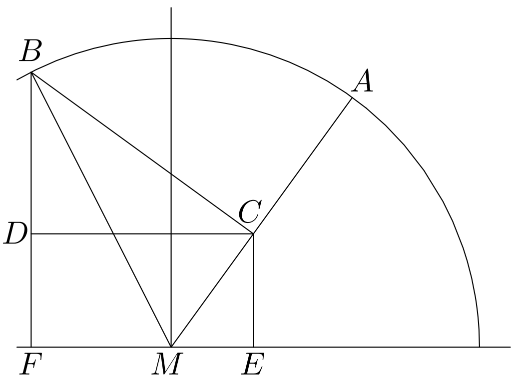
An drei verschiedenen Stellen kann man die Formel $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ anwenden, und erhält $1 - 2\cos\alpha\cos\beta + 1 + 2\sin\alpha\sin\beta = 1 - 2\cos(\alpha+\beta) + 1$. Damit sind wir bei der Formel $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ angelangt und (b) ist gezeigt.
Wir ersetzen in dieser soeben gezeigten Formel β durch $\beta + 90^0$. Es gilt

$$\cos(\alpha+\beta+90^0) = -\sin(\alpha+\beta), \quad \cos(\beta+90^0) = -\sin\beta \quad \text{und} \quad \sin(\beta+90^0) = \cos\beta$$

Setzt man das ein, so hat man $-\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha(-\sin\beta) - \sin\alpha\cos\beta$. Das ist (a). ◻

Wir geben auch noch einen geometrischen Beweis der Summensätze. Wir nehmen zuerst an, dass die Winkel α und β zwischen 0^0 und 90^0 liegen. Wir messen die entsprechenden Winkel am Einheitskreis und erhalten den Punkt A, der dem Winkel α, und den Punkt B, der dem Winkel $\alpha+\beta$ entspricht. In der Zeichnung unten links ist der Fall dargestellt, in dem $\alpha+\beta < 90^0$ gilt, die Zeichnung rechts unten zeigt den Fall, in dem $\alpha+\beta > 90^0$ gilt.





Sei C der Fußpunkt des Lots vom Punkt B auf die Strecke $\overline{MA}$. Wegen $\measuredangle CMB = \beta$ und $\measuredangle BCM = 90^0$ erhalten wir $|MC| = \cos\beta$ und $|BC| = \sin\beta$. Sei E der Fußpunkt des Lots von C auf die x-Achse. Wegen $\measuredangle EMC = \alpha$ und $\measuredangle CEM = 90^0$ erhalten wir dann $|CE| = |MC|\sin\alpha = \cos\beta\sin\alpha$ und $|ME| = |MC|\cos\alpha = \cos\beta\cos\alpha$. Sei F der Fußpunkt des Lots von B auf die x-Achse und D der Fußpunkt des Lots von C auf die Strecke $\overline{BF}$. Es gilt $\measuredangle DBC = \measuredangle EMC = \alpha$, da $\overline{BD}$ senkrecht auf $\overline{ME}$ und $\overline{BC}$ senkrecht auf $\overline{MC}$ steht (Orthogonalwinkel). Damit erhalten wir $|CD| = |BC|\sin\alpha = \sin\beta\sin\alpha$ und $|BD| = |BC|\cos\alpha = \sin\beta\cos\alpha$. Nun folgt wegen $\measuredangle BME = \alpha+\beta$

$$\sin(\alpha+\beta) = |BF| = |DF| + |BD| = |CE| + |BD| = \cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha+\beta) = |MF| = |ME| - |EF| = |ME| - |CD| = \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha$$

(im zweiten Fall $-|MF|$ statt $|MF|$). Damit sind die Summensätze für Winkel α und β von 0^0 bis 90^0 bewiesen. Mit den Formeln aus Satz 46 (d) erhält man sie für alle Winkel.

Es folgen Sinus- und Cosinussatz.

Satz 48 (Sinussatz) *In einem beliebigen Dreieck $\triangle ABC$ mit Fläche F, mit Umkreisradius r und den üblichen Bezeichnungen gilt $2r = \frac{abc}{2F} = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.*

Beweis: Sei h die Länge der Höhe durch C. Dann gilt $2F = ch$. Weiters gilt $\sin\alpha = \frac{h}{b}$ (wegen $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$ gilt das auch, wenn α stumpf ist und daher die Höhe außerhalb des Dreiecks liegt). Daraus folgt $\frac{abc}{2F} = \frac{ab}{h} = \frac{ab}{b\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha}$. Analog zeigt man $\frac{abc}{2F} = \frac{b}{\sin\beta}$ und $\frac{abc}{2F} = \frac{c}{\sin\gamma}$. Die Gleichung $2r = \frac{abc}{2F}$ wurde in Satz 40 bewiesen. ◻

Satz 49 (Cosinussatz) *In einem Dreieck* $\triangle ABC$ *mit den üblichen Bezeichnungen gilt* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ *und* $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Beweis: Wir zeigen die erste der drei Gleichungen. Sei D der Fußpunkt der Höhe durch den Eckpunkt C und h deren Länge. Wir nehmen zuerst an, dass $\alpha \le 90^0$ gilt. Sei p der Abstand von D zum Eckpunkt A. Es gilt dann $\cos\alpha = \frac{p}{b}$, das heißt $p = b\cos\alpha$. Aus dem Satz von Pythagoras folgt $a^2 = h^2 + (c-p)^2$ und $b^2 = h^2 + p^2$. Durch Subtraktion dieser Gleichungen ergibt sich $a^2 - b^2 = (c-p)^2 - p^2 = c^2 - 2pc$. Wir setzen für p ein und erhalten $a^2 - b^2 = c^2 - 2bc\cos\alpha$, das heißt $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Wir nehmen jetzt an, dass $\alpha > 90^0$ gilt. Sei p wieder der Abstand von D zum Eckpunkt A. Nun gilt aber $\cos(180^0 - \alpha) = \frac{p}{b}$, da die Höhe durch den Eckpunkt C außerhalb des Dreiecks liegt. Wegen $\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$ erhalten wir $p = -b\cos\alpha$. Aus dem Satz von Pythagoras folgt $a^2 = h^2 + (c+p)^2$ und $b^2 = h^2 + p^2$. Durch Subtraktion dieser Gleichungen ergibt sich $a^2 - b^2 = (c+p)^2 - p^2 = c^2 + 2pc$. Wir setzen für p ein und erhalten $a^2 - b^2 = c^2 - 2bc\cos\alpha$, das heißt $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Die anderen beiden Gleichungen beweist man analog. □

Der Cosinussatz gilt auch für ein Dreieck, dessen Eckpunkte auf einer Gerade liegen. Die Winkel sind dann 0^0 und 180^0. Der Sinussatz ist in diesem Grenzfall sinnlos.

Mit Hilfe des Cosinussatzes beweisen wir die nächsten beiden Sätze.

Satz 50 (Dreiecksungleichung) *Sind* a, b *und* c *die Längen der Seiten eines Dreiecks, dann gilt* $a \le b + c$, $b \le a + c$ *und* $c \le a + b$. *Gleichheit gilt genau dann, wenn der der links stehenden Seite gegenüberligende Winkel* 180^0 *beträgt (der der links stehenden Seite gegenüberliegende Eckpunkt liegt auf der Strecke zwischen den beiden anderen Eckpunkten).*

Beweis: Da $-\cos\gamma \le 1$ gilt, erhalten wir $c^2 \le a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$ aus dem Cosinussatz. Es folgt $c \le a + b$. Gleichheit gilt genau dann, wenn $\cos\gamma = -1$ gilt, das heißt $\gamma = 180^0$. Analog zeigt man die anderen Ungleichungen. □

Satz 51 (Stewarts Formel) *Sei* $\triangle ABC$ *ein Dreieck mit Seitenlängen* a, b *und* c. *Sei* D *ein Punkt auf* $\overline{AB}$. *Sei* $p = |DB|$, $q = |AD|$ *und* $m = |CD|$. *Dann gilt* $\frac{a^2}{cp} + \frac{b^2}{cq} - \frac{m^2}{pq} = 1$.

Beweis: Sei $\varphi = \measuredangle CDB$ und $\psi = \measuredangle CDA$. Es gilt $\psi = 180^0 - \varphi$, woraus $\cos\psi = -\cos\varphi$ folgt. Wir wenden den Cosinussatz auf die Dreiecke $\triangle CDB$ und $\triangle CDA$ an

$$a^2 = m^2 + p^2 - 2mp\cos\varphi$$

$$b^2 = m^2 + q^2 - 2mq\cos\psi = m^2 + q^2 + 2mq\cos\varphi$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit q und die zweite mit p. Durch Addition der Gleichungen erhalten wir $a^2q + b^2p = m^2q + m^2p + p^2q + q^2p$. Wegen $q + p = c$ folgt $a^2q + b^2p = m^2c + pqc$. Division durch pqc ergibt $\frac{a^2}{cp} + \frac{b^2}{cq} = \frac{m^2}{pq} + 1$. □

Wir geben noch eine Anwendung von Stewarts Formel.

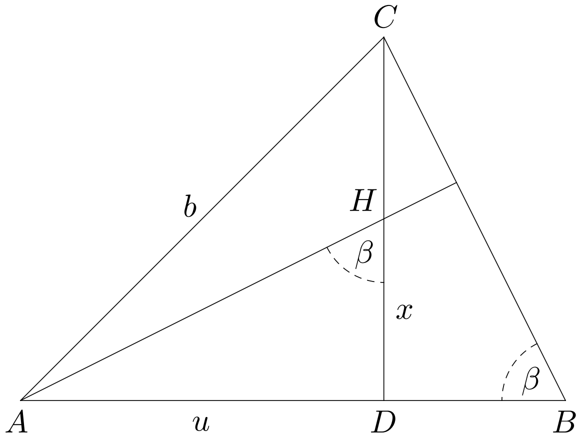
Satz 52: *Sei* $\triangle ABC$ *ein Dreieck mit Seitenlängen* a, b *und* c. *Sei* w *die Länge der Winkelsymmetrale durch den Eckpunkt* C. *Dann gilt* $w^2 = ab(1 - (\frac{c}{a+b})^2)$.

Beweis: Sei D der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale durch C mit der Seite $\overline{AB}$. Wir setzen $p = |DB|$ und $q = |AD|$. Aus Satz 51 folgt $\frac{a^2}{cp} + \frac{b^2}{cq} - \frac{w^2}{pq} = 1$. Satz 25 besagt, dass $\frac{q}{p} = \frac{b}{a}$ gilt. Klarerweise gilt auch $q + p = c$. Es folgt $p = \frac{a}{a+b}c$ und $q = \frac{b}{a+b}c$. Wir setzen ein und erhalten $\frac{a(a+b)}{c^2} + \frac{b(a+b)}{c^2} - \frac{w^2(a+b)^2}{abc^2} = 1$. Das ergibt $w^2 = ab(1 - (\frac{c}{a+b})^2)$. □

2. Die besonderen Punkte des Dreiecks

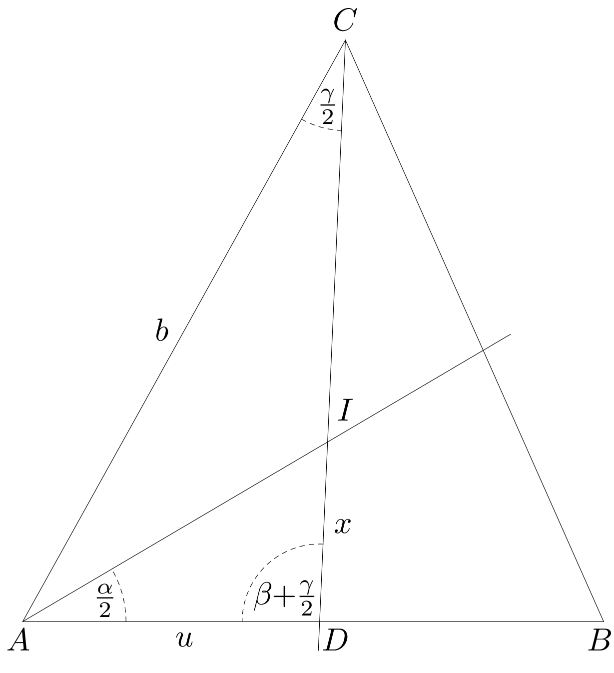
Abgesehen vom Schwerpunkt, kann man die besonderen Punkte des Dreiecks auch mit trigonometrischen Methoden behandeln.

Satz 53: *In einem beliebigen Dreieck schneiden die drei Höhen einander in einem Punkt, dem Höhenschnittpunkt H.*



Beweis: Ist das Dreieck nicht spitzwinkelig, dann wählen wir die Bezeichnungen so, dass γ der Winkel $\geq 90^0$ ist. Die Winkel α und β sind jedenfalls spitz. Sei D der Fußpunkt der Höhe durch den Eckpunkt C und H der Schnittpunkt der Höhen durch die Eckpunkte C und A. Da die Winkel α und β spitz sind, liegt H oberhalb von D und D rechts von A. Sei x der Abstand der Punkte D und H. Sei u der Abstand der Punkte A und D. Es gilt $\measuredangle ADC = 90^0$ und $\measuredangle DHA = \measuredangle ABC = \beta$, da die Höhe durch A senkrecht auf $\overline{BC}$ und die Höhe durch C senkrecht auf $\overline{AB}$ steht (Orthogonalwinkel). Es folgt $u = b\cos\alpha$ und $\tan\beta = \frac{u}{x}$. Daraus ergibt sich $x = \frac{u}{\tan\beta} = \frac{b\cos\alpha}{\tan\beta}$.
Sei jetzt G der Schnittpunkt der Höhen durch die Eckpunkte C und B und y der Abstand der Punkte D und G. Wie oben erhält man, dass G oberhalb von D liegt und $y = \frac{a\cos\beta}{\tan\alpha}$ gilt. Aus dem Sinussatz folgt $b\sin\alpha = a\sin\beta$, das heißt $b\cos\alpha\tan\alpha = a\cos\beta\tan\beta$. Damit ist $x = y$ gezeigt. Somit gilt $G = H$. Die drei Höhen schneiden einander im Punkt H. □

Satz 54: *In einem beliebigen Dreieck schneiden die drei Winkelsymmetralen einander in einem Punkt, dem Inkreismittelpunkt I.*



Beweis: Sei D der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale durch den Eckpunkt C mit der Seite $\overline{AB}$ und I der Schnittpunkt der Winkelsymmetralen durch die Eckpunkte C und A. Sei x der Abstand der Punkte D und I und u der Abstand der Punkte A und D. Wir wenden den Sinussatz im Dreieck $\triangle ADC$ an. Wegen $\measuredangle ADC = 180^0 - \alpha - \frac{\gamma}{2} = \beta + \frac{\gamma}{2}$ und $\measuredangle ACD = \frac{\gamma}{2}$ gilt $\frac{u}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{b}{\sin(\beta+\frac{\gamma}{2})}$, woraus $u = b\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin(\beta+\frac{\gamma}{2})}$ folgt. Wir wenden noch einmal den Sinussatz an und zwar jetzt im Dreieck $\triangle ADI$. Wegen $\measuredangle AID = 90^0 - \frac{\beta}{2}$ und $\measuredangle DAI = \frac{\alpha}{2}$ gilt $\frac{u}{\sin(90^0-\frac{\beta}{2})} = \frac{x}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, woraus $x = u\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin(90^0-\frac{\beta}{2})} = u\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$ folgt. Setzt man für u ein, so hat man $x = b\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\sin(\beta+\frac{\gamma}{2})}$.
Sei jetzt J der Schnittpunkt der Winkelsymmetralen durch die Eckpunkte C und B und y der Abstand der Punkte D und J. Wie oben erhält man, dass $y = a\frac{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin(\alpha+\frac{\gamma}{2})}$ gilt.

Aus dem Sinussatz folgt $b \sin\alpha = a \sin\beta$ und daraus dann $2b \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2a \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$ mit Hilfe des Summensatzes. Die Summe der beiden Winkel $\alpha + \frac{\gamma}{2}$ und $\beta + \frac{\gamma}{2}$ ist 180^0. Daher gilt $\sin(\alpha + \frac{\gamma}{2}) = \sin(\beta + \frac{\gamma}{2})$. Mit Hilfe dieser beiden Gleichungen erhalten wir dann $b\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\sin(\beta+\frac{\gamma}{2})} = a\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin(\alpha+\frac{\gamma}{2})}$. Damit ist $x = y$ gezeigt, das heißt $J = I$. Die drei Winkelsymmetralen schneiden einander im Punkt I. □

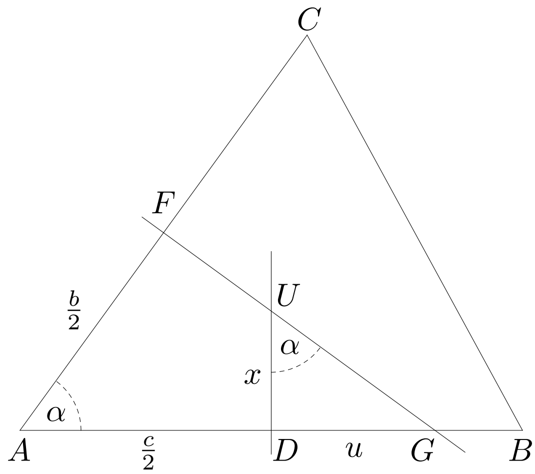
Für den nächsten Satz zeigen wir zuerst einen Hilfssatz.

Hilfssatz C: *Für jedes Dreieck $\triangle ABC$ mit den üblichen Bezeichnungen gelten die Gleichungen $a^2 - ac\cos\beta = b^2 - bc\cos\alpha$ und $(a - c\cos\beta)\sin\alpha = (b - c\cos\alpha)\sin\beta$.*

Beweis: Der Cosinussatz besagt $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ und $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$. Subtraktion dieser Gleichungen ergibt $a^2 - b^2 = b^2 - a^2 - 2bc\cos\alpha + 2ac\cos\beta$, das heißt $2a^2 - 2ac\cos\beta = 2b^2 - 2bc\cos\alpha$. Division durch 2 ergibt die erste Gleichung.
Es gilt $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$ nach dem Sinussatz. Es folgt $(a^2 - ac\cos\beta)\frac{\sin\alpha}{a} = (b^2 - bc\cos\alpha)\frac{\sin\beta}{b}$. Kürzt man links durch a und rechts durch b, dann erhält man die zweite Gleichung. □

Satz 55: *In einem beliebigen Dreieck schneiden die drei Seitensymmetralen einander in einem Punkt, dem Umkreismittelpunkt U.*

Beweis: Ist das Dreieck nicht spitzwinkelig, dann wählen wir die Bezeichnungen so, dass γ der Winkel $\geq 90^0$ ist. Die Winkel α und β sind jedenfalls spitz. Sei U der Schnittpunkt der Symmetralen der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$. Sei D der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ und F der der Seite $\overline{AC}$. Sei x der Abstand der Punkte D und U, wobei x negativ ist, wenn U unterhalb der Seite $\overline{AB}$ liegt. Weiters sei G der Schnittpunkt der (Verlängerung der) Seite $\overline{AB}$ mit der Symmetralen der Seite $\overline{AC}$ und u der Abstand der Punkte D und G, wobei u negativ ist, wenn G links von D liegt.
Wegen $\measuredangle AFG = 90^0$ und $\measuredangle GAF = \alpha$ ergibt sich $\cos\alpha = \frac{\frac{b}{2}}{\frac{c}{2}+u}$. Es folgt $u = \frac{b}{2\cos\alpha} - \frac{c}{2}$. Wegen $\measuredangle UDG = 90^0$ und $\measuredangle GUD = \alpha$ erhalten wir $\cot\alpha = \frac{x}{u}$. Es folgt $x = u\cot\alpha = \frac{b-c\cos\alpha}{2\sin\alpha}$. (Ist $\gamma > 90^0$, dann sind u und x negativ. Ist $\gamma = 90^0$, dann gilt $u = x = 0$.)



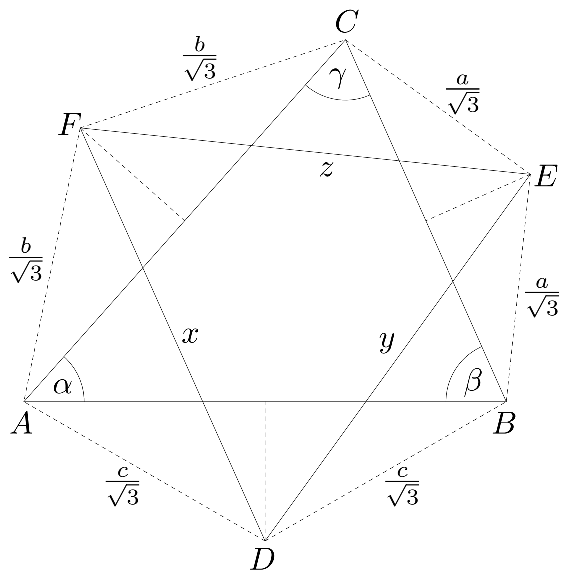
Sei jetzt V der Schnittpunkt der Symmetralen der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$. Sei y der Abstand der Punkte D und V, wobei y negativ ist, wenn V unterhalb der Seite $\overline{AB}$ liegt. Eine analoge Rechnung wie oben ergibt, dass $y = \frac{a-c\cos\beta}{2\sin\beta}$ gilt. In Hilfssatz C wurde die Gleichung $(a - c\cos\beta)\sin\alpha = (b - c\cos\alpha)\sin\beta$ gezeigt. Daraus folgt $y = x$. Damit ist $V = U$ gezeigt. Die drei Seitensymmetralen schneiden einander im Punkt U. □

3. Die Sätze von Napoleon und Morley

Diese beiden Sätze machen Aussagen über Dreiecke, die auf die Seiten eines vorgegebenen Dreiecks aufgesetzt werden. Wir beweisen sie mit trigonometrischen Methoden.

Satz 56 (Satz von Napoleon) *Setzt man auf die drei Seiten eines beliebigen Dreiecks gleichschenkelige Dreiecke mit Basiswinkel 30^0, dann bilden die Spitzen dieser drei Dreiecke ein gleichseitiges Dreieck.*

Beweis: Sei D die Spitze des über der Seite $\overline{AB}$ als Basis errichteten gleichschenkeligen Dreiecks, sei E die Spitze des über der Seite $\overline{BC}$ als Basis errichteten gleichschenkeligen Dreiecks und sei F die Spitze des über der Seite $\overline{CA}$ als Basis errichteten gleichschenkeligen Dreiecks. Sei $x = |DF|$, $y = |DE|$ und $z = |EF|$. Zu zeigen ist $x = y = z$. Wir zeigen nur $x = y$. Da die Winkel bei A und B im Dreieck $\triangle ABD$ gleich 30^0 sind, folgt $|BD| = |AD| = \frac{c}{\sqrt{3}}$. Ebenso hat man $|BE| = |CE| = \frac{a}{\sqrt{3}}$ und $|CF| = |AF| = \frac{b}{\sqrt{3}}$. Wegen $\measuredangle DAF = \alpha + 60^0$ folgt aus dem Cosinussatz angewandt auf das Dreieck $\triangle ADF$, dass $x^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2bc}{3}\cos(\alpha + 60^0)$ gilt. Wegen $2\cos(\alpha + 60^0) = \cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha$ ergibt sich $x^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{bc}{3}\cos\alpha + \frac{bc}{\sqrt{3}}\sin\alpha$. (Ist α größer als 120^0, dann muss man die Gleichung $\cos(360^0 - \varphi) = \cos\varphi$ beachten.)



Ganz analog erhält man die Gleichung $y^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{ac}{3}\cos\beta + \frac{ac}{\sqrt{3}}\sin\beta$. Es bleibt nur noch zu überprüfen, dass $y = x$ gilt.

Nach Hilfssatz C gilt $a^2 - ac\cos\beta = b^2 - bc\cos\alpha$. Weiters gilt $\sqrt{3}ac\sin\beta = \sqrt{3}bc\sin\alpha$ nach dem Sinussatz. Wir erhalten $a^2 - ac\cos\beta + \sqrt{3}ac\sin\beta = b^2 - bc\cos\alpha + \sqrt{3}bc\sin\alpha$ durch Addition dieser Gleichungen. Daraus ergibt sich $y^2 = x^2$ und somit auch $y = x$. $\square$

Bemerkung: Satz 56 gilt auch, wenn man die drei gleichschenkeligen Dreiecke nicht außen, sondern innen auf die drei Dreieckseiten aufsetzt.

Für den nächsten Satz, den Satz von Morley, zeigen wir zwei Hilfssätze.

Hilfssatz D: *In jedem Dreieck gilt* $\sin^2\gamma = \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$.

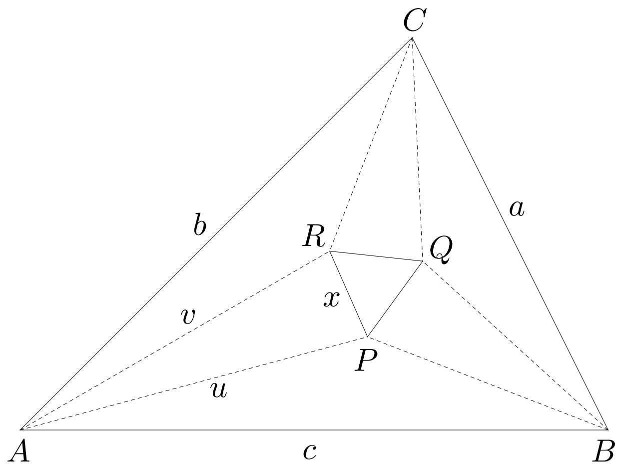
Beweis: Ist $q = \frac{abc}{2F}$, so folgen $a = q\sin\alpha$, $b = q\sin\beta$ und $c = q\sin\gamma$ aus dem Sinussatz. Man setzt das in den Cosinussatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ ein und kürzt durch q^2. $\square$

Hilfssatz E: *Es gilt* $\sin 3\psi = 4\sin\psi\sin(60^0 + \psi)\sin(60^0 - \psi)$.

Beweis: Wegen $\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$ gilt $\sin(60^0 + \psi) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\psi + \frac{1}{2}\sin\psi$ und $\sin(60^0 - \psi) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\psi - \frac{1}{2}\sin\psi$ nach dem Summensatz für den Sinus. Daraus ergibt sich dann $4\sin\psi\sin(60^0 + \psi)\sin(60^0 - \psi) = 3\sin\psi\cos^2\psi - \sin^3\psi$.

Ebenso aus den Summensätzen folgt $\sin 2\psi = 2\sin\psi\cos\psi$ und $\cos 2\psi = \cos^2\psi - \sin^2\psi$, und damit $\sin 3\psi = \sin(2\psi + \psi) = \sin 2\psi\cos\psi + \cos 2\psi\sin\psi = 3\sin\psi\cos^2\psi - \sin^3\psi$. $\square$

Satz 57 (Satz von Morley) *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck, dessen Winkel mit α, β und γ bezeichnet werden. Ins Innere dieses Dreiecks werden folgende drei Dreiecke gezeichnet: Über der Seite $\overline{AB}$ als Basis wird ein Dreieck mit Winkel $\frac{\alpha}{3}$ bei A und $\frac{\beta}{3}$ bei B errichtet. Sei P die Spitze dieses Dreiecks. Über der Seite $\overline{BC}$ als Basis wird ein Dreieck mit Winkel $\frac{\beta}{3}$ bei B und $\frac{\gamma}{3}$ bei C errichtet. Sei Q die Spitze dieses Dreiecks. Über der Seite $\overline{CA}$ als Basis wird ein Dreieck mit Winkel $\frac{\gamma}{3}$ bei C und $\frac{\alpha}{3}$ bei A errichtet. Sei R die Spitze dieses Dreiecks. Das Dreieck $\triangle PQR$ ist dann gleichseitig.*



Beweis: Es sei $x = |PR|$, $u = |AP|$ und $v = |AR|$. Insbesondere ist x die Länge der Seite $\overline{PR}$ des Dreiecks $\triangle\, PQR$, von dem gezeigt werden soll, dass es gleichseitig ist. Sei $\mu = \frac{\alpha}{3}$, $\nu = \frac{\beta}{3}$ und $\sigma = \frac{\gamma}{3}$. Weiters sei $\varphi = \measuredangle APB$. Da μ, ν und φ die Winkel im Dreieck $\triangle\, APB$ sind, gilt $\mu + \nu + \varphi = 180^0$. Wegen $\mu + \nu + \sigma = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = 60^0$ erhält man $\varphi = 120^0 + \sigma$. Daraus ergibt sich dann $\sin\varphi = \sin(180^0 - \varphi) = \sin(60^0 - \sigma)$. Der Sinussatz angewendet auf das Dreieck $\triangle\, APB$ liefert $\frac{u}{\sin\nu} = \frac{c}{\sin\varphi}$ oder $u = \frac{c\sin\nu}{\sin(60^0-\sigma)}$. Ist r der Umkreisradius, dann gilt $c = 2r\sin\gamma$ wieder nach dem Sinussatz. Damit ergibt sich $u = 2r\frac{\sin\gamma\sin\nu}{\sin(60^0-\sigma)}$ und aus Hilfssatz E erhält man $\sin\gamma = \sin 3\sigma = 4\sin\sigma\sin(60^0+\sigma)\sin(60^0-\sigma)$. Setzt man das ein, so hat man $u = 8r\sin\sigma\sin(60^0+\sigma)\sin\nu$. Ganz analog erhält man $v = 8r\sin\nu\sin(60^0+\nu)\sin\sigma$. Der Cosinussatz angewendet auf das Dreieck $\triangle\, APR$ ergibt $x^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos\mu$, also $x^2 = 64r^2\sin^2\nu\sin^2\sigma\big(\sin^2(60^0+\sigma)+\sin^2(60^0+\nu)-2\sin(60^0+\sigma)\sin(60^0+\nu)\cos\mu\big)$. Da sich $60^0+\sigma$, $60^0+\nu$ und μ zu 180^0 addieren und somit die Winkel eines Dreiecks sind, folgt $\sin^2(60^0+\sigma)+\sin^2(60^0+\nu)-2\sin(60^0+\sigma)\sin(60^0+\nu)\cos\mu = \sin^2\mu$ aus Hilfssatz D. Damit ist $x^2 = 64r^2\sin^2\nu\sin^2\sigma\sin^2\mu$ gezeigt, das heißt $x = 8r\sin\nu\sin\sigma\sin\mu$. Die Längen der anderen Seiten des Dreiecks $\triangle\, PQR$ erhält man durch dieselbe Rechnung, wobei aber a, b und c ihre Plätze vertauschen und ebenso ν, σ und μ. Dadurch ändert sich jedoch das Ergebnis nicht. Das zeigt, dass alle drei Seiten des Dreiecks $\triangle\, PQR$ gleich x sind. $\square$

Bemerkung: Satz 57 gilt auch, wenn die Dreiecke außen sitzen, wobei der Winkel $\frac{\alpha}{3}$ durch $60^0 - \frac{\alpha}{3}$, der Winkel $\frac{\beta}{3}$ durch $60^0 - \frac{\beta}{3}$ und der Winkel $\frac{\gamma}{3}$ durch $60^0 - \frac{\gamma}{3}$ ersetzt wird.

4. Komplexe Zahlen

Rechnet man mit reellen Zahlen, dann hat man das Problem, dass nicht jedes Polynom eine Nullstelle hat. Das Polynom $x^2 + 1$ hat zum Beispiel keine. Um dieses Problem zu beseitigen, führt man die komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \{x + yi : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ ein. Wir fassen i einfach als neues Symbol auf. Es heißt imaginäre Einheit. Es wird festgelegt, dass $i^2 = -1$ gilt. Bezeichnet man die komplexe Zahl $x + yi$ mit z, dann nennt man x den Realteil von z und y den Imaginärteil von z.

Die Addition zweier komplexer Zahlen ist wie für Vektoren definiert

$$(x + yi) + (p + qi) = x + p + (y + q)i$$

Die Multiplikation wird in naheliegender Weise definiert, wobei man $i^2 = -1$ verwendet

$$(x + yi)(p + qi) = xp + xqi + ypi + yqi^2 = xp - yq + (xq + yp)i$$

Zu jeder komplexen Zahl $x + yi \neq 0$ existiert die inverse Zahl bezüglich der Multiplikation

$$\tfrac{1}{x+yi} = \tfrac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)} = \tfrac{x-yi}{x^2-xyi+xyi-y^2i^2} = \tfrac{x-yi}{x^2+y^2} = \tfrac{x}{x^2+y^2} + \tfrac{-y}{x^2+y^2}i$$

Man erhält sie, indem man den Bruch $\frac{1}{x+yi}$ mit $x - yi$ erweitert.

Man prüft leicht nach, dass die Addition und die Multiplikation komplexer Zahlen assoziativ und kommutativ sind und dass das Distributivgesetz gilt. Man kann also mit komplexen Zahlen genauso rechnen wie in allen anderen Zahlenbereichen. Die additive Inverse zur komplexen Zahl $x + yi$ ist $-x - yi$. Die multiplikative Inverse zur komplexen Zahl $x + yi$ ist die oben berechnete Zahl $\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{-y}{x^2+y^2}i$. Somit bildet die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen mit der Addition und der Multiplikation einen Körper.

Bezeichnet man die komplexe Zahl $x+yi$ mit z, dann nennt man $x-yi$ die zu z konjugiert komplexe Zahl, die man mit $\overline{z}$ bezeichnet. Den Betrag $|z|$ der komplexen Zahl z definiert man durch $\sqrt{x^2 + y^2}$. Das entspricht der Länge des Vektors $\binom{x}{y}$.

Satz 58: *Aus jeder komplexen Zahl $p + qi$ lässt sich die Wurzel ziehen. Ist die Zahl reell, das heißt $q = 0$, dann sind $\pm\sqrt{p}$ im Fall $p \geq 0$ und $\pm\sqrt{-p}\,i$ im Fall $p < 0$ Wurzeln der Zahl $p + qi$. Ist $q \neq 0$, dann sind $x + yi$ und $-x - yi$ Wurzeln der Zahl $p + qi$, wobei $x = \sqrt{\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + q^2}}$ und $y = \frac{q}{2x}$ zu setzen sind.*

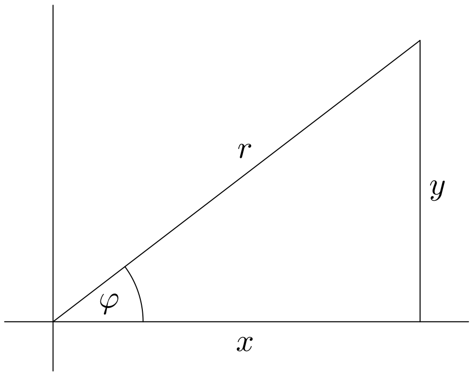
Beweis: Ist $q = 0$ und $p \geq 0$, dann sind $\pm\sqrt{p}$ Wurzeln von p, da $(\pm\sqrt{p})^2 = p$ gilt. Ist $q = 0$ und $p < 0$, dann sind $\pm\sqrt{-p}\,i$ Wurzeln von p, da $(\pm\sqrt{-p}\,i)^2 = -p\,i^2 = p$ gilt.
Wir nehmen jetzt $q \neq 0$ an und berechnen die Wurzel aus $p + qi$, das heißt wir lösen die Gleichung $(x + yi)^2 = p + qi$. Es folgt $x^2 - y^2 + 2xyi = p + qi$. Diese Gleichung gilt genau dann, wenn die auf den beiden Seiten der Gleichung stehenden komplexen Zahlen gleichen Real- und gleichen Imaginärteil haben. Es muss also $x^2 - y^2 = p$ und $2xy = q$ gelten. Wir quadrieren die beiden Gleichungen und addieren sie dann. Das ergibt $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = p^2 + q^2$. Zieht man die Wurzel, dann hat man $x^2 + y^2 = \sqrt{p^2 + q^2}$. Addiert man die Gleichung $x^2 - y^2 = p$, so erhält man $2x^2 = p + \sqrt{p^2 + q^2}$. Damit ist $x = \pm\sqrt{\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + q^2}}$ bereits berechnet. Wegen $q \neq 0$ gilt $-p \leq |p| < \sqrt{p^2 + q^2}$, woraus $\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + q^2} > 0$ und somit auch $x \neq 0$ folgt.
Für x haben wir zwei Lösungen erhalten, die sich nur durch das Vorzeichen voneinder unterscheiden. Das jeweils zugehörige y ergibt sich aus der Gleichung $2xy = q$. Wählt man x als die positive Lösung und berechnet damit $y = \frac{q}{2x}$, dann sind $x + yi$ und $-x - yi$ die Wurzeln der Zahl $p + qi$. □

Beispiel: Um die Wurzel aus $3 - 4i$ zu ziehen, können wir die Gleichung $x^2 - y^2 + 2xyi = 3 - 4i$, das heißt $x^2 - y^2 = 3$ und $2xy = -4$, lösen oder in die Formeln aus Satz 58 einsetzen. Wir erhalten $x^2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{9 + 16} = 4$, also $x = 2$, und $y = \frac{-4}{2x} = -1$. Die Wurzeln aus $3 - 4i$ sind daher $2 - i$ und $-2 + i$.

Man kann ein viel stärkeres Resultat zeigen als Satz 58. Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass jedes Polynom mit komplexen Koeffizienten eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ besitzt.

