

Ebene Geometrie

Ein weiterführendes Skriptum
für das Lehramtsstudium

Franz Hofbauer

April 2020

Vorwort

Dieses Skriptum soll zeigen, wie vielfältig die Beweismethoden der ebenen Geometrie sind. Es ist aus Seminarunterlagen entstanden und als weiterführender Text für das Lehramtsstudium gedacht.

Man kann die Geometrie nach den verwendeten Beweismethoden in Teilgebiete einteilen. Die wichtigsten dieser Teilgebiete sind die synthetische Geometrie, die Trigonometrie und die analytische Geometrie. Während in der Trigonometrie und in der analytischen Geometrie auf Hilfsmittel aus Algebra und Analysis zugegriffen wird, arbeitet die synthetische Geometrie nur mit geometrischen Methoden, insbesondere mit dem Strahlensatz, dem Satz von Pythagoras und dem Peripheriewinkelsatz. Das Skriptum ist im Wesentlichen nach solchen Teilgebieten in Kapitel unterteilt.

I.	Strahlensatz und Satz von Pythagoras	1
II.	Peripheriewinkelsatz und Sehnensatz	11
III.	Die Sätze von Menelaos und Ceva	26
IV.	Trigonometrie und Koordinatensystem	34
V.	Besondere Punkte eines Dreiecks	47
VI.	Das Vierseit	56
VII.	Koordinatenfreie Vektoren	63
VIII.	Geometrie mit komplexen Zahlen	78
IX.	Beweisen mit Hilfe von Abbildungen	87
X.	Orientierte Flächen und orientierte Normalabstände	100
XI.	Homogene Koordinaten und Kegelschnitte	109

Die synthetische Geometrie wird auf drei Kapitel aufgeteilt. In Kapitel I führen wir die Beweise nur mit Hilfe des Strahlensatzes und des Satzes von Pythagoras. In Kapitel II arbeiten wir auch mit dem Peripheriewinkelsatz und dem Sehnensatz. In Kapitel III kommen noch die Sätze von Menelaos und Ceva dazu. Kapitel IV bringt Sätze, die hauptsächlich mit trigonometrischen Methoden bewiesen werden. Manchmal führen wir Beweise aber auch mit Hilfe von kartesischen Koordinaten. Die nächsten beiden Kapitel sind gemischt. Die besonderen Punkte werden mit synthetischen Methoden (hauptsächlich Strahlensatz und Satz von Ceva) untersucht, es kommt aber auch ein wenig Trigonometrie zum Einsatz. Im Kapitel über das Vierseit wird teilweise mit kartesischen Koordinaten und teilweise synthetisch (hauptsächlich Peripheriewinkelsatz und Satz von Ceva) gearbeitet.

Die folgenden fünf Kapitel verwenden speziellere Methoden. In Kapitel VII wird mit koordinatenfreien Vektoren gearbeitet und Kapitel VIII zeigt, wie man mit Hilfe komplexer Zahlen Geometrie betreiben kann. In Kapitel IX kommen in den Beweisen Abbildungen zum Einsatz, zuerst sind das Drehungen, Spiegelungen und zentrische Streckungen, dann wird die Inversion am Kreis ausführlich behandelt und angewendet. In Kapitel X wird mit orientierten Flächen und orientierten Normalabständen gearbeitet. Durch die Orientierung erspart man sich Fallunterscheidungen. In Kapitel XI schließlich führen wir homogene kartesische Koordinaten ein. Wir betreiben keine projektive Geometrie, sondern rechnen mit Vektoren, Matrizen und Determinanten.

Grundkenntnisse aus Elementargeometrie und Linearer Algebra werden vorausgesetzt, insbesondere inneres Produkt und Determinante im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 . Folgende Sätze werden als bekannt angenommen: Strahlensatz, Satz von Pythagoras, Peripheriewinkelsatz, Satz von Menelaos und Satz von Ceva, sowie Sinus- und Cosinussatz. Vorausgesetzt werden auch

Grundkenntnisse über das Dreieck, zum Beispiel die vier bekannten besonderen Punkte, die Eulergerade und der Neunpunktkreis, ebenso Formeln für die Fläche eines Dreiecks (Heron), für Umkreis-, Inkreis- und Ankreisradien, sowie für die Abstände der Eckpunkte eines Dreiecks von den Punkten, in denen der Inkreis und die Ankreise die Dreiecksseiten berühren. Für Kapitel XI sollten auch Kegelschnitte in Hauptlage und die Hauptachsentransformation bekannt sein. Tangenten an Kegelschnitte und deren Eigenschaften kommen auch im letzten Abschnitt von Kapitel II vor.

Wir verwenden folgende Abkürzungen:

$\ell(A, B)$	Gerade durch die Punkte A und B
\overline{AB}	Strecke zwischen den Punkten A und B
\overrightarrow{AB}	Vektor vom Punkt A zum Punkt B
$ AB $	Abstand der Punkte A und B
AB	orientierter Abstand vom Punkt A zum Punkt B
$\triangle ABC$	Dreieck mit den Eckpunkten A , B und C
$\sphericalangle ABC$	Winkel bei B im Dreieck mit den Eckpunkten A , B und C

Der orientierte Abstand spielt eine wichtige Rolle. Er eignet sich sehr gut zum Rechnen. Für zwei Punkte P und Q gilt $PQ = -QP$. Für drei Punkte P , Q und R , die auf einer Gerade liegen, gilt $PQ + QR = PR$ und $PR = QR \Rightarrow P = Q$. Weiters gilt $\frac{PQ}{PR} < 0$, wenn P zwischen Q und R liegt, und $\frac{PQ}{PR} > 0$, wenn P außerhalb der Strecke \overline{QR} liegt.

Literatur: Bücher zur Elementargeometrie:

- Johnson: *Advanced Euclidean Geometry*, Dover, 1960
 Altshiller-Court: *College Geometry*, Barnes & Noble, 1952
 Coxeter, Greitzer: *Geometry revisited*, MAA, 1967
 Honsberger: *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, 1995
 Liang-shin Hahn: *Complex Numbers and Geometry*, MAA, 1994
 Fukagawa, Rothman: *Sacred Mathematics, Japanese Temple Geometry*, Princeton, 2008
 Alsina, Nelsen: *Charming Proofs*, MAA, 2010

Skripten zur Elementargeometrie:

- Franz Hofbauer: *Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt*, 2020
 Yimin Ge: *Fortgeschrittene Geometrie für Mathematikolympioniken*, Wien, 2007
 Paul Yiu: *Introduction to the Geometry of the Triangle*, 2002

Zeitschriften und Internet:

- Forum Geometricorum* <http://forumgeom.fau.edu/>
American Mathematical Monthly <https://www.jstor.org/journal/amermathmont>
The Mathematical Gazette <https://www.jstor.org/journal/mathgaze>
Mathematical Excalibur <http://www.math.ust.hk/excalibur/>
Cut the knot <http://www.cut-the-knot.org/geometry.shtml>
Enc. of triangle centers <https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>
Cubics in the triangle plane <https://bernard-gibert.pagesperso-orange.fr/index.html>
Enc. of quadri-figures <https://www.chrisvantienhoven.nl/mathematics/encyclopedia>

Die beiden Bücher “Johnson: *Advanced Euclidean Geometry*” und “Altshiller-Court: *College Geometry*” kann man als Standardlehrbücher der Elementargeometrie bezeichnen. Sie werden immer dann zitiert, wenn ein einführender Text zitiert werden soll.

I. Strahlensatz und Satz von Pythagoras

1. Arbelos und Archimedeskreise	2
2. Eine Gerade durch den Schwerpunkt	4
3. Der Satz von Carnot und der Orthopol	6
4. Die Erdös-Mordell-Ungleichung	8

Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Seitenlängen a , b und c und einem rechten Winkel beim Eckpunkt C . Sei h die Länge der Höhe durch C und H deren Fußpunkt. Schließlich sei p der Abstand der Punkte H und B und q der Abstand der Punkte H und A . Dann gilt $c^2 = a^2 + b^2$ (Satz von Pythagoras) und $h^2 = pq$ (Höhensatz). Weiters gilt $a^2 = pc$ und $b^2 = qc$ (Kathetensatz).

Seien g und h Gerade, die einander im Punkt S schneiden. Weiters sei u eine Gerade, die g im Punkt A und h im Punkt B schneidet, und v eine Gerade, die g im Punkt C und h im Punkt D schneidet. Diese Schnittpunkte seien alle ungleich S . Der Strahlensatz besagt dann, dass u und v genau dann parallel sind, wenn $\frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SD}$ gilt. In diesem Fall gilt auch $\frac{SA}{SC} = \frac{AB}{CD}$. (Weiters gilt auch $\frac{CA}{CS} = \frac{DB}{DS}$ und $\frac{AC}{AS} = \frac{BD}{BS}$. Die erste Gleichung folgt aus $\frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SD}$, indem man $SA = SC + CA$ und $SB = SD + DB$ einsetzt, die zweite Gleichung folgt, indem man $SC = SA + AC$ und $SD = SB + BD$ einsetzt.)

Dieser soeben formulierte Strahlensatz verwendet orientierte Abstände. Oft wird der Strahlensatz aber auch auf ähnliche Dreiecke angewendet. Seien $\triangle ABC$ und $\triangle DEF$ zueinander ähnliche Dreiecke, wobei die Winkel bei A und D gleich groß sind, ebenso die bei B und E , und daher auch die bei C und F . Es gilt dann $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|}$. Diese Gleichungen sind äquivalent zu $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|DF|}$, $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|}$ und $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|DF|}{|EF|}$. Hier verwenden wir die üblichen Abstände, die nicht orientiert sind.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels untersuchen wir den Arbelos. Man erhält ihn, indem man aus einem Halbkreis mit Radius $r_1 + r_2$ einen Halbkreis mit Radius r_1 und einen zweiten Halbkreis mit Radius r_2 herauschneidet. Es stellt sich heraus, dass man in diese Figur viele Kreise einbetten kann, die alle Radius $\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$ haben. Diese Kreise heißen Archimedeskreise.

Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels legen wir eine Gerade durch den Schwerpunkt eines Dreiecks. Wir beweisen eine Gleichung für die Abstände vom Schwerpunkt zu den Schnittpunkten dieser Gerade mit den (Verlängerungen der) drei Dreiecksseiten. In diesem Abschnitt findet man auch Übungsaufgaben, die mit Hilfe des Strahlensatzes gelöst werden können.

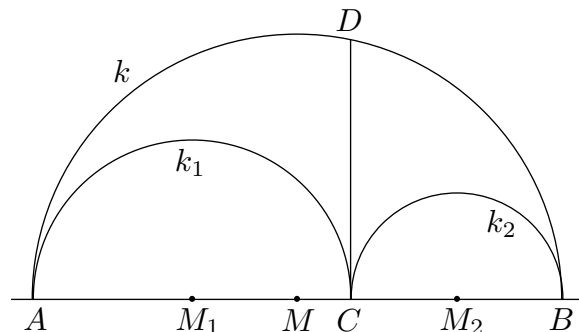
Im dritten Abschnitt dieses Kapitels beweisen wir den Satz von Carnot. Dieser gibt eine Bedingung an, wann Senkrechte auf die Seiten eines Dreiecks einander in einem Punkt schneiden. Mit Hilfe des Satzes von Carnot behandeln wir dann den Orthopol eines Dreiecks bezüglich einer Gerade.

Im vierten Abschnitt dieses Kapitels beweisen wir die Erdös-Mordell-Ungleichung: Ist P ein Punkt im Innern eines Dreiecks, dann ist die doppelte Summe der Normalabstände von P zu den Seiten des Dreiecks kleiner oder gleich der Summe der Abstände von P zu den Eckpunkten des Dreiecks.

1. Arbelos und Archimedeskreise

Der Arbelos ist ein Dreieck, dessen Seiten einander berührende Halbkreise sind. Er wurde von Archimedes eingeführt.

Sei \overline{AB} eine Strecke, auf der ein Punkt C gewählt wird. Über der Strecke \overline{AB} als Durchmesser errichten wir einen Halbkreis k mit Radius r . Aus diesem Halbkreis schneiden wir den Halbkreis k_1 mit Durchmesser \overline{AC} und Radius r_1 und den Halbkreis k_2 mit Durchmesser \overline{CB} und Radius r_2 heraus. Die verbleibende Fläche ist der Arbelos. Es gilt $|AB| = 2r$, $|AC| = 2r_1$, $|CB| = 2r_2$ und $r = r_1 + r_2$. Sei M der Mittelpunkt der Strecke \overline{AB} , M_1 der der Strecke \overline{AC} und M_2 der der Strecke \overline{CB} . Das sind auch die Mittelpunkte der Halbkreise. Es gilt $|MM_1| = r - r_1 = r_2$ und $|MM_2| = r - r_2 = r_1$.

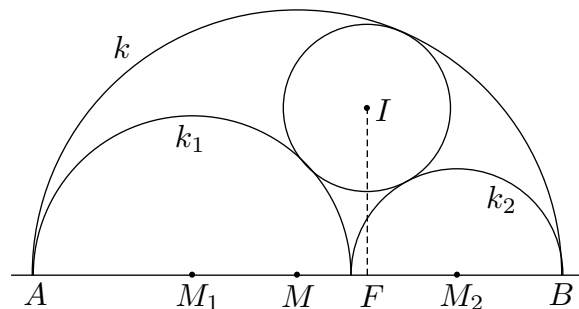


Die Halbkreise k und k_1 berühren einander im Punkt A , die Halbkreise k und k_2 im Punkt B und die Halbkreise k_1 und k_2 im Punkt C . Wir zeichnen noch die gemeinsame Tangente der Halbkreise k_1 und k_2 im Punkt C . Sie schneidet den Halbkreis k in einem Punkt, den wir D nennen. Diese Bezeichnungen verwenden wir im Folgenden als Standardbezeichnungen.

Ein Arbelos hat einen Inkreis. Es ist der Kreis, der den Halbkreis k von innen und die beiden Halbkreise k_1 und k_2 von außen berührt.

Satz 1: Für den Radius ϱ des Inkreises gilt $\varrho = \frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}$.

Beweis: Sei I der Mittelpunkt des Inkreises und F der Fußpunkt des Lots von I auf \overline{AB} . Wir setzen $d = |MF|$ und $h = |IF|$. Wir verwenden den Satz von Pythagoras. Es gilt $(r - \varrho)^2 = d^2 + h^2$, da der Inkreis den Halbkreis k von innen berührt. Weiters gilt auch $(r_1 + \varrho)^2 = (r_2 + d)^2 + h^2$ und $(r_2 + \varrho)^2 = (r_1 - d)^2 + h^2$, da der Inkreis die Halbkreise k_1 und k_2 von außen berührt.



Wir lösen diese drei Gleichungen. Subtraktion der ersten von den beiden anderen ergibt die zwei Gleichungen $r_1^2 + 2r_1\varrho - r^2 + 2r\varrho = r_2^2 + 2r_2d$ und $r_2^2 + 2r_2\varrho - r^2 + 2r\varrho = r_1^2 - 2r_1d$. Aus diesen beiden Gleichungen eliminiert man d und setzt $r = r_1 + r_2$ ein. Das ergibt dann $\varrho = \frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}$. \square

Satz 2: Sei I der Inkreismittelpunkt eines Arbelos. Dann ist $\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$ der Inkreisradius des Dreiecks $\triangle IM_1M_2$.

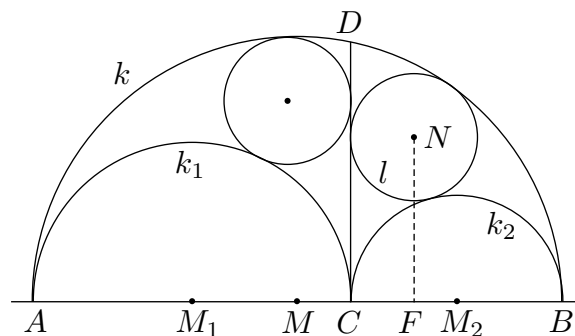
Beweis: Sei ϱ der Inkreisradius des Arbelos. Die Seiten des Dreiecks $\triangle IM_1M_2$ sind dann $a = \varrho + r_2$, $b = \varrho + r_1$ und $c = r_1 + r_2$, da der Inkreis und die Halbkreise k_1 und k_2 einander berühren. (Daraus ergibt sich auch, dass der Inkreis des Dreiecks $\triangle IM_1M_2$ durch die drei Berührungspunkte geht.)

Jetzt berechnen wir den Inkreisradius q des Dreiecks $\triangle IM_1M_2$ aus den Seitenlängen a , b und c . Eine Formel für den Inkreisradius ist $\frac{F}{s}$, wobei $s = \frac{a+b+c}{2}$ der halbe Umfang und

$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ die Dreiecksfläche ist. Setzt man für a , b und c ein, so ergibt sich $s = \varrho + r_1 + r_2$, $s - a = r_1$, $s - b = r_2$ und $s - c = \varrho$. Aus Satz 1 folgt $s = \frac{(r_1+r_2)^3}{r_1^2+r_1r_2+r_2^2}$ und $(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{r_1^2r_2^2(r_1+r_2)}{r_1^2+r_1r_2+r_2^2}$, also $q^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} = \frac{r_1^2r_2^2}{(r_1+r_2)^2}$. \square

Satz 3: Der Kreis l , der in einem Arbelos den Halbkreis k von innen, den Halbkreis k_2 von außen und die Strecke \overline{CD} berührt, hat Radius $\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}$.

Beweis: Sei q der Radius des Kreises l . Sei N der Mittelpunkt des Kreises l und F der Fußpunkt des Lots von N auf \overline{AB} . Sei $d = |MF|$ und $h = |NF|$. Es gilt $|FC| = q$, da der Kreis l die Strecke \overline{CD} berührt. Wir verwenden den Satz von Pythagoras. Es folgt $(r_2 + q)^2 = (r_2 - q)^2 + h^2$, da der Kreis l den Halbkreis k_2 von außen berührt. Weiters gilt $(r - q)^2 = (r - 2r_2 + q)^2 + h^2$, da der Kreis l den Halbkreis k von innen berührt. Wir lösen diese zwei Gleichungen. Wir subtrahieren die zweite von der ersten Gleichung und vereinfachen dann. Wir erhalten dadurch $4rq + 4r_2^2 - 4rr_2 = 0$. Wegen $r = r_1 + r_2$ ergibt sich $q = \frac{r_1r_2}{r_1+r_2}$. \square



Bemerkung: Der Kreis l aus Satz 3 hat einen Zwillingkreis. Es ist der Kreis, der den Halbkreis k von innen, den Halbkreis k_1 von außen und die Strecke \overline{CD} berührt. Er ist in obiger Zeichnung ebenfalls eingezeichnet. Man kann seinen Radius genauso berechnen wie den Radius von l , es ist nur r_1 mit r_2 zu vertauschen. Da sich dadurch das Ergebnis nicht ändert, hat er ebenfalls Radius $\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}$.

In den letzten beiden Sätzen haben wir Kreise gefunden, die in einen Arbelos eingebettet sind und Radius $\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}$ haben. Solche Kreise nennt man Archimedeskreise. Manche treten allein auf, wie der in Satz 2, andere haben einen Zwillingkreis, wie der in Satz 3. Es sind viele Archimedeskreise (<http://home.wxs.nl/~lamoen/wiskunde/Arbelos/Catalogue.htm>) bekannt. Einige davon werden in den folgenden Übungsbeispielen behandelt.

Übung: Sei g die gemeinsame Tangente $\neq \ell(C, D)$ an die Halbkreise k_1 und k_2 . Der größte Kreis, der g und den Halbkreis k von innen berührt, hat Radius $\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}$ (Strahlensatz).

Übung: Sei h die Tangente vom Punkt A an den Halbkreis k_2 . Der Kreis, der h berührt und die Gerade $\ell(C, D)$ im Punkt C jedoch auf der anderen Seite als k_2 , hat Radius $\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}$ (Strahlensatz). Dieser Kreis hat einen Zwillingkreis.

Übung: Sei h die Tangente vom Punkt M_1 an den Halbkreis k_2 . Der Kreis mit Mittelpunkt C , der h berührt, hat Radius $\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}$ (Strahlensatz).

Übung: Sei g die gemeinsame Tangente $\neq \ell(C, D)$ an die Halbkreise k_1 und k_2 und P der Punkt, in dem sie k_2 berührt. Der kleinste Kreis, der $\ell(C, D)$ berührt und durch P geht, hat Radius $\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}$ (Strahlensatz). Dieser Kreis hat einen Zwillingkreis.

Übung: Sei g die gemeinsame Tangente $\neq \ell(C, D)$ an die Halbkreise k_1 und k_2 . Der kleinste Kreis, der g berührt und durch C geht, hat Radius $\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}$ (Strahlensatz).

Übung: Sei k_3 der Kreis mit Mittelpunkt A durch C . Sein Schnittpunkt mit k sei Q . Der kleinste Kreis, der $\ell(C, D)$ berührt und durch Q geht, hat Radius $\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$ (Pythagoras). Dieser Kreis hat einen Zwillingkreis.

Übung: Sei k_3 der Kreis mit Mittelpunkt A durch C und k_4 der Kreis mit Mittelpunkt B durch C . Der Kreis, der k von innen und k_3 und k_4 von außen berührt, hat Radius $\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$ (Pythagoras).

Übung: Sei N der Mittelpunkt des Halbkreisbogens k_1 und g die Gerade durch M und N . Der Kreis, der k von innen und g im Punkt N berührt (egal von welcher Seite), hat Radius $\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$ (Pythagoras). Dieser Kreis hat einen Zwillingkreis.

2. Eine Gerade durch den Schwerpunkt

Wir beweisen folgenden Satz.

Satz 4: Sei $\triangle ABC$ ein beliebiges Dreieck. Sei g eine Gerade durch den Schwerpunkt S . Seien D, E und F die Schnittpunkte der Gerade g mit den (Verlängerungen der) drei Dreiecksseiten. Dann gilt $\frac{1}{SD} + \frac{1}{SE} + \frac{1}{SF} = 0$.