5. Polarkoordinaten

In der Ebene legt man einen Punkt P üblicherweise durch seine kartesischen Koordinaten x und y fest. Man kann den Punkt P aber auch dadurch festlegen, dass man seinen Abstand r vom Nullpunkt angibt und den Winkel φ, den man erhält, wenn man von der positiven x-Achse im Gegenuhrzeigersinn bis zum Ortsvektor des Punktes P wandert. Die Koordinaten des Punktes sind dann r und φ. Man nennt sie Polarkoordinaten. Da die Punkte $(0, 0)$, $(x, 0)$ und (x, y) die Ecken eines rechtwinkeligen Dreiecks bilden, erhalten wir $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$. Diese Formeln geben den Zusammenhang zwischen kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten an. Eine Ausnahme bildet der Punkt $(0, 0)$. Für diesen kann man natürlich keinen Winkel φ festlegen.



Man kann komplexe Zahlen $x + iy$ graphisch als Punkte (x, y) im Koordinatensystem darstellen. Die Addition der komplexen Zahlen entspricht dann der Addition der zugehörigen Ortsvektoren. Um auch die Multiplikation geometrisch zu deuten, führen wir die oben beschriebene Polarkoordinatendarstellung für komplexe Zahlen ein.

Dazu sei $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ wieder der Abstand des Punktes (x, y) vom Nullpunkt (der Betrag der komplexen Zahl $x + iy$) und φ wieder der Winkel zwischen der positiven x-Achse und dem Ortsvektor zum Punkt (x, y). Dieser Winkel φ wird das Argument der komplexen Zahl $z = x + iy$ genannt und mit $\arg z$ bezeichnet. Es gilt dann $x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Es ist nützlich, eine Kurzschreibweise für den Ausdruck in der Klammer einzuführen.

Für einen Winkel α definieren wir die komplexe Zahl $e^{i\alpha}$ durch

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \qquad \text{(Eulersche Formel)}$$

Dann lässt sich die Polarkoordinatendarstellung schreiben als $x + iy = re^{i\varphi}$. Warum man die komplexe Zahl $\cos\alpha + i\sin\alpha$ mit $e^{i\alpha}$ bezeichnet, wird aus dem nächsten Satz klar. Es gelten Rechenregeln wie für die Exponentialfunktion.

Satz 59: *Für Winkel α und β gilt $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$.*

Beweis: Das folgt aus den Summensätzen für die trigonometrischen Funktionen. Es gilt $e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i\sin\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\sin\beta$ und $e^{i\alpha}e^{i\beta} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos\alpha\cos\beta + i\sin\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\sin\beta$. Daraus erkennt man die gesuchte Gleichung. □

Nun kann man auch die Multiplikation von zwei komplexen Zahlen geometrisch deuten. Wir schreiben sie in Polarkoordinatendarstellung als $r_1e^{i\varphi_1}$ und $r_2e^{i\varphi_2}$. Mit Hilfe von Satz 59 folgt $r_1e^{i\varphi_1} \cdot r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$. Das Produkt zweier komplexer Zahlen erhält man also, indem man die Beträge der beiden Zahlen multipliziert und die Winkel addiert.

Daraus ergibt sich auch, dass $\sqrt{r}e^{i\varphi/2}$ und $-\sqrt{r}e^{i\varphi/2}$ die beiden Wurzeln der komplexen Zahl $re^{i\varphi}$ sind. Die Wurzel (abgesehen vom Vorzeichen) erhält man, indem man die Wurzel aus dem Betrag zieht und den Winkel halbiert.

Das Rechnen mit trigonometrischen Funktionen erweist sich manchmal als schwierig. Mit Hilfe der Eulerformel können wir den Sinus und den Cosinus durch die komplexe Exponentialfunktion ausdrücken. Auf diese Weise lassen sich Produkte und Potenzen von trigonometrischen Funktionen in Summen umwandeln.

Die Eulerformel besagt $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Setzt man $-\alpha$ statt α ein, so hat man $e^{-i\alpha} = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha) = \cos\alpha - i\sin\alpha$. Durch Addition dieser beiden Gleichungen ergibt sich $e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2\cos\alpha$ und daraus folgt

$$\cos\alpha = \tfrac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$$

Ebenso erhalten wir $e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i\sin\alpha$ und daraus

$$\sin\alpha = \tfrac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$$

Die folgenden Beispiele zeigen, wie man diese Darstellung von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ verwenden kann, um Potenzen und Produkte von trigonometrischen Funktionen auszurechnen.

Beispiel: Es soll $\sin^2\alpha\sin 2\alpha$ als Summe von trigonometrischen Funktionen geschrieben werden. Durch Einsetzen obiger Formeln erhält man $\sin^2\alpha\sin 2\alpha = \frac{e^{2i\alpha}-2+e^{-2i\alpha}}{-4}\,\frac{e^{2i\alpha}-e^{-2i\alpha}}{2i}$. Multiplikation dieser beiden Brüche ergibt $\frac{e^{4i\alpha}-2e^{2i\alpha}+2e^{-2i\alpha}-e^{-4i\alpha}}{-8i}$. Diesen Bruch können wir zerteilen, sodass wir wieder trigonometrische Funktionen einsetzen können. Wir erhalten $\frac{e^{4i\alpha}-e^{-4i\alpha}}{-8i} + \frac{2e^{2i\alpha}-2e^{-2i\alpha}}{8i} = -\frac{1}{4}\sin 4\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha$. Das ist die gewünschte Summe.

Beispiel: Wir zeigen $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ für die Winkel eines Dreiecks, also unter der Bedingung $\alpha+\beta+\gamma = 180^0$. Wir beginnen mit $4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ und setzen $\sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})$ ein. Durch Ausmultiplizieren ergibt sich

$$\begin{aligned}-\tfrac{1}{2i}(&e^{i(\alpha+\beta+\gamma)} - e^{i(\alpha+\beta-\gamma)} - e^{i(\alpha-\beta+\gamma)} + e^{i(\alpha-\beta-\gamma)}\\ &- e^{i(-\alpha+\beta+\gamma)} + e^{i(-\alpha+\beta-\gamma)} + e^{i(-\alpha-\beta+\gamma)} - e^{i(-\alpha-\beta-\gamma)})\end{aligned}$$

Fasst man diese Ausdrücke entsprechend zusammen, so erhält man

$$-\sin(\alpha+\beta+\gamma) + \sin(\alpha+\beta-\gamma) + \sin(\alpha-\beta+\gamma) + \sin(-\alpha+\beta+\gamma)$$

Wegen $\alpha+\beta+\gamma = 180^0$ und $\sin(180^0-\varphi) = \sin\varphi$ ergibt sich $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma$.

6. Beweisen mit Hilfe komplexer Zahlen

Wir beweisen weitere Eigenschaften komplexer Zahlen, und zwar für die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$, für den Betrag $|z|$ und das Argument $\arg z$ einer komplexen Zahl z.

Satz 60: *Seien w und z in $\mathbb{C}$. Dann gilt $|z|^2 = z\overline{z}$, $\overline{\overline{z}} = z$, $|\overline{z}| = |z|$ und $z+\overline{z} \le 2|z|$. Weiters gilt $\overline{w+z} = \overline{w}+\overline{z}$, $\overline{w-z} = \overline{w}-\overline{z}$ und $\overline{w\cdot z} = \overline{w}\cdot\overline{z}$. Ist $q = \frac{w}{z}$, dann gilt $\overline{q} = \frac{\overline{w}}{\overline{z}}$.*

Beweis: Sei $w = p+qi$ und $z = x+yi$. Dann haben wir $\overline{w} = p-qi$ und $\overline{z} = x-yi$.
Es folgt $|z|^2 = x^2+y^2 = x^2-y^2i^2 = (x+yi)(x-yi) = z\overline{z}$ und $\overline{\overline{z}} = x-(-y)i = x+yi = z$. Ebenso folgt $|\overline{z}|^2 = x^2+(-y)^2 = x^2+y^2 = |z|^2$, woraus wir $|\overline{z}| = |z|$ erhalten. Schließlich folgt auch $z+\overline{z} = x+yi+x-yi = 2x \le 2|x| \le 2\sqrt{x^2+y^2} = 2|z|$.
Wegen $w+z = (p+x)+(q+y)i$ erhalten wir $\overline{w+z} = (p+x)-(q+y)i = p-qi+x-yi$. Man sieht, dass $\overline{w+z} = \overline{w}+\overline{z}$ gilt. Ebenso ergibt sich $\overline{w-z} = \overline{w}-\overline{z}$.
Es gilt $w\cdot z = px-qy+(py+qx)i$ und $\overline{w}\cdot\overline{z} = px-qy+(-py-qx)i$. Es folgt $\overline{w\cdot z} = \overline{w}\cdot\overline{z}$. Ist $q = \frac{w}{z}$, dann gilt $q\cdot z = w$, woraus $\overline{q}\cdot\overline{z} = \overline{w}$ und daher auch $\overline{q} = \frac{\overline{w}}{\overline{z}}$ folgt. □

Der nächste Satz behandelt den Betrag eines Produkts und einer Summe. Wir erhalten eine Dreiecksungleichung für koplexe Zahlen.

Satz 61: *Seien w und z in $\mathbb{C}$. Dann gilt $|w\cdot z| = |w|\cdot|z|$ und $|w+z| \le |w|+|z|$.*

Beweis: Wir berechnen $|w\cdot z|^2 = w\cdot z\cdot\overline{w\cdot z} = w\cdot z\cdot\overline{w}\cdot\overline{z} = w\cdot\overline{w}\cdot z\cdot\overline{z} = |w|^2\cdot|z|^2$ mit Hilfe der Resultate aus Satz 60. Damit ist $|w\cdot z| = |w|\cdot|z|$ gezeigt.
Ähnlich gehen wir vor, um die Dreiecksungleichung zu beweisen. Es gilt
$|w+z|^2 = (w+z)(\overline{w+z}) = (w+z)(\overline{w}+\overline{z}) = w\overline{w}+w\overline{z}+z\overline{w}+z\overline{z} = |w|^2+w\overline{z}+z\overline{w}+|z|^2$
Setzt man $u = w\overline{z}$, dann hat man $\overline{u} = \overline{w}\,\overline{\overline{z}} = \overline{w}\,z$. Wegen $u+\overline{u} \le 2|u|$ ergibt sich $w\overline{z}+z\overline{w} \le 2|w\overline{z}| = 2|w|\cdot|\overline{z}| = 2|w|\cdot|z|$. Damit erhalten wir

$$|w+z|^2 = |w|^2+w\overline{z}+z\overline{w}+|z|^2 \le |w|^2+2|w|\cdot|z|+|z|^2 = (|w|+|z|)^2$$

Somit ist $|w+z| \le |w|+|z|$ gezeigt. □

Im folgenden Satz ist zu beachten, dass ein Winkel, der nicht im Bereich von 0^0 bis 360^0 liegt, mit dem entsprechenden Winkel in diesem Bereich zu identifizieren ist.

Satz 62: *Für w und z in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ gilt* $\arg w\cdot z=\arg w+\arg z$ *und* $\arg\frac{w}{z}=\arg w-\arg z$.

Beweis: Das sieht man sofort aus der Polarkoordinatendarstellung. Gilt $w=re^{i\varphi}$ und $z=se^{i\psi}$, dann folgt $w\cdot z=rse^{i(\varphi+\psi)}$. Wegen $\arg w=\varphi$, $\arg z=\psi$ und $\arg w\cdot z=\varphi+\psi$ ist $\arg w\cdot z=\arg w+\arg z$ gezeigt.
Setzen wir in diese Gleichung $\frac{w}{z}$ anstelle von w ein, so erhalten wir $\arg w=\arg\frac{w}{z}+\arg z$, das heißt $\arg\frac{w}{z}=\arg w-\arg z$. □

Eine komplexe Zahlen $z=x+yi$ kann man als Punkt (x,y) auffassen oder als Vektor $\binom{x}{y}$. Die Addition komplexer Zahlen ist ja dieselbe wie die für Vektoren. Man kann auch die Multiplikation geometrisch deuten und damit Sätze aus der Geometrie beweisen.

Sei $r>0$ und $0^0\le\varphi<360^0$. Sei $v\in\mathbb{C}$. Wir stellen uns v als Punkt in der Ebene vor. Das Produkt $r\cdot v$ ergibt dann den Punkt, den man durch die zentrische Streckung mit dem Faktor r und dem Nullpunkt als Zentrum erhält. Multipliziert man noch mit $e^{i\varphi}$, dann wird der Punkt zusätzlich noch um den Nullpunkt im Gegenuhrzeigersinn um den Winkel φ gedreht. Der Punkt, der der komplexen Zahl $re^{i\varphi}\cdot v$ entspricht, geht somit aus dem ursprünglichen Punkt v durch eine Drehstreckung mit dem Faktor r und dem Drehwinkel φ hervor, die den Nullpunkt als Zentrum hat.

Setzt man $z=re^{i\varphi}$, dann entspricht die Multiplikation mit z einer Drehstreckung mit Faktor $|z|$ und Drehwinkel $\arg z$, deren Zentrum der Nullpunkt ist.

Satz 63: *Sei $r>0$ und $0^0\le\varphi<360^0$. Seien u und v in $\mathbb{C}$. Sei $w=u+(v-u)\cdot re^{i\varphi}$. Dann entspricht w dem Punkt, der durch eine Drehstreckung mit dem Punkt u als Zentrum aus dem Punkt v hervorgeht, wobei der Drehwinkel (im Gegenuhrzeigersinn) gleich φ und der Streckungsfaktor gleich r ist.*

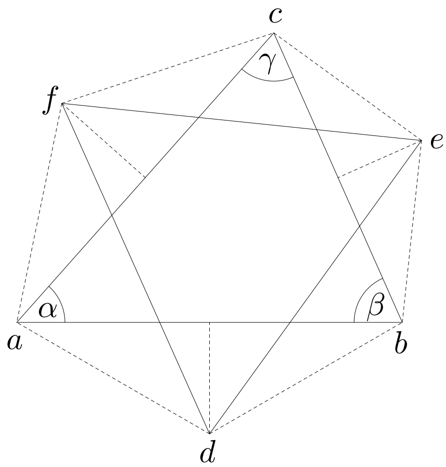
Beweis: Die Abbildung $v\mapsto u+(v-u)\cdot re^{i\varphi}$ ist die Hintereinanderausführung folgender drei Abbildungen:
(a) Subtraktion von u: verschiebt den Punkt u in den Punkt 0
(b) Multiplikation mit $re^{i\varphi}$: Drehstreckung mit dem Nullpunkt als Zentrum
(c) Addition von u: verschiebt den Punkt 0 in den Punkt u zurück
Die Zusammensetzung ergibt eine Drehstreckung mit u als Zentrum, wobei der Drehwinkel gleich φ und der Streckungsfaktor gleich r ist. □

Auf die Strecke vom Punkt $(0,0)$ zum Punkt $(1,0)$ als Basis setzen wir ein gleichschenkeliges Dreieck mit Basiswinkel φ. Die Spitze W hat die Koordinaten $(\frac{1}{2},\frac{\tan\varphi}{2})$. Dieser Punkt entspricht der komplexen Zahl $w=\frac{1}{2}+i\frac{\tan\varphi}{2}$. Den Punkt W erhält man aus dem Punkt $(1,0)$ durch eine Drehstreckung mit Zentrum $(0,0)$. Gedreht wird um den Winkel φ, gestreckt (oder gestaucht) wird mit dem Faktor $|w|=\frac{1}{2}\sqrt{1+\tan^2\varphi}$. Diese Drehstreckung entspricht der Multiplikation mit der komplexen Zahl w.

Seien u und v in $\mathbb{C}$. Auf die Strecke von u nach v als Basis setzen wir ein gleichschenkeliges Dreieck mit Basiswinkel φ. Wie oben geht der Punkt v durch eine Drehstreckung, die der Multiplikation mit der komplexen Zahl w entspricht, in die Spitze des Dreiecks über, wobei jetzt u das Zentrum der Drehstreckung ist. Diese Drehstreckung ist $v\mapsto u+(v-u)\cdot w$ nach Satz 63. Wir stehen im Punkt u und schauen zum Punkt v. Ist $w=\frac{1}{2}+i\frac{\tan\varphi}{2}$, dann liegt das aufgesetzte Dreieck links. Ist $w=\frac{1}{2}+i\frac{\tan(-\varphi)}{2}=\frac{1}{2}-i\frac{\tan\varphi}{2}$, dann liegt es rechts.

Damit können wir Sätze aus der Geometrie beweisen. Diese Sätze handeln von gleichschenkeligen Dreiecken, die auf den Seiten eines vorgegebenen Dreiecks aufgesetzt werden. Insbesondere erhalten wir einen einfachen Beweis für den Satz von Napoleon.

Satz 64 (Satz von Napoleon) *Setzt man außen auf die drei Seiten eines beliebigen Dreiecks gleichschenkelige Dreiecke mit Basiswinkel* 30^0*, dann bilden die Spitzen dieser drei Dreiecke ein gleichseitiges Dreieck.*



Beweis: Wir fassen die Eckpunkte des vorgegebenen Dreiecks als komplexe Zahlen a, b und c auf. Die Spitzen der über den Dreieckseiten errichteten gleichschenkeligen Dreiecke entsprechen ebenfalls komplexen Zahlen, die wir mit d, e und f bezeichnen. Wegen $\tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ gilt nach obigen Überlegungen:

$$d = a + (b-a)(\tfrac{1}{2} - i\tfrac{1}{2\sqrt{3}}) = a(\tfrac{1}{2} + i\tfrac{1}{2\sqrt{3}}) + b(\tfrac{1}{2} - i\tfrac{1}{2\sqrt{3}})$$

$$e = b + (c-b)(\tfrac{1}{2} - i\tfrac{1}{2\sqrt{3}}) = b(\tfrac{1}{2} + i\tfrac{1}{2\sqrt{3}}) + c(\tfrac{1}{2} - i\tfrac{1}{2\sqrt{3}})$$

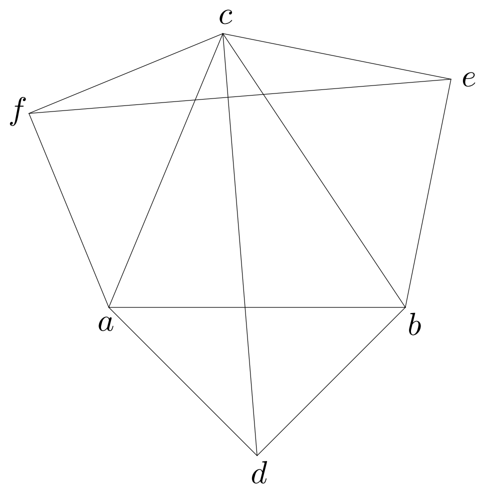
$$f = a + (c-a)(\tfrac{1}{2} + i\tfrac{1}{2\sqrt{3}}) = c(\tfrac{1}{2} + i\tfrac{1}{2\sqrt{3}}) + a(\tfrac{1}{2} - i\tfrac{1}{2\sqrt{3}})$$

Daraus berechnen wir die Differenzen

$$d - f = a \cdot i\tfrac{1}{\sqrt{3}} + b(\tfrac{1}{2} - i\tfrac{1}{2\sqrt{3}}) - c(\tfrac{1}{2} + i\tfrac{1}{2\sqrt{3}}) \quad \text{und} \quad e - f = -a(\tfrac{1}{2} - i\tfrac{1}{2\sqrt{3}}) + b(\tfrac{1}{2} + i\tfrac{1}{2\sqrt{3}}) - c \cdot i\tfrac{1}{\sqrt{3}}$$

Es folgt $e - f = (d-f)(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$, das heißt $e = f + (d-f)(\frac{1}{2} + i\frac{\tan 60^0}{2})$. Somit ist e der Punkt, den man erhält, wenn man den Punkt d um den Punkt f um 60^0 dreht, und zwar vom Punkt f aus gesehen nach links (die komplexe Zahl $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ hat Betrag 1, daher keine Streckung). Damit ist bewiesen, dass das Dreieck, dessen Eckpunkte den komplexen Zahlen d, e und f entsprechen, gleichseitig ist. □

Satz 65: *Über jeder Seite eines beliebigen Dreiecks wird außen ein gleichschenkeliges Dreieck mit Basiswinkel* 45^0 *errichtet. Wir zeichnen die Strecke zwischen den Spitzen von zweien dieser Dreiecke, und die Strecke von der Spitze des dritten Dreiecks zum gegenüberliegenden Eckpunkt des vorgegebenen Dreiecks. Diese beiden Strecken sind gleich lang und stehen senkrecht aufeinander.*



Beweis: Wir fassen die Eckpunkte des vorgegebenen Dreiecks als komplexe Zahlen a, b und c auf. Die Spitzen der über den Dreieckseiten errichteten gleichschenkeligen Dreiecke entsprechen komplexen Zahlen, die wir mit d, e und f bezeichnen. Wegen $\tan 45^0 = 1$ erhalten wir wie im vorherigen Beweis

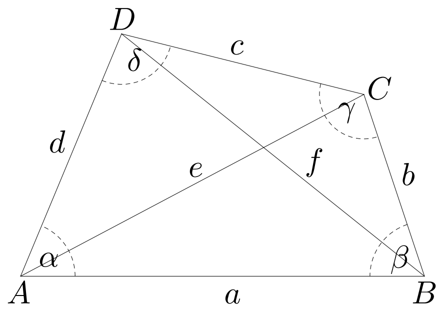
$$d = a + (b-a)(\tfrac{1}{2} - i\tfrac{1}{2}) = a(\tfrac{1}{2} + i\tfrac{1}{2}) + b(\tfrac{1}{2} - i\tfrac{1}{2})$$

$$e = b + (c-b)(\tfrac{1}{2} - i\tfrac{1}{2}) = b(\tfrac{1}{2} + i\tfrac{1}{2}) + c(\tfrac{1}{2} - i\tfrac{1}{2})$$

$$f = a + (c-a)(\tfrac{1}{2} + i\tfrac{1}{2}) = c(\tfrac{1}{2} + i\tfrac{1}{2}) + a(\tfrac{1}{2} - i\tfrac{1}{2})$$

Daraus ergibt sich $d - c = a(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}) + b(\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}) - c$ und $e - f = -a(\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}) + b(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}) - ci$. Man rechnet $e - f = (d-c)i$ nach. Das bedeutet: Dreht man den Vektor, der von c nach d führt, um 90^0 im Gegenuhrzeigersinn, dann erhält man den Vektor von f nach e. Damit ist gezeigt, dass die beiden Vektoren gleich lang sind und aufeinander senkrecht stehen. □

In den vorhergehenden Beweisen wurde die Multiplikation mit einer komplexen Zahl als Drehstreckung gedeutet. Wir beweisen noch einen Satz über Vierecke, wobei jetzt die Eigenschaften des Betrags und des Arguments eine wesentliche Rolle spielen.



Für ein Viereck führen wir folgende Standardbezeichnungen ein. Die Eckpunkte bezeichnen wir mit den Großbuchstaben A, B, C und D. Den Winkel bei jedem Eckpunkt bezeichnen wir mit dem entsprechenden griechischen Buchstaben α, β, γ und δ. Weiters seien $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$ und $d = |DA|$ die Längen der Viereckseiten, und $e = |AC|$ und $f = |BD|$ die Längen der beiden Diagonalen.

Ein Viereck heißt konvex, wenn die Diagonalen innerhalb des Vierecks liegen, das heißt A und C liegen auf verschiedenen Seiten der Diagonale $\overline{BD}$, und B und D auf verschiedenen Seiten der Diagonale $\overline{AC}$. Die Winkelsumme in einem konvexen Viereck beträgt 360^0, da man es aus zwei Dreiecken zusammensetzen kann. Ein konvexes Viereck heißt Sehnenviereck, wenn es einen Umkreis hat. Es gilt dann

Satz 66: *Ein konvexes Viereck $ABCD$ mit Winkel α, β, γ und δ ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn $\alpha + \gamma = 180^0$ gilt. Es gilt dann auch $\beta + \delta = 180^0$.*

Beweis: Sei k der Umkreis des Dreiecks $\triangle ABD$. Es gilt $\measuredangle BAD = \alpha$. Weiters liegen A und C auf verschiedenen Seiten der Sehne $\overline{BD}$ des Kreises k. Das Viereck ist ein Sehnenviereck genau dann, wenn C auf k liegt. Nach Satz 33 ist das äquivalent dazu, dass $\measuredangle BCD = 180^0 - \alpha$ gilt, das heißt $\alpha + \gamma = 180^0$. Es gilt dann auch $\beta + \delta = 180^0$, da die Winkelsumme in einem konvexen Viereck 360^0 beträgt. □

Mit Hilfe komplexer Zahlen beweisen wir einen Cosinussatz für Vierecke. Als Folgerung daraus erhalten wir dann den Satz von Ptolemäus.

Satz 67: *Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck. Mit den oben eingeführten Standardbezeichnungen gilt dann $e^2f^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(\alpha + \gamma)$.*

Beweis: Wir fassen die Eckpunkte A, B, C und D des Vierecks als komplexe Zahlen u, v, w und z auf. Die Differenzen $v - u$, $v - w$, $z - w$ und $z - u$ entsprechen Vektoren, die auf den Seiten des Vierecks liegen. Die Längen der Seiten und Diagonalen sind dann $a = |v - u|$, $b = |v - w|$, $c = |z - w|$, $d = |z - u|$, $e = |w - u|$ und $f = |v - z|$.
Sei $t = (w - u)(v - z)$, $p = (v - u)(z - w)$ und $q = (v - w)(z - u)$. Dann gilt $t = q - p$, wie man leicht nachrechnet. Die komplexen Zahlen p, q und t entsprechen Vektoren, die auf den Seiten eines Dreiecks liegen. Sei φ der Winkel zwischen den Vektoren p und q. Der Cosinussatz für dieses Dreieck ergibt dann $|t|^2 = |p|^2 + |q|^2 - 2|p| \cdot |q|\cos\varphi$. Setzen wir für t, p und q ein, so ergibt sich $e^2f^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos\varphi$ mit Hilfe von Satz 61.
Wir erhalten $\arg q - \arg p = \arg(v - w) + \arg(z - u) - \arg(v - u) - \arg(z - w)$ mit Hilfe von Satz 62. Weiters gilt $\alpha = \arg(z - u) - \arg(v - u)$ und $\gamma = \arg(v - w) - \arg(z - w)$. Es folgt $\arg q - \arg p = \alpha + \gamma$. Bei diesen Rechnungen muss man Winkel, die sich um 360^0 unterscheiden, identifizieren. Da $\alpha + \gamma$ ohnehin zwischen 0^0 und 360^0 liegt, ist der Winkel φ zwischen den Vektoren p und q entweder gleich $\alpha + \gamma$ oder gleich $360^0 - (\alpha + \gamma)$. Da diese beiden Winkel denselben cos haben, können wir $\alpha + \gamma$ für φ einsetzen. Damit ist der Satz bewiesen. □

Satz 68 (Satz von Ptolemäus) *Seien a, b, c und d die Längen der Seiten eines konvexen Vierecks und e und f die Längen der Diagonalen. Dann gilt $ef \leq ac + bd$. Gleichheit gilt genau dann, wenn das Viereck ein Sehnenviereck ist.*

Beweis: Wegen $\cos(\alpha+\gamma) \geq -1$ folgt $e^2f^2 \leq a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd$ aus Satz 67, das heißt $e^2f^2 \leq (ac+bd)^2$ oder $ef \leq ac+bd$. Gleichheit gilt genau dann, wenn $\cos(\alpha+\gamma) = -1$ gilt. Das ist genau dann der Fall, wenn $\alpha+\gamma = 180^0$ gilt, also für ein Sehnenviereck. □

Lineal und Winkelmesser: Die Zahlengerade, auf der jedem Punkt eine reelle Zahl zugeordnet wird, verwenden wir als Lineal, um den Abstand zweier Punkte A und B zu messen. Wir legen die Zahlengerade durch die Punkte A und B und lesen die Koordinaten der beiden Punkte ab. Den orientierten Abstand AB erhalten wir, indem wir die Koordinate von A von der Koordinate von B subtrahieren. Den üblichen, nicht orientierten Abstand erhalten wir, indem wir die kleinere von der größeren Koordinate subtrahieren.

Anstatt reeller Zahlen können wir den Punkten auf der Zahlengerade auch Winkel zuordnen, indem wir Winkel $> 180^0$ und negative Winkel zulassen. Wir wickeln diese Zahlengerade im Gegenuhrzeigersinn um den Einheitskreis herum, sodass 360^0, -360^0 und alle Vielfachen davon mit 0^0 zusammenfallen. Dadurch werden den Punkten auf dem Einheitskreis wie üblich die Winkel von 0^0 bis 360^0 zugeordnet. Die anderen Winkel werden so zugeordnet, dass Winkel, die sich um ein Vielfaches von 360^0 voneinander unterscheiden, demselben Punkt auf dem Einheitskreis entsprechen. Diesen Einheitskreis verwenden wir als Winkelmesser.

Sind A, S und B drei voneinander verschiedene Punkte, dann liegt der Winkel $\measuredangle ASB$ im Bereich von 0^0 bis 180^0. Die Grenzfälle 0^0 und 180^0 treten auf, wenn A, S und B auf einer Gerade liegen.

Um den Winkel $\measuredangle ASB$ zu messen, legen wir den Einheitskreis so auf den Winkel, dass sein Mittelpunkt im Scheitel S liegt. Wenn wir vom Scheitel S ins Winkelfeld schauen, dann liegt ein Schenkel des Winkels links, der andere rechts. Wir lesen am Einheitskreis den Winkel φ ab, der dem Punkt zugeordnet ist, durch den der linke Schenkel geht, und den Winkel ψ, der dem Punkt zugeordnet ist, durch den der rechte Schenkel geht. Der Winkel $\measuredangle ASB$ ist dann gleich $\varphi - \psi$. Er liegt im Bereich von 0^0 bis 180^0, außer der Punkt des Einheitskreises, dem der Winkel 0^0 zugeordnet ist, liegt im Winkelfeld. Dann ist $\varphi - \psi$ negativ. In diesem Fall müssen wir $\varphi + 360^0$ statt φ ablesen. Das entspricht ja demselben Punkt am Einheitskreis. (Oder wir lesen $\psi - 360^0$ statt ψ ab.) So erreichen wir, dass dann $\varphi + 360^0 - \psi$ im Bereich von 0^0 bis 180^0 liegt und gleich ist dem Winkel $\measuredangle ASB$.

Mit dieser Methode könnten wir auch orientierte Winkel einführen, analog zu orientierten Abständen. Wir tun das jedoch nicht, da wir sie nicht brauchen.

Diese Art, Winkel zu messen, ist insbesondere wichtig, wenn Geometrie mit Hilfe komplexer Zahlen betrieben wird. In diesem Fall ist ein Koordinatensystem und damit auch der Einheitskreis vorgegeben. Es soll der Winkel $\measuredangle ASB$ gemessen werden. Seien a, s und b die komplexen Zahlen, die den Punkten A, S und B entsprechen. Wir bilden die Differenzen $a - s$ und $b - s$ und verschieben dadurch den Winkel so, dass sein Scheitel im Mittelpunkt des Einheitskreises (Nullpunkt des Koordinatensystems) liegt. Die komplexen Zahlen $a - s$ und $b - s$ liegen auf den Schenkeln des verschobenen Winkels. Den Punkten auf dem Einheitskreis, durch die diese Schenkel gehen, sind dann die Winkel $\arg(a-s)$ und $\arg(b-s)$ zugeordnet. Wenn $a - s$ auf dem linken Schenkel liegt, dann ist der Winkel $\measuredangle ASB$ gleich $\arg(a-s) - \arg(b-s)$. Wenn $b - s$ auf dem linken Schenkel liegt, dann ist der Winkel $\measuredangle ASB$ gleich $\arg(b-s) - \arg(a-s)$. Sollte ein negativer Winkel auftreten, dann müssen wir wie oben 360^0 addieren.

III. Koordinaten und Vektoren

Wir betreiben Geometrie mit Hilfe der Vektorrechnung. Wir legen in der Ebene ein Koordinatensystem fest und identifizieren sie dadurch mit dem $\mathbb{R}^2$. Die Koordinaten eines Vektors $\mathbf{a}$ im $\mathbb{R}^2$ werden wir immer mit a_1, a_2 bezeichnen, das heißt $\mathbf{a} = \binom{a_1}{a_2}$. Dasselbe gilt natürlich auch für andere Buchstaben anstelle von a. Genauso identifizieren wir den dreidimensionalen Raum mit dem $\mathbb{R}^3$ und bezeichnen die Koordinaten eines Vektors $\mathbf{a}$ im $\mathbb{R}^3$ immer mit a_1, a_2, a_3. Wir schreiben d für die Dimension, das heißt $d = 2$ oder $d = 3$.

Im $\mathbb{R}^d$ sind die Addition von Vektoren und die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl definiert.

1. Inneres Produkt und Vektorprodukt

Das innere Produkt zweier Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ wird definiert durch $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{j=1}^{d} a_j b_j$. Aus dem Satz von Pythagoras folgt, dass durch $\|\mathbf{a}\| := \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}$ die Länge des Vektors $\mathbf{a}$ gegeben ist. Das innere Produkt hat folgende Eigenschaften:

Satz 69: *Für* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *in* $\mathbb{R}^d$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$ *gilt* $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$, $\langle \lambda\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda\mathbf{b} \rangle = \lambda\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, $\langle \mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ *und* $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}+\mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle$. *Weiters gilt* $\|\lambda\mathbf{a}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{a}\|$.

Beweis: Diese Gleichungen folgen direkt aus der Definition des inneren Produkts. □

Satz 70: *Seien* $\mathbf{a}$ *und* $\mathbf{b}$ *zwei Vektoren in* $\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ *und* γ *der von ihnen eingeschlossene Winkel. Dann gilt* $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cos\gamma$.

Beweis: Bilden die beiden Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ zwei Seiten eines Dreiecks, dann bildet $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ die dritte Seite des Dreiecks. Daher sind $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$, $\|\mathbf{a}\|$ und $\|\mathbf{b}\|$ die Längen der Dreieckseiten und γ ist der der Seite $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ gegenüberliegende Winkel. Aus dem Cosinussatz folgt $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cos\gamma$. Das gilt auch für $\gamma = 0^0$ und $\gamma = 180^0$. Wegen $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = \langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ folgt daraus $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cos\gamma$. □

Bemerkung: Für $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ in $\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ folgt aus Satz 70, dass $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$ genau dann gilt, wenn $\cos\gamma = 0$ ist, das heißt wenn die Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ senkrecht aufeinander stehen.

Mit Hilfe von Satz 70 beweisen wir

Satz 71 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung und Dreiecksungleichung) *Für* $\mathbf{a}$ *und* $\mathbf{b}$ *in* $\mathbb{R}^d$ *gilt* $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \le \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|$ *und* $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \le \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$. *Gleichheit gilt nur dann, wenn ein Vektor der Nullvektor ist oder der von den Vektoren eingeschlossene Winkel gleich* 0^0 *ist.*

Beweis: Ist einer der Vektoren der Nullvektor, dann ist leicht nachzuprüfen, dass $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|$ und $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$ gilt. Sei also keiner der Vektoren der Nullvektor.
Sei γ der von den beiden Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ eingeschlossene Winkel. Wegen $\cos\gamma \le 1$ folgt $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \le \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|$ aus Satz 70. Um die zweite Ungleichung zu beweisen, berechnen wir $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 + 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$. Wegen $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \le \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|$ ergibt sich daraus $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 \le \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 + 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| = (\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|)^2$. Damit ist $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \le \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$ gezeigt. In beiden Ungleichungen gilt Gleichheit nur dann, wenn $\cos\gamma = 1$ ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $\gamma = 0^0$ gilt. □

Die Dreiecksungleichung in Satz 71 hängt mit der in Satz 50 zusammen. Seien A, B und C die Ecken eines Dreiecks im $\mathbb{R}^d$. Ist $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$, dann gilt $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$. Satz 71 besagt dann, dass $|AC| \le |AB| + |BC|$ gilt. Das ist die Dreiecksungleichung aus Satz 50. Die Dreiecksungleichung in Satz 61 ist mit der in Satz 71 identisch.

Satz 72: *Seien* $\mathbf{a}$ *und* $\mathbf{b}$ *zwei Vektoren im* $\mathbb{R}^d$. *Sei* F *die Fläche des von* $\mathbf{a}$ *und* $\mathbf{b}$ *aufgespannten Parallelogramms. Dann gilt* $F^2 = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle^2$. *Im* $\mathbb{R}^2$ *gilt* $F = |a_1b_2 - a_2b_1|$.

Beweis: Ist einer der Vektoren der Nullvektor, dann gelten diese Formeln trivialerweise. Sei γ der von den beiden Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ eingeschlossene Winkel. Die Höhe des Parallelogramms auf die Seite der Länge $\|\mathbf{a}\|$ hat die Länge $\|\mathbf{b}\|\sin\gamma$. Für die Fläche erhalten wir daher $F = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\sin\gamma$. Aus Satz 70 folgt $\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = 1 - \frac{\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle^2}{\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2}$. Setzt man das ein, dann ergibt sich $F^2 = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle^2$.

Im $\mathbb{R}^2$ gilt $\|\mathbf{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2$, $\|\mathbf{b}\|^2 = b_1^2 + b_2^2$ und $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = a_1b_1 + a_2b_2$. Damit ergibt sich $F^2 = a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1b_1a_2b_2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2$, das heißt $F = |a_1b_2 - a_2b_1|$. □

Seien $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Das Vektorprodukt wird durch

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

definiert. Daraus ergibt sich sofort

Satz 73: *Für drei Vektoren* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *und* $\mathbf{c}$ *im* $\mathbb{R}^3$ *gilt*

$$\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c}\rangle = a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3.$$

Ausgehend vom Einheitswürfel kann man die Formel $V = abc$ für des Volumen eines Quaders mit Seitenlängen a, b und c genauso herleiten, wie wir es für die Rechtecksfläche getan haben. Daraus erhält man dann die Formel für das Volumen eines Parallelepipeds. Dieses Volumen ist das Produkt einer Grundfläche und der Länge der zugehörigen Höhe. Für einen Quader, dessen Grundfläche ein Parallelogramm ist, erhält man diese Volumsformel, indem man mit der Grundfläche genauso verfährt wie mit dem Parallelogramm in Satz 2. Dann kann man sich überlegen, dass sich das Volumen eines Parallelepipeds nicht ändert, wenn man das Parallelogramm, das die Deckfläche bildet, in Richtung einer seiner Seiten verschiebt. So kommt man schließlich zur oben formulierten Volumsformel für das Parallelepiped. Diese verwenden wir im folgenden Satz.

Satz 74: *Seien* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *und* $\mathbf{c}$ *Vektoren in* $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. *Die Fläche des von den Vektoren* $\mathbf{a}$ *und* $\mathbf{b}$ *aufgespannten Parallelogramms ist dann* $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$. *Wenn die Vektoren* $\mathbf{a}$ *und* $\mathbf{b}$ *nicht parallel liegen, dann ist der Vektor* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *nicht der Nullvektor und steht senkrecht auf die beiden Vektoren* $\mathbf{a}$ *und* $\mathbf{b}$. *Weiters gilt* $V = |\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c}\rangle|$ *für das Volumen* V *des von den Vektoren* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *und* $\mathbf{c}$ *aufgespannten Parallelepipeds.*

Beweis: Sei F die Fläche des von den Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Satz 72 liefert $F^2 = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$. Das ist gleich $(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2$, wie man durch Ausmultiplizieren und Vergleichen leicht erkennt. Damit ist $F = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ gezeigt.

Sind $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ parallel, dann gilt $0 = F = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$, also $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ und $V = 0 = |\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c}\rangle|$. Sind $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ nicht parallel, dann gilt $F \neq 0$. Es folgt $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \neq 0$ und $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ kann nicht der Nullvektor sein. Aus Satz 73 folgt $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a}\rangle = 0$ und $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle = 0$. Somit steht der Vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ senkrecht auf $\mathbf{a}$ und auf $\mathbf{b}$. Sei h die Länge der Höhe des Parallelepipeds auf die Grundfläche, die von den Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannt wird. Das Volumen V des Parallelepipeds ist dann $F \cdot h$. Sei γ der Winkel zwischen dem Vektor $\mathbf{c}$ und dem Normalvektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ auf die Grundfläche. Dann gilt $h = \|\mathbf{c}\| \cdot \cos\gamma$, wenn γ spitz ist, und $h = \|\mathbf{c}\| \cdot \cos(180^0 - \gamma)$, wenn γ stumpf ist. Im ersten Fall gilt $\cos\gamma \geq 0$, im zweiten Fall gilt $\cos(180^0 - \gamma) = -\cos\gamma = |\cos\gamma|$. Wir erhalten $h = \|\mathbf{c}\| \cdot |\cos\gamma|$ in beiden Fällen. Aus Satz 70 folgt $\cos\gamma = \frac{\langle \mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle}{\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|\cdot\|\mathbf{c}\|}$. Damit ergibt sich $h = \frac{|\langle \mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle|}{\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|}$ und $V = |\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c}\rangle|$. □

2. Determinante und Geraden

Seien $\mathbf{a} = \binom{a_1}{a_2}$ und $\mathbf{b} = \binom{b_1}{b_2}$ zwei Vektoren im $\mathbb{R}^2$. Wir definieren $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_2 - a_2 b_1$ als die Determinante dieser beiden Vektoren. Man bezeichnet sie auch mit $\left|\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{smallmatrix}\right|$.

Bemerkung: Nach Satz 72 ist $|\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})|$ die Fläche des von den Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Das gilt auch, wenn ein Vektor (oder beide) der Nullvektor ist. Man kann die Determinante daher als orientierte Parallelogrammfläche interpretieren.

Satz 75: *Für $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ in $\mathbb{R}^2$ und λ in $\mathbb{R}$ gilt*
(a) $\det(\mathbf{a}+\mathbf{c}, \mathbf{b}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \det(\mathbf{c}, \mathbf{b})$ *und* $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}+\mathbf{c}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \det(\mathbf{a}, \mathbf{c})$
(b) $\det(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda \det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *und* $\det(\mathbf{a}, \lambda\mathbf{b}) = \lambda \det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
(c) $\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = -\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

Beweis: Diese Rechenregeln folgen unmittelbar aus der Definition. □

Wir behandeln Geradengleichungen und zwar die Normalvektorform.

Satz 76: *Sei (p, q) ein Punkt auf einer Gerade, die $\binom{a}{b}$ als Normalvektor hat. Dann ist*

$$ax + by = c \qquad \textit{mit} \qquad c = ap + bq$$

die Gleichung dieser Geraden.

Beweis: Ein Punkt (x, y) liegt genau dann auf der Gerade, wenn $\binom{x}{y} - \binom{p}{q}$ senkrecht auf $\binom{a}{b}$ steht, das heißt genau dann, wenn $\langle \binom{x}{y} - \binom{p}{q}, \binom{a}{b} \rangle = 0$ gilt. Das aber ist äquivalent zu $ax + by = ap + bq$, womit die Gleichung der Gerade gefunden ist. □

Wir werden diese Gleichung auch oft in der Form $(x-p)\,a + (y-q)\,b = 0$ schreiben.

Beispiel: Seien $(3, 1)$ und $(5, -2)$ zwei Punkte in der Ebene. Die Gerade g durch diese beiden Punkte hat Richtungsvektor $\binom{2}{-3}$ und Parameterdarstellung $\binom{3}{1} + t\binom{2}{-3}$. Ein Normalvektor ist $\binom{3}{2}$. Die Gleichung der Gerade g ist daher $3(x-3) + 2(y-1) = 0$. Durch Umformen ergibt sich $3x + 2y = 11$.

Wir untersuchen die Lage zweier Geraden zueinander. Die Gleichungen dieser Geraden seien $a_1 x + b_1 y = c_1$ und $a_2 x + b_2 y = c_2$. Sei $L_1 = \{(x, y) : a_1 x + b_1 y = c_1\}$ die Menge aller Punkte auf der ersten und $L_2 = \{(x, y) : a_2 x + b_2 y = c_2\}$ die auf der zweiten Geraden. Der Durchschnitt $L = L_1 \cap L_2$ ist die Menge aller Punkte, die auf beiden Geraden liegen. Oft fasst man die beiden Geradengleichungen zu einem linearen Gleichungssystem zusammen:

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \end{aligned}$$

Man nennt dann L auch die Lösungsmenge des Gleichungssystems. Die verschiedenen Fälle, die dabei auftreten können, behandeln wir in den nächsten beiden Sätzen.

Satz 77: *Sei $\left|\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{smallmatrix}\right| \neq 0$. Dann hat das Gleichungssystem (1) genau eine Lösung, nämlich*

$$x = \left|\begin{smallmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{smallmatrix}\right| / \left|\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{smallmatrix}\right| = \tfrac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \qquad y = \left|\begin{smallmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{smallmatrix}\right| / \left|\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{smallmatrix}\right| = \tfrac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

das heißt $L = \{(\frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1})\}$ ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

Beweis: Wir nehmen zuerst an, dass $a_1 \neq 0$ gilt. Wir multiplizieren die erste Gleichung in (1) mit $\frac{a_2}{a_1}$ und subtrahieren sie von der zweiten. Wir erhalten (wobei wir die erste Gleichung unverändert übernehmen)

$$a_1 x + b_1 y = c_1 \qquad\qquad (b_2 - \tfrac{a_2 b_1}{a_1})y = c_2 - \tfrac{a_2 c_1}{a_1}$$

Diese beiden Gleichungen sind äquivalent zum Gleichungssystem (1). Indem wir das $\frac{a_2}{a_1}$−fache der ersten Gleichung zur zweiten addieren, können wir ja zum ursprünglichen Gleichungssystem (1) zurückkehren. Wegen $a_1b_2 - a_2b_1 = \left|\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{smallmatrix}\right| \neq 0$ erhalten wir jetzt $y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ aus der zweiten Gleichung. Aus der ersten Gleichung ergibt sich dann $a_1x = c_1 - b_1y = c_1 - b_1\frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{c_1a_1b_2 - b_1a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$ und daraus $x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$. Damit haben wir das Gleichungssystem (1) gelöst und genau eine Lösung gefunden.

Ist $a_1 = 0$, dann muss $a_2 \neq 0$ gelten, sonst wäre $\left|\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{smallmatrix}\right|$ gleich Null. Wir vertauschen die beiden Gleichungen. Dann können wir so vorgehen wie oben. □

Satz 78: *Sei* $\left|\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{smallmatrix}\right| = 0$ *und keine der Zeilen dieser Determinante enthalte nur Nullen. Dann gilt* $L = \emptyset$ *oder* $L = L_1 = L_2$ *für die Lösungsmenge* L *des Gleichungssystems (1).*

Beweis: Wir nehmen zuerst $a_1 \neq 0$ an. Wäre $a_2 = 0$, dann hätten wir $b_2 \neq 0$ (sonst enthielte die zweite Zeile der Determinante nur Nullen) und $\left|\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{smallmatrix}\right| = a_1b_2 - a_2b_1 = a_1b_2 \neq 0$. Also muss auch $a_2 \neq 0$ gelten. Das Gleichungssystem (1) ist äquivalent zu

$$x + \frac{b_1}{a_1}y = \frac{c_1}{a_1} \qquad\qquad x + \frac{b_2}{a_2}y = \frac{c_2}{a_2}$$

Wegen $a_1b_2 - a_2b_1 = \left|\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{smallmatrix}\right| = 0$ gilt auch $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$. Die linken Seiten der beiden Gleichungen stimmen überein. Gilt jetzt $\frac{c_1}{a_1} \neq \frac{c_2}{a_2}$, dann gibt es keine Lösung. In diesem Fall haben wir $L = \emptyset$. Gilt hingegen $\frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2}$, dann sind die beiden Gleichungen identisch. Wir haben $L_1 = L_2$ und somit auch $L = L_1 = L_2$.

Sei jetzt $a_1 = 0$. Dann gilt $b_1 \neq 0$. Wegen $0 = \left|\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{smallmatrix}\right| = a_1b_2 - a_2b_1 = -a_2b_1$ folgt $a_2 = 0$ und daraus dann $b_2 \neq 0$. Das Gleichungssystem (1) ist äquivalent zu

$$y = \frac{c_1}{b_1} \qquad\qquad y = \frac{c_2}{b_2}$$

Wie oben ergibt sich $L = \emptyset$ im Fall $\frac{c_1}{b_1} \neq \frac{c_2}{b_2}$ und $L = L_1 = L_2$ im Fall $\frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2}$. □

Geometrische Interpretation: Normalvektoren der beiden Geraden $a_1x + b_1y = c_1$ und $a_2x + b_2y = c_2$ sind $\left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ b_1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} a_2 \\ b_2 \end{smallmatrix}\right)$. Die Geraden sind parallel genau dann, wenn die Normalvektoren parallel sind, das heißt, wenn das von ihnen aufgespannte Parallelogramm Fläche null hat und somit $\left|\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{smallmatrix}\right| = 0$ gilt. Wegen $\left|\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{smallmatrix}\right| = a_1b_2 - a_2b_1 = \left|\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{smallmatrix}\right|$ sind die Geraden $a_1x + b_1y = c_1$ und $a_2x + b_2y = c_2$ genau dann parallel, wenn $\left|\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{smallmatrix}\right| = 0$ gilt.

Das sehen wir auch in den obigen Sätzen. Gilt $\left|\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{smallmatrix}\right| \neq 0$, dann haben die beiden Geraden genau einen Schnittpunkt. Sie sind nicht parallel. Gilt hingegen $\left|\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{smallmatrix}\right| = 0$, dann haben die beiden Geraden entweder keinen Schnittpunkt oder sie fallen zusammen. In beiden Fällen sind sie parallel.

Wir behandeln noch homogene lineare Gleichungssysteme, da diese später für die Berechnung von Eigenvektoren wichtig sind. Das lineare Gleichungssystem (1) heißt homogen, wenn die rechte Seite null ist, das heißt wenn $c_1 = 0$ und $c_2 = 0$ gilt. Wir erhalten

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= 0 \\ a_2x + b_2y &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Die Menge $L_1 = \{t\left(\begin{smallmatrix} b_1 \\ -a_1 \end{smallmatrix}\right) : t \in \mathbb{R}\}$ gibt die Punkte an, die auf der Geraden $a_1x + b_1y = 0$ liegen, wobei L_1 jetzt nicht die Punkte selbst, sondern die Ortsvektoren zu diesen Punkten enthält (*man geht oft von Punkten zu deren Ortsvektoren über, da man Vektoren addieren und mit einer Zahl multiplizieren kann*). Das ist auch die Lösungsmenge der ersten Gleichung in (2). Ebenso ist $L_2 = \{t\left(\begin{smallmatrix} b_2 \\ -a_2 \end{smallmatrix}\right) : t \in \mathbb{R}\}$ die Lösungsmenge der zweiten Gleichung in (2). Dabei wird vorausgesetzt, dass a_1 oder b_1 oder beide ungleich null sind, und ebenso, dass a_2 oder b_2 oder beide ungleich null sind (sonst wird eine Gleichung in (2) zu $0 = 0$).

Die Lösungsmenge $L = L_1 \cap L_2$ des homogenen linearen Gleichungssystems (2) behandeln wir im folgenden Satz, der später nützlich sein wird.

Satz 79: *Wir nehmen an, dass nicht alle vier Koeffizienten a_1, b_1, a_2 und b_2 in (2) gleich null sind. Die Lösungsmenge von (2) ist $L = \{\binom{0}{0}\}$, wenn $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ gilt. Gilt $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, dann ist $L = \{t\mathbf{v} : t \in \mathbb{R}\}$ die Lösungsmenge, wobei $\mathbf{v}$ gleich $\binom{b_1}{-a_1}$ oder $\binom{b_2}{-a_2}$ gewählt werden kann (Normalvektor auf eine der Zeilen der Determinante), jedoch darf $\mathbf{v}$ nicht der Nullvektor sein.*

Beweis: Gilt $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, dann folgt $L = \{\binom{0}{0}\}$ aus Satz 77 mit $c_1 = 0$ und $c_2 = 0$.
Sei $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$. Enthält keine der beiden Zeilen der Determinante nur Nullen, dann gilt $L = L_1 = L_2$ nach Satz 78. Da sowohl L_1 als auch L_2 den Nullvektor enthält, ist $L = \emptyset$ ja nicht möglich. Die Lösungsmenge L besteht somit aus allen Vielfachen des Vektors $\binom{b_1}{-a_1}$ oder des Vektors $\binom{b_2}{-a_2}$, was die gleiche Menge ergibt.
Gilt $a_1 = 0$ und $b_1 = 0$, dann ist $0 = 0$ die erste Gleichung in (2). Sie gilt immer. Es folgt $L = L_2$. Die Lösungsmenge L besteht aus allen Vielfachen des Vektors $\binom{b_2}{-a_2}$. Gilt $a_2 = 0$ und $b_2 = 0$, dann folgt $L = L_1$. Die Lösungsmenge L besteht aus allen Vielfachen des Vektors $\binom{b_1}{-a_1}$. □

Wir gehen noch kurz auf den $\mathbb{R}^3$ ein. Seien $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Als Determinante dieser drei Vektoren definiert man

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

Diese Determinante wird auch mit $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ bezeichnet.

Bemerkung: Nach Satz 73 und Satz 74 ist $|\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$ das Volumen des von den Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ aufgespannten Parallelepipeds. Man kann diese Determinante daher als orientiertes Volumen des Parallelepipeds interpretieren.

Für die Determinante im $\mathbb{R}^3$ gelten analoge Rechenregeln wie für die im $\mathbb{R}^2$. Der Beweis dieser Rechenregeln ergibt sich wieder unmittelbar aus der Definition.

Satz 80: *Für $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ und $\mathbf{d}$ in $\mathbb{R}^3$ und λ in $\mathbb{R}$ gilt*
(a) $\det(\mathbf{a}+\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \det(\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}+\mathbf{d}, \mathbf{c}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \det(\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{c})$, $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}+\mathbf{d}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})$
(b) $\det(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det(\mathbf{a}, \lambda\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda\mathbf{c}) = \lambda \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
(c) $\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, $\det(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = -\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, $\det(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, $\det(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, $\det(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$

Jetzt behandeln wir Ebenengleichungen und zwar wieder die Normalvektorform.

Satz 81: *Sei (p, q, r) ein Punkt in einer Ebene, die $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ als Normalvektor hat. Dann ist*

$$ax + by + cz = d \qquad \text{mit} \qquad d = ap + bq + cr$$

die Gleichung dieser Ebene.

Beweis: Ein Punkt (x, y, z) liegt genau dann in der Ebene, wenn $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ senkrecht auf $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ steht, das heißt genau dann, wenn $\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle = 0$ gilt. Das ist äquivalent zu $ax + by + cz = ap + bq + cr$, womit die Gleichung der Ebene gefunden ist. □

Beispiel: Seien $(-3,1,0)$, $(1,4,2)$ und $(-1,2,2)$ drei Punkte im Raum. Die Ebene durch diese drei Punkte hat Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$. Sie hat Parameterdarstellung $\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-4\\-2\end{pmatrix}$ ist ein Normalvektor. Die Gleichung der Ebene ist daher $4(x+1) - 4(y-2) - 2(z-2) = 0$, oder $4x - 4y - 2z = -16$. Man kann noch kürzen und erhält $2x - 2y - z = -8$.

Sucht man einen Schnittpunkt dreier Ebenen, so führt das zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

Es können folgende Fälle eintreten: Die drei Ebenen sind parallel. Dann haben sie keinen Schnittpunkt, außer die drei Ebenen sind identisch, dann ist die ganze Ebene Schnittmenge und somit Lösungsmenge des Gleichungssystems.

Zwei der drei Ebenen sind nicht parallel. Sie haben eine Gerade g als Schnittmenge. Ist die dritte Ebene parallel zu g, dann haben die drei Ebenen keinen gemeinsamen Schnittpunkt, außer die Gerade g liegt auch in der dritten Ebene, dann ist die Gerade g die Schnittmenge und somit Lösungsmenge des Gleichungssystems. Ist die dritte Ebene nicht parallel zu g, dann hat sie genau einen Schnittpunkt mit g. Das ist dann auch der eindeutig bestimmte Schnittpunkt der drei Ebenen und die einzige Lösung des Gleichungssystems.

Daraus erkennt man auch, dass das Gleichungssystem genau dann eindeutig lösbar ist, wenn die Normalvektoren der drei Ebenen nicht in einer Ebene liegen, das heißt, wenn das Volumen des von den Normalvektoren aufgespannten Parellelepipeds $\neq 0$ ist, also $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ gilt. Wegen $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ ist das äquivalent zu $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$.

Bemerkung: In der linearen Algebra, die ja auch in höherdimensionalen Räumen arbeitet, kommt man mit der hier verwendeten geometrischen Sprechweise nicht mehr aus. Man hat es üblicherweise nicht mit zwei oder drei Vektoren zu tun, sondern allgemeiner mit n Voktoren, für die man dann die Indexschreibweise verwendet, zum Beispiel $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Wir gehen kurz auf die entsprechenden Definitionen aus der linearen Algebra ein.

Sind $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ Vektoren, dann nennt man die Summe

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n \quad \text{mit} \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

eine Linearkombination dieser Vektoren. Hat man zum Beispiel zwei Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ im $\mathbb{R}^3$, dann bildet die Menge aller Linearkombinationen $\{\lambda_1\mathbf{v} + \lambda_2\mathbf{w} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$ eine Ebene durch den Nullpunkt. Man sagt, die Ebene wird von den Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ aufgespannt.

Eine weitere wichtige Definition ist die folgende: Die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ nennt man linear abhängig, wenn $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ existieren, die nicht alle gleich 0 sind, sodass

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

gilt. Sie heißen linear unabhängig, wenn sie nicht linear abhängig sind, das heißt wenn $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ gilt.

Zwei Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ im $\mathbb{R}^2$ sind linear abhängig, wenn $\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b} = \mathbf{0}$ gilt für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, die nicht beide null sind. Das ist genau dann der Fall, wenn ein Vektor ein Vielfaches des anderen ist ($\mathbf{a} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{b}$ oder $\mathbf{b} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\mathbf{a}$), was wieder äquivalent zu $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ ist.

Genauso kann man sich überlegen, dass drei Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ im $\mathbb{R}^3$ genau dann linear abhängig sind, wenn sie in einer Ebene liegen, was äquivalent zu $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$ ist.

3. Die besonderen Punkte des Dreiecks

Der besseren Übersicht halber verwenden wir auch die Schreibweise (|) anstelle von (,) für Punkte im $\mathbb{R}^2$. Ein beliebiges Dreieck können wir so in ein Koordinatensystem legen, dass der Eckpunkt A die Koordinaten $(u|0)$, der Eckpunkt B die Koordinaten $(v|0)$ und der Eckpunkt C die Koordinaten $(0|w)$ hat. Die Eckpunkte A und B liegen auf der x-Achse und der Eckpunkt C liegt auf der y-Achse. Damit A links von B liegt, nehmen wir immer $u < v$ an. Außerdem können wir auch immer $w > 0$ annehmen. Wir setzen $a = \sqrt{v^2 + w^2}$, $b = \sqrt{u^2 + w^2}$ und $c = v - u$, das sind die Längen der drei Seiten des Dreiecks. Weiters ist $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ der halbe Umfang des Dreiecks.

Liegt ein Dreieck so wie oben beschrieben im Koordinatensystem, dann sagen wir, dass es Standardlage hat. Alles, was wir für ein Dreieck in Standardlage beweisen, gilt für jedes Dreieck, da wir ja jedes Dreieck in Standardlage bringen können.

Satz 82: *Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt, dem Höhenschnittpunkt H. Hat das Dreieck Standardlage, dann ist H der Punkt $(0|-\frac{uv}{w})$.*

Beweis: Wir legen das Dreieck in Standardlage ins Koordinatensystem. Die Gleichung der Höhe durch den Eckpunkt A ist $(x - u)v - yw = 0$, da sie durch den Punkt $(u|0)$ und senkrecht zu $\binom{v}{-w}$, dem Vektor entlang der Seite $\overline{BC}$, verläuft. Die Höhe durch den Eckpunkt C liegt auf der y-Achse und hat daher die Gleichung $x = 0$. Der Schnittpunkt dieser beiden Höhen ist $(0|-\frac{uv}{w})$. Den Schnittpunkt der Höhen durch B und C erhält man dadurch, dass man in dieser Rechnung u und v vertauscht, also $(0|-\frac{vu}{w})$. Es ist derselbe Punkt. Die drei Höhen schneiden einander in diesem Punkt, dem Höhenschnittpunkt H. $\square$

Satz 83: *Die drei Seitensymmetralen eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt, dem Umkreismittelpunkt U. Liegt das Dreieck in Standardlage im Koordinatensystem, dann ist U der Punkt $(\frac{u+v}{2}|\frac{w}{2}+\frac{uv}{2w})$ und $\frac{ab}{2w}$ ist der Umkreisradius r.*

Beweis: Das Dreieck sei in Standardlage. Die Symmetrale der Seite $\overline{AC}$ hat die Gleichung $(x - \frac{u}{2})u - (y - \frac{w}{2})w = 0$, da sie durch den Mittelpunkt $(\frac{u}{2}|\frac{w}{2})$ der Seite $\overline{AC}$ und sekrecht zu $\binom{u}{-w}$, dem Vektor entlang der Seite $\overline{AC}$, verläuft. Die Symmetrale der Seite $\overline{AB}$ hat die Gleichung $x = \frac{u+v}{2}$, da sie senkrecht zur x-Achse durch den Mittelpunkt $(\frac{u+v}{2}|0)$ der Seite $\overline{AB}$ verläuft. Der Schnittpunkt dieser beiden Symmetralen ist $(\frac{u+v}{2}|\frac{w}{2}+\frac{uv}{2w})$. Den Schnittpunkt der Symmetralen der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ erhält man dadurch, dass man in dieser Rechnung u und v vertauscht, also $(\frac{v+u}{2}|\frac{w}{2}+\frac{vu}{2w})$. Es ist derselbe Punkt. Alle drei Seitensymmetralen schneiden einander in diesem Punkt, dem Umkreismittelpunkt U.
Der quadrierte Abstand von U nach C ist $(\frac{u+v}{2})^2 + (\frac{w}{2} - \frac{uv}{2w})^2 = \frac{u^2w^2+v^2w^2+w^4+u^2v^2}{4w^2} = \frac{a^2b^2}{4w^2}$. Das gilt auch für die Eckpunkte A und B. Die Wurzel daraus ist der Umkreisradius r. $\square$

Satz 84: *Die drei Schwerlinien eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt, dem Schwerpunkt S. Hat das Dreieck Standardlage, dann ist S der Punkt $(\frac{u+v}{3}|\frac{w}{3})$.*

Beweis: Wir legen das Dreieck in Standardlage ins Koordinatensystem. Die Gleichung der Schwerlinie durch den Eckpunkt A ist $(x - u)w - y(v - 2u) = 0$, da sie durch die Punkte $(u|0)$ und $(\frac{v}{2}|\frac{w}{2})$ geht und somit Richtungsvektor $\frac{1}{2}\binom{v-2u}{w}$ hat. Die Gleichung der Schwerlinie durch den Eckpunkt C ist $2xw + (y - w)(u + v) = 0$, da sie durch die Punkte $(0|w)$ und $(\frac{u+v}{2}|0)$ geht und somit Richtungsvektor $\frac{1}{2}\binom{u+v}{2w}$ hat. Der Schnittpunkt dieser beiden Schwerlinien ist $(\frac{u+v}{3}|\frac{w}{3})$. Den Schnittpunkt der Schwerlinien durch B und C erhält man durch Vertauschen von u und v in dieser Rechnung, also $(\frac{v+u}{3}|\frac{w}{3})$. Es ist derselbe Punkt. Die drei Schwerlinien schneiden einander in diesem Punkt, dem Schwerpunkt S. $\square$

Satz 85: *Die drei Winkelsymmetralen eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt, dem Inkreismittelpunkt I. Liegt das Dreieck in Standardlage im Koordinatensystem, dann ist I der Punkt $(\frac{ua+vb}{2s}|\frac{wc}{2s})$ und $\frac{wc}{2s}$ ist der Inkreisradius ϱ.*

Beweis: Wir legen das Dreieck in Standardlage ins Koordinatensystem. Die Einheitsvektoren in Richtung der Seiten $\overline{BA}$ und $\overline{BC}$ sind $\binom{-1}{0}$ und $\frac{1}{a}\binom{-v}{w}$. Ihre Summe $\binom{-1}{0}+\frac{1}{a}\binom{-v}{w}$ ist ein Richtungsvektor der Winkelsymmetrale durch B. Daher ist $(x-v)\frac{w}{a}+y(1+\frac{v}{a})=0$ die Gleichung dieser Winkelsymmetrale. Ganz analog behandeln wir die Winkelsymmetrale durch A. Sie hat die Gleichung $(x-u)\frac{w}{b}+y(-1+\frac{u}{b})=0$.

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit a, die zweite mit b, bilden die Differenz und erhalten $y(v-u+a+b)=(v-u)w$. Wegen $v-u=c$ und $c+a+b=2s$ folgt $y=\frac{wc}{2s}$. Aus einer der obigen Gleichungen ergibt sich dann $x=\frac{ua+vb}{2s}$. Der Schnittpunkt der Winkelsymmetralen durch A und durch B ist daher $(\frac{ua+vb}{2s}|\frac{wc}{2s})$.

Die Einheitsvektoren in Richtung der Seiten $\overline{CA}$ und $\overline{CB}$ sind $\frac{1}{b}\binom{u}{-w}$ und $\frac{1}{a}\binom{v}{-w}$. Ihre Summe $\frac{1}{b}\binom{u}{-w}+\frac{1}{a}\binom{v}{-w}$ ist ein Richtungsvektor der Winkelsymmetrale durch den Eckpunkt C. Daher ist $x(\frac{w}{b}+\frac{w}{a})+(y-w)(\frac{u}{b}+\frac{v}{a})=0$ die Gleichung dieser Winkelsymmetrale. Da diese Gleichung die Summe der beiden obigen Gleichungen ist, liegt der Punkt $(\frac{ua+vb}{2s}|\frac{wc}{2s})$ auch auf der Winkelsymmetrale durch C. Alle drei Winkelsymmetralen schneiden einander in diesem Punkt, dem Inkreismittelpunkt I.

Der Inkreisradius ϱ ist der Normalabstand des Punktes I zur Seite $\overline{AB}$, also zur x-Achse. Dieser ist gleich der y-Koordinate $\frac{wc}{2s}$ des Inkreismittelpunktes I. Man kann nachrechnen, dass der Normalabstand von I zu den Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ ebenfalls gleich $\frac{wc}{2s}$ ist. □

Satz 86: *In jedem Dreieck liegen der Höhenschnittpunkt H, der Schwerpunkt S und der Umkreismittelpunkt U auf einer Geraden und S teilt die Strecke $\overline{UH}$ im Verhältnis $1:2$. Die Gerade durch diese drei Punkte heißt Eulersche Gerade.*

Beweis: Wir können annehmen, dass das Dreieck in Standardlage im Koordinatensystem liegt. Wir verwenden obige Sätze. Es folgt $\overrightarrow{SH}=-\frac{1}{3w}\binom{uw+vw}{3uv+w^2}$ und $\overrightarrow{SU}=\frac{1}{6w}\binom{uw+vw}{3uv+w^2}$. Daraus erkennt man, dass $2\overrightarrow{SU}=-\overrightarrow{SH}$ gilt. Die drei Punkte U, S und H liegen auf einer Gerade und S teilt die Strecke $\overline{UH}$ im Verhältnis $1:2$. □

Für ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H und Umkreismittelpunkt U definieren wir den Neunpunktkreis als den Kreis, dessen Mittelpunkt N der Mittelpunkt der Strecke $\overline{UH}$ und dessen Radius σ der halbe Umkreisradius ist.

Satz 87: *Seien M_a, M_b und M_c die Seitenmitten und H_a, H_b und H_c die Höhenfußpunkte eines Dreiecks $\triangle ABC$. Sei H der Höhenschnittpunkt und R_a, R_b und R_c die Mittelpunkte der Strecken $\overline{HA}$, $\overline{HB}$ und $\overline{HC}$. Dann liegen die neun Punkte H_a, H_b, H_c, M_a, M_b, M_c, R_a, R_b und R_c auf dem Neunpunktkreis.*

Beweis: Es genügt, diesen Satz für ein Dreieck in Standardlage zu zeigen und für die Punkte M_c, H_c und R_c. Wir können ja bei einem beliebigen Dreieck jede der drei Seiten auswählen und das Dreieck so in Standardlage ins Koordinatensystem legen, dass die ausgewählte Seite auf der x-Achse liegt.

Für ein Dreieck in Standardlage ist $(0|-\frac{uv}{w})$ der Höhenschnittpunkt H und $(\frac{u+v}{2}|\frac{w}{2}+\frac{uv}{2w})$ der Umkreismittelpunkt U wie in Satz 82 und Satz 83 gezeigt wurde. Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{UH}$ ist daher $(\frac{u+v}{4}|\frac{w}{4}-\frac{uv}{4w})$. Der halbe Umkreisradius ist $\frac{ab}{4w}$ nach Satz 83. Das sind Mittelpunkt N und Radius σ des Neunpunktkreises für ein Dreieck in Standardlage.

Der Mittelpunkt M_c der Seite $\overline{AB}$ ist $(\frac{u+v}{2}|0)$. Es folgt $\overrightarrow{NM_c} = \frac{1}{4w}\binom{w(u+v)}{uv-w^2}$ und

$$|NM_c|^2 = \|\overrightarrow{NM_c}\|^2 = \frac{w^2(u+v)^2+(uv-w^2)^2}{16w^2} = \frac{u^2w^2+v^2w^2+u^2v^2+w^4}{16w^2} = \frac{a^2b^2}{16w^2} = (\frac{ab}{4w})^2 = \sigma^2$$

Der Fußpunkt H_c der Höhe durch C ist $(0|0)$. Der Mittelpunkt R_c des Höhenabschnitts $\overline{HC}$ ist $(0|\frac{w}{2} - \frac{uv}{2w})$. Es folgt $\overrightarrow{NH_c} = \frac{1}{4w}\binom{-w(u+v)}{uv-w^2}$ und $\overrightarrow{NR_c} = \frac{1}{4w}\binom{-w(u+v)}{-(uv-w^2)}$. Die Vektoren $\overrightarrow{NH_c}$, $\overrightarrow{NR_c}$ und $\overrightarrow{NM_c}$ unterscheiden sich nur durch die Vorzeichen ihrer Komponenten. Daher haben sie gleiche Länge. Es folgt $|NH_c| = |NR_c| = |NM_c| = \sigma$. Damit ist gezeigt, dass H_c, R_c und M_c auf dem Neunpunktkreis liegen. $\square$

4. Die Steinerschen Geraden

Satz 88: *Projiziert man den Punkt $(p|q)$ auf die Gerade g mit der Gleichung $mx+ny = h$, dann erhält man $(\frac{n^2p-mnq+mh}{m^2+n^2}|\frac{m^2q-mnp+nh}{m^2+n^2})$. Spiegelt man den Punkt $(p|q)$ an dieser Gerade g, dann erhält man $(\frac{-2mnq+n^2p+2mh-m^2p}{m^2+n^2}|\frac{m^2q-2mnp+2nh-n^2q}{m^2+n^2})$.*

Beweis: Die Gerade durch $(p|q)$ senkrecht auf g hat die Gleichung $n(x-p)-m(y-q) = 0$. Ihr Schnittpunkt mit der Gerade g ist $(\frac{n^2p-mnq+mh}{m^2+n^2}|\frac{m^2q-mnp+nh}{m^2+n^2})$, das ist die Projektion des Punktes $(p|q)$ auf die Gerade g. Ist $\mathbf{v}$ der Ortsvektor dieses Schnittpunkts, dann ist $\mathbf{v} - (\binom{p}{q} - \mathbf{v}) = 2\mathbf{v} - \binom{p}{q} = \frac{2}{m^2+n^2}\binom{n^2p-mnq+mh}{m^2q-mnp+nh} - \binom{p}{q} = \frac{1}{m^2+n^2}\binom{n^2p-2mnq+2mh-m^2p}{m^2q-2mnp+2nh-n^2q}$ der Ortsvektor zum gespiegelten Punkt. $\square$

Mit Hilfe der in Satz 88 gefundenen Formel beweisen wir folgenden Satz.

Satz 89: *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und H sein Höhenschnittpunkt. Sei P ein Punkt und P_a, P_b, P_c die Punkte, die man erhält, wenn man P an den (Verlängerungen der) drei Seiten des Dreiecks spiegelt. Dann sind äquivalent*
(a) *P liegt auf dem Umkreis des Dreiecks*
(b) *drei der vier Punkte P_a, P_b, P_c und H liegen auf einer Gerade*
(c) *alle vier Punkte P_a, P_b, P_c und H liegen auf einer Gerade*

Diese Gerade heißt zweite Steinersche Gerade.

Beweis: Das Dreieck sei in Standardlage. Seien $(x|y)$ die Koordinaten des Punktes P. Da die Seite $\overline{AB}$ auf der x-Achse liegt, sind $(x|-y)$ die Koordinaten des Punktes P_c. Die Trägergerade der Seite $\overline{BC}$ hat Normalvektor $\binom{m}{n} = \binom{w}{v}$ und in ihrer Gleichung auf der rechten Seite die Konstante $h = \langle\binom{m}{n}, \binom{v}{0}\rangle = vw$. Setzt man in die Formel aus Satz 88 ein, so ergibt sich $(\frac{v^2x-2vwy+2vw^2-w^2x}{v^2+w^2}|\frac{w^2y-2vwx+2v^2w-v^2y}{v^2+w^2})$ für den Punkt P_a. Der Höhenschnittpunkt H ist $(0|-\frac{uv}{w})$ nach Satz 82.

Es folgt $\overrightarrow{HP_c} = \frac{1}{w}\binom{wx}{uv-wy}$ und $\overrightarrow{P_aP_c} = \frac{2w}{v^2+w^2}\binom{vy-vw+wx}{vx-wy-v^2}$. Die drei Punkte P_c, P_a und H liegen genau dann auf einer Gerade, wenn die Determinante mit den Vektoren $\overrightarrow{HP_c}$ und $\overrightarrow{P_aP_c}$ als Spalten gleich null ist, das heißt wenn

$$\begin{vmatrix} wx & vy-vw+wx \\ uv-wy & vx-wy-v^2 \end{vmatrix} = 0$$

gilt. Rechnet man diese Determinante aus, kürzt und dividiert durch v, so erhält man

$$wx^2 - vwx - uvy + uvw - uwx + wy^2 - w^2y = 0$$

Dividiert man noch durch w und ergänzt zu vollständigen Quadraten, so ergibt sich

$$x^2 - (u+v)x + \frac{(u+v)^2}{4} + y^2 - (\frac{uv}{w} + w)y + (\frac{uv}{2w} + \frac{w}{2})^2 = \frac{u^2}{4} + \frac{uv}{2} + \frac{v^2}{4} + \frac{u^2v^2}{4w^2} + \frac{uv}{2} + \frac{w^2}{4} - uv$$

Fasst man zusammen, dann hat man schließlich

$$(x-\frac{u+v}{2})^2+(y-(\frac{uv}{2w}+\frac{w}{2}))^2=\frac{(u^2+w^2)(v^2+w^2)}{4w^2}=\frac{a^2b^2}{4w^2}$$

Nach Satz 83 ist das die Gleichung des Umkreises. Wir haben somit gezeigt, dass die drei Punkte P_c, P_a und H genau dann auf einer Gerade liegen, wenn P auf dem Umkreis liegt. Dasselbe Resultat gilt natürlich auch für die drei Punkte P_c, P_b und H und für die Punkte P_a, P_b und H. Man muss ja nur jeweils eine andere Dreieckseite auf die x-Achse legen.