Beweis: Die Gerade g schneidet zwei Dreiecksseiten und die Verlängerung der dritten. Wir nehmen an, dass die Seite \overline{AB} ist und dass g deren Verlängerung rechts vom Punkt B schneidet. Wir zeichnen eine Parallele zu \overline{AB} durch F . Ihr Schnittpunkt mit der Schwerlinie s durch C sei Q . Ebenso zeichnen wir eine Parallele zu \overline{AB} durch E . Ihr Schnittpunkt mit der Schwerlinie s sei P und ihr Schnittpunkt mit der Seite \overline{AC} sei R . Die Punkte Q und P liegen auf der Schwerlinie s , der erste oberhalb von S , der zweite unterhalb. Schließlich sei U der Mittelpunkt der Seite \overline{AB} , der ebenfalls auf s liegt.

Es gilt $\frac{PR}{UA} = \frac{CP}{CU} = \frac{PE}{UB}$ wegen des Strahlensatzes. Da auch $|UA| = |UB|$ gilt, erhalten wir $|PR| = |PE|$. Der Strahlensatz liefert auch $\frac{SE}{SF} = \frac{EP}{FQ}$. Aus diesen beiden Gleichungen folgt $\frac{|SE|}{|SF|} = \frac{|RP|}{|FQ|}$. Da auch $\frac{CP}{CQ} = \frac{RP}{FQ}$ nach dem Strahlensatz gilt, erhalten wir schließlich $\frac{|CP|}{|CQ|} = \frac{|SE|}{|SF|}$.

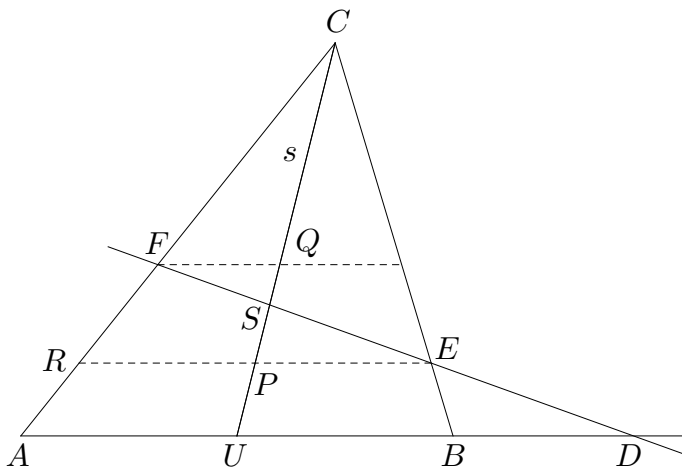
Es gilt $|CS| = 2|SU|$, da der Schwerpunkt S die Schwerlinie im Verhältnis $1 : 2$ teilt. Es folgt $|CQ| + |QS| = 2|SU|$, also $|CQ| = 2|SU| - |QS|$. Es gilt auch $|CP| = |CQ| + |QS| + |SP|$.

Dividiert man durch $|CQ|$ und setzt für $|CQ|$ ein, so hat man die linksstehende Gleichung

$$\frac{|CP|}{|CQ|} = 1 + \frac{|QS| + |SP|}{2|SU| - |QS|} \Rightarrow \frac{|CP|}{|CQ|} = 1 + \frac{1 + \frac{|SP|}{|QS|}}{2 \frac{|SU|}{|QS|} - 1} \Rightarrow \frac{|CP|}{|CQ|} = 1 + \frac{1 + \frac{|SE|}{|SF|}}{2 \frac{|SD|}{|SF|} - 1}$$

Die Gleichung in der Mitte erhält man, indem man Zähler und Nenner durch $|QS|$ dividiert. Daraus folgt die rechtsstehende Gleichung, da $\frac{|SP|}{|SQ|} = \frac{|SE|}{|SF|}$ und $\frac{|SU|}{|SQ|} = \frac{|SD|}{|SF|}$ nach dem Strahlensatz gelten. Oben wurde $\frac{|CP|}{|CQ|} = \frac{|SE|}{|SF|}$ gezeigt. Setzen wir das in die rechtsstehende Gleichung ein und lösen den Doppelbruch auf, dann erhalten wir

$$\frac{|SE|}{|SF|} (2 \frac{|SD|}{|SF|} - 1) = 2 \frac{|SD|}{|SF|} - 1 + 1 + \frac{|SE|}{|SF|}$$



Entsprechende Umformungen ergeben dann die folgenden Gleichungen

$$2 \frac{|SE| \cdot |SD|}{|SF|} = 2|SD| + 2|SE| \quad \text{und} \quad \frac{1}{|SF|} = \frac{1}{|SE|} + \frac{1}{|SD|}.$$

Die Punkte F , S , E und D liegen alle auf der Gerade g , wobei F auf der einen Seite von S und E und D auf der anderen Seite von S liegen. Die orientierten Abstände SE und SD haben daher das entgegengesetzte Vorzeichen des orientierten Abstandes SF . Somit erhalten wir $\frac{1}{SF} + \frac{1}{SE} + \frac{1}{SD} = 0$. \square

Es folgen Übungsbeispiele zum Strahlensatz.

Übung: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Schwerpunkt S . Eine Gerade g durch S schneide die Seite \overline{BC} im Punkt E und die Seite \overline{AC} im Punkt F . Man zeige, dass $\frac{AF}{FC} + \frac{BE}{EC} = 1$ gilt. Hinweis: Lote von den Eckpunkten und vom Mittelpunkt M der Seite \overline{AB} auf g .

Übung: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und D ein Punkt auf \overline{AB} . Seien E auf \overline{BC} und F auf \overline{AC} so gewählt, dass \overline{DE} parallel zu \overline{AC} und \overline{DF} parallel zu \overline{BC} liegt. Sei U der Schnittpunkt von $\ell(A, E)$ und $\ell(D, F)$ und V der von $\ell(B, F)$ und $\ell(D, E)$. Man zeige, dass $\overline{UV} \parallel \overline{AB}$ und $\frac{1}{UV} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{DB}$ gilt.

Hinweis: $\frac{EA}{EU} = \frac{AE}{UE} = \frac{AC}{FC} = \frac{CA}{CF}$ und $\frac{EV}{VF} = \frac{BE}{EC} = \frac{ED}{DC} \Rightarrow \frac{ED}{EV} = \frac{CA}{CF}$. Somit gilt $\overline{UV} \parallel \overline{AD}$. Jetzt $\frac{AD}{UV} = \frac{EA}{EU} = \frac{AE}{UE} = \frac{AB}{DB}$ und $AB = AD + DB$.

Übung: Sei \overline{AB} der Durchmesser eines Halbkreises. Sei t die Tangente im Punkt B an den Halbkreis und s die in einem anderen Punkt D . Sei T der Schnittpunkt von s und t . Sei g die Gerade durch D senkrecht auf \overline{AB} , E ihr Schnittpunkt mit \overline{AB} und F ihr Schnittpunkt mit $\ell(A, T)$. Dann gilt $|DF| = |FE|$. (Archimedes)

Übung: Sei k ein Kreis mit Durchmesser \overline{AB} und C ein weiterer Punkt auf k . Seien t_A , t_B und t_C die Tangenten in den Punkten A , B und C an den Kreis. Den Schnittpunkt von t_A und t_C bezeichnen wir mit P , den von t_B und t_C mit Q , den von $\ell(A, Q)$ und $\ell(B, P)$ mit R und den von $\ell(C, R)$ und $\ell(A, B)$ mit S . Man zeige, dass $\ell(C, R)$ senkrecht auf $\ell(A, B)$ steht und dass $|CR| = |CS|$ gilt.

Hinweis: Legt man von einem Punkt die beiden Tangenten an einen Kreis, dann sind die Abschnitte bis zu den Berührungspunkten gleich lang. Strahlensatz und dessen Umkehrung.

Übung: Im vorhergehenden Beispiel sei M der Mittelpunkt und r der Radius des Kreises k . Dann gilt $\angle PMQ = 90^\circ$ und $r^2 = |AP| \cdot |BQ|$.

Hinweis: $\angle AMP = \angle CMP$, $\angle BMQ = \angle CMQ$, Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck.

Übung: Sei k ein Kreis mit Durchmesser \overline{AB} und C ein weiterer Punkt auf k . Seien t_A , t_B und t_C die Tangenten in den Punkten A , B und C an den Kreis. Den Schnittpunkt von t_A und $\ell(B, C)$ bezeichnen wir mit U , den von t_B und $\ell(A, C)$ mit V . Man zeige, dass die Geraden $\ell(A, B)$, t_C und $\ell(U, V)$ parallel liegen oder einander in einem Punkt schneiden.

Übung: Sei \overline{AB} eine Sehne in einem Kreis k . In dem kleineren Teil, den \overline{AB} von k abschneidet, wird ein Kreis l eingeschrieben (es gibt viele solche Kreise), der \overline{AB} im Punkt P und k im Punkt Q berührt. Sei g die Senkrechte auf \overline{AB} durch den Mittelpunkt M des Kreises k . Sei R der Schnittpunkt von g mit dem Kreisbogen von A nach B , der nicht durch Q geht. Dann liegen die Punkte Q , P und R auf einer Gerade.

Hinweis: Sei N der Mittelpunkt des Kreises l . Es gilt $|MQ| = |MR|$, $|NQ| = |NP|$ und $\angle RMQ = \angle PNQ$. Daher auch $\angle NQP = \angle MQR$.

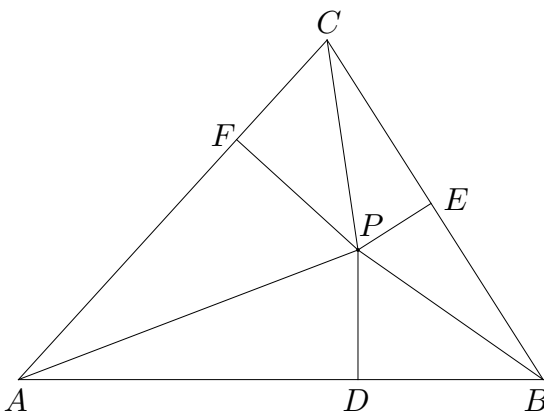
3. Der Satz von Carnot und der Orthopol

Der folgende Satz ist der Satz von Carnot, der darauffolgende dessen Umkehrung.

Satz 5: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Sei D ein Punkt auf $\ell(A, B)$, sei E ein Punkt auf $\ell(B, C)$ und F ein Punkt auf $\ell(C, A)$, sodass die Gerade durch D senkrecht auf $\ell(A, B)$, die Gerade durch E senkrecht auf $\ell(B, C)$ und die Gerade durch F senkrecht auf $\ell(C, A)$ einander in einem Punkt P schneiden. Dann gilt $|AD|^2 - |DB|^2 + |BE|^2 - |EC|^2 + |CF|^2 - |FA|^2 = 0$.

Beweis: Wir zeichnen die Lote vom Punkt P auf die (Verlängerungen der) drei Dreiecksseiten, das sind die Strecken von P nach D , von P nach E und von P nach F . Weiters zeichnen wir die Strecken vom Punkt P zu den drei Eckpunkten A , B und C . Dadurch entstehen sechs rechtwinkelige Dreiecke, wobei die rechten Winkel jeweils bei den Punkten D , E und F liegen. Wir wenden den Satz von Pythagoras auf diese sechs Dreiecke an und erhalten die Gleichungen:

$|AD|^2 = |AP|^2 - |DP|^2$, $|DB|^2 = |BP|^2 - |DP|^2$,
 $|BE|^2 = |BP|^2 - |EP|^2$, $|EC|^2 = |CP|^2 - |EP|^2$,
 $|CF|^2 = |CP|^2 - |FP|^2$, $|FA|^2 = |AP|^2 - |FP|^2$.
 Das alles gilt auch, wenn der Punkt P außerhalb des Dreiecks liegt. Die Lage dieser rechtwinkligen Dreiecke ist dann nur etwas komplizierter. Subtrahiert man die ersten beiden Gleichungen, die darauffolgenden beiden Gleichungen und die letzten beiden Gleichungen, so hat man $|AD|^2 - |DB|^2 = |AP|^2 - |BP|^2$, $|BE|^2 - |EC|^2 = |BP|^2 - |CP|^2$ und $|CF|^2 - |FA|^2 = |CP|^2 - |AP|^2$. Addiert man diese drei Gleichungen, so folgt schließlich $|AD|^2 - |DB|^2 + |BE|^2 - |EC|^2 + |CF|^2 - |FA|^2 = 0$. Das ist bereits das gewünschte Resultat. \square



Satz 6: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Sei D ein Punkt auf $\ell(A, B)$, sei E ein Punkt auf $\ell(B, C)$ und sei F ein Punkt auf $\ell(C, A)$, sodass $|AD|^2 - |DB|^2 + |BE|^2 - |EC|^2 + |CF|^2 - |FA|^2 = 0$ gilt. Die Gerade durch D senkrecht auf $\ell(A, B)$, die Gerade durch E senkrecht auf $\ell(B, C)$ und die Gerade durch F senkrecht auf $\ell(C, A)$ schneiden dann einander in einem Punkt.

Beweis: Sei g_a die Gerade durch den Punkt E senkrecht auf $\ell(B, C)$ und g_b die Gerade durch den Punkt F senkrecht auf $\ell(C, A)$. Sei P der Schnittpunkt der Geraden g_a und g_b . Weiters sei D^* der Fußpunkt des Lots vom Punkt P auf die Gerade $\ell(A, B)$. Aus Satz 5 erhalten wir $|AD^*|^2 - |D^*B|^2 + |BE|^2 - |EC|^2 + |CF|^2 - |FA|^2 = 0$. Nach Voraussetzung gilt $|AD|^2 - |DB|^2 + |BE|^2 - |EC|^2 + |CF|^2 - |FA|^2 = 0$. Es folgt $|AD^*|^2 - |D^*B|^2 = |AD|^2 - |DB|^2$. Setzt man $x = DD^*$, dann gilt $AD^* = AD + x$ und $x + D^*B = DB$. Setzt man das ein, so folgt $|AD|^2 + 2AD \cdot x + x^2 - |DB|^2 + 2DB \cdot x - x^2 = |AD|^2 - |DB|^2$, das heißt $2AD \cdot x + 2DB \cdot x = 0$. Wegen $AD + DB = AB \neq 0$ folgt $AB \cdot x = 0$ und daraus $x = 0$. Damit ist $DD^* = 0$ gezeigt, also $D^* = D$. Das Lot von P auf die Gerade $\ell(A, B)$ geht durch D . Somit liegt P auch auf der Gerade durch D senkrecht auf $\ell(A, B)$. \square

Diese Sätze besagen, dass die Gerade durch D senkrecht auf $\ell(B, C)$, die Gerade durch E senkrecht auf $\ell(C, A)$ und die Gerade durch F senkrecht auf $\ell(A, B)$ genau dann einander in einem Punkt schneiden, wenn $|AF|^2 - |FB|^2 + |BD|^2 - |DC|^2 + |CE|^2 - |EA|^2 = 0$ gilt.

Wir zeigen, dass dieses Resultat auch dann gilt, wenn wir nicht voraussetzen, dass die Punkte D , E und F auf den Trägergeraden der Dreiecksseiten liegen.

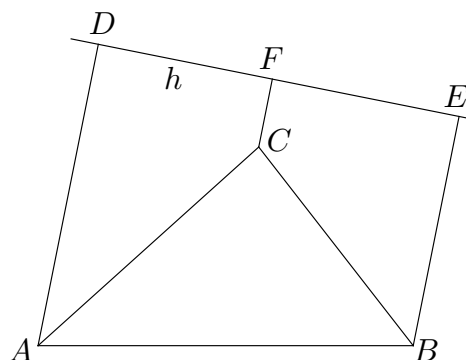
Satz 7: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und D, E und F beliebige Punkte. Die Gerade g_a durch D senkrecht auf $\ell(B, C)$, die Gerade g_b durch E senkrecht auf $\ell(C, A)$ und die Gerade g_c durch F senkrecht auf $\ell(A, B)$ schneiden einander in einem Punkt genau dann, wenn $|AF|^2 - |FB|^2 + |BD|^2 - |DC|^2 + |CE|^2 - |EA|^2 = 0$ gilt.

Beweis: Seien D^*, E^* und F^* die Fußpunkte der Lote von D auf $\ell(B, C)$, von E auf $\ell(C, A)$ und von F auf $\ell(A, B)$. Der Satz von Pythagoras liefert $|AF^*|^2 = |AF|^2 - |FF^*|^2$ und $|F^*B|^2 = |FB|^2 - |FF^*|^2$. Subtraktion ergibt $|AF^*|^2 - |F^*B|^2 = |AF|^2 - |FB|^2$. Analog zeigt man $|BD^*|^2 - |D^*C|^2 = |BD|^2 - |DC|^2$ und $|CE^*|^2 - |E^*A|^2 = |CE|^2 - |EA|^2$. Somit ist die Gleichung $|AF|^2 - |FB|^2 + |BD|^2 - |DC|^2 + |CE|^2 - |EA|^2 = 0$ genau dann erfüllt, wenn $|AF^*|^2 - |F^*B|^2 + |BD^*|^2 - |D^*C|^2 + |CE^*|^2 - |E^*A|^2 = 0$ gilt. Und diese Gleichung ist nach dem Satz von Carnot und dessen Umkehrung wieder äquivalent dazu, dass die Geraden g_a, g_b und g_c einander in einem Punkt schneiden, da die Gerade g_a auch die Senkrechte durch D^* auf $\ell(B, C)$, die Gerade g_b auch die Senkrechte durch E^* auf $\ell(A, C)$ und g_c auch die Senkrechte durch F^* auf $\ell(A, B)$ ist. \square

Mit Hilfe von Satz 7 beweisen wir folgenden Satz.

Satz 8: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und h eine Gerade. Seien D, E und F die Fußpunkte der Lote von den Eckpunkten A, B und C auf die Gerade h . Sei g_a die Senkrechte durch D auf $\ell(B, C)$, g_b die Senkrechte durch E auf $\ell(A, C)$ und g_c die Senkrechte durch F auf $\ell(A, B)$. Dann schneiden die Geraden g_a, g_b und g_c einander in einem Punkt P . Dieser Punkt P heißt Orthopol des Dreiecks $\triangle ABC$ bezüglich der Geraden h .

Beweis: Wegen Satz 7 genügt es zu zeigen, dass $|AF|^2 - |FB|^2 + |BD|^2 - |DC|^2 + |CE|^2 - |EA|^2 = 0$ gilt. Da \overline{AD} senkrecht auf die Gerade h steht, folgt $|AF|^2 = |AD|^2 + |DF|^2$ und $|EA|^2 = |AD|^2 + |DE|^2$ aus dem Satz von Pythagoras. Da \overline{BE} senkrecht auf h steht, folgt auch $|BD|^2 = |BE|^2 + |ED|^2$ und $|FB|^2 = |BE|^2 + |EF|^2$. Und da auch \overline{CF} senkrecht auf h steht, folgt schließlich $|CE|^2 = |CF|^2 + |FE|^2$ und $|DC|^2 = |CF|^2 + |FD|^2$.



Jetzt setzen wir oben ein. Es fällt alles weg. Damit ist die Gleichung $|AF|^2 - |FB|^2 + |BD|^2 - |DC|^2 + |CE|^2 - |EA|^2 = 0$ gezeigt. Nach Satz 7 schneiden die Geraden g_a, g_b und g_c einander in einem Punkt P . \square

Übung: Man zeige mit Hilfe des Satzes von Carnot, dass die drei Höhen eines Dreiecks einander in einem Punkt schneiden.

Übung: Für jede der drei Seiten eines Dreiecks zeichnen wir eine Gerade, die durch den Berührungspunkt des Ankreises geht und senkrecht auf die Dreiecksseite steht. Man zeige, dass diese drei Geraden durch einen Punkt gehen. Hinweis: Die Abstände der Berührungspunkte von den Eckpunkten des Dreiecks findet man in Kapitel V.

Übung: Auf die Seiten eines Dreiecks $\triangle ABC$ als Basis werden gleichschenkelige Dreiecke $\triangle AC^*B$, $\triangle BA^*C$ und $\triangle CB^*A$ gesetzt. Sei g_A die Senkrechte auf $\ell(B^*, C^*)$ durch A , sei g_B die Senkrechte auf $\ell(A^*, C^*)$ durch B und g_C die Senkrechte auf $\ell(A^*, B^*)$ durch C . Man zeige, dass diese drei Geraden einander in einem Punkt schneiden.

Übung: Sei $ABCD$ ein Rechteck und sei P ein beliebiger Punkt. Man zeige, dass dann $|PA|^2 - |PB|^2 + |PC|^2 - |PD|^2 = 0$ gilt.

4. Die Erdős-Mordell-Ungleichung

Zeichnet man in einem Dreieck die Strecken vom Umkreismittelpunkt U zu den Eckpunkten A , B und C , dann entstehen drei Dreiecke. Wir berechnen die Winkel in diesen drei Dreiecken.

Das Dreieck $\triangle AUB$ ist gleichschenkelig. Die Winkel bei den Eckpunkten A und B sind gleich groß. Wir nennen sie u . Ebenso ist das Dreieck $\triangle AUC$ gleichschenkelig. Die gleich großen Winkel bei den Eckpunkten A und C nennen wir v . Und die gleich großen Winkel bei den Eckpunkten B und C im Dreieck $\triangle BUC$ nennen wir w .

Ist das Dreieck spitzwinkelig, dann liegt U im Dreieck und wir erhalten die Gleichungen $u + v = \alpha$, $u + w = \beta$ und $v + w = \gamma$. Das ist ein lineares Gleichungssystem. Die Lösung ist $u = \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} = 90^\circ - \gamma$, $v = \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2} = 90^\circ - \beta$ und $w = \frac{-\alpha + \beta + \gamma}{2} = 90^\circ - \alpha$.