Es bleibt zu zeigen, dass die drei Punkte P_a, P_b und P_c genau dann auf einer Geraden liegen, wenn P auf dem Umkreis liegt. Oben wurde $\overrightarrow{P_aP_c}=\frac{2w}{v^2+w^2}\binom{vy-vw+wx}{vx-wy-v^2}$ gezeigt. Wenn man dieselbe Rechnung wie oben mit der Dreieckseite $\overline{AC}$ statt mit $\overline{BC}$, das heißt mit u statt mit v, durchführt, dann erhält man $\overrightarrow{P_bP_c}=\frac{2w}{u^2+w^2}\binom{uy-uw+wx}{ux-wy-u^2}$. Die drei Punkte P_c, P_a und P_b liegen genau dann auf einer Geraden, wenn die Determinante mit den Vektoren $\overrightarrow{P_aP_c}$ und $\overrightarrow{P_bP_c}$ als Spalten gleich null ist, das heißt wenn

$$\begin{vmatrix} vy-vw+wx & uy-uw+wx \\ vx-wy-v^2 & ux-wy-u^2 \end{vmatrix}=0$$

gilt. Rechnet man diese Determinante aus, kürzt und fasst zusammen, so erhält man

$$(u-v)wx^2-(u^2-v^2)wx+(u-v)wy^2-(u-v)(w^2+uv)y+(u-v)uvw=0$$

Dividiert man durch $u-v$, dann hat man schließlich

$$wx^2-uwx-vwx+wy^2-w^2y-uvy+uvw=0$$

Wir haben bereits gesehen, dass das die Gleichung des Umkreises ist. Damit ist auch gezeigt, dass die drei Punkte P_a, P_b und P_c genau dann auf einer Geraden liegen, wenn P auf dem Umkreis liegt. Die Äquivalenz von (a) und (b) ist vollständig bewiesen.

Aus (c) folgt klarerweise (b). Es bleibt zu zeigen, dass (c) aus (a) folgt. Wenn (a) gilt, dann liegen die drei Punkte P_c, P_b und H auf einer Geraden g und die drei Punkte P_a, P_b und P_c auf einer Geraden h, wie oben gezeigt wurde. Da P_b und P_c sowohl auf g als auch auf h liegen, müssen diese beiden Geraden übereinstimmen. Somit liegen alle vier Punkte P_a, P_b, P_c und H auf einer Geraden. □

Die Gerade im folgenden Satz ist die erste Steinersche Gerade. Wir behandeln nur die erste Steinersche Gerade durch den Eckpunkt C. Es gibt jedoch auch je eine durch die Eckpunkte A und B.

Satz 90: *Sei P ein Punkt auf dem Umkreis eines Dreiecks $\triangle ABC$. Sei Q_c der Schnittpunkt $\neq P$ des Umkreises mit der Senkrechten durch P auf die Seite $\overline{AB}$. Jedoch sei Q_c gleich P, wenn die Senkrechte eine Tangente an den Umkreis ist. Wenn Q_c nicht gleich dem Eckpunkt C ist, dann liegt die Gerade durch Q_c und C, das ist die erste Steinersche Gerade durch den Eckpunkt C, parallel zur zweiten Steinerschen Geraden.*

Beweis: Wir legen das Dreieck in Standardlage ins Koordinatensystem. Der Punkt P habe die Koordinaten $(x|y)$. Da die Seite $\overline{AB}$ auf der x-Achse liegt, liegt die Senkrechte durch P auf $\overline{AB}$ parallel zur y-Achse. Der Umkreismittelpunkt U hat nach Satz 82 die Koordinaten $(\frac{u+v}{2}|\frac{w}{2}+\frac{uv}{2w})$. Sei g die Gerade durch U parallel zur x-Achse. Den Punkt Q_c erhalten wir, indem wir P an g spiegeln, da bei dieser Spiegelung der Umkreis ja in sich selbst übergeht. Daher hat Q_c die Koordinaten $(x|2(\frac{w}{2}+\frac{uv}{2w})-y)$. Der Vektor $\overrightarrow{CQ_c}$ ist somit $\frac{1}{w}\binom{wx}{uv-wy}$. Er ist gleich dem Vektor $\overrightarrow{HP_c}$ aus dem letzten Beweis. Die erste und die zweite Steinersche Gerade haben denselben Richtungsvektor. Sie sind parallel. □

Auch Satz 35 lässt sich gut mit dieser Methode beweisen.

5. Der Satz von Feuerbach

Ein weiterer prominenter Satz über das Dreieck ist der Satz von Feuerbach. Er besagt, dass der Inkreis den Neunpunktkreis berührt. Wir formulieren ihn so

Satz 91 (Satz von Feuerbach) *Seien I und N die Mittelpunkte des Inkreises und des Neunpunktkreises und ϱ und σ deren Radien. Dann gilt $|IN| = |\sigma - \varrho|$.*

Beweis: Wir legen das Dreieck in Standardlage ins Koordinatensystem. Nach Satz 85 gilt $I = (\frac{ua+vb}{2s}|\varrho)$ und $\varrho = \frac{wc}{2s}$. Im Beweis von Satz 87 wird $N = (\frac{u+v}{4}|\frac{w^2-uv}{4w})$ berechnet. Weiters gilt $\sigma = \frac{r}{2}$, wobei $r = \frac{ab}{2w}$ der Umkreisradius ist (siehe Satz 83). Wir erhalten

$$\begin{aligned}|IN|^2 &= (\tfrac{ua+vb}{2s} - \tfrac{u+v}{4})^2 + (\tfrac{w^2-uv}{4w} - \varrho)^2 \\ &= \tfrac{(ua+vb)^2}{4s^2} - \tfrac{(ua+vb)(u+v)}{4s} + (\tfrac{u+v}{4})^2 + (\tfrac{w^2-uv}{4w})^2 - \varrho\tfrac{w^2-uv}{2w} + \varrho^2\end{aligned}$$

Es gilt $c = v - u$, $a^2 = v^2 + w^2$ und $b^2 = u^2 + w^2$. Es folgt $b^2 - a^2 = u^2 - v^2$ und damit

$$2s(b - a + u + v) = b^2 - a^2 + bu + bv + au + av + vb - va - ub + ua + v^2 - u^2 = 2ua + 2vb$$

woraus sich $\frac{(ua+vb)^2}{4s^2} - \frac{(ua+vb)(u+v)}{4s} = \frac{(ua+vb)(b-a)}{4s}$ ergibt. Im Beweis von Satz 83 wird $r^2 = (\frac{u+v}{2})^2 + (\frac{w^2-uv}{2w})^2$ gezeigt. Es gilt $\varrho = \frac{wc}{2s}$. Mit Hilfe dieser Gleichungen erhalten wir

$$|IN|^2 = \tfrac{(ua+vb)(b-a)}{4s} + (\tfrac{r}{2})^2 - \tfrac{cw^2-cuv}{4s} + \varrho^2$$

Mit Hilfe von $a^2 = v^2 + w^2$, $b^2 = u^2 + w^2$ und $c = v - u$ berechnen wir auch

$$(ua+vb)(b-a) = ab(u-v)+b^2v^2-a^2u^2 = -abc+u^2v+w^2v-v^2u-w^2u = -abc-cuv+cw^2$$

Wir setzen das ein und beachten, dass $r\varrho = \frac{ab}{2w}\frac{wc}{2s} = \frac{abc}{4s}$ und $\sigma = \frac{r}{2}$ gilt. Es ergibt sich

$$|IN|^2 = \tfrac{-abc-cuv+cw^2}{4s} + (\tfrac{r}{2})^2 - \tfrac{cw^2-cuv}{4s} + \varrho^2 = -\tfrac{abc}{4s} + (\tfrac{r}{2})^2 + \varrho^2 = -2\sigma\varrho + \sigma^2 + \varrho^2 = (\sigma-\varrho)^2$$

Wir ziehen die Wurzel und erhalten $|IN| = |\sigma - \varrho|$. □

Satz 91 besagt, dass der Abstand der Mittelpunkte des Inkreises und des Neunpunktkreises gleich der Differenz der Radien dieser Kreise ist. Es folgt, dass einer der Kreise den anderen von innen berührt. (Auf der Gerade g durch die Mittelpunkte I und N dieser Kreise existiert ein Punkt P mit $|IP| = \varrho$ und $|NP| = \sigma$, wenn $I \neq N$ gilt. Die Senkrechte durch P auf g ist dann eine Tangente sowohl an den Inkreis als auch an den Neunpunktkreis. Gilt $I = N$, dann gilt auch $\sigma = \varrho$ und die beiden Kreise sind identisch.)

Welcher der beiden Kreise innerhalb des anderen liegt, geht aus Satz 91 jedoch nicht hervor. Ist das Dreieck gleichseitig, dann sind die beiden Kreise identisch (beide gehen durch die Mittelpunkte der drei Dreieckseiten). Ansonsten gibt es eine Dreieckseite, mit der der Neunpunktkreis zwei Schnittpunkte hat (Seitenmittelpunkt und Höhenfußpunkt). Da der Inkreis ganz im Dreieck liegt, kann der Neunpunktkreis nicht innerhalb des Inkreises liegen. Damit ist klar, dass der Inkreis innerhalb des Neunpunktkreises liegt und diesen von innen berührt. Es muss dann auch $\varrho \le \sigma$ gelten, das heißt $2\varrho \le r$.

Mit einer analogen Rechnung kann man auch folgenden Satz beweisen, der ebenfalls von Feuerbach stammt: Seien I_c und N die Mittelpunkte des Ankreises an die Seite $\overline{AB}$ und des Neunpunktkreises und ϱ_c und σ deren Radien. Dann gilt $|I_cN| = \sigma + \varrho_c$. Es folgt, dass der Ankreis an die Seite $\overline{AB}$ den Neunpunktkreis von außen berührt. Natürlich gilt das auch für die beiden anderen Ankreise.

Mit einer etwas aufwändigeren Rechnung kann man auch zeigen, dass $|UI|^2 = r^2 - 2r\varrho$ gilt, wobei U der Umkreismittelpunkt ist. Ebenso gilt $|UI_c|^2 = r^2 + 2r\varrho_c$. Analoge Gleichungen gelten auch für die anderen Ankreise. Diese Formeln stammen von Euler.

IV. Isometrien und Kegelschnitte

1. Lineare Abbildungen

Wir behandeln lineare Abbildungen vom $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^2$.

Definition: Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heißt linear, wenn sie folgende zwei Eigenschaften erfüllt
(a) $\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y})$ für alle Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ in $\mathbb{R}^2$
(b) $\varphi(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\varphi(\mathbf{x})$ für alle Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ und alle Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$

Beispiel: Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\varphi(\mathbf{x}) = x_1\binom{2}{1} + x_2\binom{5}{2} = \binom{2x_1+5x_2}{x_1+2x_2}$. Es ist leicht nachzuprüfen, dass (a) und (b) aus der Definition einer linearen Abbildung erfüllt sind.

Wir zeigen, dass alle linearen Abbildungen von dieser Art sind. Dazu führen wir die Einheitsvektoren $\mathbf{i} = \binom{1}{0}$ und $\mathbf{j} = \binom{0}{1}$ ein.

Satz 92: *Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung. Seien $\binom{a}{b}$ und $\binom{c}{d}$ die Bilder der Einheitsvektoren $\mathbf{i}$ und $\mathbf{j}$ unter φ, das heißt $\varphi(\mathbf{i}) = \binom{a}{b}$ und $\varphi(\mathbf{j}) = \binom{c}{d}$. Für alle $\mathbf{x} = \binom{x_1}{x_2}$ in $\mathbb{R}^2$ gilt dann $\varphi(\mathbf{x}) = x_1\binom{a}{b} + x_2\binom{c}{d} = \binom{ax_1+cx_2}{bx_1+dx_2}$.*

Beweis: Sei $\mathbf{x} = \binom{x_1}{x_2}$ in $\mathbb{R}^2$. Es gilt $\mathbf{x} = x_1\binom{1}{0} + x_2\binom{0}{1} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}$. Aus der Definition einer linearen Abbildung erhalten wir dann

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}) = \varphi(x_1\mathbf{i}) + \varphi(x_2\mathbf{j}) = x_1\varphi(\mathbf{i}) + x_2\varphi(\mathbf{j}) = x_1\binom{a}{b} + x_2\binom{c}{d}$$

Aus den Rechenregeln für Vektoren folgt $x_1\binom{a}{b} + x_2\binom{c}{d} = \binom{ax_1}{bx_1} + \binom{cx_2}{dx_2} = \binom{ax_1+cx_2}{bx_1+dx_2}$. □

Dieser Satz zeigt, dass eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bereits durch die Bilder $\binom{a}{b}$ und $\binom{c}{d}$ der Einheitsvektoren $\mathbf{i}$ und $\mathbf{j}$ bestimmt ist.

Um dieses Ergebnis besser aufschreiben zu können, führen wir Matrizen und die Matrixmultiplikation ein. Eine $m \times n$-Matrix ist eine rechteckige Anordnung von Zahlen, die aus m Zeilen und n Spalten besteht. Einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ kann man als 2×1-Matrix auffassen. Eine 2×2-Matrix hat zwei Vektoren des $\mathbb{R}^2$ als Spalten, zum Beispiel $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$. Eine 1×2-Matrix ist ein Zeilenvektor, zum Beispiel $(3 \;\; 7)$.

Das Produkt $C = AB$ einer $m \times k$-Matrix A und einer $k \times n$-Matrix B bestimmt man so: Man bildet das innere Produkt der ersten Zeile der Matrix A mit den Spalten der Matrix B. Die Ergebnisse, die man erhält, schreibt man in die erste Zeile der Matrix C. Dann bildet man das innere Produkt der zweiten Zeile der Matrix A mit den Spalten der Matrix B. Die Ergebnisse, die man erhält, schreibt man in die zweite Zeile der Matrix C. Hat die Matrix A mehr als zwei Zeilen, dann macht man so weiter. (Hat die Matrix A nur eine Zeile, dann ist man nach dieser einen Zeile bereits fertig.)

Ist zum Beispiel $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$, dann erhalten wir

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p+5r & 2q+5s \\ 3p+7r & 3q+7s \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad BA = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p+3q & 5p+7q \\ 2r+3s & 5r+7s \end{pmatrix}$$

Hier sieht man auch, dass die Multiplikation von zwei Matrizen nicht kommutativ ist. Man kann jedoch nachrechnen, dass $(AB)C = A(BC)$ gilt. Die Multiplikation von Matrizen ist assoziativ. Man darf daher ABC schreiben, ohne Klammern zu setzen, da es keinen Unterschied macht, welche Matrixmultiplikation man zuerst ausführt. Man darf die Matrizen jedoch nicht vertauschen.

Genauso funktioniert die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor. Man fasst den Vektor einfach als 2×1-Matrix auf. Ist $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \mathbf{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$, dann erhalten wir

$$AB = A\mathbf{x} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2x_1+5x_2 \\ 3x_1+7x_2 \end{smallmatrix}\right)$$

Ebenso kann man größere Matrizen multiplizieren. Damit man das Matrixprodukt AB bilden kann, muss A eine $m \times k$-Matrix und B eine $k \times n$-Matrix sein. Die Zeilen von A müssen so lang sein wie die Spalten von B. Das Produkt AB ist eine $m \times n$-Matrix.

Wir kommen zu Satz 92 zurück. Seien $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right)$ die Bilder der Einheitsvektoren $\mathbf{i}$ und $\mathbf{j}$ unter der linearen Abbildung φ. Sei $M = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ die Matrix, die diese Bilder $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right)$ als Spalten hat. Aus der Definition der Matrixmultiplikation und aus Satz 92 folgt

$$M\mathbf{x} = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} ax_1+cx_2 \\ bx_1+dx_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)x_1 + \left(\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right)x_2 = \varphi(\mathbf{x})$$

Es gilt also $\varphi(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Man nennt $M = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ die Matrix der linearen Abbildung φ. Zu jeder lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ findet man eine 2×2-Matrix.

Man kann zwei Matrizen der gleichen Größe auch addieren. Das macht man so wie für Vektoren, die ja 2×1-Matrizen sind. Sind $A = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} r & u \\ s & v \end{smallmatrix}\right)$ zwei 2×2-Matrizen, dann definiert man $A + B = \left(\begin{smallmatrix} a+r & c+u \\ b+s & d+v \end{smallmatrix}\right)$. Ist $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, dann gilt $(A + B)\mathbf{x} = A\mathbf{x} + B\mathbf{x}$. (Das gilt auch für eine 2×2-Matrix C anstelle von $\mathbf{x}$.)

Auch die Multiplikation mit einer Zahl definiert man für Matrizen genauso wie für Vektoren. Ist $A = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ eine Matrix und $t \in \mathbb{R}$, dann definiert man $tA = \left(\begin{smallmatrix} ta & tc \\ tb & td \end{smallmatrix}\right)$. Für t und s in $\mathbb{R}$ und 2×2-Matrizen A und B gilt dann $(s+t)A = sA+tA$ und $t(A+B) = tA+tB$.

Satz 93: *Seien $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear. Dann ist $\psi \circ \varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ebenfalls linear. Ist A die Matrix der linearen Abbildung φ und B die Matrix der linearen Abbildung ψ, dann ist das Matrixprodukt BA die Matrix der linearen Abbildung $\psi \circ \varphi$.*

Beweis: Seien $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ in $\mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Da ψ und φ linear sind, erhalten wir

$\psi(\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y})) = \psi(\varphi(\mathbf{x})+\varphi(\mathbf{y})) = \psi(\varphi(\mathbf{x}))+\psi(\varphi(\mathbf{y}))$ und $\psi(\varphi(\lambda\mathbf{x})) = \psi(\lambda\varphi(\mathbf{x})) = \lambda\psi(\varphi(\mathbf{x}))$

Das zeigt, dass auch $\psi \circ \varphi$ eine lineare Abbildung ist.

Sei $\varphi(\mathbf{i}) = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ und $\varphi(\mathbf{j}) = \left(\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right)$. Es gilt dann $A = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$. Ist $B = \left(\begin{smallmatrix} r & u \\ s & v \end{smallmatrix}\right)$, dann folgt

$$\psi(\varphi(\mathbf{i})) = B\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} r & u \\ s & v \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} ra+ub \\ sa+vb \end{smallmatrix}\right) \text{ und } \psi(\varphi(\mathbf{j})) = B\left(\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} r & u \\ s & v \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} rc+ud \\ sc+vd \end{smallmatrix}\right)$$

Die Matrix der linearen Abbildung $\psi \circ \varphi$ ist daher $\left(\begin{smallmatrix} ra+ub & rc+ud \\ sa+vb & sc+vd \end{smallmatrix}\right)$. Das ist BA. □

Die Matrix $I_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ heißt Einheitsmatrix. Es gilt ja $I_2\mathbf{x} = \mathbf{x}$ für alle $\mathbf{x}$ in $\mathbb{R}^2$.

Lineare Gleichungssysteme kann man ebenfalls mit Hilfe von Matrizen aufschreiben. Liegt das lineare Gleichungssystem

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

vor, dann setzt man $M = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{smallmatrix}\right)$ und $\mathbf{c} = \left(\begin{smallmatrix} c_1 \\ c_2 \end{smallmatrix}\right)$. Das Gleichungssystem wird dann zu $M\mathbf{x} = \mathbf{c}$, wobei $\mathbf{x}$ für den Vektor $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ steht. Man schreibt dann auch $\det M$ anstelle von $\left|\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{smallmatrix}\right|$. Gilt $\det M \neq 0$, dann hat das Gleichungssystem nach Satz 77 genau eine Lösung. Gilt $\det M = 0$, dann hat das Gleichungssystem nach Satz 78 entweder keine Lösung oder beide Gleichungen haben dieselbe Lösungsmenge, die auch Lösungsmenge des Gleichungssystems ist.

2. Eigenwerte und Eigenvektoren

Wir behandeln Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen. Wir beschränken uns wieder auf den $\mathbb{R}^2$. Analoge Resultate gelten aber auch in höheren Dimensionen.

Definition: Sei A eine 2×2-Matrix. Ein Vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ heißt Eigenvektor der Matrix A, wenn $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ für eine Zahl λ gilt. Die Zahl λ nennt man Eigenwert der Matrix A.

Ist $A = rI_2$ mit $r \in \mathbb{R}$, dann gilt $A\mathbf{v} = r\mathbf{v}$ für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Jeder Vektor $\neq \mathbf{0}$ ist somit ein Eigenvektor zum Eigenwert r. Wir nehmen daher im Folgenden an, dass A kein Vielfaches der Einheitsmatrix I_2 ist.

Wie finden wir Eigenwerte und Eigenvektoren? Nach den Rechenregeln für Matrizen können wir $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ auch schreiben als $(A - \lambda I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Das ist das homogene lineare Gleichungssystem $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mit $M = A - \lambda I_2$. Wenn $\det M \neq 0$ gilt, dann ist $\mathbf{0}$ nach Satz 79 die einzige Lösung. Da Eigenvektoren ungleich $\mathbf{0}$ sind, erhalten wir keinen Eigenvektor und λ ist auch kein Eigenwert. Ist hingegen $\det M = 0$, dann folgt aus Satz 79, dass $L = \{t\mathbf{v} : t \in \mathbb{R}\}$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ist, wobei wir $\mathbf{v}$ als Normalvektor auf eine der beiden Zeilen der Matrix M wählen können, die nicht nur aus Nullen besteht. (Es gilt ja $M \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, sonst wäre A ein Vielfaches von I_2.) Es existiert ein Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ mit $M\mathbf{v} = \mathbf{0}$, das heißt $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Somit ist λ ein Eigenwert und $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor der Matrix A. Es kann allerdings auch der Fall eintreten, dass die Eigenwerte komplexe Zahlen sind. Dann sind auch die Eigenvektoren in $\mathbb{C}^2$.

Wir haben gezeigt, dass die Eigenwerte einer Matrix A gerade diejenigen Zahlen λ sind, für die $\det(A - \lambda I_2) = 0$ gilt. Ist $A = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$, dann erhalten wir $A - \lambda I_2 = \left(\begin{smallmatrix} a-\lambda & c \\ b & d-\lambda \end{smallmatrix}\right)$ und

$$\det(A - \lambda I_2) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc$$

Das ist ein Polynom in der Variablen λ. Man nennt es das charakteristische Polynom der Matrix A. Die Eigenwerte der Matrix A sind dann die Lösungen der quadratischen Gleichung $\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$. Die Eigenwerte sind also

$$(*) \qquad \lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}(a + d) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(a + d)^2 - ad + bc} = \tfrac{1}{2}(a + d) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(a - d)^2 + bc}$$

Es gibt drei mögliche Fälle, entweder zwei verschiedene reelle Eigenwerte, oder einen zweifachen reellen Eigenwert, oder zwei zueinander konjugiert komplexe Eigenwerte.

Sucht man einen Eigenvektor zum Eigenwert λ dann bildet man die Matrix $M = A - \lambda I_2$ und löst das lineare Gleichungssystem $M\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Eine Lösung $\mathbf{v}$ erhält man als Normalvektor auf eine Zeile der Matrix M, die nicht nur aus Nullen besteht. Jedes Vielfache dieses Vektors $\mathbf{v}$, außer dem Nullvektor, ist ein Eigenvektor. Das funktioniert auch, wenn die Eigenwerte komplex sind. In diesem Fall sind auch die Eigenvektoren in $\mathbb{C}^2$.

Beispiel: Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. Gesucht sind Eigenwerte und Eigenvektoren.

Wir bilden $A - \lambda I_2 = \left(\begin{smallmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 3 & 3-\lambda \end{smallmatrix}\right)$ und berechnen die Determinante $(5 - \lambda)(3 - \lambda) - 3 = \lambda^2 - 8\lambda + 12$. Das ist das charakteristische Polynom der Matrix A. Die Nullstellen sind $\lambda_1 = 6$ und $\lambda_2 = 2$. Damit sind die Eigenwerte der Matrix A gefunden.

Wir berechnen $A - \lambda_1 I_2 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{smallmatrix}\right)$. Einen Eigenvektor $\mathbf{u}$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 6$ erhalten wir als Normalvektor der ersten Zeile der Matrix $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{smallmatrix}\right)$, zum Beispiel $\mathbf{u} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Ebenso berechnen wir $A - \lambda_2 I_2 = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Einen Eigenvektor $\mathbf{v}$ zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$ erhalten wir als Normalvektor der ersten Zeile der Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, zum Beispiel $\mathbf{v} = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$.

Jedes Vielfache $\neq \mathbf{0}$ eines Eigenvektors ist ebenfalls Eigenvektor zum selben Eigenwert.

Beispiel: Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Gesucht sind Eigenwerte und Eigenvektoren.

Wir bilden $A - \lambda I_2 = \left(\begin{smallmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 5 & 2-\lambda \end{smallmatrix}\right)$ und berechnen die Determinante $(4-\lambda)(2-\lambda) + 10 = \lambda^2 - 6\lambda + 18$. Das ist das charakteristische Polynom der Matrix A. Die Nullstellen sind $\lambda_1 = 3 + 3i$ und $\lambda_2 = 3 - 3i$. Die Eigenwerte der Matrix A sind konjugiert komplex.

Wir berechnen $A - \lambda_1 I_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1-3i & -2 \\ 5 & -1-3i \end{smallmatrix}\right)$. Einen Eigenvektor $\mathbf{u}$ zum Eigenwert λ_1 erhalten wir als Normalvektor der ersten Zeile der Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1-3i & -2 \\ 5 & -1-3i \end{smallmatrix}\right)$, zum Beispiel $\mathbf{u} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1-3i \end{smallmatrix}\right)$. (Wir können nachrechnen, dass $\mathbf{u}$ auch ein Normalvektor der zweiten Zeile ist.)

Wegen $A - \lambda_2 I_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1+3i & -2 \\ 5 & -1+3i \end{smallmatrix}\right)$ ist $\mathbf{v} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1+3i \end{smallmatrix}\right)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 3 - 3i$. Jedes Vielfache $\neq \mathbf{0}$ eines Eigenvektors ist ebenfalls Eigenvektor zum selben Eigenwert.

Beispiel: Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Gesucht sind Eigenwerte und Eigenvektoren.

Wir bilden $A - \lambda I_2 = \left(\begin{smallmatrix} 5-\lambda & 4 \\ -1 & 1-\lambda \end{smallmatrix}\right)$ und berechnen $(5-\lambda)(1-\lambda) + 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 9$, das charakteristische Polynom. Es hat $\lambda = 3$ als zweifache Nullstelle. Das ist der einzige Eigenwert der Matrix A. Wir berechnen $A - \lambda I_2 = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$. Ein Eigenvektor ist $\mathbf{u} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

3. Symmetrische Matrizen

Ist $\mathbf{w} = \left(\begin{smallmatrix} w_1 \\ w_2 \end{smallmatrix}\right)$ ein Spaltenvektor, dann ist der transponierte Vektor $\mathbf{w}^t$ der entsprechende Zeilenvektor $(w_1 \ w_2)$. Für eine Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ definiert man die Transponierte A^t durch $A^t = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, das ist die an der Diagonale gespiegelte Matrix.

Satz 94: *Für 2×2-Matrizen A und B und für Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^2$ gilt*
(a) $(A^t)^t = A$
(b) $(A\mathbf{u})^t = \mathbf{u}^t A^t$ *und* $(AB)^t = B^t A^t$
(c) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^t \mathbf{v}$ *und* $\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, A^t \mathbf{v} \rangle$

Beweis: Wir erhalten (a) sofort aus der Definition.

Mit $A = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ gilt $(A\mathbf{u})^t = \left(\begin{smallmatrix} au_1+cu_2 \\ bu_1+du_2 \end{smallmatrix}\right)^t = (au_1 + cu_2 \ \ bu_1 + du_2) = (u_1 \ u_2)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \mathbf{u}^t A^t$. Das ist die erste Gleichung von (b). Setzt man $A = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} p & r \\ q & s \end{smallmatrix}\right)$, dann erhält man $(AB)^t = \left(\begin{smallmatrix} ap+cq & ar+cs \\ bp+dq & br+ds \end{smallmatrix}\right)^t = \left(\begin{smallmatrix} ap+cq & bp+dq \\ ar+cs & br+ds \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} p & q \\ r & s \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = B^t A^t$ und (b) ist gezeigt.

Es gilt $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 = (u_1 \ u_2)\left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right) = \mathbf{u}^t \mathbf{v}$. Das ergibt die erste Gleichung von (c). Damit und mit (b) erhalten wir $\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = (A\mathbf{u})^t \mathbf{v} = (\mathbf{u}^t A^t)\mathbf{v} = \mathbf{u}^t (A^t \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u}, A^t \mathbf{v} \rangle$, die zweite Gleichung von (c). $\square$

Definition: Eine Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ nennt man symmetrisch, wenn $A^t = A$ gilt. Das ist gleichbedeutend damit, dass $b = c$ gilt.

Satz 95: *Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ symmetrisch, aber nicht gleich rI_2 für ein $r \in \mathbb{R}$. Dann hat A zwei verschiedene reelle Eigenwerte λ_1 und λ_2. Ist $\mathbf{u}$ ein Eigenvektor zu λ_1 und $\mathbf{v}$ einer zu λ_2, dann gilt $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, das heißt $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ sind orthogonal.*

Beweis: Aus $(*)$ folgt $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(a+d) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(a-d)^2 + b^2}$ wegen $c = b$. Wegen $A \neq rI_2$ für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt entweder $a \neq d$ oder $b \neq 0$ oder beides. Es folgt $\frac{1}{4}(a-d)^2 + b^2 > 0$. Somit sind λ_1 und λ_2 reell und verschieden.

Es gilt $A\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{u}$, $A\mathbf{v} = \lambda_2 \mathbf{v}$ und $A^t = A$. Mit Hilfe der Rechenregeln für das innere Produkt und für die Transponierte (Satz 94) erhalten wir

$$\lambda_1 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \lambda_1 \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, A^t \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \lambda_2 \mathbf{v} \rangle = \lambda_2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

Wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ muss $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ gelten. $\square$

4. Isometrien der Ebene

Wir untersuchen Abbildungen der Ebene in sich, wobei wir die Ebene als $\mathbb{R}^2$ auffassen. Und wir arbeiten nicht mit Punkten, sondern mit deren Ortsvektoren.

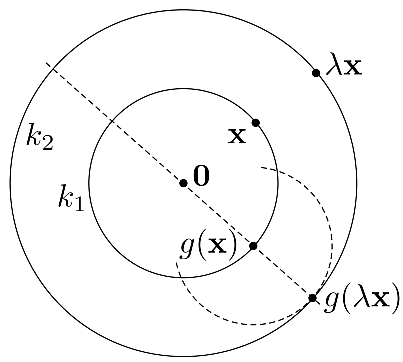
Definition: Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heißt Isometrie, wenn $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ für alle Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ in $\mathbb{R}^2$ gilt.

Beispiel: Sei $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ fest. Die Abbildung (Translation) $h(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}$ ist eine Isometrie. Es gilt ja $h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y}) = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ und daher auch $\|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$.

Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Isometrie, dann ist $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0})$ eine Isometrie mit $g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Es gilt ja $\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})\| = \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ für alle $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ in $\mathbb{R}^2$ und $g(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) - f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Insbesondere gilt auch $\|g(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ für alle $\mathbf{x}$ in $\mathbb{R}^2$ (Das folgt aus $\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ mit $\mathbf{y} = \mathbf{0}$).

Satz 96: *Eine Isometrie $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit mit $g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ist eine lineare Abbildung.*

Beweis: Zuerst zeigen wir $g(\lambda\mathbf{x}) = \lambda g(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Wegen $g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ gilt diese Gleichung für $\lambda = 0$. Wir können $\lambda \neq 0$ annehmen. Sei k_1 der Kreis mit Mittelpunkt $\mathbf{0}$ und Radius $r_1 = \|\mathbf{x}\|$ und k_2 der mit Mittelpunkt $\mathbf{0}$ und Radius $r_2 = \|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$. Dann liegt $\mathbf{x}$ auf k_1 und wegen $\|g(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ auch $g(\mathbf{x})$. Ebenso liegt $\lambda\mathbf{x}$ auf k_2 und wegen $\|g(\lambda\mathbf{x})\| = \|\lambda\mathbf{x}\|$ auch $g(\lambda\mathbf{x})$. Nun gilt $\|g(\lambda\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})\| = \|\lambda\mathbf{x} - \mathbf{x}\| = |\lambda - 1| \cdot \|\mathbf{x}\|$. Ist $\lambda > 0$, dann gilt $\|g(\lambda\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})\| = |r_1 - r_2|$, sodass $g(\lambda\mathbf{x})$ der Punkt auf k_2 ist, der $g(\mathbf{x})$ am nächsten liegt (Zeichnung). Ist $\lambda < 0$, dann gilt $\|g(\lambda\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})\| = r_1 + r_2$, sodass $g(\lambda\mathbf{x})$ der Punkt auf k_2 ist, der den größten Abstand von $g(\mathbf{x})$ hat.



In beiden Fällen liegt $g(\lambda\mathbf{x})$ auf der Gerade durch $\mathbf{0}$ und $g(\mathbf{x})$ und es gilt $g(\lambda\mathbf{x}) = \lambda g(\mathbf{x})$.

Wir zeigen $g(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = g(\mathbf{x}) + g(\mathbf{y})$ für alle $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ in $\mathbb{R}^2$. Ist $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oder $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, dann gilt diese Gleichung. Ist $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, dann folgt sie aus der oben gezeigten Gleichung:

$$g(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = g((1+\lambda)\mathbf{x}) = (1+\lambda)g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \lambda g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + g(\lambda\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + g(\mathbf{y})$$

Ansonsten bilden die Punkte $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ und $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ ein Parallelogramm. Die Punkte $g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $g(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{y})$ und $g(\mathbf{x}+\mathbf{y})$ bilden ein kongruentes Parallelogramm, da die Abstände zwischen den vier Punkten bei der Abbildung unverändert bleiben. Es folgt $g(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = g(\mathbf{x}) + g(\mathbf{y})$.

Somit ist g eine lineare Abbildung, da die Eigenschaften aus der Definition erfüllt sind. $\square$

Zweiter Beweis: Es gilt $2\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$. Setzt man $g(\mathbf{x})$ für $\mathbf{x}$ und $g(\mathbf{y})$ für $\mathbf{y}$ ein, so erhält man $2\langle g(\mathbf{x}), g(\mathbf{y})\rangle = \|g(\mathbf{x})\|^2 + \|g(\mathbf{y})\|^2 - \|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})\|^2$. Für die Isometrie g mit $g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ gilt $\|g(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$, $\|g(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{y}\|$ und $\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Damit erhalten wir, dass $\langle g(\mathbf{x}), g(\mathbf{y})\rangle = \langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$ für alle $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ in $\mathbb{R}^2$ gilt.

Jetzt zu Satz 96. Seien $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ in $\mathbb{R}^2$. Wir setzen $\mathbf{u} = g(\mathbf{x})$, $\mathbf{v} = g(\mathbf{y})$ und $\mathbf{w} = g(\mathbf{x}+\mathbf{y})$. Aus obiger Gleichung folgt $\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle = \langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle$, $\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle$, $\langle\mathbf{w},\mathbf{w}\rangle = \langle\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle$, $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$, $\langle\mathbf{w},\mathbf{u}\rangle = \langle\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle$ und $\langle\mathbf{w},\mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{w}-\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 &= \langle\mathbf{w}-\mathbf{u}-\mathbf{v}\,,\mathbf{w}-\mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle \\
&= \langle\mathbf{w},\mathbf{w}\rangle + \langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle + \langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle - 2\langle\mathbf{w},\mathbf{u}\rangle - 2\langle\mathbf{w},\mathbf{v}\rangle + 2\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle \\
&= \langle\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle + \langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle + \langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle - 2\langle\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle - 2\langle\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle + 2\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle \\
&= \langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle + 2\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + \langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle + \langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle + \langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle - 2\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle - 4\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle - 2\langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle + 2\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = 0
\end{aligned}$$

Somit gilt $\|\mathbf{w}-\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = 0$. Es folgt $\mathbf{w}-\mathbf{u}-\mathbf{v} = \mathbf{0}$, das heißt $\mathbf{w} = \mathbf{u}+\mathbf{v}$. Damit ist $g(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = g(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ gezeigt.

Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir setzen $\mathbf{u} = g(\mathbf{x})$ und $\mathbf{v} = g(\lambda\mathbf{x})$. Wie oben folgt

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}-\lambda\mathbf{u}\|^2 &= \langle \mathbf{v}-\lambda\mathbf{u}\,, \mathbf{v}-\lambda\mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle - 2\lambda\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle + \lambda^2\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle \\ &= \langle \lambda\mathbf{x},\lambda\mathbf{x}\rangle - 2\lambda\langle \lambda\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle + \lambda^2\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = \lambda^2\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle - 2\lambda^2\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle + \lambda^2\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = 0\end{aligned}$$

Somit gilt $\|\mathbf{v}-\lambda\mathbf{u}\| = 0$, also $\mathbf{v}-\lambda\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Es folgt $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$, das heißt $g(\lambda\mathbf{x}) = \lambda g(\mathbf{x})$.

Wir haben gezeigt, dass die Eigenschaften aus der Definition einer linearen Abbildung erfüllt sind. Somit ist g eine lineare Abbildung. $\square$

Sei $\mathbb{W} = \{\alpha : 0^0 \le \alpha < 360^0\}$, das sind die Winkel entlang des Einheitskreises.