Ist ein Winkel stumpf, zum Beispiel γ , dann liegt der Umkreismittelpunkt U außerhalb des Dreiecks. In dieser Rechnung ist dann einfach nur u durch $-u$ zu ersetzen. Die Lösung ist dann $u = \gamma - 90^\circ$, $v = 90^\circ - \beta$ und $w = 90^\circ - \alpha$.

In den folgenden Beweisen werden wir $\angle BAU = 90^\circ - \gamma$ (bzw $\angle BAU = \gamma - 90^\circ$, wenn γ stumpf ist) und $\angle CAU = 90^\circ - \beta$ (bzw $\angle CAU = \beta - 90^\circ$, wenn β stumpf ist) verwenden.

Wir beginnen mit einem Hilfsresultat. Wir verwenden dazu zwar die Definition des \cos , aber keine Sätze aus der Trigonometrie.

Hilfssatz: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Seitenlängen a , b und c . Seien U und r Mittelpunkt und Radius des Umkreises und P ein Punkt im Innern dieses Dreiecks. Sei $\varphi = \angle PAU$, sei $\psi = \angle PBU$ und $\varrho = \angle PCU$. Weiters seien D , E und F die Fußpunkte der Lote von P auf die Geraden $\ell(B, C)$, $\ell(A, C)$ und $\ell(A, B)$. Dann gilt $|PA| \cos \varphi = \frac{b}{a} |PF| + \frac{c}{a} |PE|$, $|PB| \cos \psi = \frac{c}{b} |PD| + \frac{a}{b} |PF|$ und $|PC| \cos \varrho = \frac{a}{c} |PE| + \frac{b}{c} |PD|$.

Beweis: Es sei $\angle PAB = \delta$ und $\angle PAC = \varepsilon$. Auf die Seite \overline{AB} des Dreiecks $\triangle ABC$ setzen wir außen das Dreieck $\triangle ABS$ mit den Winkeln $\angle ABS = \varepsilon$ und $\angle BAS = 90^\circ - \varepsilon$ auf.

Es muss dann $\angle ASB = 90^\circ$ gelten.

Auf die Seite \overline{AC} des Dreiecks $\triangle ABC$

setzen wir außen das Dreieck $\triangle ACT$

mit $\angle ACT = \delta$ und $\angle CAT = 90^\circ - \delta$

auf. Wieder gilt $\angle ATC = 90^\circ$. Es

folgt $\angle SAT = 90^\circ - \delta + \alpha + 90^\circ - \varepsilon$.

Wegen $\delta + \varepsilon = \alpha$ ist das 180° . Somit

geht die Strecke \overline{ST} durch A . Wegen

$\angle ASB = 90^\circ$ und $\angle ATC = 90^\circ$ sind

die Strecken \overline{BS} und \overline{CT} parallel. Das

Viereck $SBCT$ ist ein Trapez. Bei B

hat es den Winkel $\beta + \varepsilon$ und bei C

den Winkel $\gamma + \delta$. Die Winkel bei S

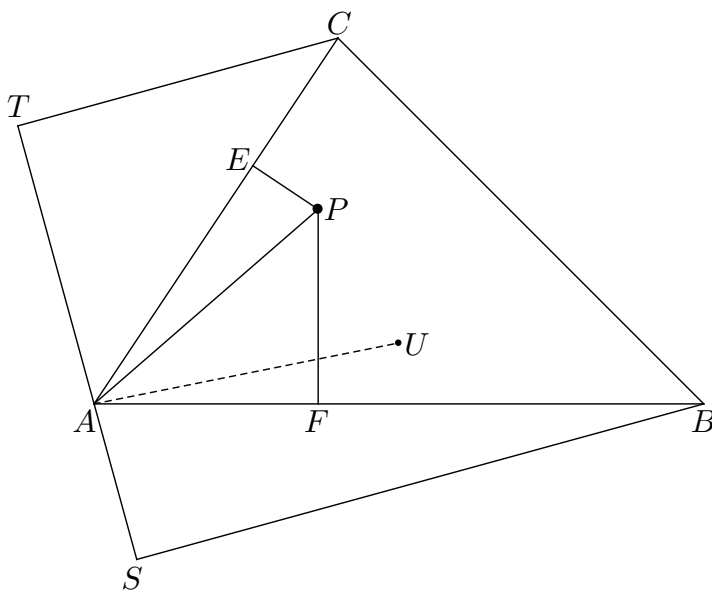
und T sind rechte Winkel. Die Winkel

$\beta + \varepsilon$ und $\gamma + \delta$ haben Summe 180° .

Wir wählen den Winkel, der $\geq 90^\circ$ ist

(sind beide 90° , dann wählen wir irgendeinen). Wir nehmen an es sei $\gamma + \delta$. Wir erhalten dann $|ST| = a \cos(\gamma + \delta - 90^\circ)$.

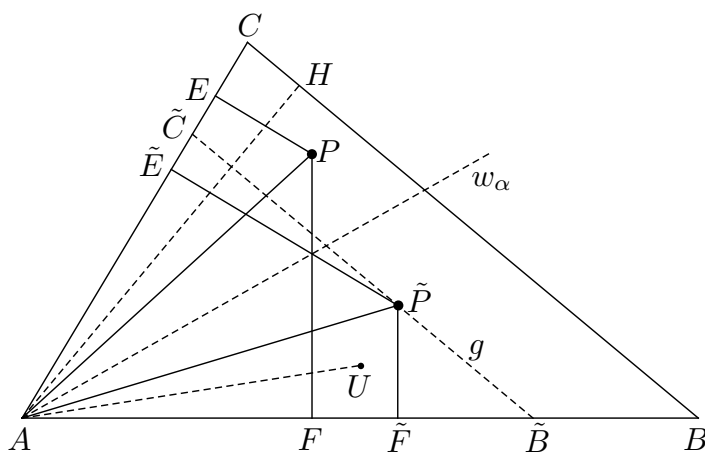
Ist γ ein spitzer Winkel, dann gilt $\angle BAU = 90^\circ - \gamma$ nach den eingangs durchgeführten Überlegungen und U liegt im Dreieck. Da wir annehmen, dass $\gamma + \delta \geq 90^\circ$ gilt, erhalten



wir $\delta \geq 90^\circ - \gamma$. Es folgt $\angle PAU = \delta - (90^\circ - \gamma) = \delta + \gamma - 90^\circ$. Ist γ stumpf, dann gilt $\angle BAU = \gamma - 90^\circ$. Da jetzt U außerhalb des Dreiecks liegt, erhalten wir wieder $\angle PAU = \delta + \gamma - 90^\circ$. Da $\varphi = \angle PAU$ definiert wurde, erhalten wir $\varphi = \delta + \gamma - 90^\circ$. Damit ist $|ST| = a \cos \varphi$ gezeigt.

Da die Strecke \overline{ST} durch A geht, gilt $|ST| = |SA| + |AT|$. Die Dreiecke $\triangle BSA$ und $\triangle AEP$ sind ähnlich. Aus dem Strahlensatz folgt $\frac{|SA|}{|AB|} = \frac{|EP|}{|PA|}$ und daraus $|SA| = c \frac{|EP|}{|PA|}$. Ebenso sind die Dreiecke $\triangle CTA$ und $\triangle AFP$ ähnlich. Es folgt $\frac{|TA|}{|AC|} = \frac{|FP|}{|PA|}$ und $|TA| = b \frac{|FP|}{|PA|}$. Wir setzen oben ein und erhalten $c \frac{|EP|}{|PA|} + b \frac{|FP|}{|PA|} = a \cos \varphi$. Wir multiplizieren mit $|PA|$ und dividieren durch a . Das ergibt die erste der drei Gleichungen. Die andern beiden beweist man analog. \square

Zweiter Beweis: Im Dreieck $\triangle ABC$ sei H der Fußpunkt der Höhe durch den Eckpunkt A und w_α die Winkelsymmetrale durch A . Sei \tilde{P} der an w_α gespiegelte Punkt P . Dann liegt \tilde{P} zwischen der Halbgeraden von A durch B und der von A durch C . Seien \tilde{E} und \tilde{F} die Fußpunkte der Lote von \tilde{P} auf $\ell(A, C)$ und $\ell(A, B)$. Sei $\delta = \angle \tilde{P}AH$ und g die Parallele zu $\ell(B, C)$ durch \tilde{P} . Sie schneide $\ell(A, B)$ im Punkt \tilde{B} und $\ell(A, C)$ im Punkt \tilde{C} . Weiters sei G die Fläche des Dreiecks $\triangle A\tilde{B}\tilde{C}$. Da die Höhe durch den Eckpunkt A in diesem Dreieck gleich $|\tilde{P}A| \cos \delta$ ist, erhalten wir $2G = |\tilde{B}\tilde{C}| \cdot |\tilde{P}A| \cos \delta$. Da das Dreieck $\triangle A\tilde{B}\tilde{C}$ in die beiden Dreiecke $\triangle A\tilde{P}\tilde{C}$ und $\triangle A\tilde{P}\tilde{B}$ zerfällt, haben wir auch $2G = |\tilde{A}\tilde{C}| \cdot |\tilde{P}\tilde{E}| + |\tilde{A}\tilde{B}| \cdot |\tilde{P}\tilde{F}|$. Da die Dreiecke $\triangle A\tilde{B}\tilde{C}$ und $\triangle ABC$ ähnlich sind, existiert nach dem Strahlensatz ein $\lambda > 0$, sodass $|\tilde{A}\tilde{B}| = \lambda \cdot c$, $|\tilde{A}\tilde{C}| = \lambda \cdot b$ und $|\tilde{B}\tilde{C}| = \lambda \cdot a$ gilt. Damit erhalten wir



$$a \cdot |\tilde{P}A| \cos \delta = b \cdot |\tilde{P}\tilde{E}| + c \cdot |\tilde{P}\tilde{F}|$$

Bei Spiegelung an w_α geht A in sich selbst, \tilde{E} in F und \tilde{F} in E über. Damit erhalten wir dann $|\tilde{P}A| = |PA|$, $|\tilde{P}\tilde{E}| = |PF|$ und $|\tilde{P}\tilde{F}| = |PE|$. Ist β ein spitzer Winkel, dann gilt $\angle BAH = 90^\circ - \beta$ und $\angle CAU = 90^\circ - \beta$ wurde eingangs gezeigt. Wenn β ein stumpfer Winkel ist, dann liegt sowohl U als auch H außerhalb des Dreiecks und es gilt $\angle BAH = \beta - 90^\circ$ und $\angle CAU = \beta - 90^\circ$. Das zeigt, dass w_α auch die Symmetrale des Winkels $\angle UAH$ ist. Es folgt $\delta = \angle \tilde{P}AH = \angle PAU = \varphi$. Setzt man das alles in obige Formel ein, dann erhält man schließlich

$$a \cdot |PA| \cos \varphi = b \cdot |PF| + c \cdot |PE|$$

Division durch a liefert die erste der drei zu beweisenden Gleichungen. Die andern beiden Gleichungen beweist man analog. \square

Diese Beweise sind relativ jung. Den ersten Beweis dieses Hilfssatzes findet man in "Alsina, Nelsen: *A Visual Proof of the Erdős-Mordell Inequality*, Forum Geometricorum 7, 2007, 99-102", den zweiten in "Komornik: *A Short Proof of the Erdős - Mordell Theorem*, American Mathematical Monthly, 104, 1997, 57-60".

Jetzt setzen wir das zu einer Ungleichung zusammen

Satz 9: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Seitenlängen a , b und c . Seien U und r Mittelpunkt und Radius des Umkreises und P ein Punkt im Innern dieses Dreiecks. Sei $\varphi = \angle PAU$, sei $\psi = \angle PBU$ und $\varrho = \angle PCU$. Weiters seien D , E und F die Fußpunkte der Lote von P auf die Geraden $\ell(B, C)$, $\ell(A, C)$ und $\ell(A, B)$. Für positive Zahlen t_1 , t_2 und t_3 gilt dann $t_1 |PA| \cos \varphi + t_2 |PB| \cos \psi + t_3 |PC| \cos \varrho \geq 2\sqrt{t_2 t_3} |PD| + 2\sqrt{t_1 t_3} |PE| + 2\sqrt{t_1 t_2} |PF|$ Gleichheit liegt genau dann vor, wenn $\frac{t_1}{a^2} = \frac{t_2}{b^2} = \frac{t_3}{c^2}$ gilt.

Beweis: Wir multiplizieren die erste Gleichung im Hilfssatz mit t_1 , die zweite mit t_2 , die dritte mit t_3 und addieren dann. Die linke Seite der so erhaltenen Gleichung ist bereits wie gewünscht. Für beliebige positive Zahlen x und y gilt $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ mit Gleichheit genau dann, wenn $x = y$ gilt. Es folgt $t_1 \frac{b}{a} + t_2 \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{t_1 t_2}$, $t_1 \frac{c}{a} + t_3 \frac{a}{c} \geq 2\sqrt{t_1 t_3}$ und $t_2 \frac{c}{b} + t_3 \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{t_2 t_3}$. Setzt man diese Ungleichungen auf der rechten Seite ein, dann steht die zu beweisende Ungleichung bereits da.

Gleichheit gilt genau dann, wenn $t_1 \frac{b}{a} = t_2 \frac{a}{b}$, $t_1 \frac{c}{a} = t_3 \frac{a}{c}$ und $t_2 \frac{c}{b} = t_3 \frac{b}{c}$ erfüllt sind. Diese Gleichungen sind äquivalent zu $\frac{t_1}{a^2} = \frac{t_2}{b^2} = \frac{t_3}{c^2}$. \square

Als Spezialfall erhalten wir die gewichtete Erdős-Mordell-Ungleichung.

Satz 10: Sei P ein Punkt im Innern eines Dreiecks $\triangle ABC$. Seien D , E und F die Fußpunkte der Lote von P auf die Geraden $\ell(B, C)$, $\ell(A, C)$ und $\ell(A, B)$. Für positive Zahlen t_1 , t_2 und t_3 gilt dann

$$t_1 |PA| + t_2 |PB| + t_3 |PC| \geq 2\sqrt{t_2 t_3} |PD| + 2\sqrt{t_1 t_3} |PE| + 2\sqrt{t_1 t_2} |PF|$$

Gleichheit liegt genau dann vor, wenn P der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$ ist und wenn $\frac{t_1}{a^2} = \frac{t_2}{b^2} = \frac{t_3}{c^2}$ gilt.

Beweis: Folgt unmittelbar aus Satz 9, da ja $\cos \varphi \leq 1$, $\cos \psi \leq 1$ und $\cos \varrho \leq 1$ gilt. Nur dann haben wir Gleichheit, wenn $\frac{t_1}{a^2} = \frac{t_2}{b^2} = \frac{t_3}{c^2}$ gilt und wenn $\cos \varphi = 1$, $\cos \psi = 1$ und $\cos \varrho = 1$ erfüllt sind. Die zweite Bedingung ist äquivalent dazu, dass der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$ auf den drei Geraden $\ell(A, P)$, $\ell(B, P)$ und $\ell(C, P)$ liegt. Das ist nur dann erfüllt, wenn P selbst der Umkreismittelpunkt ist. \square

Als weiteren Spezialfall erhalten wir die (nicht gewichtete) Erdős-Mordell-Ungleichung.

Satz 11: Sei P ein Punkt im Innern eines Dreiecks $\triangle ABC$. Seien D , E und F die Fußpunkte der Lote von P auf die Geraden $\ell(B, C)$, $\ell(A, C)$ und $\ell(A, B)$. Dann gilt

$$|PA| + |PB| + |PC| \geq 2|PD| + 2|PE| + 2|PF|$$

Gleichheit liegt genau dann vor, wenn das Dreieck $\triangle ABC$ gleichseitig ist und P dessen Umkreismittelpunkt ist.

Beweis: Das ist der Spezialfall von Satz 10 mit $t_1 = 1$, $t_2 = 1$ und $t_3 = 1$. \square

Die Erdős-Mordell-Ungleichung wurde 1935 von Paul Erdős als Problem gestellt und 1937 von Mordell bewiesen. Dieser Beweis ist ein trigonometrischer. In der Zwischenzeit sind die verschiedensten Beweise dieser Ungleichung erschienen. Siehe zum Beispiel die Literaturliste in "Hojoo Lee: *Ptolemy meets Erdős and Mordell again*, American Mathematical Monthly, 116, 2009, 738-742"

II. Peripheriewinkelsatz und Sehnensatz

1. Der Sehnensatz und einige Anwendungen	12
2. Der Satz von Feuerbach	14
3. Südpol- und Nordpolsatz	16
4. Der Satz von Sawayama-Thebault	18
5. Kegelschnitte und isogonal konjugierte Punkte	21

Wir fassen den Peripheriewinkelsatz, dessen Umkehrung und den Tangentenwinkelsatz wie folgt zusammen.

Sei \overline{AB} eine Sehne in einem Kreis k . Sei C ein weiterer Punkt auf k und $\gamma = \angle ACB$. Die Gerade $\ell(A, B)$ teilt die Ebene in zwei Halbebenen (die $\ell(A, B)$ nicht enthalten). Sei H_1 die Halbebene in der C liegt und H_2 die andere.

(a) Für einen Punkt P in H_1 gilt: P liegt auf $k \Leftrightarrow \angle APB = \gamma$

(b) Für einen Punkt P in H_2 gilt: P liegt auf $k \Leftrightarrow \angle APB = 180^\circ - \gamma$

Ist M der Mittelpunkt des Kreises k , dann nennt man $\alpha = \angle AMB$ den Zentriwinkel. Liegt M in H_1 (das ist äquivalent zu $\gamma < 90^\circ$), dann gilt $\alpha = 2\gamma$. Liegt M in H_2 (das ist äquivalent zu $\gamma > 90^\circ$), dann gilt $\alpha = 360^\circ - 2\gamma$. Liegt M auf der Sehne \overline{AB} , dann gilt $\alpha = 180^\circ$ und $\gamma = 90^\circ$, also sowohl $\alpha = 2\gamma$ als auch $\alpha = 360^\circ - 2\gamma$.

Sei t die Tangente an den Kreis k im Punkt A oder im Punkt B . Der Winkel zwischen t und der Sehne \overline{AB} , der in H_1 liegt, ist gleich $180^\circ - \gamma$. Der Winkel zwischen t und der Sehne \overline{AB} , der in H_2 liegt, ist gleich γ . Diese Aussage nennen wir den Tangentenwinkelsatz.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels geben wir einen Beweis des Sehnensatzes. Dann werden einige Sätze bewiesen, in deren Beweis der Sehnensatz eine wichtige Rolle spielt.

Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels beweisen wir den Satz von Feuerbach. Er besagt, dass der Neunpunktkreis (Feuerbachkreis) den Inkreis und die drei Ankreise berührt. Wir geben hier einen synthetischen Beweis, der hauptsächlich mit dem Peripheriewinkelsatz und mit dem Sehnensatz arbeitet.

Im dritten Abschnitt dieses Kapitels beweisen wir den Südpolsatz. Unter anderem besagt er, dass die Winkelsymmetrale durch den Eckpunkt C und der Umkreis einander in einem Punkt schneiden, der auf der Symmetrale der Seite \overline{AB} liegt. Es gibt einen dazu analogen Satz für die Symmetrale des Außenwinkels bei C , den wir Nordpolsatz nennen. Mit diesem kann man einen einfachen Beweis des Broken-Chord-Theorems von Archimedes geben.

Im vierten Abschnitt dieses Kapitels beweisen wir den Satz von Sawayama-Thebault. Er beschäftigt sich mit Kreisen, die in ein Dreieck und dessen Umkreis eingebettet werden. Er wurde 1973 bewiesen. Später entdeckte man einen Beweis dieses Satzes, der von dem japanischen Mathematiker Sawayama bereits im Jahre 1905 publiziert wurde. Wir geben einen synthetischen Beweis, der hauptsächlich mit dem Strahlensatz, dem Peripheriewinkelsatz und dem Sehnensatz arbeitet.

Im fünften Abschnitt dieses Kapitels geben wir einen Punkt F vor und suchen einen Kegelschnitt, der F als Brennpunkt hat und der die Trägergeraden der drei Seiten eines vorgegebenen Dreiecks berührt. Man nennt den zweiten Brennpunkt G dieses Kegelschnitts den zu F isogonal konjugierten Punkt. Wir untersuchen die dadurch definierte Abbildung. Wir benötigen dazu Grundkenntnisse über die Konstruktion einer Tangente an einen Kegelschnitt und verwenden den Peripheriewinkelsatz.

1. Der Sehnensatz und einige Anwendungen

Wir beweisen zuerst folgende Version des Sehnensatzes.

Satz 12: Seien g und h Gerade, die einander in einem Punkt S schneiden. Seien A und B Punkte auf g und C und D Punkte auf h , die alle ungleich S sind. Dann sind äquivalent

(a) es gilt $SA \cdot SB = SC \cdot SD$

(b) die Punkte A, B, C und D liegen auf einem Kreis

Fallen zwei Punkte, die auf einer Gerade liegen, zusammen, dann bedeutet die Aussage "die Punkte liegen auf einem Kreis", dass der Kreis die Gerade in diesem Punkt berührt.

Beweis: Wenn auf einer der Geraden die beiden Punkte auf verschiedenen Seiten von S liegen und die beiden Punkte auf der anderen Gerade auf derselben Seite von S , dann ist die Aussage (a) nicht erfüllt, da $SA \cdot SB$ und $SC \cdot SD$ verschiedene Vorzeichen haben. Auch die Aussage (b) ist dann nicht erfüllt, da einer der Punkte im Dreieck liegt, dessen Ecken die anderen drei Punkte sind und somit nicht alle vier auf einem Kreis liegen können. (Es kann sein, dass der Punkt, der im Dreieck liegt, mit einem der Punkte zusammenfällt, die die Eckpunkte bilden. Damit (b) erfüllt ist, müsste die Gerade durch diesen Punkt Tangente an den Kreis durch die drei anderen sein, die die Eckpunkte bilden, was aber nicht möglich ist, da diese Gerade durch das Innere des Dreiecks geht.)

Es bleiben folgende zwei Fälle: Im ersten Fall liegen sowohl A und B auf der Gerade g als auch C und D auf der Gerade h auf verschiedenen Seiten von S . Im zweiten Fall (da wird der Satz auch Sekantensatz genannt) liegen sowohl A und B auf der Gerade g als auch C und D auf der Gerade h auf derselben Seite von S . In diesem Fall nehmen wir an, dass A näher bei S liegt als B und C näher bei S als D .

Wir spiegeln die Punkte A und D an der Symmetrale des Winkels $\angle ASD$ und erhalten so die Punkte A^* und D^* . Nun liegen A und D^* auf der Gerade g und A^* und D auf der Gerade h . Weiters gilt $\angle SDA = \angle SD^*A^*$ und $SA \cdot SD^* = SA^* \cdot SD$.

Der folgende Beweis funktioniert in beiden oben genannten Fällen. Wir nehmen zuerst an, dass keine Punkte zusammenfallen.

Die vier Punkte A, B, C und D liegen nach dem Peripheriewinkelsatz genau dann auf einem Kreis, wenn $\angle ABC = \angle ADC$ gilt. (Wir legen einen Kreis durch die drei Punkte A, B und C und wenden den Peripheriewinkelsatz auf die Sehne \overline{AC} an.) Wegen $\angle ABC = \angle SBC$ und $\angle ADC = \angle SDA$ ist das die Gleichung $\angle SBC = \angle SDA$. Wegen $\angle SDA = \angle SD^*A^*$ ist diese wieder äquivalent zu $\angle SBC = \angle SD^*A^*$. Und diese Gleichung gilt genau dann, wenn die Geraden $\ell(B, C)$ und $\ell(D^*, A^*)$ parallel liegen. Nach dem Strahlensatz ist das wieder äquivalent zu $\frac{SB}{SD^*} = \frac{SC}{SA^*}$. Wegen $SA \cdot SD^* = SA^* \cdot SD$ ist das die Gleichung $SA \cdot SB = SC \cdot SD$. Damit ist der Satz bewiesen, wenn keine Punkte zusammenfallen.

Fallen die Punkte C und D zusammen, aber A und B nicht (das kann nur im zweiten Fall geschehen), dann funktioniert derselbe Beweis. Dass die vier Punkte A, B, C und D genau dann auf einem Kreis liegen, wenn $\angle SBC = \angle SDA$ gilt, erhält man aus dem Tangentenwinkelsatz. (Die Gerade h ist genau dann Tangente im Punkt C an den Kreis durch die drei Punkte A, B und C , wenn $\angle ABC = \angle SCA$ gilt, also $\angle SBC = \angle SDA$.) Dann geht es weiter wie oben.

Fallen sowohl C und D zusammen als auch A und B , dann ist die Aussage (a) äquivalent zu $|SA| = |SC|$, und (b) besagt, dass ein Kreis existiert, der g in A und h in C berührt, was ebenfalls äquivalent zu $|SA| = |SC|$ ist. \square

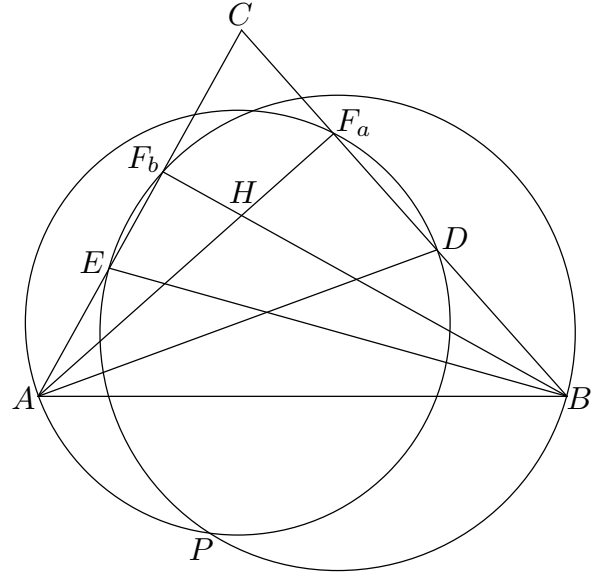
Es folgen einige Sätze, in deren Beweis der Sehnensatz eine wichtige Rolle spielt.

Satz 13: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H . Sei D ein Punkt auf \overline{BC} und E ein Punkt auf \overline{AC} . Seien P und Q die Schnittpunkte der Kreise mit Durchmesser \overline{AD} und \overline{BE} . Die drei Punkte P , Q und H liegen dann auf einer Gerade.

Beweis: Seien F_a und F_b die Fußpunkte der Höhen durch A und B . Wegen $\angle AF_bB = 90^\circ$ und $\angle AF_aB = 90^\circ$ liegen die Punkte A, F_b, F_a und B auf einem Kreis und H ist der Schnittpunkt von $\overline{AF_a}$ und $\overline{BF_b}$. Aus dem Sehensatz folgt daher $HA \cdot HF_a = HB \cdot HF_b$.

Sei k_a der Kreis mit Durchmesser \overline{AD} und k_b der mit Durchmesser \overline{BE} . Sei P ein Schnittpunkt dieser Kreise und g die Gerade durch P und H . Sei Q_a der Schnittpunkt $\neq P$ von g und k_a und Q_b der Schnittpunkt $\neq P$ von g und k_b . Es genügt $Q_a = Q_b$ zu zeigen.

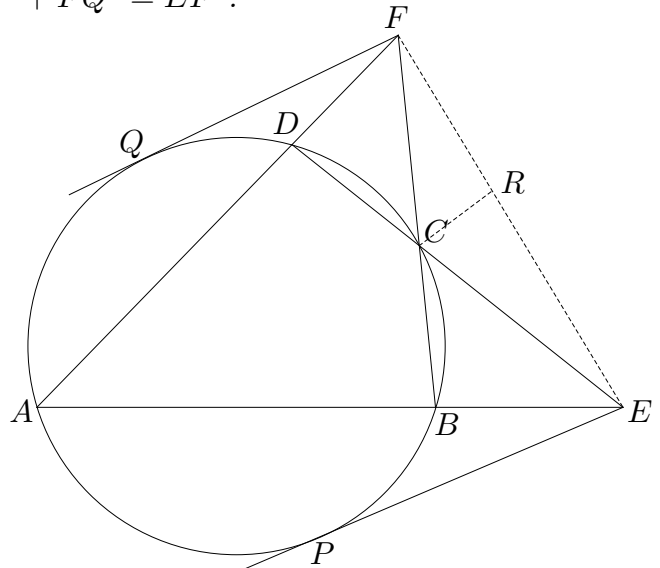
Wegen $\angle AF_aD = 90^\circ$ liegt der Punkt F_a auf k_a . Daher folgt $HP \cdot HQ_a = HA \cdot HF_a$ aus dem Sehensatz für den Kreis k_a . Der Punkt F_b liegt auf k_b wegen $\angle BF_bE = 90^\circ$. Daher folgt $HP \cdot HQ_b = HB \cdot HF_b$ aus dem Sehensatz für den Kreis k_b . Aus diesen drei Gleichungen ergibt sich $HP \cdot HQ_a = HP \cdot HQ_b$ und somit $HQ_a = HQ_b$. Da H, Q_a und Q_b auf der Geraden g liegen, erhalten wir $Q_a = Q_b$. \square



Satz 14: Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck mit Umkreis k . Sei E der Schnittpunkt der Geraden $\ell(A, B)$ und $\ell(C, D)$ und F der der Geraden $\ell(B, C)$ und $\ell(A, D)$. Wir nehmen an, dass diese Schnittpunkte existieren. Sei P der Punkt, in dem eine Tangente, die von E ausgeht, den Kreis k berührt und sei Q der Punkt, in dem eine Tangente, die von F ausgeht, den Kreis k berührt. Dann gilt $EP^2 + FQ^2 = EF^2$.

Beweis: Seien α, β, γ und δ die Winkel im Sehnenviereck, wobei wir die Bezeichnung so wählen, dass α der kleinste Winkel ist. Dann liegt B zwischen A und E und D zwischen A und F . Auf der Strecke \overline{EF} wählen wir R so, dass $\angle CRE = \beta$ gilt. Wegen $\beta + \delta = 180^\circ$ folgt $\angle CRF = \delta$. Aus der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes folgt, dass die Punkte B, E, R und C auf einem Kreis k_1 liegen und die Punkte D, F, R und C auf einem Kreis k_2 . Aus dem Sehensatz für den Umkreis k erhalten wir $EP^2 = EC \cdot ED$ und $FQ^2 = FC \cdot FB$. Ebenso folgt $FC \cdot FB = FR \cdot FE$ aus dem Sehensatz für k_1 und $EC \cdot ED = ER \cdot EF$ für k_2 .

Wir setzen ein und verwenden die Rechenregeln für den orientierten Abstand: $EP^2 + FQ^2 = ER \cdot EF + FR \cdot FE = ER \cdot EF + RF \cdot EF = (ER + RF) \cdot EF = EF^2$. \square



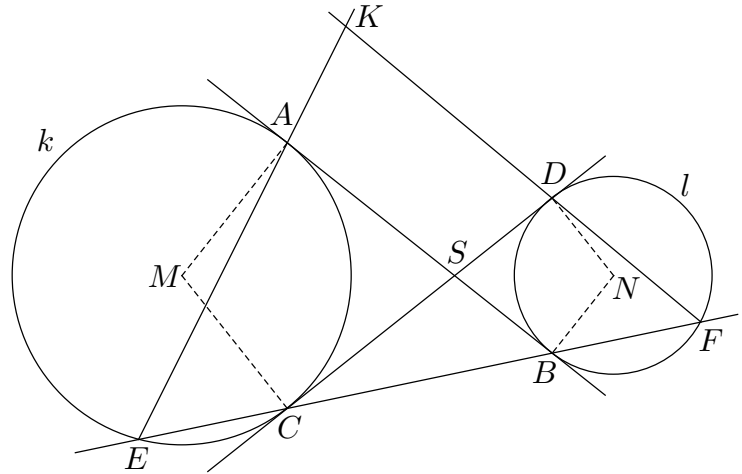
Bemerkung: Man kann diesen Satz so interpretieren: Der Kreis durch P mit Mittelpunkt E schneidet den Kreis durch Q mit Mittelpunkt F in einem rechten Winkel.

Satz 15: Seien k und l zwei Kreise, wobei der eine ganz außerhalb des anderen liegt. Seien s und t die inneren gemeinsamen Tangenten dieser Kreise. Seien A und B die Punkte, in denen s die Kreise k und l berührt. Seien C und D die Punkte, in denen t die Kreise k und l berührt. Weiters sei g die Gerade durch B und C . Sie schneide k außer in C auch in E und l außer in B auch in F . Sei K der Schnittpunkt von $\ell(E, A)$ und $\ell(F, D)$. Dann gilt $|EC| = |BF|$ und $\angle KEF = \angle KFE$. Außerdem liegen die Punkte A, S, D und K auf einem Kreis.

Beweis: Aus dem Sehensatz für den Kreis k folgt $BA^2 = BC \cdot BE$ und ebenso $CD^2 = CB \cdot CF$ für den Kreis l . Aus Symmetriegründen gilt $|BA| = |CD|$. Es folgt $CB \cdot CF = BC \cdot BE = CB \cdot EB$ und daraus $EB = CF$. Addiert man BC , so bleibt $EC = BF$. Das ergibt die erste Aussage.

Da \overline{AM} parallel zu \overline{BN} und \overline{CM} parallel zu \overline{DN} liegt, erhalten wir $\angle AMC = \angle BND$. Weiters ergibt sich aus dem Peripheriewinkelsatz $\angle AEC = \frac{1}{2}\angle AMC$ im Kreis k

und $\angle BFD = \frac{1}{2}\angle BND$ im Kreis l . Es folgt $\angle AEC = \angle BFD$, also $\angle KEF = \angle KFE$. Es gilt $\angle BND = 180^\circ - \angle BSD$, da das Viereck $SDNB$ bei B und D rechte Winkel hat. Wegen $\angle ASD = 180^\circ - \angle BSD$ und $\angle BND = 2\angle BFD = 2\angle KFE$ erhalten wir $\angle ASD = 2\angle KFE$. Da die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, erhalten wir $\angle AKD = \angle EKF = 180^\circ - \angle KEF - \angle KFE$. Wegen $\angle KFE = \angle KEF$ ergibt sich $\angle AKD = 180^\circ - 2\angle KEF$. Somit gilt $\angle AKD = 180^\circ - \angle ASD$. Aus der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes folgt, dass die Punkte A, S, D und K auf einem Kreis liegen. \square



2. Der Satz von Feuerbach

Zur Vorbereitung beweisen wir einen Hilfssatz.

Hilfssatz: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Seitenlängen a, b und c . Sei M_c der Mittelpunkt der Seite \overline{AB} , sei W_c der Punkt, in dem die Winkelsymmetrale durch C die Seite \overline{AB} schneidet, sei P_c der Punkt, in dem der Inkreis die Seite \overline{AB} berührt, und sei schließlich H_c der Fußpunkt der Höhe durch C . Es gilt dann $M_c W_c \cdot M_c H_c = M_c P_c^2$. Im Fall $b > a$ liegen die Punkte M_c, W_c, P_c und H_c in dieser Reihenfolge auf der Gerade $\ell(A, B)$.

Beweis: Für die orientierten Abstände vom Eckpunkt A aus in Richtung Eckpunkt B gilt bekanntlich $AM_c = \frac{c}{2}$, $AW_c = \frac{cb}{a+b}$ und $AP_c = s - a$. Bezeichnet h die Länge der Höhe durch C , dann folgt $AH_c^2 + h^2 = b^2$ und $(AH_c - c)^2 + h^2 = a^2$ aus dem Satz von Pythagoras. Subtraktion dieser Gleichungen ergibt $2AH_c \cdot c - c^2 = b^2 - a^2$. Es folgt

$$\begin{aligned} M_c W_c &= AW_c - AM_c = \frac{cb}{a+b} - \frac{c}{2} = \frac{2cb - ca - cb}{2(a+b)} = \frac{c(b-a)}{2(a+b)} \\ M_c P_c &= AP_c - AM_c = s - a - \frac{c}{2} = \frac{a+b+c}{2} - a - \frac{c}{2} = \frac{b-a}{2} \\ M_c H_c &= AH_c - AM_c = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} - \frac{c}{2} = \frac{(b-a)(b+a)}{2c} \end{aligned}$$

Damit lässt sich die Gleichung $M_c W_c \cdot M_c H_c = M_c P_c^2$ leicht überprüfen. Außerdem folgt

$\frac{b+a}{c} > 1$ aus der Dreiecksungleichung $b + a > c$. Wenn jetzt $b > a$ gilt, dann erhalten wir $0 < M_c W_c < M_c P_c < M_c H_c$ aus obigen Gleichungen. Daher liegen die Punkte M_c , W_c , P_c und H_c in dieser Reihenfolge auf der Gerade $\ell(A, B)$. \square

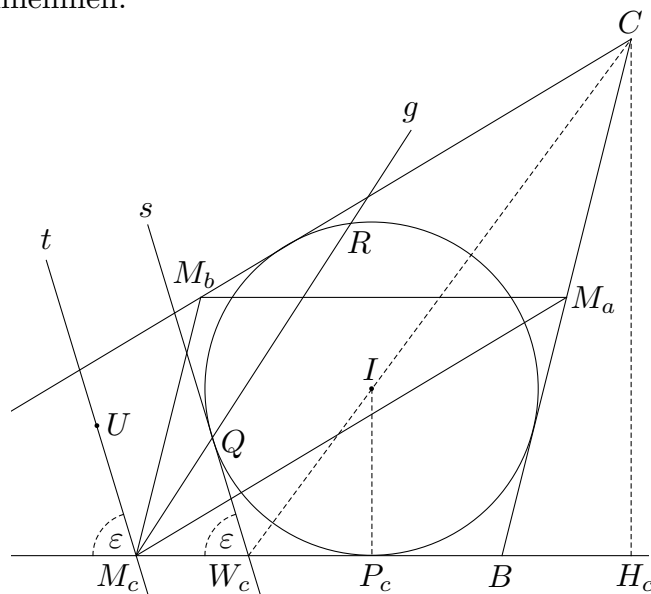
Mit diesem Hilfssatz können wir den Satz von Feuerbach beweisen.

Satz 16: *Der Inkreis eines Dreiecks berührt den Neunpunktkreis.*

Beweis: Seien M_c , W_c , P_c und H_c wie im Hilfssatz und M_a und M_b die Mittelpunkte der Dreiecksseiten \overline{BC} und \overline{AC} . Wenn $b = a$ gilt, dann berühren die beiden Kreise einander im Punkt M_c . Wir können daher $b > a$ annehmen.

Vom Punkt W_c aus gibt es zwei Tangenten an den Inkreis. Die eine ist die Gerade $\ell(A, B)$, die den Inkreis im Punkt P_c berührt. Die andere bezeichnen wir mit s . Sie geht durch W_c und berührt den Inkreis in einem Punkt Q . Es gilt dann $\angle QW_c C = \angle P_c W_c C$ und $\angle P_c W_c C = \alpha + \frac{\gamma}{2}$, das ist ein Außenwinkel des Dreiecks $\triangle ACW_c$. Wegen $\angle QW_c P_c = \angle QW_c C + \angle P_c W_c C$ erhalten wir $\angle QW_c P_c = 2\alpha + \gamma$ und $\angle QW_c A = 180^\circ - \angle QW_c P_c = \beta - \alpha$. Wir setzen $\varepsilon = \beta - \alpha$.

Sei t die Tangente im Punkt M_c an den Neunpunktkreis und U ein Punkt auf t , der im Innern des Dreiecks liegt.



Aus dem Tangentenwinkelsatz angewendet auf die Sehne $\overline{M_c M_b}$ des Neunpunktkreises erhalten wir $\angle U M_c M_b = \angle M_c M_a M_b = \alpha$. Wegen $\angle M_b M_c A = \beta$ ergibt sich daraus $\angle U M_c A = \angle M_b M_c A - \angle U M_c M_b = \beta - \alpha = \varepsilon$. Die Tangenten s und t liegen parallel.

Sei g die Gerade durch die Punkte Q und M_c . Sei R der Schnittpunkt $\neq Q$ des Inkreises mit g . Aus dem Sehnensatz folgt $M_c Q \cdot M_c R = M_c P_c^2$. Aufgrund des Hilfssatzes folgt daraus $M_c Q \cdot M_c R = M_c W_c \cdot M_c H_c$. Nun folgt aus dem Sehnensatz, dass die Punkte Q , R , W_c und H_c auf einem Kreis liegen. Darauf können wir den Peripheriewinkelsatz anwenden und erhalten $\angle QRH_c = 180^\circ - \angle QW_c H_c = \angle QW_c A = \varepsilon$, also auch $\angle M_c R H_c = \varepsilon$.

Nun ist $\overline{M_c H_c}$ eine Sehne im Neunpunktkreis. Der Winkel, den die Tangente t im Punkt M_c mit der Sehne $\overline{M_c H_c}$ einschließt (auf der anderen Seite, auf der R nicht liegt), ist gleich $\angle U M_c A = \varepsilon$. Aus der Umkehrung des Tangentenwinkelsatzes folgt jetzt, dass R auf dem Neunpunktkreis liegt.

Die Gerade g schneidet den Inkreis in den Punkten Q und R und den Neunpunktkreis in den Punkten M_c und R . Die Tangenten s und t an den Inkreis im Punkt Q und an den Neunpunktkreis im Punkt M_c liegen parallel. Die Tangente im Punkt R an den Inkreis ist das Bild der Tangente s bei Spiegelung an der Streckensymmetrale der Sehne \overline{QR} . Die Tangente im Punkt R an den Neunpunktkreis ist das Bild der Tangente t bei Spiegelung an der Streckensymmetrale der Sehne $\overline{M_c R}$. Da die beiden Streckensymmetralen parallel liegen und ebenso die Tangenten s und t , liegen auch die Tangenten an den Inkreis und an den Neunpunktkreis im Punkt R parallel. Da beide durch R gehen, sind sie identisch. Der Inkreis und der Neunpunktkreis haben in ihrem Schnittpunkt R eine gemeinsame Tangente. Daher berühren sie einander im Punkt R . \square

Übung: Wie muss man den Beweis von Satz 16 abändern, um einen Beweis für den Satz zu bekommen, dass der Neunpunktkreis den Ankreis an die Dreiecksseite \overline{AB} berührt?

3. Südpol- und Nordpolsatz

Die Symmetralen der drei Innenwinkel eines Dreiecks $\triangle ABC$ bezeichnen wir mit w_α, w_β und w_γ . Bei jedem Eckpunkt gibt es zwei Außenwinkel, deren Symmetralen sich zu einer Gerade ergänzen. Diese Geraden bezeichnen wir mit $\tilde{w}_\alpha, \tilde{w}_\beta$ und \tilde{w}_γ . Weiters bezeichnen wir den Inkreismitelpunkt mit I und die Ankreismittelpunkte mit I_a, I_b und I_c .