Satz 97: *Sei g eine Isometrie mit $g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Dann existiert ein Winkel $\alpha \in \mathbb{W}$, sodass die Matrix der linearen Abbildung g entweder $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ oder $S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ ist.*

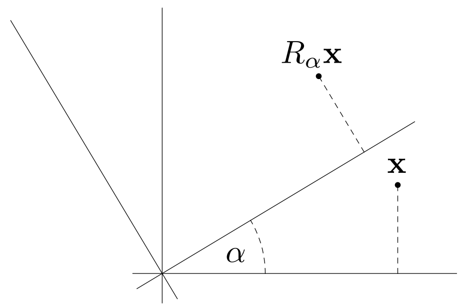
Beweis: Sei $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ die Matrix der linearen Abbildung g. Da g eine Isometrie mit $g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ist, gilt $\|g(\mathbf{x})\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$, das heißt $(ax_1+cx_2)^2 + (bx_1+dx_2)^2 = x_1^2 + x_2^2$ oder $(a^2+b^2)x_1^2 + (c^2+d^2)x_2^2 + 2(ac+bd)x_1x_2 = x_1^2+x_2^2$. Das gilt für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Es folgt

$$a^2+b^2 = 1, \qquad c^2+d^2 = 1 \qquad \text{und} \qquad ac+bd = 0$$

Der Vektor $\binom{a}{b}$ hat Länge 1 und ist daher der Ortsvektor eines Punktes am Einheitskreis. Es existiert ein $\alpha \in \mathbb{W}$ mit $a = \cos\alpha$ und $b = \sin\alpha$. Weiters gilt $\langle \binom{a}{b}, \binom{c}{d} \rangle = ac+bd = 0$ und $\|\binom{c}{d}\| = \sqrt{c^2+d^2} = 1$. Der Vektor $\binom{c}{d}$ steht senkrecht auf $\binom{a}{b}$ und hat ebenfalls Länge 1. Daraus folgt, dass entweder $\binom{c}{d} = \binom{-\sin\alpha}{\cos\alpha}$ oder $\binom{c}{d} = \binom{\sin\alpha}{-\cos\alpha}$ gilt. $\square$

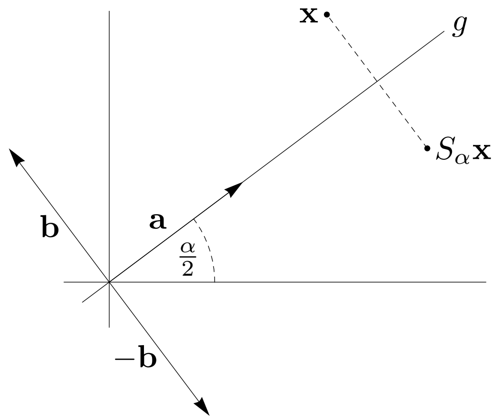
Satz 98: *Die Abbildung mit Matrix R_α ist eine Drehung (Rotation) um den Nullpunkt mit Drehwinkel α (im Gegenuhrzeigersinn).*

Beweis: Es gilt $R_\alpha\mathbf{x} = \binom{\cos\alpha}{\sin\alpha}x_1 + \binom{-\sin\alpha}{\cos\alpha}x_2$. Die Vektoren $\binom{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ und $\binom{-\sin\alpha}{\cos\alpha}$ haben Länge 1 und stehen senkrecht aufeinander. Sie sind die Einheitsvektoren für ein um den Winkel α verdrehtes Koordinatensystem. Daher erhält man $R_\alpha\mathbf{x}$, wenn man den Vektor $\mathbf{x} = \binom{x_1}{x_2}$ ins gedrehte Koordinatensystem zeichnet. Somit ist $R_\alpha\mathbf{x}$ der um den Nullpunkt mit Winkel α gedrehte Vektor $\mathbf{x}$. $\square$



Satz 99: *Die Abbildung mit Matrix S_α ist die Spiegelung an der Gerade g, die durch den Nullpunkt geht und Richtungsvektor $\binom{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ hat.*

Beweis: Sei $\mathbf{a} = \binom{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ und $\mathbf{b} = \binom{-\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. Der Vektor $\mathbf{b}$ steht senkrecht auf $\mathbf{a}$. Matrixmultiplikation und die Summensätze für sin und cos zeigen, dass $S_\alpha\mathbf{a} = \mathbf{a}$ und $S_\alpha\mathbf{b} = -\mathbf{b}$ gilt. Da $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ senkrecht aufeinander stehen, existieren für jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ reelle Zahlen p und q mit $\mathbf{x} = p\mathbf{a} + q\mathbf{b}$. Es folgt $S_\alpha\mathbf{x} = pS_\alpha\mathbf{a} + qS_\alpha\mathbf{b} = p\mathbf{a} - q\mathbf{b}$. Das zeigt, dass $S_\alpha\mathbf{x}$ der an der Gerade g gespiegelte Vektor $\mathbf{x}$ ist, da g ja die Gerade durch den Nullpunkt mit Richtungsvektor $\mathbf{a}$ ist. $\square$



Die linearen Abbildungen mit den Matrizen R_α und S_α sind alle Isometrien, die $\mathbf{0}$ auf $\mathbf{0}$ abbilden. Ist f irgendeine Isometrie und $\mathbf{u} = f(\mathbf{0})$, dann ist $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \mathbf{u}$ eine Isometrie mit $g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Es existiert somit ein $\alpha \in \mathbb{W}$ mit $f(\mathbf{x}) = R_\alpha(\mathbf{x}) + \mathbf{u}$ oder $f(\mathbf{x}) = S_\alpha(\mathbf{x}) + \mathbf{u}$. Für $\alpha \in \mathbb{W}$ und für $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ definieren wir $R_{\alpha,\mathbf{u}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $S_{\alpha,\mathbf{u}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$R_{\alpha,\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = R_\alpha \mathbf{x} + \mathbf{u} \qquad \text{und} \qquad S_{\alpha,\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = S_\alpha \mathbf{x} + \mathbf{u}$$

Das sind dann alle möglichen Isometrien des $\mathbb{R}^2$.

Satz 100: *Ist $\alpha = 0^0$, dann ist $R_{\alpha,\mathbf{u}}$ die Translation (Parallelverschiebung) mit dem Vektor $\mathbf{u}$. Ist $\alpha \neq 0^0$, dann ist $R_{\alpha,\mathbf{u}}$ die Drehung mit Drehwinkel α, die den Punkt W mit Ortsvektor $\mathbf{w}$ als Drehzentrum hat, wobei $(I_2 - R_\alpha)\mathbf{w} = \mathbf{u}$ gilt.*

Beweis: Für $\alpha = 0^0$ gilt $R_\alpha = I_2$ und $R_{\alpha,\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}$.
Für $\alpha \neq 0^0$ gilt $\left|\begin{smallmatrix} 1-\cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & 1-\cos\alpha \end{smallmatrix}\right| = (1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha = 2 - 2\cos\alpha \neq 0$, das heißt $\det(I_2 - R_\alpha) \neq 0$. Daher hat $(I_2 - R_\alpha)\mathbf{w} = \mathbf{u}$ genau eine Lösung, das heißt $\mathbf{w}$ ist eindeutig bestimmt. Es folgt $\mathbf{u} = \mathbf{w} - R_\alpha\mathbf{w}$ und $R_{\alpha,\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = R_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{w}) + \mathbf{w}$. Die Abbildung $R_{\alpha,\mathbf{u}}$ ist die Hintereinanderausführung folgender drei Abbildungen:
(a) Translation mit dem Vektor $-\mathbf{w}$: der Punkt W wird in den Nullpunkt verschoben
(b) Drehung um den Nullpunkt mit Drehwinkel α
(c) Translation mit dem Vektor $\mathbf{w}$: der Nullpunkt wird in den Punkt W verschoben

Die Zusammensetzung ergibt die Drehung um den Punkt W mit Drehwinkel α. □

Satz 101: *Die Abbildung $S_{\alpha,\mathbf{u}}$ ist eine Schubspiegelung (Gleitspiegelung), und zwar die Hintereinanderausführung der Spiegelung an der Geraden, die durch den Punkt Q mit Ortsvektor $\frac{1}{2}\mathbf{u}$ geht und Richtungsvektor $\left(\begin{smallmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{smallmatrix}\right)$ hat, und der Translation mit dem Vektor $\mathbf{w} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} + S_\alpha\mathbf{u})$. Der Vektor $\mathbf{w}$ hat die Richtung der Spiegelungsgeraden.*

Beweis: Es gilt $S_{\alpha,\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = S_\alpha(\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{u}) + \frac{1}{2}\mathbf{u} + \mathbf{w}$. Die Abbildung $\mathbf{x} \mapsto S_\alpha(\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{u}) + \frac{1}{2}\mathbf{u}$ ist die Hintereinanderausführung folgender drei Abbildungen:
(a) Translation mit dem Vektor $-\frac{1}{2}\mathbf{u}$: der Punkt Q wird in den Nullpunkt verschoben
(b) Spiegelung an der Geraden durch den Nullpunkt mit Richtungsvektor $\left(\begin{smallmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{smallmatrix}\right)$
(c) Translation mit dem Vektor $\frac{1}{2}\mathbf{u}$: der Nullpunkt wird in den Punkt Q verschoben

Die Zusammensetzung dieser Abbildungen ergibt die Spiegelung an der Geraden durch den Punkt Q, die Richtungsvektor $\left(\begin{smallmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{smallmatrix}\right)$ hat. Dazu kommt noch die Translation mit dem Vektor $\mathbf{w}$. Das ergibt dann die Abbildung $S_{\alpha,\mathbf{u}}$.
Wir bestimmen die Richtung des Vektors $\mathbf{w}$. Den Vektor $S_\alpha\mathbf{u}$ erhält man, indem man den Vektor $\mathbf{u}$ an einer Gerade durch den Nullpunkt spiegelt. Daraus folgt, dass $\mathbf{w} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}+S_\alpha\mathbf{u})$ dieselbe Richtung hat wie diese Spiegelungsgerade. □

Wir haben alle möglichen Isometrien der Ebene gefunden. Es sind Translationen, Drehungen und Schubspiegelungen. Wir überlegen uns noch, was sich bei Hintereinanderausführung dieser Isometrien ergibt.

Satz 102: *Es gilt $R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}$, $R_\alpha S_\beta = S_{\alpha+\beta}$, $S_\alpha R_\beta = S_{\alpha-\beta}$ und $S_\alpha S_\beta = R_{\alpha-\beta}$.*

Beweis: Wir rechnen die erste Gleichung mit Hilfe der Summensätze nach

$$\begin{aligned} R_\alpha R_\beta &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = R_{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

Die anderen Gleichungen erhält man analog, wobei $-\sin\beta = \sin(-\beta)$ zu beachten ist. □

Es gilt $R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}$. Die Hintereinanderausführung von zwei Drehungen um denselben Punkt ergibt wieder eine Drehung um diesen Punkt, wobei sich die Drehwinkel addieren.

Es gilt auch $S_\alpha S_\beta = R_{\alpha-\beta}$. Die Hintereinanderausführung von zwei Spiegelungen ergibt eine Drehung um den Schnittpunkt der beiden Spiegelungsgeraden, wobei der Drehwinkel der doppelte Winkel zwischen den Spiegelungsgeraden ist.

Die beiden anderen Gleichungen besagen, dass man eine Spiegelung erhält, wenn man eine Spiegelung mit einer Drehung um einen Punkt auf der Spiegelungsgerade verknüpft.

Der obige Satz lässt sich leicht verallgemeinern.

Satz 103: *Es gilt* $R_{\alpha,\mathbf{u}} \circ R_{\beta,\mathbf{v}} = R_{\alpha+\beta,R_\alpha\mathbf{v}+\mathbf{u}}$, $R_{\alpha,\mathbf{u}} \circ S_{\beta,\mathbf{v}} = S_{\alpha+\beta,R_\alpha\mathbf{v}+\mathbf{u}}$, $S_{\alpha,\mathbf{u}} \circ R_{\beta,\mathbf{v}} = S_{\alpha-\beta,S_\alpha\mathbf{v}+\mathbf{u}}$ *und* $S_{\alpha,\mathbf{u}} \circ S_{\beta,\mathbf{v}} = R_{\alpha-\beta,S_\alpha\mathbf{v}+\mathbf{u}}$.

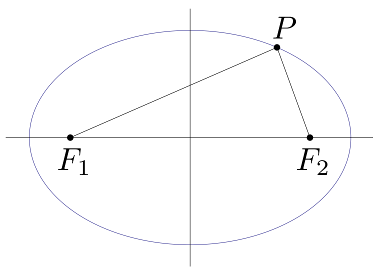
Beweis: Wir rechnen nur die erste Gleichung mit Hilfe von Satz 102 nach

$$R_{\alpha,\mathbf{u}}(R_{\beta,\mathbf{v}}(\mathbf{x})) = R_{\alpha,\mathbf{u}}(R_\beta\mathbf{x}+\mathbf{v}) = R_\alpha(R_\beta\mathbf{x}+\mathbf{v})+\mathbf{u} = R_{\alpha+\beta}\mathbf{x}+R_\alpha\mathbf{v}+\mathbf{u} = R_{\alpha+\beta,R_\alpha\mathbf{v}+\mathbf{u}}(\mathbf{x})$$

Das beweist $R_{\alpha,\mathbf{u}} \circ R_{\beta,\mathbf{v}} = R_{\alpha+\beta,R_\alpha\mathbf{v}+\mathbf{u}}$. Die anderen Gleichungen erhält man analog. □

5. Kegelschnitte

Wir berechnen die Gleichungen der Kegelschnitte in Hauptlage. Damit ist gemeint, dass die Koordinatenachsen auch die Achsen der Kegelschnitte sind.



Ellipse: Wir suchen die Gleichung der Ellipse mit Brennpunkten $F_1(-e,0)$ und $F_2(e,0)$ und mit großer Halbachse der Länge a, wobei $e < a$ gilt. Sie ist die Menge aller Punkte $P = (x,y)$, deren Abstandssumme von den beiden Brennpunkten gleich $2a$ ist, das heißt $|PF_1| + |PF_2| = 2a$. Die Gleichung dieser Ellipse ist daher

(1) $$\sqrt{(x+e)^2+y^2} + \sqrt{(x-e)^2+y^2} = 2a$$

Quadriert man diese Gleichung, fasst zusammen und dividiert durch 2, so hat man

(2) $$x^2+e^2+y^2+\sqrt{(x+e)^2+y^2}\sqrt{(x-e)^2+y^2} = 2a^2$$

Unter der ersten Wurzel steht $e^2+x^2+y^2+2ex$ und $e^2+x^2+y^2-2ex$ unter der zweiten. Das Produkt ist $(e^2+x^2+y^2)^2-4e^2x^2$. Setzt man das ein und formt um, so erhält man

(3) $$\sqrt{(e^2+x^2+y^2)^2-4e^2x^2} = 2a^2-(e^2+x^2+y^2)$$

Quadriert man, so fällt $(e^2+x^2+y^2)^2$ weg. Man kann durch 4 dividieren und es bleibt

(4) $$-e^2x^2 = a^4-a^2(e^2+x^2+y^2)$$

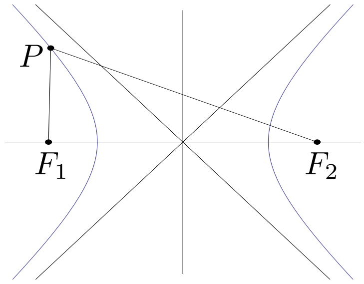
Durch Ausmultiplizieren und Umformen ergibt sich jetzt

(5) $$\tfrac{x^2}{a^2}+\tfrac{y^2}{a^2-e^2} = 1 \quad \text{oder} \quad \tfrac{x^2}{a^2}+\tfrac{y^2}{b^2} = 1 \ \text{ wenn man } \ b^2 = a^2-e^2 \ \text{ setzt.}$$

Damit ist die Gleichung der Ellipse mit Brennpunkten $F_1(-e,0)$ und $F_2(e,0)$ und mit großer Halbachse der Länge a gefunden.

Die beiden Punkte $(-a,0)$ und $(a,0)$ erfüllen die Ellipsengleichung und liegen daher auf der Ellipse. Sie heißen Hauptscheitel. Die Strecke dazwischen heißt Hauptachse der Ellipse. Auf ihr liegen die beiden Brennpunkte. Sie wird durch den Mittelpunkt $(0,0)$ der Ellipse in die beiden großen Halbachsen der Länge a unterteilt. Die beiden Punkte $(0,-b)$ und $(0,b)$, die ebenfalls auf der Ellipse liegen, heißen Nebenscheitel. Die Strecke dazwischen heißt Nebenachse der Ellipse. Sie wird durch den Mittelpunkt der Ellipse in die beiden kleinen Halbachsen der Länge b unterteilt.

Vertauscht man die Variablen x und y, dann erhält man die an der Diagonale gespiegelte Ellipse mit Brennpunkten auf der y-Achse. Diese hat die Gleichung $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.



Hyperbel: Analog lässt sich die Gleichung der Hyperbel mit Brennpunkten $F_1(-e, 0)$ und $F_2(e, 0)$ und mit Halbachse der Länge a finden, wobei aber jetzt $e > a$ gilt. Sie ist die Menge aller Punkte $P = (x, y)$, deren Abstandsdifferenz von den beiden Brennpunkten gleich $2a$ ist, das heißt $|PF_1| - |PF_2| = 2a$ oder $|PF_2| - |PF_1| = 2a$, wobei die erste dieser beiden Gleichungen den rechten Ast der Hyperbel darstellt und die zweite den linken Ast. Diese Hyperbel hat daher ebenfalls die Gleichung (1), wobei aber eine der Wurzeln als die negative Wurzel aufzufassen ist. Führt man dieselbe Rechnung durch wie oben, so verschwinden die Vorzeichen der Wurzeln beim Quadrieren und man erhält wieder die Gleichung

(5) $\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-e^2} = 1 \quad$ oder $\quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad$ wenn man $b^2 = e^2 - a^2$ setzt.

Damit ist die Gleichung der Hyperbel mit Brennpunkten $F_1(-e, 0)$ und $F_2(e, 0)$ und mit Halbachse der Länge a gefunden.

Die beiden Punkte $(-a, 0)$ und $(a, 0)$ erfüllen die Hyperbelgleichung. Es sind die Scheitel der Hyperbel. Die Strecke dazwischen wird durch den Mittelpunkt $(0, 0)$ der Hyperbel in die beiden Halbachsen der Länge a unterteilt.

Die Hyperbel besitzt zwei Asymptoten. Eine Asymptote ist eine Gerade, der sich eine Kurve, in diesem Fall die Hyperbel, im Unendlichen immer mehr annähert. Die Gleichung der Hyperbel lässt sich schreiben als $y = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$. Wenn x gegen $+\infty$ oder $-\infty$ geht, dann geht $\frac{a^2}{x^2}$ gegen 0 und die Hyperbel nähert sich immer mehr der Gerade $y = \frac{b}{a}x$ oder der Gerade $y = -\frac{b}{a}x$. Somit sind diese beiden Geraden Asymptoten der Hyperbel.

Vertauscht man die Variablen x und y, dann erhält man die an der Diagonale gespiegelte Hyperbel mit Brennpunkten auf der y-Achse. Diese hat die Gleichung $-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

Bemerkung: Oben wurde $(1) \Rightarrow (5)$ gezeigt, das heißt jeder Punkt, der auf der Ellipse bzw. Hyperbel liegt, erfüllt die Gleichung (5). Es gilt auch die Umkehrung. Jeder Punkt, der (5) erfüllt, liegt auf der Ellipse bzw. Hyperbel. Dazu müssen wir $(5) \Rightarrow (1)$ zeigen.

Gilt $y = 0$ (Punkt $P = (x, y)$ auf der x-Achse), dann ist sowohl (1) als auch (5) äquivalent zur Gleichung $|x| = a$. Es gilt also $(1) \Leftrightarrow (5)$. Wir können $y \neq 0$ (Punkt nicht auf der x-Achse) annehmen. In diesem Fall zeigen wir $(5) \Rightarrow (1)$ durch einen indirekten Beweis.

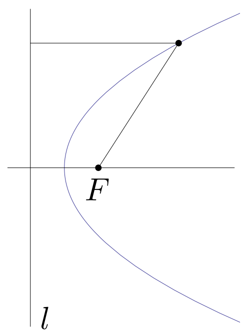
Wir nehmen an, dass (1) nicht gilt. Es gilt also $\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2\tilde{a}$ für ein $\tilde{a} \neq a$. Im Fall der Ellipse haben beide Wurzeln positives Vorzeichen und mit der Dreiecksungleichung folgt $2e = |F_1F_2| < |PF_1| + |PF_2| = 2\tilde{a}$, also $e < \tilde{a}$. Im Fall der Hyperbel hat eine Wurzel positives, die andere negatives Vorzeichen und mit der Dreiecksungleichung folgt $2e = |F_1F_2| > |PF_1| - |PF_2| = 2\tilde{a}$ oder $2e = |F_1F_2| > |PF_2| - |PF_1| = 2\tilde{a}$, also $e > \tilde{a}$. Wir führen jetzt obige Rechnung durch und erhalten, dass $\frac{x^2}{\tilde{a}^2} + \frac{y^2}{\tilde{a}^2-e^2} = 1$ gilt.

Für $\tilde{a} < a$ gelten $\frac{x^2}{\tilde{a}^2} \geq \frac{x^2}{a^2}$ und $\frac{y^2}{\tilde{a}^2-e^2} > \frac{y^2}{a^2-e^2}$, also folgt $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-e^2} < \frac{x^2}{\tilde{a}^2} + \frac{y^2}{\tilde{a}^2-e^2} = 1$.

Für $\tilde{a} > a$ gelten $\frac{x^2}{\tilde{a}^2} \leq \frac{x^2}{a^2}$ und $\frac{y^2}{\tilde{a}^2-e^2} < \frac{y^2}{a^2-e^2}$, also folgt $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-e^2} > \frac{x^2}{\tilde{a}^2} + \frac{y^2}{\tilde{a}^2-e^2} = 1$.

Dabei ist zu beachten, dass $\tilde{a}^2 - e^2$ und $a^2 - e^2$ entweder beide positiv (Ellipse) oder beide negativ (Hyperbel) sind. In jedem Fall ergibt sich $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-e^2} \neq 1$, ein Widerspruch zu (5). Damit ist $(5) \Rightarrow (1)$ bewiesen.

Parabel: Schließlich bestimmen wir die Gleichung der Parabel mit Brennpunkt $F(\frac{p}{2}, 0)$ und Leitlinie l, die die Gleichung $x = -\frac{p}{2}$ habe. Die Parabel ist die Menge aller Punkte (x, y), die von Brennpunkt F und Leitlinie l gleichen Abstand haben. Ihre Gleichung ist daher



$$\sqrt{(x - \tfrac{p}{2})^2 + y^2} = x + \tfrac{p}{2}$$

Quadriert man diese Gleichung und kürzt, so erhält man $y^2 = 2px$. Das ist die Gleichung der Parabel mit Brennpunkt F und Leitlinie l. Ist $p > 0$, dann können nur Punkte rechts von l gleichen Abstand von F und l haben. Die Parabel liegt rechts von der Leitlinie l und ist nach rechts offen, wie in der Zeichnung. Ist $p < 0$, dann hat man eine Parabel, die links von der Leitlinie l liegt und nach links offen ist (die Zeichnung an der y-Achse gespiegelt). Vertauscht man die Variablen x und y, dann erhält man die an der Diagonale gespiegelte Parabel mit der Gleichung $x^2 = 2py$. Sie ist entweder nach oben oder nach unten offen.

Der Punkt $(0, 0)$ erfüllt die Parabelgleichung. Man nennt ihn den Scheitel der Parabel.

Bemerkung: Zum Abschluss dieses Kapitels stellen wir noch einige Überlegungen an, die wir im nächsten Kapitel über die Tangentenkonstruktion verwenden werden. Es geht um Ungleichungen, die für die Punkte gelten, die nicht auf dem Kegelschnitt liegen.

Liegt P auf der Ellipse mit Brennpunkten F_1 und F_2 und großer Halbachse der Länge a, dann gilt $|F_1P| + |PF_2| = 2a$. Wir beweisen: Liegt Q im Innern dieser Ellipse, dann gilt $|F_1Q| + |QF_2| < 2a$. Liegt Q außerhalb dieser Ellipse, dann gilt $|F_1Q| + |QF_2| > 2a$.

Sei P der Schnittpunkt der Ellipse mit der Halbgerade von F_1 durch Q (wenn $Q = F_1$, dann beliebige Halbgerade von F_1 aus). Für einen Punkt Q im Innern der Ellipse erhalten wir $|F_1Q| + |QF_2| < |F_1Q| + |QP| + |PF_2| = |F_1P| + |PF_2| = 2a$ mit Hilfe der Dreiecksungleichung. Für einen Punkt Q außerhalb der Ellipse erhalten wir $|F_1Q| + |QF_2| = |F_1P| + |PQ| + |QF_2| > |F_1P| + |PF_2| = 2a$ wieder mit Hilfe der Dreiecksungleichung.

Für eine Hyperbel mit Brennpunkten F_1 und F_2 und Halbachsenlänge a liegt P auf dem rechten Hyperbelast genau dann, wenn $|F_1P| - |PF_2| = 2a$ gilt. Wir beweisen: Liegt Q rechts vom rechten Hyperbelast, dann gilt $|F_1Q| - |QF_2| > 2a$. Liegt Q links vom rechten Hyperbelast, dann gilt $|F_1Q| - |QF_2| < 2a$.

Liegt Q rechts vom rechten Hyperbelast, dann sei P der Schnittpunkt des rechten Hyperbelastes mit der Halbgerade von F_1 durch Q. Es gilt $|QF_2| < |PQ| + |PF_2|$ nach der Dreiecksungleichung. Es folgt $|F_1Q| - |QF_2| = |F_1P| + |PQ| - |QF_2| > |F_1P| - |PF_2| = 2a$.

Liegt Q links vom rechten Hyperbelast, dann sei P der Schnittpunkt des rechten Hyperbelastes mit der Halbgerade von F_2 durch Q. Es gilt $|F_1Q| < |F_1P| + |QP|$ nach der Dreiecksungleichung. Es folgt $|F_1Q| - |QF_2| = |F_1Q| - |QP| - |PF_2| < |F_1P| - |PF_2| = 2a$.

Liegt P auf der Parabel mit Brennpunkt F und Leitlinie l, dann gilt $|PF| = d(P, l)$, wobei $d(P, l)$ den Normalabstand von P zur Geraden l bezeichnet. Wir beweisen: Liegt Q im Innern dieser Parabel (dort wo der Brennpunkt liegt), dann gilt $|QF| < d(Q, l)$. Liegt Q außerhalb dieser Parabel, dann gilt $|QF| > d(Q, l)$.

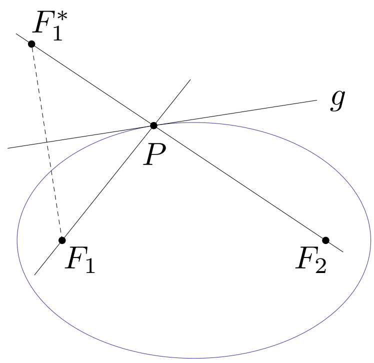
Sei P der Schnittpunkt der Parabel mit der Senkrechten auf l durch Q. Für einen Punkt Q im Innern der Parabel ergibt sich $|QF| < |QP| + |PF| = |QP| + d(P, l) = d(Q, l)$ mit Hilfe der Dreiecksungleichung. Für einen Punkt Q außerhalb der Parabel gilt $|PQ| + |QF| > |PF|$ nach der Dreiecksungleichung und somit $|QF| > |PF| - |PQ| = d(P, l) - |PQ| = d(Q, l)$. Liegt Q auf der anderen Seite der Leitlinie l als F, dann ist $|QF| > d(Q, l)$ offensichtlich.

6. Tangentenkonstruktion

Zwei Gerade, die einander in einem Punkt S schneiden, bilden vier Winkel. Man erhält zwei Paare von einander gegenüberliegenden Winkeln (Scheitelwinkel), die gleich groß sind und eine gemeinsame Winkelsymmetrale haben, wenn man die Winkelsymmetrale als eine durch den Schnittpunkt S hindurchgehende Gerade auffasst. Jedes Winkelpaar hat also eine Winkelsymmetrale und diese beiden Winkelsymmetralen stehen senkrecht aufeinander. Wir nennen sie die Winkelsymmetralen der einander schneidenden Geraden.

Gegeben ist ein Punkt P auf einem Kegelschnitt. Gesucht ist die Tangente im Punkt P an den Kegelschnitt. Die folgenden Sätze geben eine Methode zur Konstruktion dieser Tangente.

Satz 104: *Sei P ein Punkt auf einer Ellipse mit Brennpunkten F_1 und F_2. Sei g die Winkelsymmetrale der Geraden $\ell(F_1, P)$ und $\ell(F_2, P)$, die die Strecke $\overline{F_1F_2}$ nicht schneidet. Dann ist g eine Tangente an die Ellipse im Punkt P.*



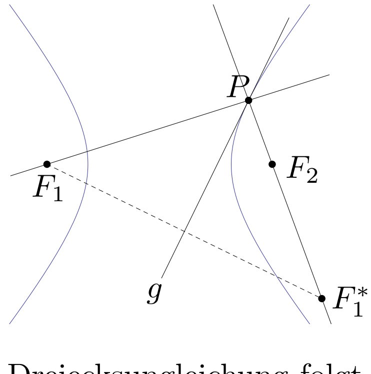
Beweis: Sei a die Länge der großen Halbachse. Sei F_1^* der an der Gerade g gespiegelte Punkt F_1. Da P auf g liegt, erhalten wir $|F_1^*P| = |F_1P|$. Da g eine Winkelsymmetrale der Geraden $\ell(F_1, P)$ und $\ell(F_2, P)$ ist, liegt F_1^* auf $\ell(F_2, P)$. Da F_1^* auf der anderen Seite von g liegt als F_2, liegen die Punkte F_1^*, P und F_2 in dieser Reihenfolge auf $\ell(F_2, P)$. Da weiters P auf der Ellipse liegt, erhalten wir

$$|F_1^*F_2| = |F_1^*P| + |PF_2| = |F_1P| + |PF_2| = 2a$$

Sei Q jetzt irgendein Punkt auf g, der ungleich P ist. Aus der Dreiecksungleichung folgt $|F_1^*Q| + |QF_2| > |F_1^*F_2| = 2a$, da Q nicht auf der Geraden durch F_1^* und F_2 liegt. Da Q auf g liegt und F_1^* der an g gespiegelte Punkt F_1 ist, gilt auch $|F_1Q| = |F_1^*Q|$. Es folgt $|F_1Q| + |QF_2| > 2a$, das heißt Q liegt außerhalb der Ellipse. Da alle Punkte der Gerade g außer P außerhalb der Ellipse liegen, ist g eine Tangente. □

Die Tangentenkonstruktion für die Hyperbel ist sehr ähnlich.

Satz 105: *Sei P ein Punkt auf einer Hyperbel mit Brennpunkten F_1 und F_2. Sei g die Winkelsymmetrale der Geraden $\ell(F_1, P)$ und $\ell(F_2, P)$, die die Strecke $\overline{F_1F_2}$ schneidet. Dann ist g eine Tangente an die Hyperbel im Punkt P.*

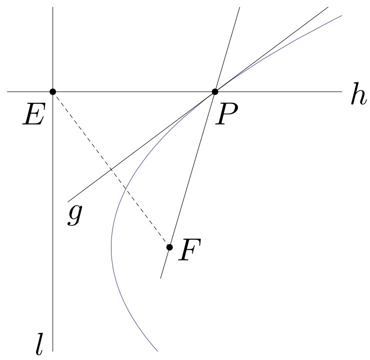


Beweis: Wir nehmen an, dass P auf dem rechten Ast der Hyperbel liegt. Dann gilt $|F_1P| - |PF_2| = 2a$, wobei a die Länge der Halbachse ist. Sei F_1^* der an g gespiegelte Punkt F_1. Da P auf g liegt, erhalten wir $|F_1P| = |F_1^*P|$. Da g eine Winkelsymmetrale der Geraden $\ell(F_1, P)$ und $\ell(F_2, P)$ ist, liegt F_1^* auf $\ell(F_2, P)$, und zwar auf der anderen Seite von g als F_1 und somit auf derselben Seite von g wie F_2. Wegen $|F_1P| - |PF_2| = 2a$ gilt auch $|F_1^*P| - |PF_2| = 2a$. Damit erhalten wir schließlich $|F_1^*F_2| = 2a$.

Sei Q jetzt irgendein Punkt auf g, der ungleich P ist. Aus der Dreiecksungleichung folgt $|F_1^*F_2| + |QF_2| > |F_1^*Q|$, da Q nicht auf der Geraden durch F_1^* und F_2 liegt. Da Q auf g liegt und F_1^* der an g gespiegelte Punkt F_1 ist, gilt auch $|F_1Q| = |F_1^*Q|$. Wir erhalten $|F_1Q| - |QF_2| < |F_1^*F_2| = 2a$. Somit liegt Q links vom rechten Hyperbelast. Da alle Punkte der Gerade g außer P links vom rechten Hyperbelast liegen, ist g eine Tangente. □

Schließlich kommen wir zur Parabel.

Satz 106: *Sei P ein Punkt auf einer Parabel mit Brennpunkt F und Leitlinie l. Sei h die Senkrechte auf l durch P und E ihr Schnittpunkt mit l. Sei g die Winkelsymmetrale der Geraden $\ell(F,P)$ und h, die die Strecke $\overline{FE}$ schneidet. Dann ist g eine Tangente an die Parabel im Punkt P.*

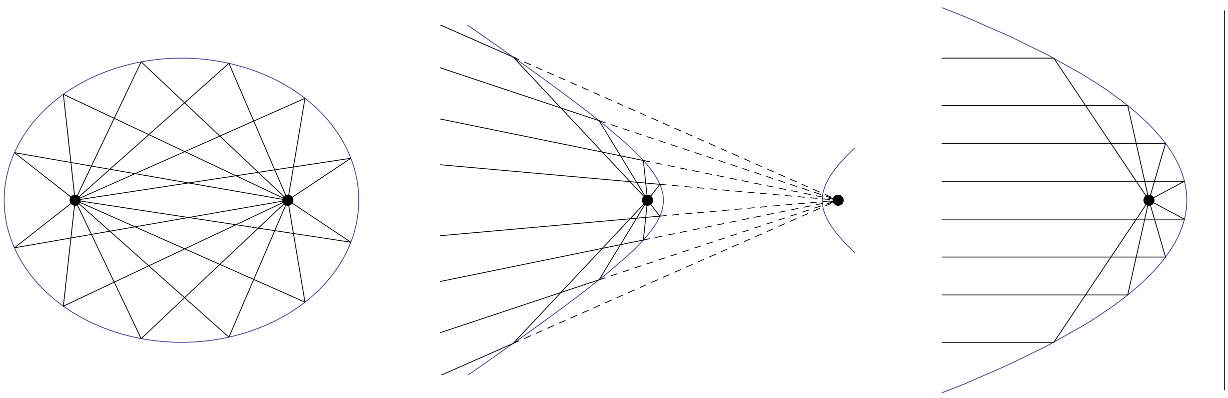


Beweis: Es gilt $|FP| = |EP|$, da P auf der Parabel liegt. Da weiters g die Symmetrale des Winkels $\measuredangle FPE$ ist, ist E der an g gespiegelte Punkt F. Sei jetzt Q irgendein Punkt auf der Gerade g, der ungleich P ist. Sei D der Fußpunkt des Lotes von Q auf die Leitlinie l. Wegen $Q \neq P$ gilt $D \neq E$ und daher auch $|DQ| < |EQ|$. Da E der an der Gerade g gespiegelte Punkt F ist und Q auf g liegt, gilt auch $|FQ| = |EQ|$. Wir erhalten daher $|DQ| < |FQ|$. Das zeigt, dass der Normalabstand von Q zur Leitlinie l kleiner ist als der Abstand von Q zum Brennpunkt F. Somit liegt Q außerhalb der Parabel, das heißt auf der Seite der Parabel, auf der sich die Leitlinie l befindet. Da alle Punkte der Gerade g außer P auf dieser Seite der Parabel liegen, ist g eine Tangente an die Parabel. □

Diese Tangentenkonstruktion hat praktische Anwendungen. Ein Lichtstrahl, der vom Brennpunkt F_1 einer Ellipse ausgeht, die Ellipse im Punkt P trifft und an dieser gespiegelt wird, geht dann durch den Brennpunkt F_2. Der einfallende Lichtstrahl schließt ja mit der Tangente im Punkt P denselben Winkel ein wie der ausfallende Lichtstrahl. Da die Tangente die Winkelsymmetrale der Gerade durch F_1 und P, das ist die Bahn des einfallenden Lichtstrahls, und der Gerade durch F_2 und P ist, muss der ausfallende Lichtstrahl entlang dieser zweiten Geraden verlaufen und somit auch durch F_2. Lichtstrahlen einer Lampe im Brennpunkt F_1 werden im Brennpunkt F_2 gebündelt.

Ähnliches gilt für die Hyperbel. Ein Lichtstrahl, der vom Brennpunkt F_1 einer Hyperbel ausgeht, die Hyperbel im Punkt P trifft und an dieser gespiegelt wird, verläuft dann so als ob er aus dem Brennpunkt F_2 kommen würde. Lichtstrahlen einer Lampe im Brennpunkt F_1 werden gestreut.

Eine Parabel erzeugt parallele Lichtstrahlen. Ein Lichtstrahl, der vom Brennpunkt F einer Parabel ausgeht, die Parabel im Punkt P trifft und an dieser gespiegelt wird, verläuft dann senkrecht zur Leitlinie l. Die Tangente im Punkt P ist ja die Winkelsymmetrale der Gerade durch F und P und der Senkrechten auf die Leitlinie l durch P. Lichtstrahlen einer Lampe im Brennpunkt F werden an der Parabel so reflektiert, dass sie dann senkrecht zur Leitlinie, also parallel zueinander laufen.



7. Tangentengleichung

Wir suchen die Gleichung der Tangente im Punkt (x_0, y_0) an einen Kegelschnitt in Hauptlage.

Satz 107: *Sei (x_0, y_0) ein Punkt auf der Ellipse, deren Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist. Die Gleichung der Tangente in diesem Punkt ist dann $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.*

Beweis: Sei $\mathbf{u}$ der Vektor vom Punkt (x_0, y_0) zum Brennpunkt $(-e, 0)$ und $\mathbf{v}$ der Vektor vom Punkt (x_0, y_0) zum Brennpunkt $(e, 0)$. Die Tangente ist die Winkelsymmetrale der beiden Geraden durch den Punkt (x_0, y_0) mit den Richtungsvektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$, und zwar die, die nicht in dem von diesen Vektoren gebildeten Winkel liegt. Daher ist $\frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u} + \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$ ein Normalvektor der Tangente.

Es gilt $\mathbf{u} = \binom{-e-x_0}{-y_0}$ und $\mathbf{v} = \binom{e-x_0}{-y_0}$. Da das die Vektoren von einem Punkt auf der Ellipse zu den beiden Brennpunkten sind, muss $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| = 2a$ gelten. Um $\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|$ zu berechnen, berechnen wir zuerst $\|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 = (e + x_0)^2 + y_0^2 - (e - x_0)^2 - y_0^2 = 4x_0e$. Dividiert man links durch $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ und rechts durch $2a$, was ja das gleiche ist, dann erhält man $\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\| = \frac{2x_0e}{a}$.

Wir haben bereits oben herausgefunden, dass $\frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u} + \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$ ein Normalvektor der Tangente im Punkt (x_0, y_0) an die Ellipse ist. Unter Verwendung obiger Resultate ist dieser gleich

$$\frac{1}{\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|}\binom{(-e-x_0)\|\mathbf{v}\|+(e-x_0)\|\mathbf{u}\|}{-y_0\|\mathbf{v}\|-y_0\|\mathbf{u}\|} = \frac{-1}{\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|}\binom{x_0(\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|)-e(\|\mathbf{u}\|-\|\mathbf{v}\|)}{y_0(\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|)} = \frac{-2}{a\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|}\binom{a^2x_0-e^2x_0}{a^2y_0}$$

Berücksichtigt man noch, dass $a^2 - e^2 = b^2$ gilt, dann erhält man, dass auch $\binom{b^2x_0}{a^2y_0}$ ein Normalvektor der Tangente ist. Da die Tangente durch den Punkt (x_0, y_0) geht, ist $(x - x_0)b^2x_0 + (y - y_0)a^2y_0 = 0$ ihre Gleichung. Umformen ergibt $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}$. Da (x_0, y_0) ein Punkt auf der Ellipse ist, gilt auch $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$. Damit erhält man $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ als Gleichung der Tangente. □

Ein analoges Resultat gilt für die Hyperbel.

Satz 108: *Sei (x_0, y_0) ein Punkt auf der Hyperbel, deren Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist. Die Gleichung der Tangente in diesem Punkt ist dann $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.*

Beweis: Der Beweis verläuft so wie für den vorigen Satz. Nur ist jetzt $\frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u} - \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$ ein Normalvektor der Tangente und es gilt $\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\| = 2a$ und $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| = \frac{2x_0e}{a}$. (Am anderen Ast der Hyperbel muss man a durch $-a$ ersetzen.) □

Die Tangentengleichung für die Parabel ist einfacher zu berechnen.

Satz 109: *Sei (x_0, y_0) ein Punkt auf der Parabel, deren Gleichung $y^2 = 2px$ ist. Die Gleichung der Tangente in diesem Punkt ist dann $yy_0 = px + px_0$.*

Beweis: Sei $\mathbf{u}$ der Vektor vom Punkt (x_0, y_0) zum Brennpunkt $(\frac{p}{2}, 0)$ und $\mathbf{v}$ der Vektor vom Punkt (x_0, y_0) normal zur Leitlinie und bis zu dieser. Da (x_0, y_0) auf der Parabel liegt, sind diese beiden Vektoren gleich lang. Die Tangente ist die Winkelsymmetrale der beiden Geraden durch den Punkt (x_0, y_0) mit den Richtungsvektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$, und zwar die, die in dem von diesen Vektoren gebildeten Winkel liegt. Daher ist $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ ein Normalvektor der Tangente. Wegen $\mathbf{u} = \frac{1}{2}\binom{p-2x_0}{-2y_0}$ und $\mathbf{v} = \frac{1}{2}\binom{-p-2x_0}{0}$ erhalten wir $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \binom{p}{-y_0}$. Da die Tangente durch den Punkt (x_0, y_0) geht, ist $p(x - x_0) - y_0(y - y_0) = 0$ ihre Gleichung. Wegen $y_0^2 = 2px_0$ wird diese Gleichung zu $yy_0 = px + px_0$. □

Berührbedingungen: Gegeben ist ein Kegelschnitt und eine Gerade. Gesucht ist eine Bedingung dafür, dass die Gerade Tangente an den Kegelschnitt ist. Die Geradengleichung schreiben wir in der Form $ux + vy = w$ mit $u, v, w \in \mathbb{R}$. Eine Gerade, die durch den Nullpunkt geht, kann nicht Tangente einer Ellipse oder Hyperbel in Hauptlage sein, da $\frac{xx_0}{a^2} \pm \frac{yy_0}{b^2} = 1$ die Tangentengleichung ist. Daher können wir in diesen Fällen $w \neq 0$ annehmen und die Geradengleichung in der Form $ux + vy = 1$ schreiben.

Satz 110: *Die Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ hat die Gerade $ux + vy = 1$ als Tangente genau dann, wenn $u^2a^2 + v^2b^2 = 1$ gilt.*

Beweis: Wir nehmen an, dass die Gerade $ux + vy = 1$ eine Tangente ist. Sei (x_0, y_0) der Berührpunkt. Da er auf der Ellipse liegt, gilt $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$. Die Gleichung dieser Tangente ist dann $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$. Diese Gleichung und $ux + vy = 1$ sind Gleichungen derselben Gerade. Es gilt daher $u = \frac{x_0}{a^2}$ und $v = \frac{y_0}{b^2}$. Es folgt $x_0 = a^2u$ und $y_0 = b^2v$. Setzt man das in die Ellipsengleichung ein, so hat man $\frac{a^4u^2}{a^2} + \frac{b^4v^2}{b^2} = 1$, das heißt $u^2a^2 + v^2b^2 = 1$.
Wir nehmen an, dass $u^2a^2 + v^2b^2 = 1$ gilt. Sei $x_0 = a^2u$ und $y_0 = b^2v$. Dann liegt der Punkt (x_0, y_0) auf der Ellipse, da ja $u^2a^2 + v^2b^2 = 1$ gilt. Die Gleichung der Tangente in diesem Punkt ist $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$. Einsetzen von x_0 und y_0 und Kürzen ergibt $ux + vy = 1$. Damit ist gezeigt, dass die Gerade mit dieser Gleichung Tangente ist. $\square$

Satz 111: *Die Hyperbel mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hat die Gerade $ux + vy = 1$ als Tangente genau dann, wenn $u^2a^2 - v^2b^2 = 1$ gilt.*

Beweis: Man muss im vorhergehenden Beweis nur b^2 durch $-b^2$ ersetzen. $\square$

Satz 112: *Die Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2px$ hat die Gerade $ux + vy = w$ als Tangente genau dann, wenn $v^2p = -2uw$ gilt.*

Beweis: Die Gerade $ux + vy = w$ sei eine Tangente. Sei (x_0, y_0) der Berührpunkt. Da er auf der Parabel liegt, gilt $y_0^2 = 2px_0$. Die Tangentengleichung $-px + yy_0 = px_0$ stellt ebenfalls die Gerade $ux + vy = w$ dar. Es gilt daher $u = -\lambda p$, $v = \lambda y_0$ und $w = \lambda px_0$ für ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es folgt $u \neq 0$ und $\lambda = -\frac{u}{p}$ und daraus $x_0 = -\frac{w}{u}$ und $y_0 = -\frac{pv}{u}$. Setzt man das in die Parabelgleichung ein, so hat man $\frac{p^2v^2}{u^2} = -\frac{2pw}{u}$, das heißt $v^2p = -2uw$.
Wir nehmen an, dass $v^2p = -2uw$ gilt. Es muss $u \neq 0$ gelten, sonst wäre auch v null und wir hätten keine Geradengleichung mehr. Sei $x_0 = -\frac{w}{u}$ und $y_0 = -\frac{pv}{u}$. Dann liegt der Punkt (x_0, y_0) auf der Parabel, da ja $v^2p = -2uw$ gilt. Die Gleichung der Tangente in diesem Punkt ist $yy_0 = px + px_0$. Setzt man x_0 und y_0 ein und formt um, dann erhält man $ux + vy = w$. Daher ist die Gerade mit dieser Gleichung eine Tangente. $\square$

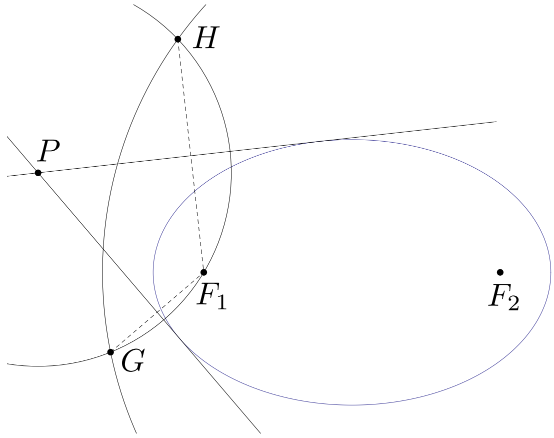
Beispiel: Gesucht ist eine Ellipse in Hauptlage, die durch den Punkt $(4, \frac{6}{5})$ geht und die Gerade $3x + 10y = 25$ als Tangente hat.

Die Gleichung der Ellipse ist $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Es gilt also $\frac{16}{a^2} + \frac{36}{25b^2} = 1$. Die Berührbedingung ist $u^2a^2 + v^2b^2 = 1$. Da die Gerade $\frac{3}{25}x + \frac{2}{5}y = 1$ Tangente ist, gilt auch $\frac{9}{625}a^2 + \frac{4}{25}b^2 = 1$, das heißt $25b^2 = \frac{625}{4} - \frac{9}{4}a^2$. Setzt man das in die Gleichung $\frac{16}{a^2} + \frac{36}{25b^2} = 1$ ein und formt um, so ergibt sich $9a^4 - 625a^2 + 10000 = 0$. Löst man diese quadratische Gleichung, so erhält man $a^2 = 25$ und $a^2 = \frac{400}{9}$ als Lösungen. Aus der Gleichung $25b^2 = \frac{625}{4} - \frac{9}{4}a^2$ folgt dann $b^2 = 4$ im ersten und $b^2 = \frac{9}{4}$ im zweiten Fall.

Wir erhalten die Ellipsen mit Gleichungen $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ und $\frac{9x^2}{400} + \frac{4y^2}{9} = 1$ als Lösungen. Beide gehen durch den Punkt $(4, \frac{6}{5})$ und haben die Gerade $3x + 10y = 25$ als Tangente.

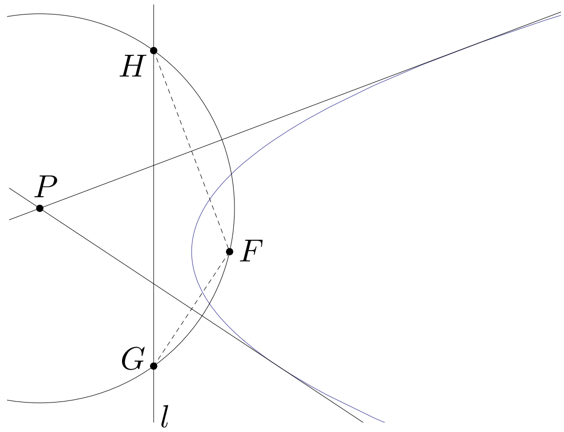
8. Tangenten von einem Punkt an einen Kegelschnitt

Gegeben ist eine Ellipse mit Brennpunkten F_1 und F_2, deren große Halbachse Länge a hat. Sei P ein Punkt, der außerhalb der Ellipse liegt. Die Tangenten vom Punkt P an die Ellipse sind zu konstruieren.



Wir nehmen die im Beweis von Satz 104 verwendete Methode zu Hilfe. Wir konstruieren zuerst den Punkt F_1^*. Er hat Abstand $2a$ von F_2 und von jedem Punkt der Tangente denselben Abstand wie F_1, da die Tangente ja die Symmetrale der Strecke $\overline{F_1F_1^*}$ ist. Somit liegt F_1^* auf dem Kreis mit Mittelpunkt F_2 und Radius $2a$ und auf dem Kreis mit Mittelpunkt P durch F_1. Diese beiden Kreise haben zwei Schnittpunkte G und H. Sie spielen die Rolle des Punktes F_1^*. Die Symmetralen der Strecken $\overline{F_1G}$ und $\overline{F_1H}$ sind dann die beiden Tangenten durch P an die Ellipse. Die Berührpunkte dieser beiden Tangenten sind die Schnittpunkte der Ellipse mit den Geraden $\ell(F_2, G)$ und $\ell(F_2, H)$.

Für die Hyperbel funktioniert dieselbe Konstruktion, da auch in diesem Fall der Punkt F_1^* Abstand $2a$ von F_2 hat und von jedem Punkt der Tangente denselben Abstand wie F_1.



Im Fall der Parabel muss man ein wenig anders vorgehen. Spiegelt man den Brennpunkt F an einer Tangente, dann erhält man einen Punkt E, der auf der Leitlinie l liegt. Das wird im Beweis von Satz 106 gezeigt. Insbesondere hat E von jedem Punkt der Tangente denselben Abstand wie F. Wir zeichnen den Kreis mit Mittelpunkt P durch F. Dann muss E auf diesem Kreis und auf der Leitlinie liegen. Dieser Kreis hat zwei Schnittpunkte G und H mit der Leitlinie l. Sie spielen die Rolle des Punktes E. Daher sind die Symmetralen der Strecken $\overline{FG}$ und $\overline{FH}$ die beiden Tangenten durch P an die Parabel. Die Berührpunkte dieser beiden Tangenten sind die Schnittpunkte der Parabel mit den Senkrechten auf l durch G und H.

Polare: Um die Gleichungen der Tangenten von einem Punkt (r, s) an einen Kegelschnitt zu berechnen, verwendet man eine Gerade, die Polare zum Punkt (r, s) genannt wird. Ihre Gleichung ist dieselbe wie die der Tangente, nur setzt man anstelle des Berührpunktes (x_0, y_0) den Punkt (r, s) ein. Wir erhalten daher:

Für die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist $\frac{xr}{a^2} + \frac{ys}{b^2} = 1$ die Gleichung der Polare zum Punkt (r, s).

Für die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist $\frac{xr}{a^2} - \frac{ys}{b^2} = 1$ die Gleichung der Polare zum Punkt (r, s).

Für die Parabel $y^2 = 2px$ ist $ys = px + pr$ die Gleichung der Polare zum Punkt (r, s).

Wir haben dann folgenden Satz

Satz 113: *Sei (r, s) ein Punkt, der nicht auf dem Kegelschnitt liegt. Die Schnittpunkte der Polare zum Punkt (r, s) mit dem Kegelschnitt sind dann die Berührpunkte der Tangenten vom Punkt (r, s) aus an den Kegelschnitt. Hat die Polare keinen Schnittpunkt mit dem Kegelschnitt, dann existieren keine Tangenten vom Punkt (r, s) aus an den Kegelschnitt.*

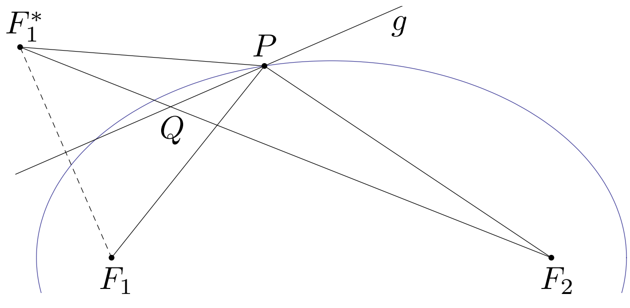
Beweis: Wir führen den Beweis nur für die Ellipse. Diese hat die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Die Gleichung der Polaren zum Punkt (r, s) ist $\frac{xr}{a^2} + \frac{ys}{b^2} = 1$. Ist (x_0, y_0) ein Schnittpunkt dieser Polare mit der Ellipse, dann gilt $\frac{x_0 r}{a^2} + \frac{y_0 s}{b^2} = 1$. Damit ist bereits gezeigt, dass der Punkt (r, s) auf der Tangente der Ellipse liegt, die Berührpunkt (x_0, y_0) hat.

Es existiere eine Tangente vom Punkt (r, s) aus an die Ellipse. Ist (x_0, y_0) ihr Berührpunkt, dann hat sie die Gleichung $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$. Da (r, s) auf der Tangente liegt, gilt $\frac{rx_0}{a^2} + \frac{sy_0}{b^2} = 1$. Das aber heißt, dass (x_0, y_0) ein Schnittpunkt der Polare mit der Ellipse ist. □

Beispiel: Gesucht sind die beiden Tangenten vom Punkt $(1, 2)$ an die Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{3} + \frac{2y^2}{3} = 1$. Die Gleichung der Polaren zum Punkt (r, s) ist $\frac{xr}{3} + \frac{2ys}{3} = 1$. Für den Punkt $(1, 2)$ erhält man $\frac{x}{3} + \frac{4y}{3} = 1$ oder $x = 3 - 4y$ als Polarengleichung. Setzt man das in die Ellipsengleichung ein, so hat man $(3 - 4y)^2 + 2y^2 = 3$ oder $y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{1}{3} = 0$. Die Lösungen sind $y_1 = 1$ und $y_2 = \frac{1}{3}$, woraus $x_1 = -1$ und $x_2 = \frac{5}{3}$ aus der Gleichung der Polaren folgt. Die Schnittpunkte der Polaren mit der Ellipse sind $(-1, 1)$ und $(\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$.
Die Gleichungen der Tangenten in diesen Punkten sind dann $-\frac{x}{3} + \frac{2y}{3} = 1$ und $\frac{5x}{9} + \frac{2y}{9} = 1$. Beide Tangenten gehen durch den Punkt $(1, 2)$.

Eindeutigkeit der Tangente: Es soll noch erwähnt werden, dass die Tangente in einem Punkt P an einen Kegelschnitt eindeutig ist. Neben der oben gefundenen Winkelsymmetrale gibt es keine andere Tangente durch den Punkt P. Wir zeigen das für die Ellipse.

Sei P ein Punkt auf der Ellipse mit Brennpunkten F_1 und F_2, deren große Halbachse Länge a hat. Sei g eine Gerade durch P, die nicht Winkelsymmetrale der Geraden $\ell(F_1, P)$ und $\ell(F_2, P)$ ist. Wir können annehmen, dass die Gerade g die Strecke $\overline{F_1 F_2}$ nicht schneidet, denn sonst geht g ja durch das Innere der Ellipse und kann keine Tangente sein. Sei F_1^* der an g gespiegelte Punkt F_1. Dieser liegt auf der anderen Seite der Gerade g als F_2. Die Geraden g und $\ell(F_2, F_1^*)$ haben einen Schnittpunkt Q. Da g nicht Winkelsymmetrale von $\ell(F_1, P)$ und $\ell(F_2, P)$ ist, liegt F_1^* nicht auf $\ell(F_2, P)$. Es gilt $|F_1^* F_2| < |F_1^* P| + |PF_2|$ nach der Dreiecksungleichung. Da P und Q auf g liegen, erhalten wir $|F_1^* Q| = |F_1 Q|$ und $|F_1^* P| = |F_1 P|$. Damit ergibt sich



$$|F_1 Q| + |QF_2| = |F_1^* Q| + |QF_2| = |F_1^* F_2| < |F_1^* P| + |PF_2| = |F_1 P| + |PF_2| = 2a$$

Das aber bedeutet, dass Q im Innern der Ellipse liegt. Da Q auch auf g liegt, kann g keine Tangente sein.

Mit einem ähnlichen Beweis kann man auch zeigen, dass nur eine Tangente in einem Punkt P an eine Hyperbel oder Parabel existiert.

9. Hauptachsentransformation

Wir untersuchen Kegelschnitte, die nicht in Hauptlage liegen. Sie sollen durch eine Drehung und eine Translation in Hauptlage gebracht werden.

Um die Vektorschreibweise verwenden zu können, schreiben wir jetzt x_1 und x_2 anstelle von x und y und bezeichnen den Vektor $\binom{x_1}{x_2}$ mit $\mathbf{x}$.

Kurven in der Ebene stellt man allgemein durch Gleichungen $f(\mathbf{x}) = 0$ dar, wobei f eine Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ ist. Für $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1$ ist die Kurve eine Ellipse und für $f(x_1, x_2) = x_2^2 - px_1$ ist sie eine Parabel. Wir überlegen uns zuerst, wie sich die Gleichung einer Kurve verändert, wenn wir auf die Kurve eine Isometrie L anwenden.

Satz 114: *Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Menge $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : f(\mathbf{x}) = 0\}$ stellen wir uns als Kurve im $\mathbb{R}^2$ vor. Sei $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Isometrie und $g = f \circ L$. Für die Kurve $\tilde{K} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : g(\mathbf{x}) = 0\}$ gilt dann $L(\tilde{K}) = K$. Die Isometrie L führt die neu gebildete Kurve $\tilde{K}$ in die vorgegebene Kurve K zurück.*

Beweis: Es gilt $\mathbf{x} \in \tilde{K} \iff g(\mathbf{x}) = 0 \iff f(L(\mathbf{x})) = 0 \iff L(\mathbf{x}) \in K$. Damit ist $\mathbf{x} \in \tilde{K} \iff L(\mathbf{x}) \in K$ gezeigt, das heißt $L(\tilde{K}) = K$. □

Wir untersuchen Kurven, die durch eine Gleichung $f(\mathbf{x}) = 0$ gegeben sind, wobei $f(\mathbf{x})$ ein Polynom in zwei Variablen vom Grad 2 ist, das heißt

$$f(x_1, x_2) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + 2a_3x_1x_2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c$$

mit rellen Koeffizienten a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 und c. Der Faktor 2 beim Koeffizienten a_3 dient der bequemeren Darstellung. Mit Hilfe der Methode aus Satz 114 wollen wir herausfinden, welche Kurven das sind.

Zuvor bringen wir dieses Polynom mit Hilfe von Matrizen in eine bequemere Form. Wir setzen $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \binom{b_1}{b_2}$. Dann gilt $\mathbf{b}^t\mathbf{x} = (b_1\ b_2)\binom{x_1}{x_2} = b_1x_1 + b_2x_2$ und $\mathbf{x}^tA\mathbf{x} = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}\binom{x_1}{x_2} = (x_1\ x_2)\binom{a_1x_1+a_3x_2}{a_3x_1+a_2x_2} = a_1x_1^2 + a_3x_1x_2 + a_3x_2x_1 + a_2x_2^2 = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + 2a_3x_1x_2$. Damit erhalten wir

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^tA\mathbf{x} + \mathbf{b}^t\mathbf{x} + c$$

Indem wir Satz 114 mit einer geeigneten Drehung anwenden, versuchen wir, den Koeffizienten von x_1x_2 in der Gleichung $f(\mathbf{x}) = 0$ zum Verschwinden zu bringen. Wir nehmen daher an, dass $a_3 \neq 0$ gilt, sonst ist ja nichts zu tun. Eine Drehung um den Nullpunkt hat eine Matrix $R = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$, wobei $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ Vektoren der Länge 1 mit $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ sind. Nach Satz 114 ist $f(R\mathbf{x}) = 0$ die Gleichung der Kurve, die durch die Drehung um den Nullpunkt, deren Matrix R ist, in die vorliegende Kurve, die die Gleichung $f(\mathbf{x}) = 0$ hat, übergeht. Wegen $(R\mathbf{x})^t = \mathbf{x}^tR^t$ erhalten wir

$$(*) \qquad f(R\mathbf{x}) = \mathbf{x}^tR^tAR\mathbf{x} + \mathbf{b}^tR\mathbf{x} + c$$

Wir versuchen R so zu bestimmen, dass $R^tAR = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ gilt, wobei λ_1 und λ_2 reelle Zahlen sind. Damit erhalten wir dann $\mathbf{x}^tR^tAR\mathbf{x} = \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2$. Wir haben erreicht, dass x_1x_2 nicht mehr vorkommt.

Die Matrix R hat die Spaltenvektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$. Die Matrix R^t hat daher die Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ als Zeilen. Aus der Definition der Matrixmultiplikation folgt $R^tAR = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^tA\mathbf{u} & \mathbf{u}^tA\mathbf{v} \\ \mathbf{v}^tA\mathbf{u} & \mathbf{v}^tA\mathbf{v} \end{pmatrix}$. Insbesondere hat die Matrix R^tAR Eintragung $\mathbf{v}^tA\mathbf{u}$ links unten und $\mathbf{u}^tA\mathbf{v}$ rechts oben. Es muss also $\mathbf{v}^tA\mathbf{u} = 0$ und $\mathbf{u}^tA\mathbf{v} = 0$ gelten, das heißt $\langle \mathbf{v}, A\mathbf{u} \rangle = 0$ und $\langle \mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle = 0$. Wegen $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ stehen $A\mathbf{u}$ und $\mathbf{u}$ senkrecht auf $\mathbf{v}$, das heißt $A\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{u}$ für ein $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.

Ebenso stehen $A\mathbf{v}$ und $\mathbf{v}$ senkrecht auf $\mathbf{u}$, das heißt $A\mathbf{v} = \lambda_2\mathbf{v}$ für ein $\lambda_2 \in \mathbb{R}$. Somit sind λ_1 und λ_2 Eigenwerte der Matrix A und $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ sind zugehörige Eigenvektoren.

Da A symmetrisch ist und $a_3 \neq 0$ gilt, sind λ_1 und λ_2 nach Satz 95 reell und verschieden und die Eigenvektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ sind orthogonal. Da jedes Vielfache von $\mathbf{u}$ ebenfalls Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 ist, können wir den Vektor $\mathbf{u}$ so wählen, dass er Länge 1 hat. Es existiert ein Winkel $\alpha \in \mathbb{W}$ mit $\mathbf{u} = \left(\begin{smallmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{smallmatrix}\right)$. Da $\mathbf{v}$ senkrecht auf den Vektor $\mathbf{u}$ steht, ist der Vektor $\mathbf{w} = \left(\begin{smallmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{smallmatrix}\right)$ ein Vielfaches von $\mathbf{v}$. Da aber jedes Vielfache von $\mathbf{v}$ ebenfalls Eigenvektor zum Eigenwert λ_2 ist, können wir $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ wählen. Wir erhalten $R = \left(\begin{smallmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{smallmatrix}\right)$. Da auch $\mathbf{u}^tA\mathbf{u} = \mathbf{u}^t\lambda_1\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{u}^t\mathbf{u} = \lambda_1$ und $\mathbf{v}^tA\mathbf{v} = \mathbf{v}^t\lambda_2\mathbf{v} = \lambda_2\mathbf{v}^t\mathbf{v} = \lambda_2$ gilt, ergibt sich $R^tAR = \left(\begin{smallmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{smallmatrix}\right)$. Wir setzen $D = \left(\begin{smallmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{smallmatrix}\right)$. Diese Matrix R verwenden wir in $(*)$.

Sei $g(\mathbf{x}) = f(R\mathbf{x})$. Um herauszufinden, welche Kurve durch die Gleichung $f(\mathbf{x}) = 0$ gegeben ist, genügt es, die neue Kurve, die die Gleichung $g(\mathbf{x}) = 0$ hat, zu untersuchen. Nach $(*)$ gilt $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^tR^tAR\mathbf{x} + \mathbf{b}^tR\mathbf{x} + c$. Wir haben R^tAR bereits berechnet. Weiters ist $\mathbf{b}^tR$ ein Zeilenvektor, den wir mit $\mathbf{d}^t$ bezeichnen. Setzen wir das ein, dann erhalten wir

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^tD\mathbf{x} + \mathbf{d}^t\mathbf{x} + c = \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + d_1x_1 + d_2x_2 + c$$

Wir haben x_1x_2 zum Verschwinden gebracht.

Um die Gleichung $g(\mathbf{x}) = 0$ in eine bekannte Form zu bringen, wenden wir eine Translation an. Wir behandeln zuerst den Fall $\lambda_1 \neq 0$ und $\lambda_2 \neq 0$. Um auf vollständige Quadrate zu ergänzen, setzen wir $r = \frac{d_1}{2\lambda_1}$, $s = \frac{d_2}{2\lambda_2}$ und $e = \lambda_1r^2 + \lambda_2s^2 - c$. Damit erhalten wir

$$g(\mathbf{x}) = \lambda_1(x_1^2 + 2rx_1 + r^2) + \lambda_2(x_2^2 + 2sx_2 + s^2) - e = \lambda_1(x_1 + r)^2 + \lambda_2(x_2 + s)^2 - e$$

Sei $h(\mathbf{x}) = \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 - e$ und $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \left(\begin{smallmatrix}r\\ s\end{smallmatrix}\right)$. Es gilt $g(T(\mathbf{x})) = h(\mathbf{x})$. Die Translation T führt die Kurve mit der Gleichung $h(\mathbf{x}) = 0$ über in die Kurve mit der Gleichung $g(\mathbf{x}) = 0$. Die ursprüngliche Kurve, die Gleichung $f(\mathbf{x}) = 0$ hat, erhält man durch eine Translation und eine Drehung aus der Kurve mit der Gleichung $h(\mathbf{x}) = 0$. Diese Gleichung ist

$$\lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 = e \quad \text{oder} \quad \tfrac{\lambda_1}{e}x_1^2 + \tfrac{\lambda_2}{e}x_2^2 = 1$$

Sind $\frac{\lambda_1}{e}$ und $\frac{\lambda_2}{e}$ beide > 0, dann haben wir eine Ellipse. Ist eine dieser Zahlen positiv, die andere negativ, dann haben wir eine Hyperbel. Sind beide negativ, dann ist die Kurve die leere Menge. Ist $e = 0$, dann können wir gar nicht durch e dividieren. Haben in diesem Fall λ_1 und λ_2 gleiches Vorzeichen, dann besteht die Kurve nur aus einem Punkt. Haben sie verschiedene Vorzeichen, dann besteht die Kurve aus zwei einander schneidenen Geraden.

Wir behandeln noch den Fall, dass λ_1 oder λ_2 gleich 0 ist, sagen wir es sei λ_2. Es sei aber $\lambda_1 \neq 0$, sonst ist $g(\mathbf{x}) = 0$ ja nur eine Geradengleichung. Außerdem sei $d_2 \neq 0$, sonst kommt ja x_2 gar nicht mehr vor. Dann würde die Kurve aus zwei oder einer zur x-Achse senkrechten Geraden bestehen oder die leere Menge sein. Wir haben dann

$$g(\mathbf{x}) = \lambda_1x_1^2 + d_1x_1 + d_2x_2 + c$$

Wir setzen $r = \frac{d_1}{2\lambda_1}$, $e = c - \lambda_1r^2$ und $s = \frac{e}{d_2}$ und ergänzen auf ein vollständiges Quadrat

$$g(\mathbf{x}) = \lambda_1(x_1^2 + 2rx_1 + r^2) + d_2x_2 + e = \lambda_1(x_1 + r)^2 + d_2(x_2 + s)$$

Sei $h(\mathbf{x}) = \lambda_1x_1^2 + d_2x_2$ und $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \left(\begin{smallmatrix}r\\ s\end{smallmatrix}\right)$. Dann gilt $g(T(\mathbf{x})) = h(\mathbf{x})$. Die Translation T führt die Kurve mit der Gleichung $h(\mathbf{x}) = 0$ über in die Kurve mit der Gleichung $g(\mathbf{x}) = 0$. Die ursprüngliche Kurve, die Gleichung $f(\mathbf{x}) = 0$ hat, erhält man durch eine Translation und eine Drehung aus der Kurve mit der Gleichung $h(\mathbf{x}) = 0$. Diese Gleichung ist

$$x_1^2 = \tfrac{-d_2}{\lambda_1}x_2$$

Das ist die Gleichung einer Parabel.

Es folgen Beispiele für Hauptachsentransformationen. Wir kehren wieder zur gewohnten Schreibweise zurück und schreiben x und y anstelle von x_1 und x_2.

Beispiel: Welcher Kegelschnitt wird durch die Gleichung

$$6xy + 8y^2 - 24x - 52y + 71 = 0$$

dargestellt? Wir bringen ihn mit der oben beschriebenen Methode in Hauptlage.
Wir haben $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{smallmatrix}\right)$ und $\mathbf{b}^t = (-24 \ \ -52)$. Das charakteristische Polynom der Matrix A ist $\left|\begin{smallmatrix} -\lambda & 3 \\ 3 & 8-\lambda \end{smallmatrix}\right| = -\lambda(8-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 8\lambda - 9$. Die Eigenwerte sind $\lambda_{1,2} = 4 \pm \sqrt{25}$, das heißt $\lambda_1 = 9$ und $\lambda_2 = -1$. Zugehörige Eigenvektoren sind Lösungen der Gleichungssysteme $\left(\begin{smallmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{smallmatrix}\right)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{smallmatrix}\right)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Wir erhalten $\mathbf{u} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ und $\mathbf{v} = \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Eigenvektoren der Länge 1 sind $\frac{1}{\sqrt{10}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ und $\frac{1}{\sqrt{10}}\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Diese Vektoren sind die Spalten der Matrix R, also $R = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Wir berechnen $\mathbf{d}^t = \mathbf{b}^t R = (-24 \ \ -52)\frac{1}{\sqrt{10}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right) = (-18\sqrt{10} \ \ 2\sqrt{10})$.
Wir erhalten den Kegelschnitt mit der Gleichung

$$9x^2 - y^2 - 18\sqrt{10}x + 2\sqrt{10}y + 71 = 0$$

der durch die Rotation mit Matrix R in den vorgegebenen Kegelschnitt übergeführt wird.
In dieser Gleichung müssen wir auf vollständige Quadrate ergänzen. Das führt zu

$$9(x^2 - 2\sqrt{10}x + 10) - (y^2 - 2\sqrt{10}y + 10) - 80 + 71 = 0 \quad \text{oder} \quad 9(x - \sqrt{10})^2 - (y - \sqrt{10})^2 = 9$$

Wir erhalten die Gleichung $x^2 - \frac{1}{9}y^2 = 1$ eines Kegelschnitts, der durch die Translation mit dem Vektor $\sqrt{10}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ in den Kegelschnitt mit der vorherigen Gleichung übergeht. Wir haben eine Hyperbel in Hauptlage mit $a = 1$ und $b = 3$ erhalten.

Beispiel: Wir ändern im letzten Beispiel nur die Konstante 71 auf 80. Das ergibt die Gleichung $6xy + 8y^2 - 24x - 52y + 80 = 0$. Dieselbe Rechnung wie oben führt dann zu

$$9(x^2 - 2\sqrt{10}x + 10) - (y^2 - 2\sqrt{10}y + 10) - 80 + 80 = 0 \quad \text{oder} \quad 9(x - \sqrt{10})^2 - (y - \sqrt{10})^2 = 0$$

und schließlich zu $9x^2 - y^2 = 0$. Das ist äquivalent zu $(3x - y)(3x + y) = 0$. Das ist die Gleichung der Kurve, die aus den beiden Geraden $3x - y = 0$ und $3x + y = 0$ besteht. Die ursprüngliche Kurve besteht daher ebenfalls aus zwei Geraden, die einander schneiden.

Beispiel: Welcher Kegelschnitt wird durch die folgende Gleichung gegeben

$$x^2 + 2xy + y^2 + 6x + 2y = 0$$

Wir haben $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\mathbf{b}^t = (6 \ 2)$. Das charakteristische Polynom der Matrix A ist $\left|\begin{smallmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{smallmatrix}\right| = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda$. Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 2$. Die Eigenvektoren sind Lösungen der Gleichungssysteme $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ und $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, also $\mathbf{u} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\mathbf{v} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Eigenvektoren der Länge 1 sind $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Sie sind die Spalten der Matrix R, das heißt $R = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Wir berechnen $\mathbf{d}^t = \mathbf{b}^t R = (6 \ 2)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = (2\sqrt{2} \ \ 4\sqrt{2})$. Wir erhalten den Kegelschnitt mit der Gleichung

$$2y^2 + 2\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y = 0 \quad \text{oder} \quad y^2 + \sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y = 0$$

der durch die Rotation mit Matrix R in den gegebenen Kegelschnitt übergeführt wird.
In dieser Gleichung müssen wir auf ein vollständiges Quadrat ergänzen. Das führt zu

$$(y^2 + 2\sqrt{2}y + 2) + \sqrt{2}x - 2 = 0 \quad \text{oder} \quad (y + \sqrt{2})^2 + \sqrt{2}(x - \sqrt{2}) = 0$$

Schließlich erhalten wir die Gleichung $y^2 + \sqrt{2}x = 0$ eines Kegelschnitts, der durch die Translation mit dem Vektor $\sqrt{2}\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ in den Kegelschnitt mit der vorherigen Gleichung übergeht. Wir haben eine Parabel in Hauptlage mit $p = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ erhalten.