Satz 17 (Südpolsatz) *Sei S der Schnittpunkt $\neq C$ des Umkreises mit w_γ . Dann hat S gleiche Abstände zu den Punkten A, B, I und I_c . (Ein analoges Resultat gilt natürlich auch für die Schnittpunkte des Umkreises mit w_α und w_β .)*

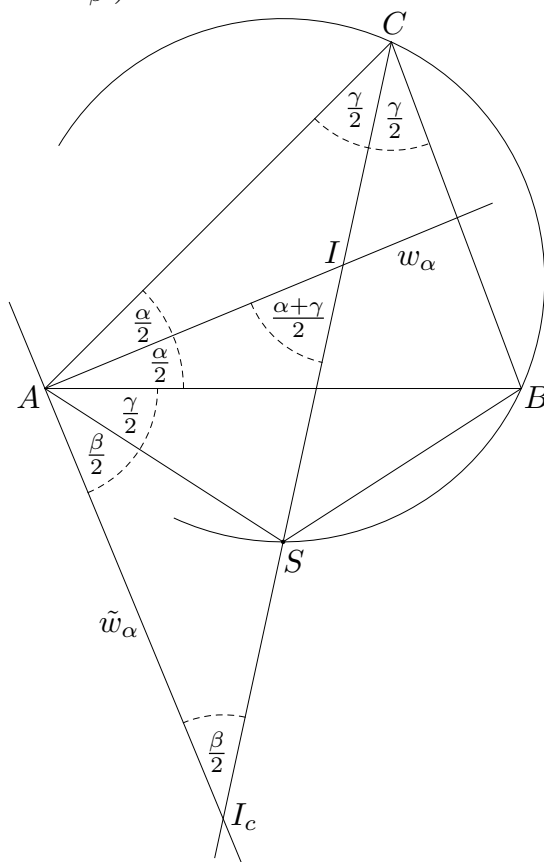
Beweis: Wir wenden den Peripheriewinkelsatz auf die Sehne \overline{BS} im Umkreis an. Es folgt $\angle BAS = \angle BCS = \frac{\gamma}{2}$. Wendet man den Peripheriewinkelsatz auf die Sehne \overline{AS} an, so erhält man $\angle ABS = \angle ACS = \frac{\gamma}{2}$. Das Dreieck $\triangle ABS$ ist somit gleichschenkelig. Der Punkt S hat gleiche Abstände zu den Eckpunkten A und B .

Es gilt $\angle BAS = \frac{\gamma}{2}$ und $\angle BAI = \frac{\alpha}{2}$, da I auf w_α liegt. Es folgt $\angle SAI = \frac{\alpha+\gamma}{2}$. Der Winkel $\angle SIA$ ist der Außenwinkel des Dreiecks $\triangle ACI$ beim Eckpunkt I und daher gleich der Summe der beiden Innenwinkel bei den Eckpunkten A und C . Da die Seiten \overline{AI} und \overline{CI} auf den Winkelsymmetralen liegen, erhalten wir $\angle SIA = \frac{\alpha+\gamma}{2}$. Das Dreieck $\triangle ASI$ ist somit gleichschenkelig. Es folgt, dass der Inkreismitelpunkt I den selben Abstand vom Punkt S hat wie A .

Da w_α senkrecht auf \tilde{w}_α steht, erhalten wir $\angle I_cAS = 90^\circ - \angle SAI = 90^\circ - \frac{\alpha+\gamma}{2} = \frac{\beta}{2}$. Da das Dreieck $\triangle IAI_c$ bei A einen rechten und bei I den Winkel $\frac{\alpha+\gamma}{2}$ hat, ergibt sich $\angle AI_cS = \angle AI_cI = 90^\circ - \frac{\alpha+\gamma}{2} = \frac{\beta}{2}$. Das Dreieck $\triangle ASI_c$ ist somit gleichschenkelig. Es folgt, dass der Ankreismittelpunkt I_c den selben Abstand vom Punkt S hat wie A . \square

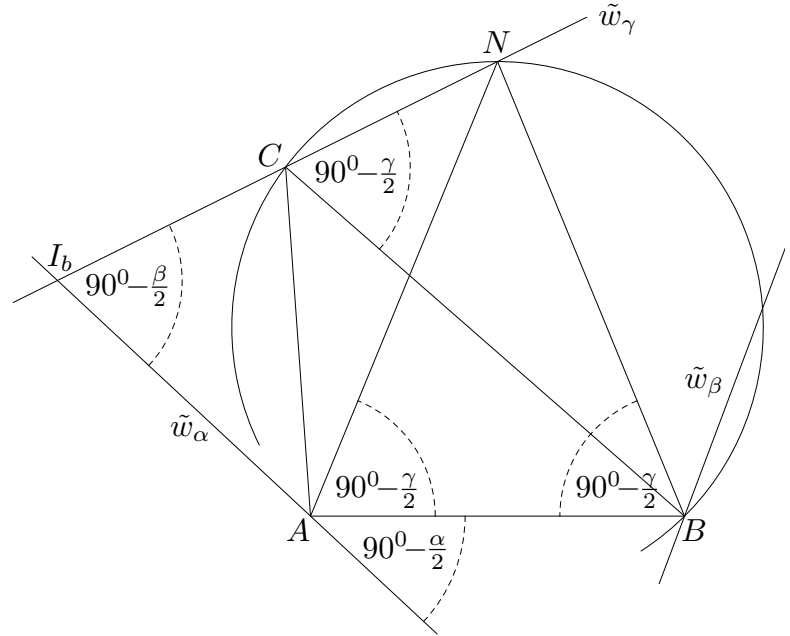
Aus dem Südpolsatz folgt, dass der Punkt S der Mittelpunkt der Strecke $\overline{I_cI}$ ist, da S gleichen Abstand von I und I_c hat und diese drei Punkte auf w_γ liegen. Damit ist gezeigt, dass der Mittelpunkt der Strecke $\overline{I_cI}$ auf dem Umkreis liegt. Dasselbe gilt natürlich auch für die Mittelpunkte der Strecken $\overline{I_aI}$ und $\overline{I_bI}$.

Ein analoger Satz gilt auch für die Symmetrale des Außenwinkels beim Eckpunkt C . Es liegt nahe, ihn Nordpolsatz zu nennen.



Satz 18 (Nordpolsatz) Sei N der Schnittpunkt $\neq C$ des Umkreises mit \tilde{w}_γ . Dann hat N gleiche Abstände zu den Punkten A, B, I_a und I_b . (Ein analoges Resultat gilt natürlich auch für die Schnittpunkte des Umkreises mit \tilde{w}_α und \tilde{w}_β .)

Beweis: Da die Symmetrale \tilde{w}_γ den Außenwinkel halbiert, haben wir $\angle BCN = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ und $\angle ACN = \gamma + 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$. Der Peripheriewinkelsatz für die Sehne \overline{BN} im Umkreis ergibt $\angle BAN = \angle BCN = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$. Für die Sehne \overline{AN} ergibt er $\angle ABN = 180^\circ - \angle ACN = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$, da C und B auf verschiedenen Seiten dieser Sehne liegen. Das Dreieck $\triangle ABN$ ist somit gleichschenkelig. Der Punkt N hat gleiche Abstände zu den Eckpunkten A und B .



Da der Winkel zwischen der Seite \overline{AB} und der Symmetrale \tilde{w}_α des Außenwinkels gleich $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ ist und da auch $\angle BAN = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ gilt, erhalten wir $\angle NAI_b = 180^\circ - (90^\circ - \frac{\alpha}{2}) - (90^\circ - \frac{\gamma}{2}) = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$. Da das Dreieck $\triangle ACI_b$ von den Symmetralen der Außenwinkel begrenzt wird, hat es bei A und C die Winkel $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ und $90^\circ - \frac{\gamma}{2}$. Es folgt $\angle AI_bN = \angle AI_bC = 180^\circ - (90^\circ - \frac{\alpha}{2}) - (90^\circ - \frac{\gamma}{2}) = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$. Das Dreieck $\triangle ANI_b$ ist somit gleichschenkelig. Es folgt, dass der Ankreismittelpunkt I_b den selben Abstand vom Punkt N hat wie A .

Der Beweis, dass der Ankreismittelpunkt I_a den selben Abstand vom Punkt N hat wie B , verläuft ganz analog. \square

Aus dem Nordpolsatz folgt, dass die Mittelpunkte der Strecken $\overline{I_aI_b}$, $\overline{I_aI_c}$ und $\overline{I_bI_c}$ auf dem Umkreis liegen. Der folgende Satz ist das Broken-Chord-Theorem von Archimedes. Es hängt eng mit dem Nordpolsatz zusammen.

Satz 19: Sei N der Mittelpunkt des Umkreisbogens von A über C nach B (Nordpol). Sei F der Fußpunkt des Lots von N auf $\ell(A, C)$ und G der des Lots von N auf $\ell(B, C)$. Dann gilt $|AF| = |BG| = \frac{|AC| + |BC|}{2}$.

Beweis: Wir nehmen an, dass die Punkte A, N, C und B in dieser Reihenfolge auf dem Umkreis liegen. Dann liegt F auf \overline{AC} und G auf der Verlängerung von \overline{BC} .

Da N der Punkt des besagten Umkreisbogens ist, der von A und B gleichen Abstand hat, folgt aus Satz 18, dass \tilde{w}_γ durch N geht. Daraus ergibt sich

$$|NF| = |NG| \quad \text{und} \quad |FC| = |GC|$$

Mit Hilfe der zweiten Gleichung erhalten wir

$$|AC| + |CB| = |AF| + |FC| + |GB| - |GC| = |AF| + |GB|$$

Wegen $|NF| = |NG|$, wegen $\angle NFA = 90^\circ = \angle NGB$ und wegen $|NA| = |NB|$ sind die Dreiecke $\triangle NFA$ und $\triangle NGB$ kongruent. Es folgt $|AF| = |BG|$. Wegen $|AF| + |BG| = |AC| + |BC|$ erhalten wir $|AF| = |BG| = \frac{|AC| + |BC|}{2}$. \square

4. Der Satz von Sawayama-Thebault

Wir beginnen mit zwei Hilfssätzen über einander berührende Kreise.

Hilfssatz A: Der Kreis k_1 mit Mittelpunkt M_1 berührt den Kreis k_2 mit Mittelpunkt M_2 von innen im Punkt P . Sei E ein Punkt $\neq P$ auf k_1 und S ein Punkt $\neq P$ auf k_2 , sodass die Vektoren $\overrightarrow{M_1E}$ und $\overrightarrow{M_2S}$ parallel und gleich orientiert sind. Dann liegen die Punkte P , E und S auf einer Geraden.

Beweis: Die Dreiecke $\triangle PM_1E$ und $\triangle PM_2S$ sind ähnlich wegen $|M_1P| = |M_1E|$, $|M_2P| = |M_2S|$ und $\angle PM_1E = \angle PM_2S$. Es folgt $\angle M_1PE = \angle M_2PS$. Das bedeutet, dass die Punkte P , E und S auf einer Geraden liegen. \square

Hilfssatz B: Der Kreis k_1 mit Mittelpunkt M_1 und Radius r_1 berührt den Kreis k_2 mit Mittelpunkt M_2 und Radius r_2 von innen im Punkt P . Seien E und F Punkte $\neq P$ auf k_1 und S und T Punkte $\neq P$ auf k_2 , sodass P , E und S auf einer Geraden g und P , F und T auf einer Geraden h liegen. Dann sind die Strecken \overline{EF} und \overline{ST} parallel.

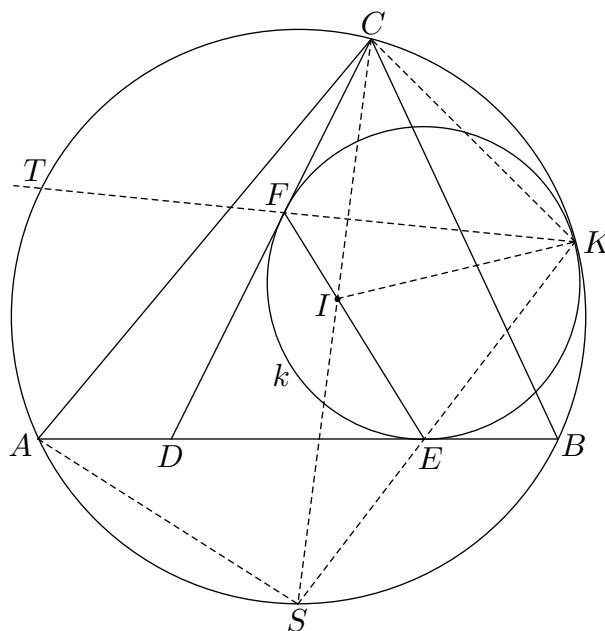
Beweis: Sei S^* auf k_2 so gewählt, dass die Vektoren $\overrightarrow{M_1E}$ und $\overrightarrow{M_2S^*}$ parallel und gleich orientiert sind. Wegen $E \neq P$ gilt auch $S^* \neq P$. Nach Hilfssatz A liegen die Punkte P , E und S^* auf einer Geraden. Es ist die Gerade g , da sie durch P und E geht. Da sowohl S als auch S^* auf g und k_2 liegen, muss $S = S^*$ gelten. Somit sind die Vektoren $\overrightarrow{M_1E}$ und $\overrightarrow{M_2S}$ parallel und gleich orientiert. Dasselbe gilt dann auch für die Vektoren $\overrightarrow{M_1F}$ und $\overrightarrow{M_2T}$.

Wegen $|M_1E| = |M_1F|$ und $|M_2S| = |M_2T|$ sind die Dreiecke $\triangle EM_1F$ und $\triangle SM_2T$ gleichschenkelig. Wir haben gezeigt, dass die Schenkel des einen Dreiecks parallel zu den Schenkeln des anderen Dreiecks liegen. Durch eine Translation mit dem Vektor $\overrightarrow{M_1M_2}$ und eine anschließende zentrische Streckung kann man das Dreieck $\triangle EM_1F$ in das Dreieck $\triangle SM_2T$ überführen. Daher müssen auch die Strecken \overline{EF} und \overline{ST} parallel sein. \square

Der folgende Beweis verwendet Peripheriewinkelsatz, Sehnensatz und Südpolsatz.

Satz 20: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und D ein beliebiger Punkt auf der Seite \overline{AB} . Sei k der Kreis, der den Umkreis des Dreiecks $\triangle ABC$ von innen, die Seite \overline{AB} im Punkt E und die Strecke \overline{CD} im Punkt F berührt. Dann liegt der Inkreismitelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$ auf der Geraden $\ell(E, F)$.

Beweis: Sei S der Südpol, das ist der Mittelpunkt des Umkreisbogens vom Eckpunkt A zum Eckpunkt B , der den Eckpunkt C nicht enthält. Sei K der Punkt, in dem der Kreis k den Umkreis berührt. Die Punkte K , E und S liegen dann auf einer Geraden (Hilfssatz A), da der Vektor vom Umkreismittelpunkt nach S senkrecht auf \overline{AB} steht. Sei T der Schnittpunkt $\neq K$ der Gerade $\ell(K, F)$ mit dem Umkreis. Dann sind die Strecken \overline{EF} und \overline{ST} parallel (Hilfssatz B). Es folgt $\angle EFK = \angle STK$. Der Peripheriewinkelsatz angewendet auf die Sehne \overline{SK} im Umkreis ergibt $\angle STK = \angle SCK$. Damit erhalten wir $\angle EFK = \angle SCK$.



Sei I der Schnittpunkt der Geraden $\ell(S, C)$ und $\ell(E, F)$. Mit Hilfe der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes folgt dann, dass die Punkte I, K, F und C auf einem Kreis liegen. Wendet man den Peripheriewinkelsatz auf die Sehne \overline{CK} in diesem Kreis an, so erhält man, dass $\angle CIK = \angle CFK$ gilt.

Nach Voraussetzung berührt $\ell(C, D)$ den Kreis k im Punkt F . Aus dem Tangentenwinkelsatz angewendet auf die Sehne \overline{FK} im Kreis k ergibt sich $\angle CFK = \angle FEK$. Es folgt $\angle CIK = \angle FEK$. Nun ist $\angle CIK$ der Außenwinkel des Dreiecks $\triangle SIK$ beim Eckpunkt I . Es folgt $\angle SKI = \angle CIK - \angle KSI$. Ebenso ist $\angle FEK$ der Außenwinkel des Dreiecks $\triangle SEI$ beim Eckpunkt E . Es folgt $\angle SIE = \angle FEK - \angle ESI$. Wegen $\angle CIK = \angle FEK$ und $\angle KSI = \angle ESI$ erhalten wir $\angle SKI = \angle SIE$, das heißt $\angle EKI = \angle SIE$

Aus dem Tangentenwinkelsatz folgt jetzt, dass der Kreis durch die Punkte K, I und E die Gerade $\ell(S, I)$ als Tangente hat. Somit erhalten wir $SI^2 = SE \cdot SK$ aus dem Sehnensatz.

Aus dem Peripheriewinkelsatz für die Sehne \overline{AS} im Umkreis folgt $\angle AKS = \angle ABS$. Für den Südpol S gilt $|AS| = |BS|$. Es folgt $\angle ABS = \angle BAS$. Damit erhalten wir dann $\angle AKS = \angle BAS$, das heißt $\angle AKE = \angle EAS$.

Aus dem Tangentenwinkelsatz folgt jetzt, dass der Kreis durch die Punkte K, A und E die Gerade $\ell(S, A)$ als Tangente hat. Somit erhalten wir $SA^2 = SE \cdot SK$ aus dem Sehnensatz.

Wir haben $|SA| = |SI|$ gezeigt. Aus dem Südpolsatz folgt, dass $\ell(S, C)$ die Winkelsymmetrale durch C ist und dass der Punkt auf der Strecke \overline{SC} , der denselben Abstand von C hat wie der Punkt A , der Inkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$ ist. Und das ist eben der Punkt I . Damit ist gezeigt, dass der Inkreismittelpunkt auf der Gerade $\ell(E, F)$ liegt.

Die Zeichnung zeigt den Fall, wo $\ell(C, D)$ links von der Winkelsymmetrale durch C liegt. Der Beweis funktioniert genauso, wenn $\ell(C, D)$ rechts von der Winkelsymmetrale durch C liegt. Fällt $\ell(C, D)$ mit der Winkelsymmetrale durch C zusammen, dann gilt $I = F$ und wir erhalten $SI^2 = SE \cdot SK$ aus dem Sehnensatz angewendet auf den Kreis k , da die Gerade $\ell(C, D)$ den Kreis k im Punkt $I = F$ berührt. \square

Der Satz von Pappos besagt: Seien G, D und E Punkte auf einer Gerade u und U, V und W Punkte auf einer Gerade v . Wenn die Geraden $\ell(G, V)$ und $\ell(D, U)$ parallel sind und ebenso die Geraden $\ell(G, W)$ und $\ell(E, U)$, dann sind auch die Geraden $\ell(E, V)$ und $\ell(D, W)$ parallel. Der folgende Satz ist eine Umkehrung des Satzes von Pappos.

Satz 21: Seien G, D und E drei Punkte, die auf einer Gerade u liegen. Seien g_1 und g_2 Geraden durch G , seien d_1 und d_3 Geraden durch D und e_2 und e_3 Geraden durch E . Weiters sei g_1 parallel zu d_1 , g_2 parallel zu e_2 und d_3 parallel zu e_3 . Seien U, V und W in dieser Reihenfolge die Schnittpunkte von d_1 und e_2 , von g_1 und e_3 und von g_2 und d_3 . Dann liegen U, V und W auf einer Gerade.

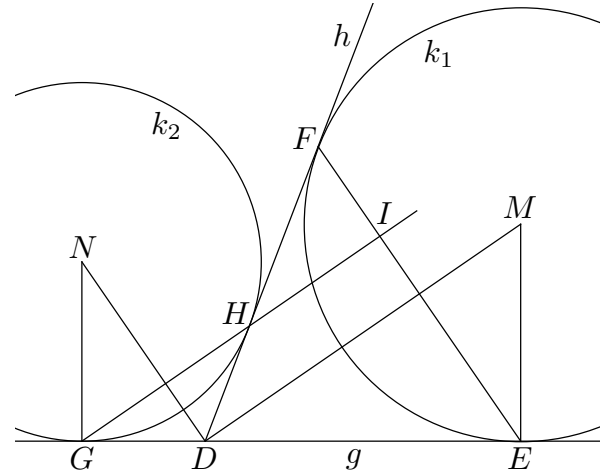
Beweis: Sei h die Gerade durch U und V . Sie schneide g_2 in W_2 und d_3 in W_3 . Sei S der Schnittpunkt von h und u . Aus dem Strahlensatz folgt $\frac{SD}{SG} = \frac{SU}{SV}$, $\frac{SG}{SE} = \frac{SW_2}{SU}$ und $\frac{SE}{SD} = \frac{SV}{SW_3}$. Multiplikation ergibt $1 = \frac{SW_2}{SW_3}$, also $W_2 = W_3$. Die Punkte W_2 und W_3 fallen zusammen und sind somit auch gleich dem Punkt W . Das zeigt, dass die Gerade h auch durch den Schnittpunkt W von g_2 und d_3 geht.

Sind h und u parallel, dann funktioniert dieser Beweis nicht. In diesem Fall sind jedoch die Dreiecke $\triangle UVE$ und $\triangle GDW$ kongruent, da die einander entsprechenden Seiten dieser Dreiecke parallel liegen und da $|DG| = |UV|$ gilt. Da dann auch $|EU| = |GW|$ gilt, hat der Punkt W den selben Normalabstand von der Geraden u wie der Punkt U und liegt somit ebenfalls auf der Gerade h . \square

Satz 22: Sei g eine Gerade, D ein Punkt auf g und h eine von D ausgehende Halbgerade. Sei k_1 ein Kreis mit Mittelpunkt M , der g im Punkt E und h im Punkt F berührt. Weiters sei k_2 ein auf der anderen Seite der Halbgeraden h liegender Kreis mit Mittelpunkt N , der g im Punkt G und h im Punkt H berührt. Sei I der Schnittpunkt von $\ell(E, F)$ und $\ell(G, H)$. Dann liegen die Punkte M , I und N auf einer Geraden.

Beweis: Die Tangenten vom Punkt D an den Kreis k_1 sind $\ell(D, E)$ und $\ell(D, F)$. Daher steht $\ell(D, M)$ senkrecht auf $\ell(E, F)$. Ebenso ergibt sich, dass $\ell(D, N)$ senkrecht auf $\ell(G, H)$ steht.

Die Symmetralen $\ell(D, M)$ und $\ell(D, N)$ der beiden Winkel $\angle EDF$ und $\angle HDG$ stehen senkrecht aufeinander, da diese zwei Winkel einander zu 180° ergänzen. Es folgt, dass $\ell(D, M)$ parallel zu $\ell(G, H)$ und $\ell(D, N)$ parallel zu $\ell(E, F)$ liegt. Die Geraden $\ell(M, E)$ und $\ell(N, G)$ liegen ebenfalls parallel zueinander, da beide senkrecht auf g stehen.



Nun liegen die Punkte G , D und E auf einer Geraden, M ist der Schnittpunkt der Geraden $\ell(D, M)$ und $\ell(E, M)$, nach Voraussetzung ist I der Schnittpunkt der Geraden $\ell(E, F)$ und $\ell(G, H)$, und N ist der Schnittpunkt der Geraden $\ell(D, N)$ und $\ell(G, N)$. Nach Satz 21 liegen die Punkte M , I und N auf einer Geraden. \square

Aus diesen beiden Sätzen ergibt sich der Satz von Thebault oder besser der Satz von Sawayama-Thebault.

Satz 23 (Sawayama-Thebault) Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Inkreismittelpunkt I und D sei ein Punkt auf der Seite \overline{AB} . Sei M der Mittelpunkt des Kreises k_1 , der den Umkreis des Dreiecks $\triangle ABC$ von innen und die Strecken \overline{DB} und \overline{DC} berührt. Sei N der Mittelpunkt des Kreises k_2 , der den Umkreis des Dreiecks $\triangle ABC$ von innen und die Strecken \overline{DA} und \overline{DC} berührt. Dann liegen M , I und N auf einer Geraden.

Beweis: Seien E und F die Punkte, in denen k_1 die Strecken \overline{DB} und \overline{DC} berührt und G und H die Punkte, in denen k_2 die Strecken \overline{DA} und \overline{DC} berührt. Nach Satz 20 liegt I sowohl auf $\ell(E, F)$ als auch auf $\ell(G, H)$, ist also der Schnittpunkt dieser beiden Geraden. Aus Satz 22 folgt jetzt, dass die Punkte M , I und N auf einer Geraden liegen. \square

Bemerkung: Die Aussage von Satz 23 wurde im Jahre 1938 vom französischen Mathematiker V. Thebault als Problem gestellt. Die ersten Beweise wurden 1973 publiziert. Neuere Beweise findet man in "R. Shail: *A proof of Thebault's Theorem*, *Amer. Math. Monthly*, 108 (2001) 319-325" und in "S. Gueron: *Two Applications of the Generalized Ptolemy Theorem*, *Amer. Math. Monthly*, 109 (2002) 362-370". Im Jahr 2003 entdeckte man, siehe "J. L. Ayme: *Sawayama and Thebault's theorem*, *Forum Geometricorum* 3 (2003) 225-229", dass ein Beweis des Satzes von Thebault bereits in "Y. Sawayama: *A new geometrical proposition*, *Amer. Math. Monthly*, 12 (1905) 222-224" zu finden ist.

Der Beweis von Satz 20 ist der aus der Publikation von Y. Sawayama. Der Beweis von Satz 22 ist wie in der Publikation von J. L. Ayme.

5. Kegelschnitte und isogonal konjugierte Punkte

Zu einem gegebenen Dreieck gibt es bekanntlich vier Kreise, den Inkreis und die drei Ankreise, die die Trägergeraden der drei Dreiecksseiten berühren. Genauso können wir nach Kegelschnitten fragen, die die drei Trägergeraden berühren. Zusätzlich verlangen wir, dass ein vorgegebener Punkt F Brennpunkt des Kegelschnitts ist.

Wir verwenden folgende Eigenschaften von Kegelschnitttangente:

Sei P ein Punkt auf einer Ellipse mit Brennpunkten F und G und Halbachsenlänge a . Dann ist die Winkelsymmetrale der beiden Geraden $\ell(F, P)$ und $\ell(G, P)$, die die Strecke \overline{FG} nicht schneidet, die Tangente im Punkt P an die Ellipse. Der Punkt F^* , den man durch Spiegelung von F an der Tangente erhält, liegt dann auf $\ell(G, P)$ und zwar so, dass P zwischen G und F^* liegt. Es gilt $|F^*G| = |F^*P| + |PG| = |FP| + |PG| = 2a$.

Die Umkehrung gilt auch: Liegen zwei Punkte F und G auf derselben Seite einer Geraden g und hat der Punkt F^* , den man durch Spiegelung von F an g erhält, Abstand $2a$ vom Punkt G , dann ist die Gerade g Tangente der Ellipse mit Brennpunkten F und G und Halbachsenlänge a . Der Berührungspunkt P ist der Schnittpunkt der Geraden g und $\ell(G, F^*)$.

Sei P ein Punkt auf einer Hyperbel mit Brennpunkten F und G und Halbachsenlänge a . Dann ist die Winkelsymmetrale der beiden Geraden $\ell(F, P)$ und $\ell(G, P)$, die die Strecke \overline{FG} schneidet, die Tangente im Punkt P an die Hyperbel. Der Punkt F^* , den man durch Spiegelung von F an der Tangente erhält, liegt auf $\ell(G, P)$. Liegt P auf dem Hyperbelast beim Brennpunkt F , dann liegt F^* zwischen G und P und es gilt $|F^*G| = |GP| - |PF^*| = |GP| - |PF| = 2a$. Liegt P auf dem Hyperbelast bei G , dann liegt G zwischen F^* und P und es gilt $|F^*G| = |F^*P| - |PG| = |FP| - |PG| = 2a$. Somit gilt $|F^*G| = 2a$ immer.

Die Umkehrung gilt auch: Liegen die Punkte F und G auf verschiedenen Seiten einer Gerade g und hat der Punkt F^* , den man durch Spiegelung von F an g erhält, Abstand $2a$ vom Punkt G , dann ist die Gerade g Tangente oder Asymptote der Hyperbel mit Brennpunkten F und G und Halbachsenlänge a . Der Berührungspunkt P ist der Schnittpunkt der Geraden g und $\ell(G, F^*)$. Sind g und $\ell(G, F^*)$ parallel (das passiert genau dann, wenn g durch den Mittelpunkt der Strecke \overline{FG} geht), dann ist g eine Asymptote.

Sei P ein Punkt auf einer Parabel mit Brennpunkt F und Leitlinie l . Sei Q der Fußpunkt des Lots von P auf l . Dann ist die Winkelsymmetrale der beiden Geraden $\ell(F, P)$ und $\ell(Q, P)$, die die Strecke \overline{FQ} schneidet, die Tangente im Punkt P an die Parabel. Spiegelt man den Brennpunkt F an der Tangente, dann erhält man den Punkt Q , da $|PF| = |PQ|$ gilt. Der an der Tangente gespiegelte Brennpunkt F liegt somit auf der Leitlinie l .

Die Umkehrung gilt auch: Seien g und l Geraden und F ein Punkt, der weder auf g noch auf l liegt. Liegt der Punkt Q , den man bei Spiegelung von F an g erhält, auf der Gerade l , dann ist g Tangente der Parabel mit Brennpunkt F und Leitlinie l . Der Berührungspunkt P ist der Schnittpunkt von g mit der Senkrechten auf die Leitlinie l durch den Punkt Q .

Diese Umkehrungen der Tangentenkonstruktion werden wir in den folgenden Beweisen verwenden. Wir brauchen auch noch einen Hilfssatz.

Hilfssatz: Seien F und G zwei Punkte und g eine Gerade. Sei F^* der Punkt, den man erhält, wenn man F an der Geraden g spiegelt. Dann gilt

$$\begin{aligned} F \text{ und } G \text{ liegen auf derselben Seite der Gerade } g &\iff |FG| < |F^*G| \\ F \text{ und } G \text{ liegen auf verschiedenen Seiten der Gerade } g &\iff |FG| > |F^*G| \\ \text{mindestens einer der Punkte liegt auf der Gerade } g &\iff |FG| = |F^*G| \end{aligned}$$

Beweis: Da immer einer der links stehenden Fälle eintritt, genügt es, die Implikationen \implies zu zeigen. Sei G^* der an der Geraden g gespiegelte Punkt G .

Liegen F und G auf derselben Seite von g , dann bilden die Punkte FGF^*G^* ein gleichschenkeliges Trapez mit Schenkeln \overline{FG} und $\overline{F^*G^*}$. Die Strecke $\overline{F^*G}$ ist Diagonale im Trapez. Da in einem gleichschenkeligen Trapez die Diagonalen länger als die Schenkel sind, ist $|F^*G| > |FG|$ gezeigt. Liegen F und G auf verschiedenen Seiten von g , dann bilden die Punkte FG^*GF^* ein gleichschenkeliges Trapez mit Schenkeln $\overline{FG^*}$ und $\overline{F^*G}$. Jetzt ist \overline{FG} eine Diagonale im Trapez. Es folgt $|FG| > |F^*G|$.

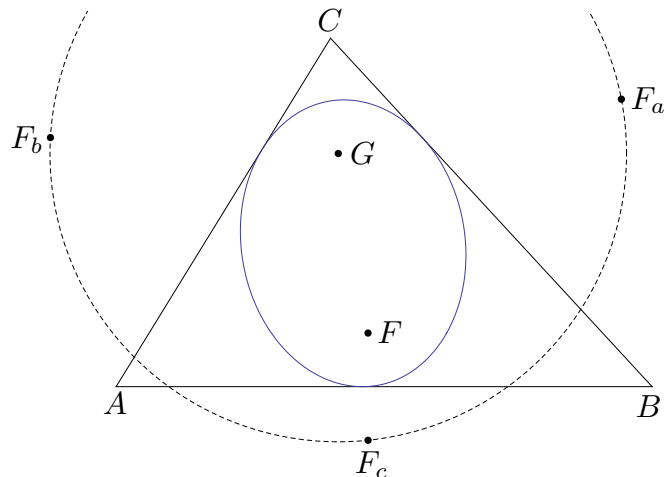
Liegt F auf g , dann gilt $F^* = F$ und $|F^*G| = |FG|$. Liegt G auf g , aber F nicht, dann sind $\overline{F^*G}$ und \overline{FG} die Schenkel eines gleichschenkeligen Dreiecks. Daher gilt $|F^*G| = |FG|$. \square

Satz 24: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und F ein Punkt, der nicht auf der Trägergerade einer Dreiecksseite liegt. Wir spiegeln F an diesen Trägergeraden und erhalten Punkte F_a, F_b und F_c . Wir nehmen an, dass diese drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen. Sei G der Mittelpunkt und $2a$ der Radius des Kreises durch die Punkte F_a, F_b und F_c . Wenn $2a > |FG|$ gilt, dann hat die Ellipse mit Brennpunkten F und G und Halbachsenlänge a jede der drei Trägergeraden der Dreiecksseiten als Tangenten. Wenn $2a < |FG|$ gilt, dann hat die Hyperbel mit Brennpunkten F und G und Halbachsenlänge a jede der drei Trägergeraden der Dreiecksseiten als Tangente oder als Asymptote.

Beweis: Sei g die Trägergerade einer Dreiecksseite. Sei F^* der an g gespiegelte Punkt F . Dann ist F^* einer der Punkte F_a, F_b oder F_c . Es gilt also $2a = |F^*G|$. Ist $2a > |FG|$, dann folgt aus dem Hilfssatz, dass die Punkte F und G auf derselben Seite von g liegen. Da G und F^* Abstand $2a$ haben, ist g eine Tangente an die Ellipse mit den Brennpunkten F und G und mit Halbachsenlänge a .

Ist $2a < |FG|$, dann folgt aus dem Hilfssatz, dass die Punkte F und G auf verschiedenen Seiten von g liegen. Da G und F^* Abstand $2a$ haben, ist g eine Tangente oder Asymptote der Hyperbel mit den Brennpunkten F und G und mit Halbachsenlänge a .

\square



In Satz 24 kann $2a = |FG|$ nicht gelten, sonst würde F auf dem Kreis durch die Punkte F_a, F_b und F_c liegen. Die drei Trägergeraden der Dreiecksseiten würden alle durch den Mittelpunkt G des Kreises gehen, da sie Symmetralen von Kreissehnen sind. Wir hätten dann gar kein Dreieck. Wir behandeln noch den in Satz 24 ausgeschlossenen Fall.

Satz 25: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und F ein Punkt, der nicht auf der Trägergerade einer Dreiecksseite liegt. Wir spiegeln F an den Trägergeraden und erhalten Punkte F_a, F_b und F_c . Wir nehmen an, dass diese Punkte auf einer Geraden l liegen. Dann hat die Parabel mit Brennpunkt F und Leitlinie l die Trägergeraden der Dreiecksseiten als Tangenten.

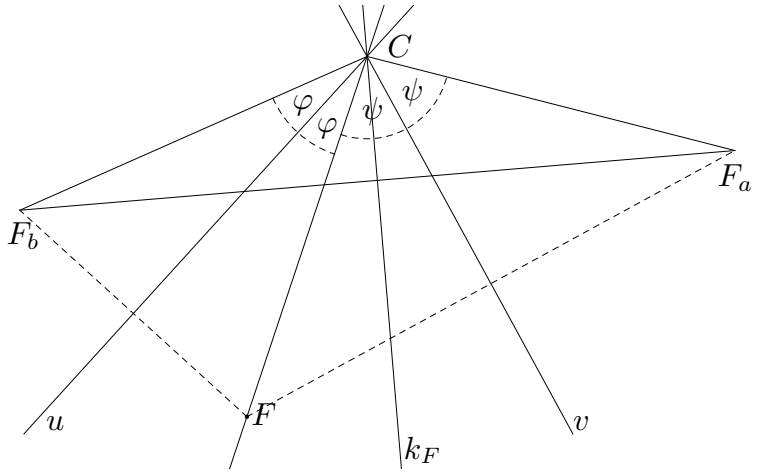
Beweis: Der Punkt F liegt nicht auf l , sonst wären die Trägergeraden der Dreiecksseiten zueinander parallel. Sei g eine dieser Trägergeraden. Sei F^* der an g gespiegelte Punkt F . Dann ist F^* einer der Punkte F_a, F_b oder F_c und liegt somit auf l . Daraus folgt, dass g eine Tangente der Parabel mit Brennpunkt F und Leitlinie l ist. \square

Isogonal konjugierte Punkte: Gegeben ist ein Dreieck $\triangle ABC$ und ein Punkt F . Wir spiegeln F an den Trägergeraden der drei Dreiecksseiten und erhalten Punkte F_a, F_b und F_c . Der Mittelpunkt G des Kreises durch die Punkte F_a, F_b und F_c heißt der zu F isogonal konjugierte Punkt. Das ist gerade die Vorgangsweise, die uns den zweiten Brennpunkt des Kegelschnitts geliefert hat.

Wir geben noch eine andere mögliche Definition des isogonal konjugierten Punktes. Sei f_F die an der Winkelsymmetrale durch A gepiegelte Gerade $\ell(F, A)$, h_F die an der Winkelsymmetrale durch B gepiegelte Gerade $\ell(F, B)$ und k_F die an der Winkelsymmetrale durch C gepiegelte Gerade $\ell(F, C)$. (Wir erhalten dieselbe Gerade bei Spiegelung an der Symmetrale des Innenwinkels und an der Symmetrale des Außenwinkels.)

Satz 26: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und F ein Punkt, der jedoch keiner der Eckpunkte des Dreiecks $\triangle ABC$ ist. Die Geraden f_F, h_F und k_F sind dann die Symmetralen der drei Strecken $\overline{F_bF_c}, \overline{F_aF_c}$ und $\overline{F_aF_b}$.

Beweis: Wir zeigen, dass k_F die Symmetrale der Strecke $\overline{F_bF_a}$ ist. Seien u und v die Trägergeraden der Seiten \overline{AC} und \overline{BC} . Die Geraden u und v schneiden einander im Punkt C und zerteilen die Ebene in vier Winkelfelder. In einem dieser Winkelfelder oder auf dessen Rand liegt F . Sei φ der Winkel, den die Strecke \overline{FC} mit der Gerade u einschließt, und ψ der Winkel, den sie mit der Gerade v einschließt. Da k_F die um eine der Winkelsymmetralen der Geraden u und v gespiegelte Gerade $\ell(F, C)$ ist, schließt k_F mit u den Winkel ψ und mit v den Winkel φ ein. Es folgt, dass k_F sowohl mit $\overline{F_aC}$ als auch mit $\overline{F_bC}$ den Winkel $\varphi + \psi$ einschließt. Wegen $|F_aC| = |FC| = |F_bC|$ ist das Dreieck $\triangle F_aCF_b$ gleichschenkelig. Deshalb ist k_F die Symmetrale der Seite $\overline{F_bF_a}$ dieses Dreiecks. \square



Es können zwei Fälle eintreten. Die Punkte F_a, F_b und F_c liegen auf einer Gerade oder sie liegen nicht auf einer Gerade. Wenn wir annehmen, dass F keiner der Eckpunkte des Dreiecks $\triangle ABC$ ist, dann sind nach Satz 26 die Geraden f_F, h_F und k_F die Symmetralen der Strecken $\overline{F_bF_c}, \overline{F_aF_c}$ und $\overline{F_aF_b}$.

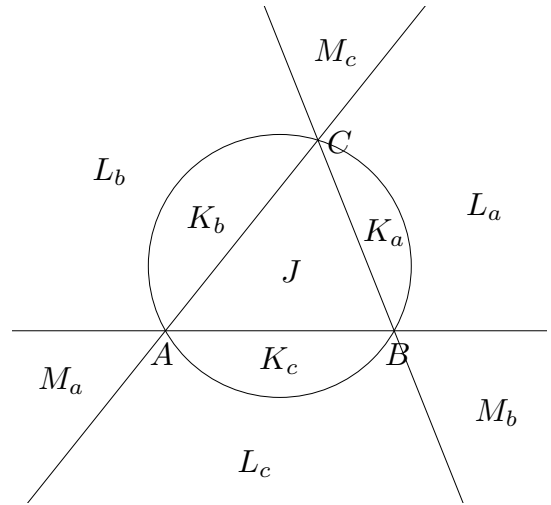
Im ersten Fall existiert kein Kreis durch die Punkte F_a, F_b und F_c . Der isogonal konjugierte Punkt G existiert nicht. Die Geraden f_F, h_F und k_F liegen parallel. Der Schnittpunkt dieser Geraden existiert ebenfalls nicht.

Im zweiten Fall existiert der Kreis durch die Punkte F_a, F_b und F_c . Es ist der Umkreis des Dreiecks $\triangle F_aF_bF_c$. Der isogonal konjugierte Punkt G ist der Umkreismittelpunkt dieses Dreiecks. Die Geraden f_F, h_F und k_F sind nach Satz 26 die Seitensymmetralen dieses Dreiecks. Sie schneiden einander im Umkreismittelpunkt also im Punkt G . Das zeigt, dass man den isogonal konjugierte Punkt eines Punktes F auch als Schnittpunkt der drei Geraden f_F, h_F und k_F erhält. Oft wird der isogonal konjugierte Punkt so definiert.

Wir definieren eine Abbildung Ψ , die jedem Punkt den isogonal konjugierten Punkt zuordnet, sofern dieser existiert. Aus der zweiten Definition des isogonal konjugierten Punktes ergibt sich, dass Ψ zu sich selbst invers ist. Gilt $\Psi(F) = G$, dann auch $\Psi(G) = F$.

Die Ebene wird durch die Trägergeraden der drei Dreiecksseiten und durch den Umkreis in zehn Gebiete unterteilt. Wir bezeichnen das Innere des Dreiecks mit J , die drei Gebiete außerhalb des Dreiecks und innerhalb des Umkreises mit K_a, K_b und K_c , die daran anschließenden Gebiete außerhalb des Umkreises mit L_a, L_b und L_c , und die übrigen drei Gebiete, die an die Eckpunkte anschließen, mit M_a, M_b und M_c .

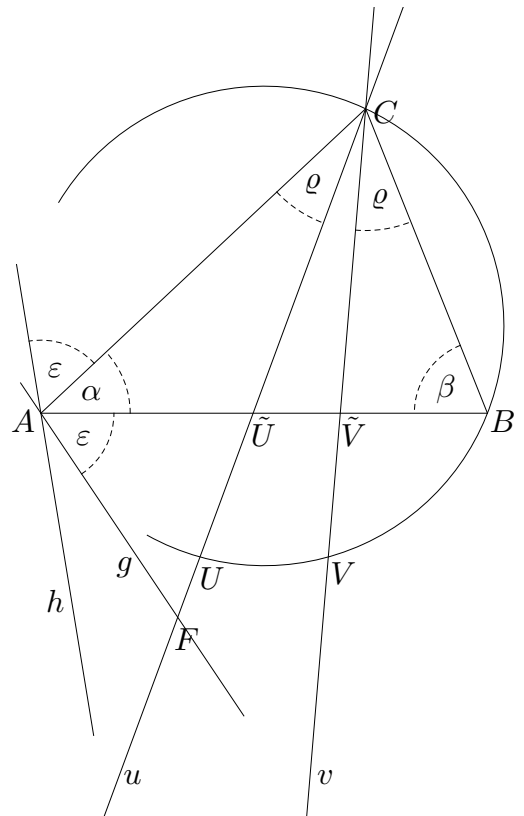
Liegt F auf der Trägergerade u einer Dreiecksseite (ist aber kein Eckpunkt), dann ist der u gegenüberliegende Eckpunkt der zu F isogonal konjugierte Punkt $\Psi(F)$, da die Trägergeraden der beiden anderen Dreiecksseiten zwei der Geraden f_F, h_F und k_F sind und $\Psi(F)$ ja der Schnittpunkt aller drei Geraden ist.