10. Leitlinie und Polarkoordinaten

Üblicherweise werden die Kegelschnitte unterschiedlich definiert. Während Ellipse und Hyperbel mit Hilfe von zwei Brennpunkten definiert werden, wird für die Parabel ein Brennpunkt und eine Leitlinie verwendet. Man kann jedoch die Kegelschnitte auch einheitlich mit Hilfe eines Brennpunktes und einer Leitlinie definieren.

Seien c und d reelle Zahlen. Sei $(c,0)$ der Brennpunkt F und die Senkrechte zur x-Achse durch $(d,0)$ sei die Leitlinie l. Sei weiters $v>0$. Wir suchen die Menge aller Punkte (x,y), deren Abstand zum Brennpunkt F das v-fache ihres Normalabstandes zur Leitlinie l ist. Der Abstand von (x,y) zum Brennpunkt $(c,0)$ ist $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Der Normalabstand von (x,y) zur Leitlinie l ist $|x-d|$. Wir erhalten daher die Gleichung

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=v|x-d| \quad \text{oder} \quad (x-c)^2+y^2=v^2(x-d)^2$$

Ausquadrieren und Zusammenfassen ergibt

$$(*) \qquad x^2(1-v^2)+2x(v^2d-c)+c^2-v^2d^2+y^2=0$$

Wir unterscheiden die Fälle $v=1$ und $v\neq 1$.

Parabel: Im Fall $v=1$ ist der Abstand des Punktes (x,y) zum Brennpunkt und zur Leitlinie gleich groß. Das ist die Definition der Parabel, die wir schon früher hatten. Setzt man $v=1$ in die Gleichung $(*)$ ein, so ergibt sich

$$2x(d-c)+c^2-d^2+y^2=0 \quad \text{oder} \quad y^2=2(c-d)(x-\tfrac{c+d}{2})$$

Hier sieht man ebenfalls, dass eine Parabel vorliegt, die durch eine Translation in Hauptlage übergeführt werden kann. Man hat dann die Gleichung $y^2=2(c-d)x$.

Ellipse und Hyperbel: Sei jetzt $v\neq 1$. In diesem Fall kann man die Gleichung $(*)$ weiter umformen. Ergänzen auf ein vollständiges Quadrat ergibt

$$(1-v^2)(x^2+2x\tfrac{v^2d-c}{1-v^2}+(\tfrac{v^2d-c}{1-v^2})^2)+y^2=v^2d^2-c^2+\tfrac{(v^2d-c)^2}{1-v^2}$$

Rechnet man die rechte Seite aus und fasst zusammen, so erhält man

$$(1-v^2)(x+\tfrac{v^2d-c}{1-v^2})^2+y^2=\tfrac{v^2(d-c)^2}{1-v^2}$$

Dividiert man noch durch die rechte Seite, so hat man

$$\tfrac{(1-v^2)^2}{v^2(d-c)^2}(x+\tfrac{v^2d-c}{1-v^2})^2+\tfrac{1-v^2}{v^2(d-c)^2}\,y^2=1$$

Durch eine entsprechende Translation kann man den Kegelschnitt in Hauptlage bringen

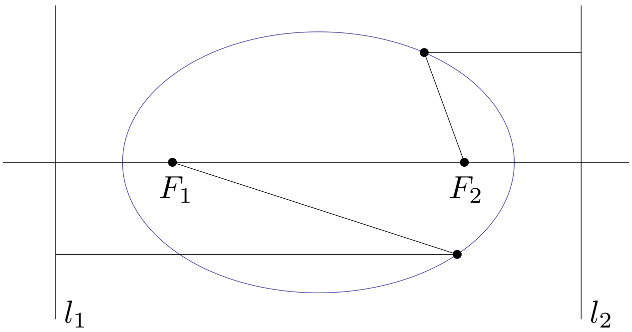
$$\tfrac{(1-v^2)^2}{v^2(d-c)^2}\,x^2+\tfrac{1-v^2}{v^2(d-c)^2}\,y^2=1$$

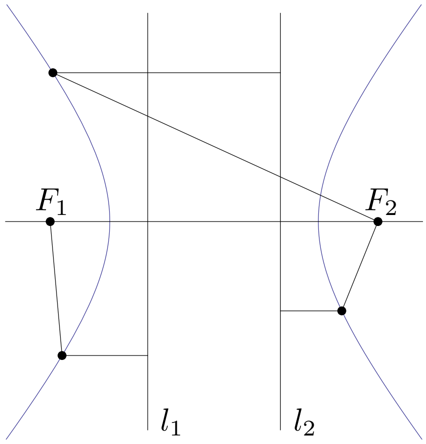
Man sieht, dass der Koeffizient von x^2 immer größer als Null ist, der Koeffizient von y^2 kann beide Vorzeichen haben.

Gilt $0<v<1$, dann ist auch der Koeffizient von y^2 positiv. Es liegt eine Ellipse vor mit $a^2=\frac{v^2(d-c)^2}{(1-v^2)^2}$ und $b^2=\frac{v^2(d-c)^2}{1-v^2}$. Es folgt $\frac{b^2}{a^2}=1-v^2$ und daraus $v^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{e^2}{a^2}$, also $v=\frac{e}{a}$. Weiters folgt $(d-c)^2=b^2\frac{1-v^2}{v^2}=\frac{b^4}{e^2}$, das heißt $|d-c|=\frac{b^2}{e}$. Wir sehen, dass der Abstand von Brennpunkt und Leitlinie gleich $\frac{b^2}{e}$ ist und das Verhältnis v gleich $\frac{e}{a}$.

Gilt $v>1$, dann ist der Koeffizient von y^2 negativ. Es liegt eine Hyperbel vor mit $a^2=\frac{v^2(d-c)^2}{(1-v^2)^2}$ und $b^2=\frac{v^2(d-c)^2}{v^2-1}$. Es folgt $\frac{b^2}{a^2}=v^2-1$ und daraus $v^2=\frac{a^2+b^2}{a^2}=\frac{e^2}{a^2}$, also wieder $v=\frac{e}{a}$. Weiters folgt $(d-c)^2=b^2\frac{v^2-1}{v^2}=\frac{b^4}{e^2}$, das heißt $|d-c|=\frac{b^2}{e}$. Wir sehen, dass der Abstand von Brennpunkt und Leitlinie gleich $\frac{b^2}{e}$ ist und das Verhältnis v gleich $\frac{e}{a}$, genauso wie bei der Ellipse. Nur ist $\frac{e}{a}$ im Gegensatz zur Ellipse jetzt größer als 1.

Bei einer Ellipse zeichnen wir links vom linken Brennpunkt F_1 und rechts vom rechten Brennpunkt F_2 jeweils im Abstand $\frac{b^2}{e}$ senkrecht zur Hauptachse eine Leitlinie. Die Ellipse ist dann die Menge aller Punkte, deren Abstand zum Brennpunkt F_1 das $\frac{e}{a}$-fache des Abstandes zur Leitlinie l_1 beträgt. Genau dieselbe Aussage gilt auch für F_2 und l_2.





Bei einer Hyperbel zeichnen wir rechts vom linken Brennpunkt F_1 und links vom rechten Brennpunkt F_2 jeweils im Abstand $\frac{b^2}{e}$ senkrecht zur Hauptachse eine Leitlinie. Die Hyperbel ist dann die Menge aller Punkte, deren Abstand zum Brennpunkt F_1 das $\frac{e}{a}$-fache des Abstandes zur Leitlinie l_1 beträgt. Genau dieselbe Aussage gilt auch für F_2 und l_2.

Polarkoordinaten: Anstatt durch die kartesischen Koordinaten x und y wird ein Punkt P dargestellt durch seinen Abstand r vom Nullpunkt O und durch den Winkel φ zwischen der positiven x-Achse und dem Vektor $\overrightarrow{OP}$. Die Umrechnung erfolgt durch die Formeln $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$. Es soll eine Polarkoordinatendarstellung der Kegelschnitte gefunden werden, bei der ein Brennpunkt im Nullpunkt O liegt.

Wir nehmen an, dass $d > 0$ gilt und die Leitlinie senkrecht zur x-Achse durch $(d, 0)$ verläuft. Der Brennpunkt O liegt links von der Leitlinie. Wir wissen bereits, dass dann im Fall einer Ellipse oder Parabel die gesamte Kurve, im Fall einer Hyperbel jedoch nur der linke Ast links von der Leitlinie liegt. Ein Punkt P, der Polarkoordinaten r und φ hat und links von der Leitlinie liegt, hat Abstand r vom Brennpunkt, der ja im Nullpunkt liegt, und Abstand $d - r\cos\varphi$ von der Leitlinie. Ein Punkt liegt auf dem Kegelschnitt, wenn diese Abstände Verhältnis v haben. Die Kegelschnittgleichung ist daher

$$r = v(d - r\cos\varphi) \qquad \text{oder} \qquad r = \tfrac{vd}{1+v\cos\varphi}$$

Für $0 < v < 1$ stellt diese Gleichung eine Ellipse dar, für $v = 1$ eine Parabel und für $v > 1$ den linken Ast einer Hyperbel. (Bei der Hyperbel läuft φ nur in dem Intervall für das $\cos\varphi > -\frac{1}{v}$ gilt, das ist das Intervall $(-\arccos(-\frac{1}{v}), \arccos(-\frac{1}{v}))$, sonst ist r negativ.)

Will man den rechten Ast der Hyperbel darstellen, dann muss man Punkte rechts von der Leitlinie betrachten. Ein Punkt P, der Polarkoordinaten r und φ hat und rechts von der Leitlinie liegt, hat Abstand r vom Brennpunkt und Abstand $r\cos\varphi - d$ von der Leitlinie. Die Kegelschnittgleichung ist daher

$$r = v(r\cos\varphi - d) \qquad \text{oder} \qquad r = \tfrac{vd}{v\cos\varphi - 1}$$

Für $v \leq 1$ gibt es keinen Punkt, der diese Gleichung erfüllt, da r ja größer als 0 sein muss. (Ellipse und Parabel liegen zur Gänze links von der Leitlinie.) Für $v > 1$ stellt diese Gleichung den rechten Ast einer Hyperbel dar. (Dabei läuft φ nur in dem Intervall für das $\cos\varphi > \frac{1}{v}$ gilt, das ist das Intervall $(-\arccos\frac{1}{v}, \arccos\frac{1}{v})$, sonst ist r negativ.)

11. Flächen zweiter Ordnung

Eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ kann man durch eine Gleichung $g(x,y)=0$ darstellen, wobei g eine Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ ist. Eine Kurve zweiter Ordnung erhält man, wenn $g(x,y)$ ein Polynom zweiten Grades in zwei Variablen ist. Diese hat dann eine Gleichung der Form

$$a_1x^2 + a_2y^2 + 2a_3xy + b_1x + b_2y + c = 0$$

mit rellen Koeffizienten a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 und c. Wir wissen bereits, dass diese Kurven, abgesehen von Grenzfällen, Kegelschnitte sind.

Eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ kann man durch eine Gleichung $f(x,y,z)=0$ darstellen, wobei f eine Funktion von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}$ ist. Für $f(x,y,z)=3x+2y-6z+3$ hat man eine Ebene und für $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$ die Oberfläche einer Kugel. Eine Fläche zweiter Ordnung erhält man, wenn $f(x,y,z)$ ein Polynom zweiten Grades in drei Variablen ist. Ein Beispiel dafür ist die Kugeloberfläche. Eine Fläche zweiter Ordnung hat eine Gleichung der Form

$$a_1x^2 + a_2y^2 + 2a_3xy + a_4z^2 + 2a_5xz + 2a_6yz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$$

mit rellen Koeffizienten a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, b_1, b_2, b_3 und c. Um herauszufinden, wie Flächen zweiter Ordnung aussehen, kann man genauso wie für Kurven zweiter Ordnung eine Hauptachsentransformation durchführen. Dadurch bringt man die Fläche in Hauptlage. Abgesehen von Grenzfällen (ein Punkt, eine Gerade, eine Ebene, ein Ebenenpaar, die Mantelfläche eines elliptischen, hyperbolischen oder parabolischen Zylinders, die Mantelfläche eines elliptischen Doppelkegels) können dabei fünf verschiedene Arten von Flächen auftreten. Diese werden im Folgenden besprochen. Um eine Vorstellung zu bekommen, wie diese Flächen aussehen, werden wir sie aus Kegelschnitten erzeugen.

Hat man eine Kurve K im $\mathbb{R}^2$, dann kann man diese um die x-Achse rotieren. Dadurch entsteht eine Rotationsfläche F. Ist $g(x,y)=0$ eine Gleichung der Kurve K, dann gilt

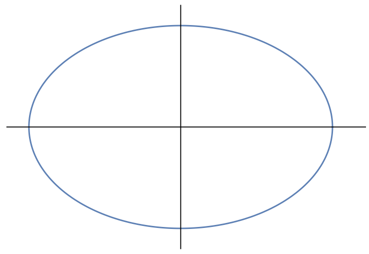
$$\begin{aligned}(x,y,z)\in F &\iff (x,\sqrt{y^2+z^2})\in K \ \text{ oder } \ (x,-\sqrt{y^2+z^2})\in K\\ &\iff g(x,\sqrt{y^2+z^2})=0 \ \text{ oder } \ g(x,-\sqrt{y^2+z^2})=0\end{aligned}$$

Wir werden Rotationsflächen für Kegelschnitte bilden. Da in den Gleichungen der Kegelschnitte y ohnehin nur als y^2 vorkommt, ist das Vorzeichen der zweiten Variable in g unerheblich. Die Gleichung für die Rotationsfläche ist dann $g(x,\sqrt{y^2+z^2})=0$.

Wir üben eine Streckung mit Faktor u in Richtung der z-Achse auf eine Fläche F mit der Gleichung $f(x,y,z)=0$ aus. Der Punkt (x,y,z) erfüllt die Gleichung $f(x,y,z)=0$ genau dann, wenn der Punkt (x,y,uz) die Gleichung $f(x,y,\frac{z}{u})=0$ erfüllt. Somit ist $f(x,y,\frac{z}{u})=0$ die Gleichung der in z-Richtung um den Faktor u gestreckten Fläche F.

Diese beiden Operationen, die Rotation um die x-Achse und die Streckung der so erhaltenen Fläche in z-Richtung, wenden wir auf Kegelschnitte an. Man kann sich dann gut vorstellen, wie die Fläche aussieht, die man dadurch erhält.

Eine andere Möglichkeit, sich eine Vorstellung von einer Fläche zu machen, sind Höhenschichtlinien. Das sind die Kurven, die man erhält, wenn man die Fläche mit den Ebenen senkrecht zur z-Achse schneidet. Da diese Ebenen Gleichungen der Form $z=d$ mit $d\in\mathbb{R}$ haben, sind Höhenschichtlinien leicht zu bestimmen. (Das entspricht den Höhenschichtlinien, die in einer Landkarte eingezeichnet sind.) Man kann aber genauso die Schnittkurven der Fläche mit Ebenen senkrecht zur x-Achse oder senkrecht zur y-Achse berechnen.

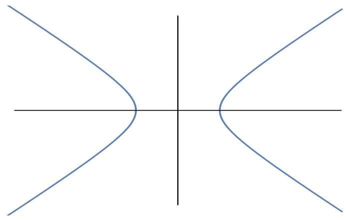


Ellipsoid: Die Gleichung einer Ellipse in Hauptlage ist $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Das ist $g(x,y)=0$ mit $g(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$. Die Ellipse rotiert um die x-Achse. Die Rotationsfläche hat die Gleichung $g(x,\sqrt{y^2+z^2})=0$, das ist $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$. Die Schnitte dieser Rotationsfläche senkrecht zur x-Achse sind Kreise. Um das zu ändern, üben wir eine Streckung mit Faktor u in Richtung der z-Achse auf diese Fläche aus. Das ergibt die Fläche mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{u^2b^2}=1$. Mit $c=ub$ ergibt sich

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Diese Fläche nennt man ein Ellipsoid. Die Längen der Halbachsen sind a, b und c.

Wir bestimmen noch die Höhenschichtlinien. Wir schneiden mit Ebenen senkrecht zur z-Achse. Die Gleichung so einer Ebene ist $z=d$ mit $d\in\mathbb{R}$. Die Schnittkurve hat die Gleichung $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{d^2}{c^2}$. Für $|d|<c$ ist das eine Ellipse, für $|d|=c$ besteht die Kurve nur aus einem Punkt, und für $|d|>c$ ist die Schnittmenge leer. Die Schnitte senkrecht zur x-Achse und senkrecht zur y-Achse ergeben ebenfalls Ellipsen.

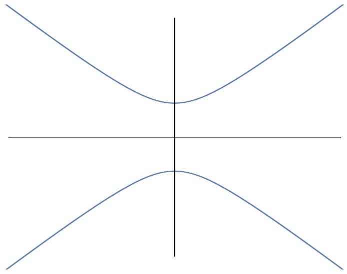


Zweischaliges Hyperboloid: Die Gleichung einer Hyperbel in Hauptlage ist $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Das ist $g(x,y)=0$ mit $g(x,y)=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1$. Die Hyperbel rotiert um die x-Achse. Die Rotationsfläche hat die Gleichung $g(x,\sqrt{y^2+z^2})=0$, das ist $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$. Wir üben eine Streckung mit Faktor u in Richtung der z-Achse auf die Rotationsfläche aus und erhalten die Fläche mit Gleichung $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{u^2b^2}=1$. Setzen wir $c=ub$, dann ergibt sich

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Diese Fläche nennt man ein zweischaliges Hyperboloid.

Wir schneiden mit Ebenen senkrecht zur z-Achse. Die Gleichung so einer Ebene ist $z=d$ mit $d\in\mathbb{R}$. Die Schnittkurve hat die Gleichung $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{d^2}{c^2}$. Das ist eine Hyperbel. Schnitte senkrecht zur y-Achse ergeben ebenfalls Hyperbeln. Schneiden wir jedoch mit einer Ebene senkrecht zur x-Achse, die ja die Gleichung $x=d$ hat, dann erhalten wir eine Schnittkurve mit der Gleichung $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{d^2}{a^2}-1$. Für $|d|>a$ ist das eine Ellipse, für $|d|=a$ besteht die Kurve nur aus einem Punkt, und für $|d|<a$ ist die Schnittmenge leer.

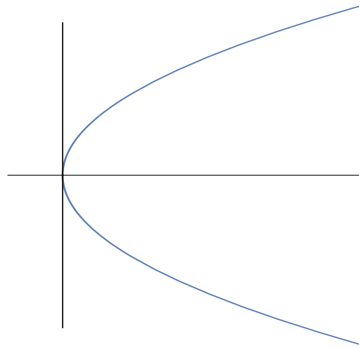


Einschaliges Hyperboloid: Liegen die Brennpunkte der Hyperbel auf der y-Achse, dann ist $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ihre Gleichung. Wir rotieren diese Hyperbel um die x-Achse. Die Rotationsfläche hat die Gleichung $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$. Eine Streckung in Richtung der z-Achse führt zur Gleichung

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Diese Fläche nennt man ein einschaliges Hyperboloid.

Schneiden wir diese Fläche senkrecht zur z-Achse, so ergibt sich eine Schnittkurve mit der Gleichung $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{d^2}{c^2}$. Das ist eine Hyperbel (für $|d|=c$ ein Geradenpaar). Schnitte senkrecht zur y-Achse ergeben ebenfalls Hyperbeln. Schneiden wir senkrecht zur x-Achse dann ist $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{d^2}{a^2}+1$ die Gleichung der Schnittkurve. Das ist eine Ellipse.



Elliptisches Paraboloid: Die Parabelgleichung in Hauptlage ist $y^2 = 2px$. Das ist $g(x, y) = 0$ mit $g(x, y) = y^2 - 2px$. Die Parabel rotiert um die x-Achse. Die Rotationsfläche hat die Gleichung $g(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0$, das ist $y^2 + z^2 = 2px$. Wir wenden wieder eine Streckung mit Faktor u in Richtung der z-Achse an und erhalten die Gleichung $y^2 + \frac{z^2}{u^2} = 2px$. Setzen wir $a = \sqrt{p}$ und $b = u\sqrt{p}$, dann ergibt sich die Gleichung

$$\tfrac{y^2}{a^2} + \tfrac{z^2}{b^2} = 2x$$

Diese Fläche nennt man ein elliptisches Paraboloid.

Schneiden wir diese Fläche senkrecht zur z-Achse, so ergibt sich eine Schnittkurve mit der Gleichung $y^2 = 2a^2(x - \frac{d^2}{2b^2})$. Das ist eine Parabel. Schnitte senkrecht zur y-Achse ergeben ebenfalls Parabeln. Schneiden wir mit einer Ebene senkrecht zur x-Achse dann erhalten wir $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 2d$ als Gleichung der Schnittkurve. Für $d > 0$ ist das eine Ellipse, für $d = 0$ besteht die Kurve nur aus einem Punkt, und für $d < 0$ ist die Schnittmenge leer.

Hyperbolisches Paraboloid: Diese Fläche kann man nicht durch Rotation erzeugen. Sie hat die Gleichung (bei einem elliptischen Paraboloid stimmt die linke Seite der Gleichung mit der einer Ellipse überein, bei einem hyperbolischen Paraboloid mit der einer Hyperbel)

$$\tfrac{y^2}{a^2} - \tfrac{z^2}{b^2} = 2x$$

Man kann sich an Hand der Höhenschichtlinien eine Vorstellung bilden, wie diese Fläche aussieht. Schneiden wir sie senkrecht zur z-Achse, so ergibt sich eine Schnittkurve mit der Gleichung $y^2 = 2a^2(x + \frac{d^2}{2b^2})$. Das ist eine Parabel. Ein Schnitt senkrecht zur y-Achse ergibt eine Schnittkurve mit der Gleichung $z^2 = -2b^2(x - \frac{d^2}{2a^2})$. Das ist ebenfalls eine Parabel. Schneiden wir jedoch mit einer Ebene senkrecht zur x-Achse dann erhalten wir eine Schnittkurve mit der Gleichung $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 2d$. Das ist eine Hyperbel (für $d = 0$ ein Geradenpaar). Die Fläche hat die Form eines Sattels. (Man schaut auf den Sattel, wenn man von einem Punkt der x-Achse in Richtung Nullpunkt blickt.)

Im letzten Kapitel haben wir die Menge aller Punkte im $\mathbb{R}^2$ bestimmt, deren Abstände zu einem vorgegebenen Punkt und zu einer vorgegebenen Gerade in einem festen Verhältnis zueinender stehen. Wir versuchen jetzt, solche Mengen im $\mathbb{R}^3$ zu bestimmen. Da gibt es natürlich mehr Möglichkeiten.

Zwei Punkte: Wir wählen $A = (1, 0, 0)$ und $B = (-1, 0, 0)$. Sei $v \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ vorgegeben. Wir suchen die Menge aller Punkte $P = (x, y, z)$, für die $\frac{|PA|}{|PB|} = v$ gilt. Wegen $|PA|^2 = (x-1)^2 + y^2 + z^2$ und $|PB|^2 = (x+1)^2 + y^2 + z^2$ erfüllen diese Punkte die Gleichung $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = v^2((x+1)^2 + y^2 + z^2)$. Durch Umformen erhalten wir

$$(x - \tfrac{1+v^2}{1-v^2})^2 + y^2 + z^2 = \tfrac{4v^2}{(1-v^2)^2}$$

Das ist die Gleichung einer Kugel, deren Mittelpunkt auf der x-Achse liegt. Die gesuchte Punktmenge ist somit die Oberfläche einer Kugel.

Im Folgenden bezeichnet $d(P, g)$ den Normalabstand des Punktes P von der Gerade g und $d(P, \varepsilon)$ den Normalabstand des Punktes P von der Ebene ε.

Punkt und Gerade: Wir wählen den Punkt $A = (0, 1, 0)$ und als Gerade g die x-Achse. Sei $v \in (0, \infty)$. Wir suchen die Menge aller Punkte $P = (x, y, z)$, für die $\frac{|PA|}{d(P,g)} = v$ gilt.

Wegen $|PA|^2 = x^2+(y-1)^2+z^2$ und $d(P,g)^2 = y^2+z^2$ erfüllen diese Punkte die Gleichung

$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = v^2(y^2+z^2)$$

Für $v = 1$ erhalten wir $x^2 = 2y - 1$. Das ist die Gleichung einer Parabel in der x-y-Ebene. Die gesuchte Menge besteht aus allen Punkten, die über dieser Parabel liegen. Das ist ein parabolischer Zylinder. Für $v \neq 1$ erhalten wir durch Umformen der obigen Gleichung

$$(*) \qquad \tfrac{1-v^2}{v^2}x^2 + \tfrac{(1-v^2)^2}{v^2}(y - \tfrac{1}{1-v^2})^2 + \tfrac{(1-v^2)^2}{v^2}z^2 = 1$$

Eine Translation bringt diese Fläche in Hauptlage $\frac{1-v^2}{v^2}x^2 + \frac{(1-v^2)^2}{v^2}y^2 + \frac{(1-v^2)^2}{v^2}z^2 = 1$. Nun gilt $\frac{(1-v^2)^2}{v^2} > 0$. Im Fall $v < 1$ gilt auch $\frac{1-v^2}{v^2} > 0$. Die Fläche ist ein Ellipsoid, das durch Rotation um die x-Achse aus der Ellipse $\frac{1-v^2}{v^2}x^2 + \frac{(1-v^2)^2}{v^2}y^2 = 1$ entsteht. Im Fall $v > 1$ gilt $\frac{1-v^2}{v^2} < 0$. Die Fläche ist ein einschaliges Hyperboloid, das durch Rotation um die x-Achse aus der Hyperbel $-\frac{v^2-1}{v^2}x^2 + \frac{(1-v^2)^2}{v^2}y^2 = 1$ entsteht. Sowohl die Ellipse als auch die Hyperbel hat Brennweite $\frac{v^2}{1-v^2}$. Es folgt, dass der Kegelschnitt, den man erhält, wenn man die Fläche $(*)$ mit der x-y-Ebene schneidet, den Punkt A als Brennpunkt hat.

Zwei Geraden: Wir nehmen an, dass die beiden Geraden keinen Schnittpunkt haben, jedoch zueinander senkrecht stehen. Wir legen sie so ins Koordinatensystem, dass g die Parameterdarstellung $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ und h die Parameterdarstellung $\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ hat. Sei $v \in (0,\infty)$. Wir suchen die Menge aller Punkte $P = (x,y,z)$, für die $\frac{d(P,g)}{d(P,h)} = v$ gilt. Wegen $d(P,g)^2 = (x-1)^2 + y^2$ und $d(P,h)^2 = (x+1)^2 + z^2$ erhalten wir die Gleichung

$$(x-1)^2 + y^2 = v^2((x+1)^2 + z^2)$$

Für $v = 1$ ergibt sich die Gleichung $y^2 - z^2 = 4x$. Das ist ein hyperbolisches Paraboloid. Für $v \neq 1$ erhalten wir durch entsprechnde Umformungen der obigen Gleichung

$$\tfrac{(1-v^2)^2}{4v^2}(x - \tfrac{1+v^2}{1-v^2})^2 + \tfrac{1-v^2}{4v^2}y^2 - \tfrac{1-v^2}{4}z^2 = 1$$

Eine Translation bringt diese Fläche in Hauptlage $\frac{(1-v^2)^2}{4v^2}x^2 + \frac{1-v^2}{4v^2}y^2 - \frac{1-v^2}{4}z^2 = 1$. Nun gilt $\frac{(1-v^2)^2}{4v^2} > 0$. Im Fall $v < 1$ ist der Koeffizient von y^2 positiv und der von z^2 negativ. Im Fall $v > 1$ ist es umgekehrt. In beiden Fällen haben wir ein einschaliges Hyperboloid. Im Fall $v < 1$ entsteht es durch Rotation der Hyperbel $\frac{(1-v^2)^2}{4v^2}x^2 - \frac{1-v^2}{4}z^2 = 1$ um die z-Achse und anschließender Streckung in Richtung y-Achse. Im Fall $v > 1$ entsteht es durch Rotation der Hyperbel $\frac{(1-v^2)^2}{4v^2}x^2 - \frac{v^2-1}{4v^2}y^2 = 1$ um die y-Achse und anschließender Streckung in Richtung z-Achse.

Gerade und Ebene: Wir nehmen an, dass die Gerade und die Ebene nicht parallel liegen. Wir legen sie so ins Koordinatensystem, dass der Nullpunkt ihr Schnittpunkt ist, dass die Ebene ε Normalvektor $\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}$ hat und dass die Gerade g in der x-y-Ebene liegt und dort Normalvektor $\binom{b}{a}$ hat. Wir nehmen $a > b > 0$ und $a^2 + b^2 = 1$ an. Wir suchen die Menge aller Punkte $P = (x,y,z)$, für die $d(P,\varepsilon) = d(P,g)$ gilt. Wegen $d(P,\varepsilon) = |ax+by|$ und $d(P,g)^2 = (bx+ay)^2 + z^2$ erhalten wir die Gleichung

$$(ax+by)^2 = (bx+ay)^2 + z^2 \qquad \text{oder} \qquad x^2 - y^2 - \tfrac{z^2}{a^2-b^2} = 0$$

Die Gleichung $x^2 - y^2 = 0$ stellt ein Geradenpaar dar, nämlich die beiden Diagonalen in der x-y-Ebene. Rotation um die x-Achse und anschließende Streckung in z-Richtung führen zu $x^2 - y^2 - \frac{z^2}{a^2-b^2} = 0$. Diese Gleichung stellt somit einen elliptischen Doppelkegel dar.

V. Lineare Gleichungssysteme

1. Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Lineare Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Variablen sind leicht lösbar. Hat man mehr als zwei Variable, dann ist es besser, ein systematisches Lösungsverfahren anzuwenden, nämlich das sogenannte Gaußsche Eliminationsverfahren. Durch Äquivalenzumformungen (das sind Umformungen, die die Lösungsmenge nicht ändern) wird das Gleichungssystem in eine Form gebracht, die eine direkte Auflösung zulässt.

Grundlegend für das Gaußsche Eliminationsverfahren ist folgende Äquivalenzumformung:

Das a-fache einer Gleichung, wobei a eine relle
Zahl ist, wird zu einer anderen Gleichung addiert.

Das ist eine Äquivalenzumformung. Die Gleichung, deren a-faches man zu einer anderen Gleichung addiert hat, ist ja immer noch vorhanden. Daher kann man das a-fache dieser Gleichung auch wieder von der anderen Gleichung subtrahieren und so zum ursprünglichen Gleichungssystem zurückkehren. Das zeigt, dass sich die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems durch solche Umformungen nicht ändert.

Durch systematisches Anwenden dieser Äquivalenzumformung wird die erste Variable aus allen Gleichungen eliminiert, außer der ersten, und die zweite Variable aus allen Gleichungen außer den ersten beiden. Je nach Anzahl der Gleichungen und Variablen setzt man das Verfahren fort. Wir bleiben vorläufig bei drei Variablen und drei Gleichungen und führen dieses Verfahren für folgendes Beispiel durch.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -2 \\ -4x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}$$

Die erste Variable soll aus der zweiten und dritten Gleichung durch Addition geeigneter Vielfachen der ersten Gleichung eliminiert werden. Damit die erste Variable aus der zweiten Gleichung verschwindet, addieren wir das 2-fache der ersten Gleichung zur zweiten. Damit die erste Variable aus der dritten Gleichung verschwindet, addieren wir das (-2)-fache der ersten Gleichung zur dritten. Dadurch erhalten wir folgendes Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -2 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & = & -4 \\ & & 6x_2 & + & 5x_3 & = & 4 \end{array}$$

Jetzt lassen wir die erste Gleichung aus dem Spiel. Damit die zweite Variable aus der dritten Gleichung verschwindet, addieren wir das (-3)-fache der zweiten Gleichung zur dritten Gleichung. Dadurch erhalten wir folgendes Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_2 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -2 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & = & -4 \\ & & & & 8x_3 & = & 16 \end{array}$$

Damit ist der erste Teil des Gaußschen Eliminationsverfahrens abgeschlossen. Wir haben das Gleichungssystem in Dreiecksgestalt gebracht.

Der zweite Teil des Verfahrens besteht nun darin, dieses Gleichungssystem schrittweise von unten nach oben zu lösen. Die dritte Gleichung ist $8\,x_3 = 16$, woraus $x_3 = 2$ folgt.

Die zweite Gleichung ist $2\,x_2 - x_3 = -4$, woraus $2\,x_2 = -4 + x_3 = -2$ und dann $x_2 = -1$ folgt. Die erste Gleichung ist $2\,x_1 - 2\,x_2 - 3\,x_3 = -2$, woraus $2\,x_1 = -2 + 2\,x_2 + 3\,x_3 = 2$ und dann $x_1 = 1$ folgt. Es gibt eine eindeutige Lösung. Die Lösungsmenge ehthält nur ein Element, nämlich $(1, -1, 2)$.

Geometrische Interpretation: Die Gleichungen des ursprünglichen Gleichungssystems kann man als Gleichungen dreier Ebenen auffassen. Diese drei Ebenen haben genau einen Punkt gemeinsam.

Wir versuchen ein weiteres Beispiel mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren zu lösen.

$$\begin{array}{rrrcr} & - x_2 + & x_3 & = & 2 \\ x_1 + & 3x_2 + & 2x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + & 3x_2 + & 7x_3 & = & 10 \end{array}$$

Wir können nicht beginnen, da x_1 in der ersten Gleichung nicht vorkommt. In so einem Fall vertauscht man zwei Gleichungen, um eine Gleichung, in der x_1 vorkommt in die erste Zeile zu bringen. Wir vertauschen die ersten beiden Gleichungen und erhalten

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 + & 3x_2 + & 2x_3 & = & 2 \\ & - x_2 + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + & 3x_2 + & 7x_3 & = & 10 \end{array}$$

Jetzt können wir mit dem Eliminationsverfahren beginnen. Die erste Variable kommt in der zweiten Gleichung nicht vor, daher müssen wir sie nicht mehr eliminieren. Damit die erste Variable aus der dritten Gleichung verschwindet, addieren wir das (-2)-fache der ersten Gleichung zur dritten Gleichung. Dadurch erhalten wir folgendes Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 + & 3x_2 + & 2x_3 & = & 2 \\ & - x_2 + & x_3 & = & 2 \\ & - 3x_2 + & 3x_3 & = & 6 \end{array}$$

Jetzt lassen wir die erste Gleichung aus dem Spiel. Damit die zweite Variable aus der dritten Gleichung verschwindet, addieren wir das (-3)-fache der zweiten Gleichung zur dritten Gleichung. Dadurch erhalten wir folgendes Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 + & 3x_2 + & 2x_3 & = & 2 \\ & - x_2 + & x_3 & = & 2 \\ & & 0x_3 & = & 0 \end{array}$$

Die letzte Gleichung ist immer erfüllt. Wir können sie weglassen und erhalten

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 + & 3x_2 + & 2x_3 & = & 2 \\ & - x_2 + & x_3 & = & 2 \end{array}$$

Damit ist der erste Teil des Gaußschen Eliminationsverfahrens abgeschlossen. Wir haben das Gleichungssystem wieder in Dreiecksgestalt gebracht, der aber eine Gleichung fehlt. In so einem Fall spricht man von Stufenform.

Bei dieser Stufenform hat man jedoch weniger Gleichungen als Variable. Wir haben eine Gleichung weniger, daher können wir eine Variable frei wählen. Wir führen einen Parameter $t \in \mathbb{R}$ ein und setzen $x_3 = t$. Die zweite Gleichung ist $-x_2 + x_3 = 2$, woraus wir $x_2 = x_3 - 2 = t - 2$ erhalten. Die erste Gleichung ist $x_1 + 3\,x_2 + 2\,x_3 = 2$, woraus wir $x_1 = 2 - 3\,x_2 - 2\,x_3 = 2 - 3t + 6 - 2t = -5t + 8$ erhalten. Die Lösung ist nicht eindeutig. Die Lösungsmenge ist $\{(-5t + 8,\, t - 2,\, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

Geometrische Interpretation: Die Gleichungen des ursprünglichen Gleichungssystems kann man als Gleichungen dreier Ebenen auffassen. Diese drei Ebenen haben die Gerade mit Parameterdarstellung $\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gemeinsam.

Wir ändern das Gleichungssystem im letzten Beispiel ein wenig ab. Wir ändern nur die rechte Seite der dritten Gleichung und versuchen das Gleichungssystem zu lösen

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2 \\ - x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 7 \end{aligned}$$

Führt man das Gaußsche Eliminationsverfahren wie oben durch, so erhält man

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2 \\ - x_2 + x_3 &= 2 \\ 0x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Die dritte Gleichung ist nicht erfüllbar. Sie ist ein Widerspruch. Das Gleichungssystem hat keine Lösung. Die Lösungsmenge ist leer.

Für ein lineares Gleichungssystem gibt es verschiedene Möglichkeiten: eine eindeutige Lösung, keine Lösung, unendlich viele Lösungen.

Das Eliminationsverfahren wird durchgeführt. Erhält man am Ende einen Widerspruch, dann existiert keine Lösung. Erhält man keinen Widerspruch, dann gilt folgendes: Ist die Anzahl der verbleibenden Gleichungen gleich der Anzahl der Variablen, dann ist die Lösung eindeutig. Ist die Anzahl der verbleibenden Gleichungen um k geringer als die Anzahl der Variablen, dann hat man eine Lösungsmenge mit k Parametern.

Im vorletzten Beispiel hatten wir drei Variable und zwei verbleibende Gleichungen. Daher ergab sich eine Lösungsmenge mit einem Parameter.

Zusätzlich zu der bisher verwendeten Äquivalenzumformung kann man Gleichungen mit einer Zahl $\neq 0$ multplizieren oder durch eine Zahl $\neq 0$ dividieren. Das ändert nichts an der Lösungsmenge des Gleichungssystems und kann das Rechnen vereinfachen. Zur Übung lösen wir folgendes lineare Gleichungssystem mit vier Variablen.