Satz 27: Sei F ein Punkt, der nicht auf den Trägergeraden der Seiten des Dreiecks $\triangle ABC$ liegt. Liegt F auf dem Umkreis, dann sind f_F, h_F und k_F parallel und $\Psi(F)$ existiert nicht. Für die oben eingeführten Gebiete gilt: $\Psi(J) = J, \Psi(L_c) = L_c, \Psi(K_c) = M_c$ und $\Psi(M_c) = K_c$. Analoge Aussagen gelten für L_a, K_a, M_a und L_b, K_b, M_b .

Beweis: Jeder Punkt, der nicht auf den Trägergeraden der Dreiecksseiten liegt, liegt auf einer Gerade, die durch einen Eckpunkt und durchs Innere des Dreiecks geht. Wir fixieren eine derartige Gerade u durch den Eckpunkt C und lassen F auf ihr laufen. Sei ϱ der Winkel zwischen u und der Dreiecksseite \overline{CA} und v die Gerade durch den Eckpunkt C , die mit der Dreiecksseite \overline{CB} den Winkel ϱ einschließt. Dann ist v die an der Winkelsymmetrale durch C gespiegelte Gerade u . Wegen $u = \ell(F, C)$ gilt $v = k_F$.

Um den zu F isogonal konjugierten Punkt G zu bestimmen, sei g die Gerade $\ell(F, A)$ und h die Gerade f_F . Dann ist G der Schnittpunkt von h und v . Sei ε der Winkel, den g mit der Seite \overline{AB} einschließt. Dann schließt $h = f_F$ mit der Seite \overline{AC} ebenfalls den Winkel ε ein, da h die an der Winkelsymmetrale durch A gespiegelte Gerade g ist. Seien U und V die Schnittpunkte der Geraden u und v mit dem Umkreis und \tilde{U} und \tilde{V} die der Geraden u und v mit der Dreiecksseite \overline{AB} . Aus dem Peripheriewinkelsatz für die Sehne \overline{UB} im Umkreis folgt $\angle UAB = \angle UCB = \gamma - \varrho$. Ist $F = U$, dann gilt $\varepsilon = \gamma - \varrho$ und h schließt mit der Seite \overline{AC} den Winkel $\gamma - \varrho$ ein. Da auch v mit der Seite \overline{AC} den Winkel $\gamma - \varrho$ einschließt, liegen h und v parallel. Das zeigt, dass die Geraden f_F, h_F und k_F parallel liegen. Der isogonal konjugierte Punkt G existiert nicht, wenn F auf dem Umkreis liegt.



Aus dem Peripheriewinkelsatz für die Sehne \overline{VB} im Umkreis folgt $\angle VAB = \angle VCB = \varrho$. Daher geht h genau dann durch V , wenn $\varepsilon = 180^\circ - \alpha - \varrho$ gilt.

Liegt F auf der Geraden u unterhalb von U , also außerhalb des Umkreises, das ist im Gebiet L_c , dann gilt $\gamma - \varrho < \varepsilon < 180^\circ - \alpha - \varrho$. Es folgt, dass h die Gerade v unterhalb von V trifft. Somit liegt $G = \Psi(F)$ ebenfalls außerhalb des Umkreises im Gebiet L_c . Damit ist $\Psi(L_c) \subseteq L_c$ gezeigt.

Liegt F auf der Geraden u zwischen U und \tilde{U} , also außerhalb des Dreiecks aber innerhalb des Umkreises, das ist im Gebiet K_c , dann gilt $0 < \varepsilon < \gamma - \varrho$. Es folgt, dass h die Gerade v oberhalb von C trifft. Somit liegt $G = \Psi(F)$ im Gebiet M_c . Das zeigt $\Psi(K_c) \subseteq M_c$.

Liegt F auf der Geraden u zwischen \tilde{U} und C , also innerhalb des Dreiecks, das ist im Gebiet J , dann läuft $g = \ell(F, A)$ und damit auch $h = f_F$ von A aus ins Innere des Dreiecks. Es folgt, dass h die Gerade v zwischen \tilde{V} und C trifft. Somit liegt auch $G = \Psi(F)$ im Gebiet J . Damit ist $\Psi(J) \subseteq J$ gezeigt.

Liegt F auf der Geraden u oberhalb von C im Gebiet M_c , dann schließt g mit der Seite \overline{AC} einen Winkel zwischen 0 und ϱ ein. Es folgt, dass h mit der Seite \overline{AB} ebenfalls einen Winkel zwischen 0 und ϱ einschließt. Es folgt, dass G auf der Geraden v zwischen V und \tilde{V} im Gebiet K_c liegt. Damit ist $\Psi(M_c) \subseteq K_c$ gezeigt.

Nun ist Ψ^2 die identische Abbildung. Aus $\Psi(J) \subseteq J$ folgt daher $J = \Psi^2(J) \subseteq \Psi(J)$ und somit $\Psi(J) = J$. Ebenso erhalten wir $\Psi(L_c) = L_c$ aus $\Psi(L_c) \subseteq L_c$. Weiters folgt $K_c = \Psi^2(K_c) \subseteq \Psi(M_c)$ aus $\Psi(K_c) \subseteq M_c$ und $M_c = \Psi^2(M_c) \subseteq \Psi(K_c)$ aus $\Psi(M_c) \subseteq K_c$. Damit haben wir auch $\Psi(K_c) = M_c$ und $\Psi(M_c) = K_c$ gezeigt. \square

Wir kehren zum ursprünglichen Problem zurück. Wir wählen einen Punkt F und suchen einen Kegelschnitt, der F als Brennpunkt hat und die Trägergeraden der drei Dreiecksseiten berührt. Liegt F auf dem Umkreis, dann sind die Geraden f_F , h_F und k_F parallel und die drei Spiegelpunkte F_a , F_b und F_c von F liegen auf einer Gerade l . In diesem Fall berührt die Parabel mit Brennpunkt F und Leitlinie l die drei Trägergeraden.

Liegt F in einem der Gebiete J , L_a , L_b oder L_c , dann liegt der isogonal konjugierte Punkt G im selben Gebiet wie F . Die Punkte F und G liegen auf der selben Seite aller drei Trägergeraden. Diese sind dann Tangenten einer Ellipse mit Brennpunkten F und G .

Liegt F in K_a , dann liegt der isogonal konjugierte Punkt G in M_a und umgekehrt. Dasselbe gilt für K_b und M_b und für K_c und M_c . In diesem Fall liegen die beiden Punkte F und G auf verschiedenen Seiten aller drei Trägergeraden. Diese sind dann Tangenten oder Asymptoten einer Hyperbel mit Brennpunkten F und G .

Wir haben Kegelschnitte untersucht, die die drei Seiten eines Dreiecks als Tangente haben. Man kann auch nach Kegelschnitten fragen, die durch die drei Eckpunkte eines Dreiecks gehen. Auch dazu kann man die isogonale Konjugation verwenden. Ist g eine Gerade, die nicht Trägergerade einer Dreiecksseite ist, dann ist das Bild von g unter Ψ ein Kegelschnitt, der durch alle drei Eckpunkte des Dreiecks geht. Hat g zwei Schnittpunkte mit dem Umkreis, dann erhält man eine Hyperbel. Ist g eine Tangente an den Umkreis, dann erhält man eine Parabel. Hat g keinen Schnittpunkt mit dem Umkreis, dann erhält man eine Ellipse. Mehr darüber findet man in "Paul Yiu: *Introduction to the Geometry of the Triangle*, 2002". Für solche Untersuchungen werden üblicherweise baryzentrische Koordinaten verwendet.

III. Die Sätze von Menelaos und Ceva

1. Beweisen mit Menelaos und Ceva	27
2. Der Satz von Monge	29
3. Die Polare für einen Kreis	30
4. Die Sätze von Desargues und Pascal	32

Die Sätze von Menelaos und Ceva lassen sich sehr einfach formulieren. Wir geben zuerst zwei Definitionen. Wir nennen drei Punkte kollinear, wenn sie auf einer Gerade liegen. Wir nennen drei Gerade konkurrent, wenn sie einen Punkt gemeinsam haben oder wenn sie parallel liegen.

Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Sei D ein Punkt auf $\ell(A, B)$, sei E einer auf $\ell(B, C)$ und F einer auf $\ell(C, A)$. Jedoch seien diese Punkte keine Eckpunkte des Dreiecks.

Der Satz von Menelaos besagt, dass die Punkte D , E und F genau dann kollinear sind, wenn $\frac{DA}{DB} \cdot \frac{EB}{EC} \cdot \frac{FC}{FA} = 1$ gilt (wird oft auch als $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = -1$ geschrieben).

Der Satz von Ceva besagt, dass die Geraden $\ell(A, E)$, $\ell(B, F)$ und $\ell(C, D)$ genau dann konkurrent sind, wenn $\frac{DA}{DB} \cdot \frac{EB}{EC} \cdot \frac{FC}{FA} = -1$ gilt (wird oft auch als $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$ geschrieben).

Diese beiden Sätze kann man leicht mit Hilfe des Strahlensatzes beweisen. Die Beweise findet man in jedem Lehrbuch.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden einige Sätze über das Dreieck behandelt, in deren Beweis die Sätze von Menelaos und Ceva eine ganz wesentliche Rolle spielen. Diese Beweise sollen zeigen, wie mit diesen Sätzen gearbeitet wird.

Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels wird der Satz von Monge bewiesen. Es geht um drei Kreise, wobei jeder dieser Kreise ganz außerhalb der beiden anderen liegt. Dieser Satz macht Aussagen über Schnittpunkte von gemeinsamen Tangenten dieser Kreise. Neben den Sätzen von Ceva und Menelaos verwenden wir auch den Strahlensatz.

Im dritten Abschnitt dieses Kapitels wird die Polare für einen Kreis untersucht. Es werden Punkte gefunden, die auf der Polare liegen. Neben den Sätzen von Ceva und Menelaos verwenden wir auch den Strahlensatz und den Peripheriewinkelsatz.

Im vierten Abschnitt dieses Kapitels werden synthetische Beweise für den Satz von Desargues und für den Satz von Pascal für einen Kreis gegeben. Sind $\triangle ABC$ und $\triangle DEF$ zwei Dreiecke, sodass die drei Geraden $\ell(A, D)$, $\ell(B, E)$ und $\ell(C, F)$ konkurrent sind, dann besagt der Satz von Desargues, dass der Schnittpunkt der Geraden $\ell(A, B)$ und $\ell(D, E)$, der Schnittpunkt der Geraden $\ell(B, C)$ und $\ell(E, F)$ und der Schnittpunkt der Geraden $\ell(C, A)$ und $\ell(F, D)$ kollinear sind. Ist $ABCDEF$ ein konvexes Sechseck, dessen Eckpunkte auf einem Kreis liegen, dann besagt der Satz von Pascal, dass der Schnittpunkt der Geraden $\ell(A, B)$ und $\ell(D, E)$, der Schnittpunkt der Geraden $\ell(B, C)$ und $\ell(E, F)$ und der Schnittpunkt der Geraden $\ell(C, D)$ und $\ell(F, A)$ kollinear sind. In den Beweisen dieser Sätze spielt der Satz von Menelaos eine wesentliche Rolle. Wir greifen aber auch auf den Strahlensatz und den Sehnensatz zurück.

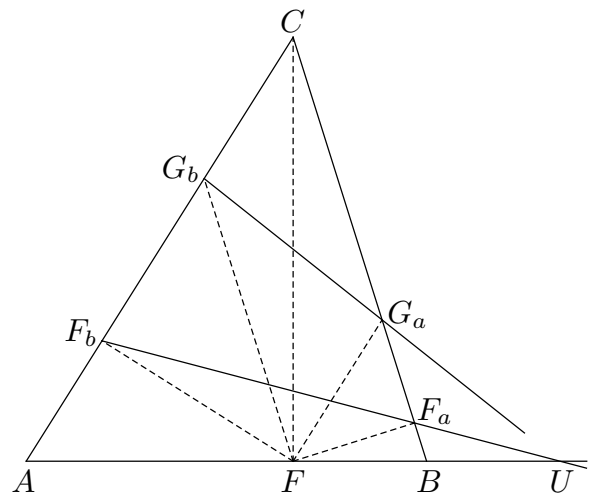
1. Beweisen mit Menelaos und Ceva

Die folgenden Sätze werden mit Hilfe der Sätze von Menelaos und Ceva bewiesen. Wir greifen aber auch gelegentlich auf den Satz von Pythagoras und den Strahlensatz zurück.

Satz 28: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und F der Fußpunkt der Höhe durch C . Seien F_a und F_b die Fußpunkte der Lote von F auf $\ell(B, C)$ und $\ell(A, C)$. Weiters sei G_a der Schnittpunkt von $\ell(B, C)$ mit der Parallelen zu $\ell(A, C)$ durch F und G_b der Schnittpunkt von $\ell(A, C)$ mit der Parallelen zu $\ell(B, C)$ durch F . Die Schnittpunkte der Gerade $\ell(F_a, F_b)$ mit $\ell(A, B)$ und der Gerade $\ell(G_a, G_b)$ mit $\ell(A, B)$ fallen dann zusammen, vorausgesetzt sie existieren.

Beweis: Ist $\alpha = 90^\circ$, dann gilt $A = F = F_b = G_b$. Ebenso gilt $B = F = F_a = G_a$ im Fall $\beta = 90^\circ$. Im ersten Fall liegt A auf den drei Geraden $\ell(A, B)$, $\ell(F_a, F_b)$ und $\ell(G_a, G_b)$, im zweiten Fall ist es B . Sei also $\alpha \neq 90^\circ$ und $\beta \neq 90^\circ$.

Sei U der Schnittpunkt der Geraden $\ell(A, B)$ und $\ell(F_a, F_b)$. Aus dem Satz von Menelaos folgt $\frac{UA}{UB} \cdot \frac{F_aB}{F_aC} \cdot \frac{F_bC}{F_bA} = 1$. Nun hat das Dreieck $\triangle AFC$ bei F einen rechten Winkel und $\overline{FF_b}$ ist die Höhe durch F . Aus dem Kathetensatz folgt $|CF|^2 = |F_bC| \cdot |AC|$ und $|AF|^2 = |F_bA| \cdot |AC|$. Durch Division erhalten wir $\frac{|CF|^2}{|AF|^2} = \frac{|F_bC|}{|F_bA|}$. Da F_b zwischen A und C liegt (rechtwinkeliges Dreieck), gilt $\frac{F_bC}{F_bA} < 0$ und somit $\frac{F_bC}{F_bA} = -\frac{|CF|^2}{|AF|^2}$. Ebenso kann man $\frac{F_aB}{F_aC} = -\frac{|BF|^2}{|CF|^2}$ zeigen. Setzt man das oben ein, so hat man $\frac{UA}{UB} = \frac{|AF|^2}{|BF|^2}$.



Sei V der Schnittpunkt der Geraden $\ell(A, B)$ und $\ell(G_a, G_b)$. Aus dem Satz von Menelaos folgt $\frac{VA}{VB} \cdot \frac{G_aB}{G_aC} \cdot \frac{G_bC}{G_bA} = 1$. Da $\ell(F, G_a)$ parallel zu $\ell(A, C)$ liegt, folgt $\frac{G_aB}{G_aC} = \frac{FB}{FA}$ aus dem Strahlensatz. Ebenso folgt $\frac{G_bC}{G_bA} = \frac{FB}{FA}$, da $\ell(F, G_b)$ parallel zu $\ell(B, C)$ liegt. Setzt man das oben ein, so hat man $\frac{VA}{VB} = \frac{|FA|^2}{|BF|^2}$.

Wir haben $\frac{UA}{UB} = \frac{VA}{VB}$ gezeigt und die Punkte A, B, U und V liegen auf einer Gerade. Wegen $UA = UB - AB$ und $VA = VB - AB$ folgt $1 - \frac{AB}{UB} = 1 - \frac{AB}{VB}$ und daraus dann $UB = VB$. Damit erhalten wir $U = V$. \square

Übung: In Satz 28 existieren die Schnittpunkte von $\ell(F_a, F_b)$ mit $\ell(A, B)$ und von $\ell(G_a, G_b)$ mit $\ell(A, B)$, wenn $|CA| \neq |CB|$ gilt.

Hinweis: Wenn nicht, dann sind $\ell(F_a, F_b)$ und $\ell(A, B)$ parallel. Der Strahlensatz ergibt $\frac{CA}{CF_b} = \frac{CB}{CF_a}$. Wie im Beweis $|CF_b| \cdot |CA| = |CF|^2 = |CF_a| \cdot |CB|$. Es folgt $|CA| = |CB|$. Sind $\ell(G_a, G_b)$ und $\ell(A, B)$ parallel, dann folgt $\frac{FA}{FB} = \frac{G_aC}{G_aB} = \frac{G_bC}{G_bA} = \frac{FB}{FA}$ durch dreimaliges Anwenden des Strahlensatzes und daraus dann $|FA| = |FB|$.

Übung: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und D, E und F die Fußpunkte der Höhen durch A, B und C . Seien D_b und D_c die Fußpunkte der Lote von D auf $\ell(A, C)$ und $\ell(A, B)$ und A^* der Schnittpunkt von $\ell(B, C)$ und $\ell(D_b, D_c)$. Seien E_a und E_c die Fußpunkte der Lote von E auf $\ell(B, C)$ und $\ell(A, B)$ und B^* der Schnittpunkt von $\ell(A, C)$ und $\ell(E_a, E_c)$. Seien F_a und F_b die Fußpunkte der Lote von F auf $\ell(B, C)$ und $\ell(A, C)$ und C^* der Schnittpunkt von $\ell(A, B)$ und $\ell(F_a, F_b)$. Dann liegen die Punkte A^*, B^* und C^* auf einer Gerade.

Satz 29: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und P ein Punkt, der nicht auf der Trägergerade einer Dreiecksseite liegt. Sei A_1 der Schnittpunkt der Geraden $\ell(A, P)$ und $\ell(B, C)$, sei B_1 der der Geraden $\ell(B, P)$ und $\ell(A, C)$ und sei C_1 der der Geraden $\ell(C, P)$ und $\ell(A, B)$. Weiters sei A_2 der Schnittpunkt der Geraden $\ell(B_1, C_1)$ und $\ell(B, C)$, sei B_2 der der Geraden $\ell(A_1, C_1)$ und $\ell(A, C)$ und sei C_2 der der Geraden $\ell(A_1, B_1)$ und $\ell(A, B)$. Wir nehmen an, dass diese Schnittpunkte existieren. Schließlich seien M_a , M_b und M_c die Mittelpunkte der Strecken $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$ und $\overline{C_1C_2}$. Dann sind M_a , M_b und M_c kollinear.

Beweis: Aus den Voraussetzungen und dem Satz von Ceva erhalten wir

$$(1) \quad \frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} = -1$$

Aus den Voraussetzungen und dem Satz von Menelaos erhalten wir

$$(2) \quad \frac{C_2A}{C_2B} \cdot \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} = 1 \quad \frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{A_2B}{A_2C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} = 1 \quad \frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_2C}{B_2A} = 1$$

Aus (1) und der ersten Gleichung in (2) folgt $\frac{C_1A}{C_1B} = -\frac{C_2A}{C_2B}$. Wir bezeichnen $\frac{C_1A}{C_1B}$ mit λ . Damit erhalten wir $C_1A + C_2A = \lambda \cdot C_1B - \lambda \cdot C_2B = \lambda \cdot (C_1B - C_2B) = \lambda \cdot C_1C_2$ und $C_1B + C_2B = \frac{1}{\lambda} \cdot C_1A - \frac{1}{\lambda} \cdot C_2A = \frac{1}{\lambda} \cdot (C_1A - C_2A) = \frac{1}{\lambda} \cdot C_1C_2$. Wegen $M_cA = \frac{C_1A+C_2A}{2}$ und $M_cB = \frac{C_1B+C_2B}{2}$ ergibt sich dann

$$\frac{M_cA}{M_cB} = \frac{C_1A+C_2A}{C_1B+C_2B} = \frac{\lambda \cdot C_1C_2}{\frac{1}{\lambda} \cdot C_1C_2} = \lambda^2 = \left(\frac{C_1A}{C_1B}\right)^2$$

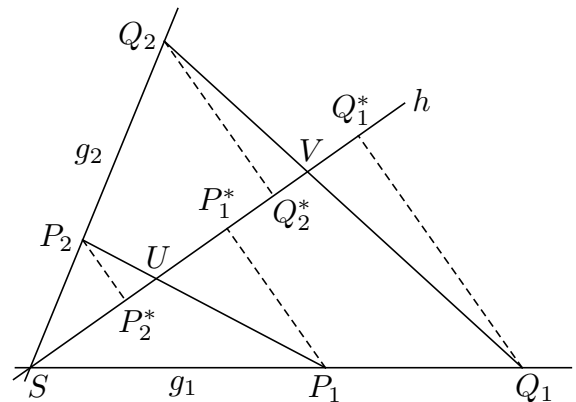
Analog kann man auch $\frac{M_aB}{M_aC} = \left(\frac{A_1B}{A_1C}\right)^2$ und $\frac{M_bC}{M_bA} = \left(\frac{B_1C}{B_1A}\right)^2$ zeigen. Multipliziert man diese Gleichungen, dann erhält man $\frac{M_cA}{M_cB} \cdot \frac{M_aB}{M_aC} \cdot \frac{M_bC}{M_bA} = 1$ mit Hilfe von (1). Aus dem Satz von Menelaos folgt, dass die Punkte M_a , M_b und M_c kollinear sind. \square

Übung: Unter den Voraussetzungen von Satz 29 zeige man, dass die Punkte A_2 , B_2 und C_2 kollinear sind.