$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 4 \\ -2x_1 + \tfrac{3}{2}x_2 - x_3 + \tfrac{3}{2}x_4 &= 5 \\ -4x_1 + 7x_2 + \tfrac{4}{3}x_3 - 5x_4 &= 12 \\ 2x_1 + \tfrac{3}{2}x_2 + \tfrac{7}{2}x_4 &= 8 \end{aligned}$$

Wir addieren das $\frac{1}{2}$-fache der ersten Gleichung zur zweiten, die erste Gleichung zur dritten und das $(-\frac{1}{2})$-fache der ersten Gleichung zur vierten. Das ergibt das links unten stehende Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 4 \\ x_3 + 2x_4 &= 7 \\ 4x_2 + \tfrac{16}{3}x_3 - 4x_4 &= 16 \\ 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 4 \\ x_2 + \tfrac{4}{3}x_3 - x_4 &= 4 \\ x_3 + 2x_4 &= 7 \\ 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 6 \end{aligned}$$

Die dritte Gleichung wurde durch 4 dividiert und die zweite und dritte Gleichung vertauscht. Das ergibt das rechts oben stehende Gleichungssystem. Jetzt können wir mit dem

Eliminationsverfahren fortfahren. Wir addieren das (-3)-fache der zweiten Gleichung zur vierten und erhalten das links unten stehende Gleichungssystem. Wir addieren das 6-fache der dritten Gleichung zur vierten und erhalten das rechts unten stehende Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrcr} 4x_1 - & 3x_2 + & 4x_3 + & x_4 & = & 4 \\ & x_2 + & \frac{4}{3}x_3 - & x_4 & = & 4 \\ & & x_3 + & 2x_4 & = & 7 \\ & - & 6x_3 + & 6x_4 & = & -6 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrcr} 4x_1 - & 3x_2 + & 4x_3 + & x_4 & = & 4 \\ & x_2 + & \frac{4}{3}x_3 - & x_4 & = & 4 \\ & & x_3 + & 2x_4 & = & 7 \\ & & & 18x_4 & = & 36 \end{array}$$

Die Lösung ist jetzt wieder einfach zu berechnen. Aus $18\,x_4 = 36$ erhalten wir $x_4 = 2$ und aus $x_3 + 2\,x_4 = 7$ folgt dann $x_3 = 3$. Aus $x_2 + \frac{4}{3}\,x_3 - x_4 = 4$ ergibt sich $x_2 = 2$ und aus $4\,x_1 - 3\,x_2 + 4\,x_3 + x_4 = 4$ schließlich $x_1 = -1$.

Hier ist noch ein Beispiel, dessen Lösung nicht eindeutig ist.

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 + & x_2 - & x_3 + & 3x_4 & = & 6 \\ - & 2x_2 - & 3x_3 + & x_4 & = & 6 \\ 4x_1 - & 2x_2 - & 8x_3 & & = & 8 \\ 2x_1 + & 3x_2 + & 2x_3 + & 4x_4 & = & 4 \end{array}$$

Wir führen das Eliminationsverfahren durch. Wir addieren das (-2)-fache der ersten Zeile zur dritten und das (-1)-fache der ersten Zeile zur vierten. Wir erhalten

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 + & x_2 - & x_3 + & 3x_4 & = & 6 \\ - & 2x_2 - & 3x_3 + & x_4 & = & 6 \\ - & 4x_2 - & 6x_3 - & 6x_4 & = & -4 \\ & 2x_2 + & 3x_3 + & x_4 & = & -2 \end{array}$$

Wir addieren das (-2)-fache der zweiten Gleichung zur dritten und die zweite Gleichung zur vierten. Das ergibt

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 + & x_2 - & x_3 + & 3x_4 & = & 6 \\ - & 2x_2 - & 3x_3 + & x_4 & = & 6 \\ & & - & 8x_4 & = & -16 \\ & & & 2x_2 & = & 4 \end{array}$$

Wir addieren noch das $(-\frac{1}{4})$-fache der dritten Gleichung zur vierten. Die vierte Gleichung wird dadurch zu $0\,x_4 = 0$ und kann daher weggelassen werden. Es bleibt

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 + & x_2 - & x_3 + & 3x_4 & = & 6 \\ - & 2x_2 - & 3x_3 + & x_4 & = & 6 \\ & & - & 8x_4 & = & -16 \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist jetzt in Stufenform. Da wir drei Gleichungen und vier Variable haben, werden wir einen Parameter einführen. Die dritte Gleichung ist $-8\,x_4 = -16$, woraus $x_4 = 2$ folgt. Die zweite Gleichung ist $-2\,x_2 - 3\,x_3 + x_4 = 6$, woraus $x_2 = -2 - \frac{3}{2}\,x_3$ folgt. Wir können x_3 beliebig wählen. Wir wählen einen Parameter $t \in \mathbb{R}$ und setzen $x_3 = t$. Dann erhalten wir $x_2 = -2 - \frac{3}{2}t$. Aus der ersten Gleichung $2\,x_1 + x_2 - x_3 + 3\,x_4 = 6$ folgt dann $x_1 = 1 + \frac{5}{4}t$. Wir haben eine einparametrige Lösungsmenge erhalten.

Man kann das Gaußsche Eliminationsverfahren auf beliebig viele Variablen ausdehnen. Auch die Anzahl der Gleichungen muss nicht gleich der Anzahl der Variablen sein.

Wir rechnen dazu ein Beispiel mit sechs Variablen und vier Gleichungen.

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 3x_5 + 2x_6 &= 5\\
2x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 4x_4 + 5x_5 + 2x_6 &= 11\\
2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 + x_6 &= 6\\
4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 6x_5 + 4x_6 &= 16
\end{aligned}$$

Wir addieren das (-1)-fache der ersten Gleichung zur zweiten und zur dritten Gleichung und das (-2)-fache der ersten Gleichung zur vierten. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 3x_5 + 2x_6 &= 5\\
- 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 8x_5 &= 6\\
2x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_6 &= 1\\
4x_2 - 4x_3 + 6x_4 &= 6
\end{aligned}$$

Wir addieren das $\frac{1}{2}$-fache der zweiten Gleichung zur dritten Gleichung und die zweite Gleichung zur vierten. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 3x_5 + 2x_6 &= 5\\
- 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 8x_5 &= 6\\
2x_4 + 4x_5 - x_6 &= 4\\
4x_4 + 8x_5 &= 12
\end{aligned}$$

Schließlich addieren wir das (-2)-fache der dritten Gleichung zur vierten und erhalten

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 3x_5 + 2x_6 &= 5\\
- 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 8x_5 &= 6\\
2x_4 + 4x_5 - x_6 &= 4\\
2x_6 &= 4
\end{aligned}$$

Damit haben wir das lineare Gleichungssystem in eine Stufenform gebracht, die wir lösen können. Wir haben sechs Variable und es sind vier Gleichungen geblieben. Daher werden wir zwei Parameter einführen müssen.

Aus der vierten Gleichung folgt $x_6 = 2$. Die dritte Gleichung ist $2x_4 + 4x_5 - x_6 = 4$, woraus $x_4 + 2x_5 = 3$ folgt. Wir können eine Variable beliebig wählen. Wir setzen $x_5 = t$ und erhalten $x_4 = -2t + 3$. Die zweite Gleichung ist $-4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 8x_5 = 6$, woraus $-4x_2 + 4x_3 = 2x_4 - 8x_5 + 6 = -12t + 12$ und dann $x_2 - x_3 = 3t - 3$ folgt. Eine Variable ist beliebig wählbar. Wir setzen $x_3 = s$ und erhalten $x_2 = s + 3t - 3$. Aus der ersten Gleichung $2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 3x_5 + 2x_6 = 5$ folgt dann $2x_1 = x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 - 2x_6 + 5 = s + 3t - 3 - 3s - 4t + 6 + 3t - 4 + 5 = -2s + 2t + 4$ und daraus $x_1 = -s + t + 2$. Die Lösungsmenge ist $\{(-s+t+2,\ s+3t-3,\ s,\ -2t+3,\ t,\ 2) : s, t \in \mathbb{R}\}$. Sie ist zweiparametrig.

2. Eigenvektoren für 3×3-Matrizen

Eigenvektoren kann man natürlich auch für eine $d \times d$-Matrix A mit $d \geq 3$ definieren. Ein Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ heißt Eigenvektor der Matrix A, wenn $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ für eine Zahl λ gilt. Die Zahl λ nennt man Eigenwert der Matrix A.

Zu lösen ist das lineare Gleichungssystem $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mit $M = A - \lambda I_d$. Wir tun das nur für $d = 3$. (Für $d > 3$ haben wir die Determinante ja gar nicht definiert.) Wie wir uns früher bereits überlegt haben, ist $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$ genau dann eindeutig lösbar, wenn $\det M \neq 0$ gilt. In diesem Fall ist $\mathbf{0}$ die einzige Lösung. Wenn $\det M = 0$ gilt, dann existieren unendlich viele Lösungen und somit eine Lösung $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Da $\mathbf{0}$ immer eine Lösung ist, kann die Lösungsmenge ja nicht leer sein. Weiters ist $\det M = \det(A - \lambda I_d)$ ein Polynom in λ vom Grad 3. Es ist das charakterischte Polynom der Matrix A, dessen Nullstellen die Eigenwerte der Matrix A sind. Zu einem Eigenwert λ findet man dann Eigenvektoren als Lösungen des linearen Gleichungssystems $(A - \lambda I_d)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Wir rechnen dazu ein Beispiel.

Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Das charakteristische Polynom dieser Matrix ist $\left|\begin{smallmatrix} 1-\lambda & 3 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & -4 & 2-\lambda \end{smallmatrix}\right| = (1-\lambda)^2(2-\lambda) - 8 + 12 + 8(1-\lambda) - 4(1-\lambda) - 3(2-\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 6\lambda + 4$. Die Eigenwerte sind die Lösungen der Gleichung $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 6\lambda - 4 = 0$. Eine Lösung finden wir durch Probieren. Wir finden $\lambda_1 = 2$. Dividiert man das Polynom $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 6\lambda - 4$ durch $\lambda - 2$, so bleibt $\lambda^2 - 2\lambda + 2$. Man erhält die beiden weiteren Nullstellen $\lambda_{2,3} = 1 \pm i$. Damit sind die Eigenwerte der Matrix A gefunden.

Um einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$ zu finden, müssen wir das lineare Gleichungssystem $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mit $M = A - \lambda_1 I_3 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ lösen. Es hat eine Lösung $\neq \mathbf{0}$. Alle Vielfachen dieser Lösung sind ebenfalls Lösungen. Das lineare Gleichungssystem ist

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 \phantom{{}+2x_3} &= 0 \end{aligned}$$

Wir führen das Gaußsche Eliminationsverfahren durch. Addiert man die erste Gleichung zur zweiten und das 2-fache der ersten Gleichung zur dritten, so erhält man

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 2x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Man kann die dritte Gleichung weglassen, da sie mit der zweiten übereinstimmt. Die zweite Gleichung ist $2\,x_2 + 4\,x_3 = 0$. Wir wählen $x_3 = 1$. Es genügt ja, eine Lösung zu finden. Nun folgt $x_2 = -2$. Die erste Gleichung ist $-\,x_1 + 3\,x_2 + 2\,x_3 = 0$, woraus $x_1 = 3\,x_2 + 2\,x_3 = -4$ folgt. Wir erhalten $\left(\begin{smallmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ als Eigenvektor.

Um einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 1 - i$ zu finden, müssen wir das lineare Gleichungssystem $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mit $M = A - \lambda_2 I_3 = \left(\begin{smallmatrix} i & 3 & 2 \\ 1 & i & 2 \\ 2 & -4 & 1+i \end{smallmatrix}\right)$ lösen. Das ergibt das folgende lineare Gleichungssystem, das auch komplexe Koeffizienten enthält. Man kann es aber mit dem Eliminationsverfahren lösen, genauso wie für reelle Koeffizienten.

$$\begin{aligned} i\,x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + i\,x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + (1+i)\,x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Addiert man das i-fache der ersten Gleichung zur zweiten und das $2i$-fache der ersten Gleichung zur dritten, so erhält man

$$\begin{aligned} i\,x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -\ 4i\,x_2 + (2-2i)\,x_3 &= 0 \\ -\ (4+6i)\,x_2 + (1-5i)\,x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Jetzt ist die zweite Gleichung mit $\frac{4+6i}{-4i} = \frac{4i-6}{4} = -\frac{3}{2} + i$ zu multiplizieren und zur dritten Gleichung zu addieren. Dabei wird der Koeffizient von x_2 in der dritten Gleichung null und der Koeffizient von x_3 wird zu $1 - 5i + (2-2i)(-\frac{3}{2} + i) = 1 - 5i - 3 + 3i + 2i + 2 = 0$.

Die dritte Gleichung wird zu $0\,x_3 = 0$. Die zweite Gleichung ist $-4i\,x_2 + (2-2i)\,x_3 = 0$. Wir setzen $x_3 = 1$. Es genügt ja, eine Lösung zu finden. Es folgt $x_2 = \frac{2-2i}{4i} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$. Die erste Gleichung ist $i\,x_1 + 3\,x_2 + 2\,x_3 = 0$, woraus $x_1 = 3i\,x_2 + 2i\,x_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ folgt. Wir erhalten $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3+i \\ -1-i \\ 2 \end{pmatrix}$ als Eigenvektor. Daher ist $\begin{pmatrix} 3+i \\ -1-i \\ 2 \end{pmatrix}$ ebenfalls ein Eigenvektor.

3. Kegelschnitt durch fünf Punkte

Wir legen zuerst eine Gerade durch zwei Punkte. Die Gleichung einer Gerade kann man schreiben als $ax + by + c = 0$. Wir versuchen, die beiden Punkte, durch die die Gerade gehen soll, einzusetzen und a, b und c aus den sich ergebenden Gleichungen zu bestimmen.

Wir tun das an einem Beispiel. Wir suchen die Gerade durch die Punkte $(2,-2)$ und $(4,3)$. Setzen wir diese Punkte in die Geradengleichung $ax + by + c = 0$ ein, so haben wir

$$\begin{aligned} 2a - 2b + c &= 0 \\ 4a + 3b + c &= 0 \end{aligned}$$

Die Variablen sind jetzt a, b und c. Wir führen das Gaußsche Eliminationsverfahren durch. Wir addieren das (-2)-fache der ersten Gleichung zur zweiten und erhalten

$$\begin{aligned} 2a - 2b + c &= 0 \\ 7b - c &= 0 \end{aligned}$$

Wir könnten c wählen. Das tun wir aber erst später. Aus der zweiten Gleichung folgt $b = \frac{c}{7}$. Aus der ersten Gleichung folgt $a = b - \frac{c}{2} = -\frac{5c}{14}$. Das ergibt die Gerade $-\frac{5c}{14}x + \frac{c}{7}y + c = 0$. Wie wir c auch wählen, es ändert nichts an der Gerade. Wir wählen $c = -14$, damit die Brüche verschwinden, und erhalten dadurch $5x - 2y - 14 = 0$. Das ist die Gleichung der Gerade durch die Punkte $(2,-2)$ und $(4,3)$.

Die Geradengleichung ist eine lineare Gleichung in zwei Variablen. Eine quadratische Gleichung in zwei Variablen sieht so aus: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$. Wir wissen, dass das Gleichungen von Kegelschnitten sind. Da wir einen der sechs Koeffizienten frei wählen können, müssen wir fünf Punkte kennen, durch die der Kegelschnitt hindurchgeht, um seine Gleichung zu bestimmen. Wir probieren das an einem Beispiel aus.

Wir suchen den Kegelschnitt durch die Punkte $(1,1)$, $(-1,-3)$, $(1,-4)$, $(3,2)$ und $(4,2)$. Wir setzen diese Punkte in die Gleichung $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ ein

$$\begin{aligned} a + b + c + d + e + f &= 0 \\ a + 3b + 9c - d - 3e + f &= 0 \\ a - 4b + 16c + d - 4e + f &= 0 \\ 9a + 6b + 4c + 3d + 2e + f &= 0 \\ 16a + 8b + 4c + 4d + 2e + f &= 0 \end{aligned}$$

Wir führen das Gaußsche Eliminationsverfahren durch. Wir addieren das (-1)-fache der ersten Gleichung zur zweiten und zur dritten Gleichung, das (-9)-fache der ersten Gleichung zur vierten und das (-16)-fache der ersten Gleichung zur fünften. Wir erhalten

$$\begin{aligned} a + b + c + d + e + f &= 0 \\ 2b + 8c - 2d - 4e &= 0 \\ -5b + 15c - 5e &= 0 \\ -3b - 5c - 6d - 7e - 8f &= 0 \\ -8b - 12c - 12d - 14e - 15f &= 0 \end{aligned}$$

Bevor wir weitertun, dividieren wir die zweite Gleichung durch 2 und die dritte durch 5

$$\begin{array}{rrrrrrcl} a+ & b+ & c+ & d+ & e+ & f & = & 0\\ & b+ & 4c- & d- & 2e & & = & 0\\ - & b+ & 3c & - & e & & = & 0\\ - & 3b- & 5c- & 6d- & 7e- & 8f & = & 0\\ - & 8b- & 12c- & 12d- & 14e- & 15f & = & 0 \end{array}$$

Wir addieren die zweite Gleichung zur dritten, das 3-fache der zweiten Gleichung zur vierten und das 8-fache der zweiten Gleichung zur fünften. Wir erhalten

$$\begin{array}{rrrrrrcl} a+ & b+ & c+ & d+ & e+ & f & = & 0\\ & b+ & 4c- & d- & 2e & & = & 0\\ & & 7c- & d- & 3e & & = & 0\\ & & 7c- & 9d- & 13e- & 8f & = & 0\\ & & 20c- & 20d- & 30e- & 15f & = & 0 \end{array}$$

Wir addieren das (-1)-fache der dritten Gleichung zur vierten. Wir multiplizieren die fünfte Gleichung mit $-\frac{7}{20}$ und addieren die dritte Gleichung dazu. Wir erhalten

$$\begin{array}{rrrrrrcl} a+ & b+ & c+ & d+ & e+ & f & = & 0\\ & b+ & 4c- & d- & 2e & & = & 0\\ & & 7c- & d- & 3e & & = & 0\\ & & & -8d- & 10e- & 8f & = & 0\\ & & & 6d+ & \frac{15}{2}e+ & \frac{21}{4}f & = & 0 \end{array}$$

Schließlich addieren wir das $\frac{3}{4}$-fache der vierten Gleichung zur fünften

$$\begin{array}{rrrrrrcl} a+ & b+ & c+ & d+ & e+ & f & = & 0\\ & b+ & 4c- & d- & 2e & & = & 0\\ & & 7c- & d- & 3e & & = & 0\\ & & & -8d- & 10e- & 8f & = & 0\\ & & & & & -\frac{3}{4}f & = & 0 \end{array}$$

Jetzt können wir die Gleichungen lösen. Aus der fünften Gleichung folgt $f = 0$. Eine Variable können wir frei wählen. Wir wählen $e = 1$. Aus der vierten Gleichung erhalten wir dann $d = -\frac{5}{4}$. Die dritte Gleichung ergibt $c = \frac{1}{7}d + \frac{3}{7}e = \frac{1}{4}$. Die zweite Gleichung ergibt $b = -4c+d+2e = -\frac{1}{4}$. Schließlich folgt aus der ersten Gleichung $a = -b-c-d-e-f = \frac{1}{4}$. Die Gleichung des Kegelschnitts durch die fünf Punkte $(1,1)$, $(-1,-3)$, $(1,-4)$, $(3,2)$ und $(4,2)$ ist somit $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}xy + \frac{1}{4}y^2 - \frac{5}{4}x + y = 0$ oder $x^2 - xy + y^2 - 5x + 4y = 0$.

Hat man ein homogenes Gleichungssystem, bei dem die Anzahl der Variablen um eins größer ist als die Anzahl der Gleichungen, dann weiß man, dass die Lösung zumindest einparametrig ist. Ist man nur an irgendeiner Lösung interessiert, wie das in obigen Beispielen der Fall ist, dann ist man versucht, eine der Variablen zu Beginn irgendwie ungleich null zu wählen. Dadurch wird die Rechnung einfacher. Allerdings kann das zu Problemen führen. Hätten wir im letzten Beispiel zu Beginn $f = 1$ gewählt, dann hätten wir keine Lösung gefunden, da f ja gleich null ist. Welche Variablen man frei wählen kann, sieht man erst, wenn man das Gleichungssystem in Stufenform gebracht hat.

4. Inverse Matrix

Lineare Abbildungen kann man nicht nur auf dem $\mathbb{R}^2$ definieren, sondern auch in höheren Dimensionen. Die Definition ist dieselbe.

Definition: Seien d und c natürliche Zahlen ≥ 1. Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^c$ heißt linear, wenn sie folgende zwei Eigenschaften erfüllt
(a) $\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y})$ für alle Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ in $\mathbb{R}^d$
(b) $\varphi(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\varphi(\mathbf{x})$ für alle Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ und alle Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$

Durch wiederholtes Anwenden von (a) und (b) zeigt man, dass die Gleichung
$\varphi(\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi(\mathbf{u}_i)$ für $k \geq 1$ und für $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^d$ von jeder linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^c$ erfüllt wird.

Zu jeder linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^c$ kann man die zugehörige Matrix definieren. Für $1 \leq j \leq d$ sei $\mathbf{e}_j$ der j-te Einheitsvektor in $\mathbb{R}^d$. Das ist der Vektor, dessen j-te Komponente 1 ist, alle anderen Komponenten sind 0. Weiters sei $\mathbf{a}_j$ das Bild von $\mathbf{e}_j$ unter φ, das heißt $\varphi(\mathbf{e}_j) = \mathbf{a}_j$. Diese Bilder liegen in $\mathbb{R}^c$. Für alle Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ gilt dann

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\textstyle\sum_{j=1}^d x_j \mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^d x_j \varphi(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^d x_j \mathbf{a}_j$$

Sei A die Matrix, deren Spalten die Vektoren $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\dots$, $\mathbf{a}_d$ sind. Da diese Vektoren in $\mathbb{R}^c$ liegen, ist A eine $c \times d$-Matrix. Sie hat c Zeilen und d Spalten. Wenn wir noch daran denken, wie die Matrixmultiplikation funktioniert, dann erhalten wir

$$\varphi(\mathbf{x}) = \textstyle\sum_{j=1}^d x_j \mathbf{a}_j = A\mathbf{x} \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$$

Wir sehen, dass sich jede lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^c$ mit Hilfe der Matrix A, deren Spalten die Bilder der Einheitsvektoren sind, aufschreiben lässt. Da A eine $c \times d$-Matrix ist, kann man $A\mathbf{x}$ für jeden Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ bilden und das Ergebnis dieser Matrixmultiplikation ist ein Vektor in $\mathbb{R}^c$.

Will man die Matrix aufschreiben, dann muss man Doppelindices verwenden. Mit a_{ij} bezeichnen wir die i-te Komponente des Vektors $\mathbf{a}_j$. Dann gilt

$$\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \vdots \\ a_{cj} \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad 1 \leq j \leq d \qquad \text{und} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2d} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{c1} & a_{c2} & a_{c3} & \dots & a_{cd} \end{pmatrix}$$

Man sieht, dass a_{ij} die Eintragung der Matrix an der Stelle (i,j) ist. Sie steht in der i-ten Zeile und in der j-ten Spalte. Jetzt können wir auch die Matrixmultiplikation hinschreiben

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{c1} & a_{c2} & \dots & a_{cd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1d}x_d \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2d}x_d \\ \vdots \\ a_{c1}x_1 + a_{c2}x_2 + \dots + a_{cd}x_d \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^d x_j \mathbf{a}_j$$

Damit haben wir die bereits oben verwendete Gleichung überprüft.

Jetzt fragen wir nach der Umkehrabbildung der linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^c$. Sei A die zugehörige $c \times d$-Matrix. Bekanntlich hat eine Abbildung genau dann eine Umkehrabbildung, wenn sie bijektiv ist. Und $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^c$ ist bijektiv, wenn für jeden Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^c$ genau ein Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ existiert mit $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{v}$, das heißt, wenn $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^c$ eindeutig lösbar ist.

Nun ist $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ ein lineares Gleichungssystem mit c Gleichungen und d Variablen. Gilt $c < d$, dann hat man weniger Gleichungen als Variable. Das Eliminationsverfahren führt entweder zu einem Widerspruch oder zu einer Lösung mit Parametern. Das Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ hat also keine oder unendlich viele Lösungen. Gilt $c > d$, dann hat man mehr Gleichungen als Variable. Bei der Durchführung des Eliminationsverfahren ergeben sich Gleichungen, bei denen links vom Gleichheitszeichen Null steht. Man kann die rechte Seite $\mathbf{v}$ des Gleichungssystems so wählen, dass keine Lösung existiert. Es gibt somit Vektoren $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^c$, für die $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ nicht lösbar ist. Damit ist gezeigt, dass $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^c$ nicht bijektiv sein kann, wenn $c \neq d$ gilt. Wir nehmen daher an, dass $c = d$ gilt.

Sei also $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine lineare Abbildung und A die zugehörige $d \times d$-Matrix. Wir nehmen an, dass φ bijektiv ist, das heißt das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ ist für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ eindeutig lösbar. (Wir haben bereits an Beipielen gesehen, dass das nicht immer der Fall sein muss.) Sei $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ die Umkehrabbildung zu φ. Es gilt $\psi(\varphi(\mathbf{u})) = \mathbf{u}$ und $\varphi(\psi(\mathbf{u})) = \mathbf{u}$ für alle $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$. Für $1 \leq j \leq d$ sei $\mathbf{b}_j$ die eindeutige Lösung von $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$. Dann gilt $A\mathbf{b}_j = \mathbf{e}_j$ und somit $\varphi(\mathbf{b}_j) = \mathbf{e}_j$. Für alle Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ erhalten wir

$$\mathbf{x} = \textstyle\sum_{j=1}^d x_j\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^d x_j\varphi(\mathbf{b}_j) = \varphi(\sum_{j=1}^d x_j\mathbf{b}_j)$$

Da $\psi(\varphi(\mathbf{u})) = \mathbf{u}$ für alle $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ gilt, folgt dann

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi\big(\varphi(\textstyle\sum_{j=1}^d x_j\mathbf{b}_j)\big) = \sum_{j=1}^d x_j\mathbf{b}_j \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$$

Sei B die Matrix, deren Spalten die Vektoren $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_d$ sind. Da diese Vektoren in $\mathbb{R}^d$ liegen, ist B eine $d \times d$-Matrix. Wie oben erhalten wir

$$\psi(\mathbf{x}) = \textstyle\sum_{j=1}^d x_j\mathbf{b}_j = B\mathbf{x} \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$$

Wir sehen, dass die Umkehrabbildung $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ebenfalls eine lineare Abbildung ist. Ihre Matrix ist die $d \times d$-Matrix B, deren Spalten die eindeutigen Lösungen der Gleichungssysteme $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ für $1 \leq j \leq d$ sind.

Es gilt $\psi(\varphi(\mathbf{u})) = \mathbf{u}$ und $\varphi(\psi(\mathbf{u})) = \mathbf{u}$ für alle $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$. Da $\varphi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ und $\psi(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ gilt, ergibt sich $BA\mathbf{u} = \mathbf{u}$ und $AB\mathbf{u} = \mathbf{u}$ für alle $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$. Setzt man $\mathbf{u} = \mathbf{e}_j$ ein, so erhält man, dass die j-te Spalte der Matrix BA gleich $\mathbf{e}_j$ sein muss. Das gilt auch für die Matrix AB. Daher muss sowohl $BA = I_d$ als auch $AB = I_d$ gelten, wobei I_d die $d \times d$-Einheitsmatrix ist, deren Spalten ja die Einheitsvektoren sind. Man nennt daher B auch die inverse Matrix zur Matrix A und bezeichnet sie mit A^{-1}. Um A^{-1} zu berechnen, müssen wir die linearen Gleichungssysteme $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ für $1 \leq j \leq d$ lösen.

Wir tun das für die untenstehende Matrix A. Um nicht immer die Variablen schreiben zu müssen, schreiben wir nur die Matrix auf und rechts vom senkrechten Strich die rechte Seite des Gleichungssystems, das ist zuerst einmal der Vektor $\mathbf{e}_1$. Wir erweitern die Matrix. Diese erweiterte Matrix stellt jetzt das lineare Gleichungssystem dar.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 4 & 3 & -6 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 1 \\ 4 & 3 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

Auch die Umformungen der Gleichungen, jetzt sind es einfach Operationen mit den Zeilen, schreiben wir nur mehr symbolisch auf. Wir bezeichnen die Zeilen mit römischen Zahlen I, II, III und so weiter. Wir führen die Zeilenoperationen $\mathrm{II} - 2\mathrm{I} \to \mathrm{II}$ und $\mathrm{III} - \mathrm{I} \to \mathrm{III}$ durch. Das (-2)-fache der ersten Zeile wird zur zweiten addiert, das Ergebnis kommt in die zweite Zeile. Das (-1)-fache der ersten Zeile wird zur dritten addiert, das Ergebnis kommt in die dritte Zeile. Wir erhalten die erweiterte Matrix, die links steht.

$$\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{array}$$

Anschließend führen wir die Zeilenoperation $\mathrm{III} + \mathrm{II} \to \mathrm{III}$ durch und erhalten die erweiterte Matrix, die rechts steht.

Wir könnten das Gleichungssystem jetzt schrittweise auflösen. Statt dessen fahren wir mit Zeilenoperationen fort und versuchen, links vom senkrechten Strich die Einheitsmatrix zu erhalten. Durch $\frac{1}{2}\mathrm{I} \to \mathrm{I}$ und $\frac{1}{2}\mathrm{III} \to \mathrm{III}$ ergibt sich die erweiterte Matrix, die links unten steht. Wir haben erreicht, dass Einser in der Diagonale stehen.

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array}$$

Durch $\mathrm{I} + 2\mathrm{III} \to \mathrm{I}$ und $\mathrm{II} - 2\mathrm{III} \to \mathrm{II}$ erhalten wir die erweiterte Matrix, die in der Mitte steht, und durch $\mathrm{I} - \frac{1}{2}\mathrm{II} \to \mathrm{I}$ die erweiterte Matrix, die rechts steht.

Schreibt man diese erweiterte Matrix wieder als Gleichungssystem, dann erhält man $x_1 = -3$, $x_2 = 1$ und $x_3 = -\frac{3}{2}$. Der rechts vom senkrechten Strich stehende Vektor ist die Lösung des Gleichungssystems. Die erste Spalte der inversen Matrix ist gefunden.

Dieses lineare Gleichungssystem ist noch mit den Vektoren $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$ auf der rechten Seite zu lösen. Wir tun das auf einmal, indem wir alle drei Vektoren rechts hinschreiben.

$$\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Durch $\mathrm{II} - 2\mathrm{I} \to \mathrm{II}$ und $\mathrm{III} - \mathrm{I} \to \mathrm{III}$ erhalten wir die erweiterte Matrix, die links steht.

$$\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}$$

Anschließend führen wir die Zeilenoperation $\mathrm{III} + \mathrm{II} \to \mathrm{III}$ durch und erhalten die erweiterte Matrix, die rechts steht.

Durch $\frac{1}{2}\mathrm{I} \to \mathrm{I}$ und $\frac{1}{2}\mathrm{III} \to \mathrm{III}$ ergibt sich die links unten stehende erweiterte Matrix mit Einsern in der Diagonale und dann durch $\mathrm{I} + 2\mathrm{III} \to \mathrm{I}$ und $\mathrm{II} - 2\mathrm{III} \to \mathrm{II}$ die in der Mitte.

$$\begin{array}{rrr|rrr} 1 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|rrr} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Schließlich ergibt sich durch $\mathrm{I} - \frac{1}{2}\mathrm{II} \to \mathrm{I}$ die rechts stehende erweiterte Matrix mit der Einheitsmatrix links vom senkrechten Strich. Rechts vom senkrechten Strich stehen jetzt die Lösungen der Gleichungssysteme $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$, $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_2$ und $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_3$. Diese Lösungen sind die Spalten der inversen Matrix. Das bedeutet, dass rechts vom senkrechten Strich bereits die inverse Matrix A^{-1} steht.

Wir machen die Probe und überprüfen, ob wir richtig gerechnet haben. Es gilt

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 4 & 3 & -6 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

wie es sein muss. Genauso kann man $A^{-1}A = I_3$ nachprüfen.

Zur Übung berechnen wir noch die Inverse der links unten stehenden 4×4-Matrix A. Rechts sieht man die Matrix A mit angefügter Einheitsmatrix I_4.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & -4 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & -4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

Durch Zeilenoperationen soll aus der links vom senkrechten Strich stehenden Matrix die Einheitsmatrix gemacht werden. Wir versuchen das in einem Durchgang zu erreichen. Im ersten Schritt soll aus der ersten Spalte der Einheitsvektor $\mathbf{e}_1$ werden. Dort steht eine Null in der ersten Zeile. Daher addieren wir Vielfache der zweiten Zeile. Die Zeilenoperationen $\mathrm{I} \to \mathrm{II}$, $-\frac{1}{2}\mathrm{II} \to \mathrm{I}$ und $\mathrm{IV} + \mathrm{II} \to \mathrm{IV}$ machen aus der ersten Spalte den Einheitsvektor $\mathbf{e}_1$ und ergeben die links unten stehende erweiterte Matrix. Wir kommen zur zweiten Spalte. Dort steht 2 in der zweiten Zeile, daher addieren wir Vielfache der zweiten Zeile. Die Zeilenoperationen $\mathrm{I} + \frac{3}{2}\mathrm{II} \to \mathrm{I}$, $\frac{1}{2}\mathrm{II} \to \mathrm{II}$, $\mathrm{III} + 2\mathrm{II} \to \mathrm{III}$ und $\mathrm{IV} - \frac{3}{2}\mathrm{II} \to \mathrm{IV}$ machen aus der zweiten Spalte den Einheitsvektor $\mathbf{e}_2$ und ergeben die rechtsstehende erweiterte Matrix. Die erste Spalte wird dabei nicht mehr verändert.

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{7}{2} & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Jetzt zur dritten Spalte. Dort steht 0 in der dritten Zeile. Daher addieren wir Vielfache der vierten Zeile. Die Zeilenoperationen $\mathrm{I} + 7\mathrm{IV} \to \mathrm{I}$, $\mathrm{II} + \mathrm{IV} \to \mathrm{II}$, $-2\mathrm{IV} \to \mathrm{III}$ und $\mathrm{III} \to \mathrm{IV}$ machen aus der dritten Spalte den Einheitsvektor $\mathbf{e}_3$ und ergeben die links unten stehende erweiterte Matrix. Die ersten beiden Spalten haben sich dabei nicht verändert. Es bleibt schließlich noch die vierte Spalte. Die Zeilenoperationen $\mathrm{I} + 6\mathrm{IV} \to \mathrm{I}$, $\mathrm{II} + \mathrm{IV} \to \mathrm{II}$ und $\mathrm{III} - 2\mathrm{IV} \to \mathrm{III}$ machen die vierte Spalte zum Einheitsvektor $\mathbf{e}_4$ und ergeben die rechtsstehende erweiterte Matrix. Die ersten drei Spalten haben sich dabei nicht verändert.

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -6 & -9 & \frac{13}{2} & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & \frac{13}{2} & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Rechts vom senkrechten Strich ist die Inverse A^{-1} der Matrix A entstanden. Wir machen die Probe und überprüfen, ob wir richtig gerechnet haben. Es gilt

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & -4 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & \frac{13}{2} & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$$

wie es sein muss. Genauso kann man $A^{-1}A = I_4$ nachprüfen.

Wenn dieses Verfahren nicht funktioniert, das heißt wenn sich die Matrix, die links vom senkrechten Strich steht, nicht in die Einheitsmatrix verwandeln lässt, dann existiert die inverse Matrix nicht.

Inhaltsverzeichnis

I. Elementargeometrie 1

1. Einleitung 1
2. Der Strahlensatz 4
3. Der Satz von Pythagoras 10
4. Das Dreieck 14
5. Die besonderen Punkte mit Ceva und Carnot 18
6. Eulergerade, Neunpunktkreis und zentrische Streckungen 19
7. Der Peripheriewinkelsatz 21
8. Umkreis, Inkreis, Ankreise und Fläche 27

II. Trigonometrie 29

1. Trigonometrische Funktionen 29
2. Die besonderen Punkte des Dreiecks 32
3. Die Sätze von Napoleon und Morley 33
4. Komplexe Zahlen 35
5. Polarkoordinaten 36
6. Beweisen mit Hilfe komplexer Zahlen 38

III. Koordinaten und Vektoren 43

1. Inneres Produkt und Vektorprodukt 43
2. Determinante und Geraden 45
3. Die besonderen Punkte des Dreiecks 49
4. Die Steinerschen Geraden 51
5. Der Satz von Feuerbach 53

IV. Isometrien und Kegelschnitte 54

1. Lineare Abbildungen 54
2. Eigenwerte und Eigenvektoren 56
3. Symmetrische Matrizen 57
4. Isometrien der Ebene 58
5. Kegelschnitte 61
6. Tangentenkonstruktion 64
7. Tangentengleichung 66
8. Tangenten von einem Punkt an einen Kegelschnitt 68
9. Hauptachsentransformation 70
10. Leitlinie und Polarkoordinaten 73
11. Flächen zweiter Ordnung 75

V. Lineare Gleichungssysteme 79

1. Das Gaußsche Eliminationsverfahren 79
2. Eigenvektoren für 3×3-Matrizen 83
3. Kegelschnitt durch fünf Punkte 85
4. Inverse Matrix 87