Als Vorbereitung für den nächsten Satz beweisen wir

Satz 30: Seien g_1 und g_2 Geraden, die einander im Punkt S schneiden. Seien P_1 und Q_1 Punkte auf g_1 und P_2 und Q_2 Punkte auf g_2 (alle ungleich S). Sei h eine weitere Gerade durch S . Sie schneide die Gerade $\ell(P_1, P_2)$ im Punkt U und die Gerade $\ell(Q_1, Q_2)$ im Punkt V . Dann gilt $\frac{SP_1}{SQ_1} \cdot \frac{SQ_2}{SP_2} = \frac{UP_1}{UP_2} \cdot \frac{VQ_2}{VQ_1}$.

Beweis: Seien P_1^* , P_2^* , Q_1^* und Q_2^* die Fußpunkte der Lote von den Punkten P_1 , P_2 , Q_1 und Q_2 auf die Gerade h . Diese Lote sind alle zueinander parallel. Daher folgt $\frac{SP_1}{SQ_1} = \frac{P_1P_1^*}{Q_1Q_1^*}$ und $\frac{SQ_2}{SP_2} = \frac{Q_2Q_2^*}{P_2P_2^*}$ aus dem Strahlensatz. Durch Multiplikation erhalten wir $\frac{SP_1}{SQ_1} \cdot \frac{SQ_2}{SP_2} = \frac{P_1P_1^*}{Q_1Q_1^*} \cdot \frac{Q_2Q_2^*}{P_2P_2^*}$. Ebenso folgt $\frac{UP_1}{UP_2} = \frac{P_1P_1^*}{P_2P_2^*}$ und $\frac{VQ_2}{VQ_1} = \frac{Q_2Q_2^*}{Q_1Q_1^*}$ aus dem Strahlensatz und Multiplikation ergibt $\frac{UP_1}{UP_2} \cdot \frac{VQ_2}{VQ_1} = \frac{P_1P_1^*}{P_2P_2^*} \cdot \frac{Q_2Q_2^*}{Q_1Q_1^*}$. Die rechte Seite



ist dieselbe wie in obiger Gleichung. Daher erhalten wir $\frac{SP_1}{SQ_1} \cdot \frac{SQ_2}{SP_2} = \frac{UP_1}{UP_2} \cdot \frac{VQ_2}{VQ_1}$. \square

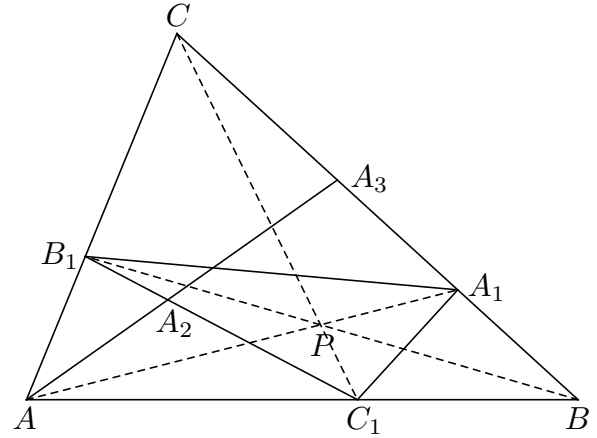
Satz 31: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und P ein Punkt, der kein Eckpunkt des Dreiecks ist. Sei A_1 der Schnittpunkt der Geraden $\ell(A, P)$ und $\ell(B, C)$, sei B_1 der der Geraden $\ell(B, P)$ und $\ell(A, C)$, und sei C_1 der der Geraden $\ell(C, P)$ und $\ell(A, B)$. Wir nehmen an, dass diese

Schnittpunkte existieren. Weiters sei A_2 ein Punkt auf der Geraden $\ell(B_1, C_1)$, sei B_2 einer auf der Geraden $\ell(A_1, C_1)$ und C_2 einer auf der Geraden $\ell(A_1, B_1)$. Dann sind äquivalent
 (a) die Geraden $\ell(A_1, A_2)$, $\ell(B_1, B_2)$ und $\ell(C_1, C_2)$ sind konkurrent
 (b) die Geraden $\ell(A, A_2)$, $\ell(B, B_2)$ und $\ell(C, C_2)$ sind konkurrent

Beweis: Sei A_3 der Schnittpunkt der Geraden $\ell(A, A_2)$ und $\ell(B, C)$. Aus Satz 30 mit $g_1 = \ell(A, C)$, $g_2 = \ell(A, B)$ und $h = \ell(A, A_2)$ folgt $\frac{AB}{AC_1} \cdot \frac{AB_1}{AC} = \frac{A_2B_1}{A_2C_1} \cdot \frac{A_3B}{A_3C}$.

Sei B_3 der Schnittpunkt von $\ell(B, B_2)$ und $\ell(A, C)$ und C_3 der von $\ell(C, C_2)$ und $\ell(A, B)$. Wir erhalten $\frac{BC}{BA_1} \cdot \frac{BC_1}{BA} = \frac{B_2C_1}{B_2A_1} \cdot \frac{B_3C}{B_3A}$ und $\frac{CA}{CB_1} \cdot \frac{CA_1}{CB} = \frac{C_2A_1}{C_2B_1} \cdot \frac{C_3A}{C_3B}$ genauso wie oben.

Aus der Voraussetzung und dem Satz von Ceva folgt $-\frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} = 1$. Wir multiplizieren die vier Gleichungen, die wir erhalten haben. Links ergibt sich 1, wobei zu beachten ist, dass $UV = -VU$ für beliebige Punkte U und V gilt. So erhalten wir $1 = \frac{A_2B_1}{A_2C_1} \cdot \frac{B_2C_1}{B_2A_1} \cdot \frac{C_2A_1}{C_2B_1} \cdot \frac{A_3B}{A_3C} \cdot \frac{B_3C}{B_3A} \cdot \frac{C_3A}{C_3B}$. Wir haben



gezeigt, dass $\frac{C_2A_1}{C_2B_1} \cdot \frac{A_2B_1}{A_2C_1} \cdot \frac{B_2C_1}{B_2A_1} = -1$ gilt genau dann, wenn $\frac{C_3A}{C_3B} \cdot \frac{A_3B}{A_3C} \cdot \frac{B_3C}{B_3A} = -1$ gilt. Nach dem Satz von Ceva sind folgende Aussagen äquivalent

- (a) die Geraden $\ell(A_1, A_2)$, $\ell(B_1, B_2)$ und $\ell(C_1, C_2)$ sind konkurrent
- (b) die Geraden $\ell(A, A_3)$, $\ell(B, B_3)$ und $\ell(C, C_3)$ sind konkurrent

Da aber $\ell(A, A_3) = \ell(A, A_2)$, $\ell(B, B_3) = \ell(B, B_2)$ und $\ell(C, C_3) = \ell(C, C_2)$ gilt, ist der Satz bewiesen. \square

Übung: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und t_A, t_B und t_C die Tangenten an den Umkreis in den Eckpunkten A, B und C . Sei D der Schnittpunkt der Geraden t_A und $\ell(B, C)$. Sei E der Schnittpunkt der Geraden t_B und $\ell(A, C)$ und sei F der Schnittpunkt der Geraden t_C und $\ell(A, B)$. Dann liegen die Punkte D, E und F auf einer Geraden.

Hinweis: Die Dreiecke $\triangle FCB$ und $\triangle FAC$ sind ähnlich (Tangentenwinkelsatz). Es folgt $\frac{|CB|}{|FB|} = \frac{|AC|}{|FC|}$ und $\frac{|CB|}{|FC|} = \frac{|AC|}{|FA|}$. Multiplikation ergibt $\frac{|FA|}{|FB|} = \frac{|AC|^2}{|CB|^2}$. Es gilt $\frac{FA}{FB} > 0$.

2. Der Satz von Monge

Seien k_1 und k_2 zwei Kreise mit verschiedenen Radien. Der eine liege ganz außerhalb des anderen. Sie haben vier gemeinsame Tangenten. Zwei dieser Tangenten gehen zwischen den Kreisen hindurch und schneiden einander in einem Punkt I . Wir nennen I den inneren Tangentenschnittpunkt. Die anderen beiden Tangenten liegen außen an den Kreisen und schneiden einander in einem Punkt A . Wir nennen A den äußeren Tangentenschnittpunkt. Beide Tangentenschnittpunkte liegen auf der Gerade durch die Mittelpunkte der Kreise.

Satz 32 (Monge) Seien k_1, k_2 und k_3 drei Kreise mit Mittelpunkten M_1, M_2 und M_3 und verschiedenen Radien, sodass jeder dieser Kreise ganz außerhalb der beiden anderen liegt. Seien A_1 und I_1 der äußere und der innere Tangentenschnittpunkt der Kreise k_2 und k_3 . Seien A_2 und I_2 der äußere und der innere Tangentenschnittpunkt der Kreise k_1 und k_3 . Seien A_3 und I_3 der äußere und der innere Tangentenschnittpunkt der Kreise k_1 und k_2 . Dann liegen die drei Punkte A_1, A_2 und A_3 auf einer Gerade und die Geraden $\ell(M_1, I_1)$, $\ell(M_2, I_2)$ und $\ell(M_3, I_3)$ gehen durch einen Punkt.

Beweis: Seien r_1 , r_2 und r_3 die Radien der Kreise k_1 , k_2 und k_3 . Nun ist A_1 der Schnittpunkt einer äußeren gemeinsamen Tangente t der Kreise k_2 und k_3 mit der Geraden $\ell(M_2, M_3)$. Seien B_2 und B_3 die Punkte, in denen t die Kreise k_2 und k_3 berührt. Dann stehen $\overline{M_2B_2}$ und $\overline{M_3B_3}$ senkrecht auf t und liegen daher parallel zueinander. Somit folgt $\frac{A_1M_2}{A_1M_3} = \frac{M_2B_2}{M_3B_3}$ aus dem Strahlensatz. Weiters gilt $|M_2B_2| = r_2$ und $|M_3B_3| = r_3$. Da M_2B_2 und M_3B_3 orientierte Abstände mit gleicher Orientierung sind, erhalten wir $\frac{M_2B_2}{M_3B_3} = \frac{r_2}{r_3}$. Damit ist $\frac{A_1M_2}{A_1M_3} = \frac{r_2}{r_3}$ gezeigt.

Genauso zeigt man $\frac{A_2M_3}{A_2M_1} = \frac{r_3}{r_1}$ und $\frac{A_3M_1}{A_3M_2} = \frac{r_1}{r_2}$. Es folgt $\frac{A_3M_1}{A_3M_2} \cdot \frac{A_1M_2}{A_1M_3} \cdot \frac{A_2M_3}{A_2M_1} = 1$. Weiters liegt A_3 auf $\ell(M_1, M_2)$, A_1 auf $\ell(M_2, M_3)$ und A_2 auf $\ell(M_1, M_3)$. Nach dem Satz von Menelaos angewendet auf $\triangle M_1M_2M_3$ sind die Punkte A_1 , A_2 und A_3 kollinear.

Ähnlich zeigt man die zweite Aussage. Der Punkt I_1 ist der Schnittpunkt einer inneren gemeinsamen Tangente t der Kreise k_2 und k_3 mit der Geraden $\ell(M_2, M_3)$. Seien B_2 und B_3 die Punkte, in denen t die Kreise k_2 und k_3 berührt. Dann liegen $\overline{M_2B_2}$ und $\overline{M_3B_3}$ parallel zueinander. Aus dem Strahlensatz folgt $\frac{I_1M_2}{I_1M_3} = \frac{M_2B_2}{M_3B_3}$. Weiters gilt $|M_2B_2| = r_2$ und $|M_3B_3| = r_3$. Da aber M_2B_2 und M_3B_3 orientierte Abstände mit entgegengesetzter Orientierung sind, erhalten wir $\frac{M_2B_2}{M_3B_3} = -\frac{r_2}{r_3}$. Damit ist $\frac{I_1M_2}{I_1M_3} = -\frac{r_2}{r_3}$ gezeigt.

Genauso zeigt man $\frac{I_2M_3}{I_2M_1} = -\frac{r_3}{r_1}$ und $\frac{I_3M_1}{I_3M_2} = -\frac{r_1}{r_2}$. Es folgt $\frac{I_3M_1}{I_3M_2} \cdot \frac{I_1M_2}{I_1M_3} \cdot \frac{I_2M_3}{I_2M_1} = -1$. Weiters liegt I_3 auf $\ell(M_1, M_2)$, I_1 auf $\ell(M_2, M_3)$ und I_2 auf $\ell(M_1, M_3)$. Nach dem Satz von Ceva angewendet auf das Dreieck $\triangle M_1M_2M_3$ gehen die Geraden $\ell(M_1, I_1)$, $\ell(M_2, I_2)$ und $\ell(M_3, I_3)$ durch einen Punkt. Sie können nicht parallel liegen, da I_3 zwischen M_1 und M_2 liegt, I_1 zwischen M_2 und M_3 und I_2 zwischen M_1 und M_3 . \square

Übung: Unter den Voraussetzungen von Satz 32 zeige man, dass die Punkte A_1 , I_2 und I_3 auf einer Gerade liegen, ebenso die Punkte I_1 , A_2 und I_3 und die Punkte I_1 , I_2 und A_3 . Weiters zeige man, dass die Geraden $\ell(M_1, I_1)$, $\ell(M_2, A_2)$ und $\ell(M_3, A_3)$ durch einen Punkt gehen, ebenso die Geraden $\ell(M_1, A_1)$, $\ell(M_2, I_2)$ und $\ell(M_3, A_3)$ und die Geraden $\ell(M_1, A_1)$, $\ell(M_2, A_2)$ und $\ell(M_3, I_3)$.

3. Die Polare für einen Kreis

Sei k ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r . Sei P ein Punkt $\neq M$ und R der Punkt auf $\ell(M, P)$, für den $MP \cdot MR = r^2$ gilt. Die Gerade p durch R senkrecht auf $\ell(M, P)$ nennt man die Polare des Punktes P bezüglich dem Kreis k . (Das ist dieselbe Polare, die man in der analytischen Geometrie für Kegelschnitte definiert.) Bevor wir die Polare behandeln, formulieren wir Hilfsresultate in folgenden Übungsbeispielen.

Übung: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Seien U_a , U_b und U_c die Schnittpunkte der inneren Winkelsymmetralen w_α , w_β und w_γ und V_a , V_b und V_c die Schnittpunkte der äußeren Winkelsymmetralen \tilde{w}_α , \tilde{w}_β und \tilde{w}_γ mit den jeweils gegenüberliegenden Dreiecksseiten oder deren Verlängerungen. Dann gelten folgende Gleichungen

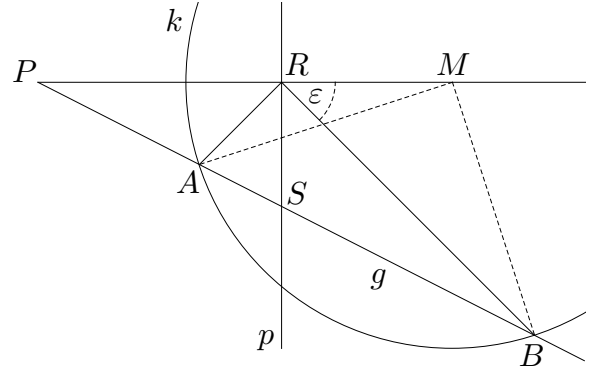
$$\frac{U_cA}{U_cB} = -\frac{|AC|}{|BC|}, \quad \frac{U_aB}{U_aC} = -\frac{|BA|}{|CA|}, \quad \frac{U_bC}{U_bA} = -\frac{|CB|}{|AB|} \quad \text{und} \quad \frac{V_cA}{V_cB} = \frac{|AC|}{|BC|}, \quad \frac{V_aB}{V_aC} = \frac{|BA|}{|CA|}, \quad \frac{V_bC}{V_bA} = \frac{|CB|}{|AB|}$$

Weiters liegen die Punkte V_a , V_b und V_c auf einer Gerade. Dasselbe gilt auch für die Punkte U_a , U_b und U_c , für die Punkte U_a , V_b und U_c und für die Punkte V_a , U_b und U_c .

Hinweis: Sei $W = U_c$ oder $W = V_c$. Dann hat W gleichen Normalabstand d zu $\ell(B, C)$ und zu $\ell(A, C)$. Es gilt $\frac{1}{2}|AC| \cdot d = \frac{1}{2}|AW| \cdot h_c$ (beides ist die Fläche von $\triangle AWC$) und $\frac{1}{2}|BC| \cdot d = \frac{1}{2}|BW| \cdot h_c$ (beides ist die Fläche von $\triangle BWC$). Wir dividieren die erste durch die zweite Gleichung. Weiters gilt $\frac{U_cA}{U_cB} < 0$ und $\frac{V_cA}{V_cB} > 0$.

Übung: Für die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle DEF$ gelte $\angle BAC = \angle EDF$ und $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|DF|}$. Man zeige $\angle ABC = \angle DEF$ und $\angle ACB = \angle DFE$. Die Dreiecke sind ähnlich. Hinweis: Dreiecke übereinander legen (D auf A , \overline{DE} auf \overline{AB} , \overline{DF} auf \overline{AC}), Strahlensatz.

Satz 33: Sei p die Polare eines Punktes P bezüglich eines Kreises k . Eine Gerade g durch P schneide k in den Punkten A und B . Sei Q ein Punkt auf der Geraden g . Er liegt genau dann auf p , wenn $\frac{QA}{QB} = -\frac{PA}{PB}$ gilt.

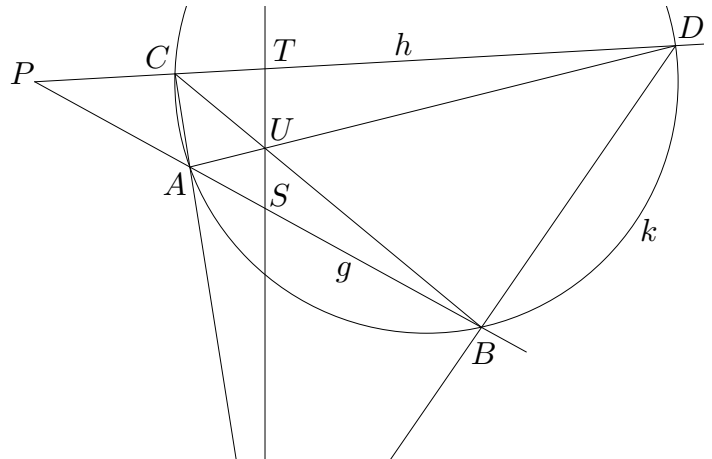


Beweis: Wir nehmen an, dass P außerhalb von k liegt und A näher bei P als B . Für andere Fälle ist der Beweis ein wenig zu modifizieren. Seien M und r Mittelpunkt und Radius von k und R der Schnittpunkt von $\ell(M, P)$ und p . Es gilt $MP \cdot MR = r^2 = MB^2$. Somit gilt auch $\frac{|MR|}{|MB|} = \frac{|MB|}{|MP|}$. Die Dreiecke $\triangle MRB$ und $\triangle MBP$ sind daher ähnlich (obige Übung). Sei $\varepsilon = \angle MRB$. Es folgt $\angle MBA = \angle MBP = \varepsilon$.

Da $|MB| = r = |MA|$ gilt, erhalten wir auch $\angle MAB = \varepsilon$ und $\angle AMB = 180^\circ - 2\varepsilon$. Wegen $\angle MRB = \angle MAB$ liegen die Punkte A, B, M und R auf einem Kreis (Peripheriewinkelsatz), woraus $\angle ARB = \angle AMB = 180^\circ - 2\varepsilon$ folgt. Der Außenwinkel bei R im Dreieck $\triangle ARB$ ist 2ε . Die aufeinander senkrecht stehenden Geraden $\ell(M, P)$ und p sind daher die äußere und die innere Winkelsymmetrale des Dreiecks $\triangle ARB$ im Eckpunkt R .

Ist S der Schnittpunkt der Geraden p und g , dann gilt $\frac{SA}{SB} = -\frac{PA}{PB}$ nach obigem Übungsbeispiel. Sei jetzt Q ein Punkt auf der Geraden g . Liegt Q auf p , dann gilt $Q = S$ und somit $\frac{QA}{QB} = -\frac{PA}{PB}$. Gilt $\frac{QA}{QB} = -\frac{PA}{PB}$, dann gilt auch $\frac{QA}{QB} = \frac{SA}{SB}$. Weiters liegen Q, S, A und B alle auf der Geraden g . Wegen $QA = QB - AB$ und $SA = SB - AB$ folgt $1 - \frac{AB}{QB} = 1 - \frac{AB}{SB}$ und daraus dann $QB = SB$. Damit erhalten wir $Q = S$, das heißt Q liegt auf p . Damit ist der Satz bewiesen. \square

Satz 34: Sei k ein Kreis und P ein Punkt außerhalb von k . Sei g eine Gerade durch P , die k in den Punkten A und B schneidet, und h eine Gerade durch P , die k in den Punkten C und D schneidet. Sei U der Schnittpunkt der Geraden $\ell(A, D)$ und $\ell(B, C)$ und V der der Geraden $\ell(A, C)$ und $\ell(B, D)$. Dann ist $\ell(U, V)$ die Polare des Punktes P .



Beweis: Sei S der Schnittpunkt von $\ell(U, V)$ mit g und T der von $\ell(U, V)$ mit h . Im Dreieck $\triangle ABV$ wenden wir den Satz von Menelaos auf die Gerade h an und den Satz von Ceva auf die drei Geraden durch den Punkt U . Wir erhalten $\frac{PA}{PB} \cdot \frac{DB}{DV} \cdot \frac{CV}{CA} = 1$ und $\frac{SA}{SB} \cdot \frac{DB}{DV} \cdot \frac{CV}{CA} = -1$. Es folgt $\frac{SA}{SB} = -\frac{PA}{PB}$. Nach Satz 33 liegt S auf der Polare des Punktes P . Im Dreieck $\triangle CDV$ wenden wir den Satz von Menelaos auf die Gerade g an und

den Satz von Ceva auf die drei Geraden durch den Punkt U . Das ergibt $\frac{PC}{PD} \cdot \frac{BD}{BV} \cdot \frac{AV}{AC} = 1$ und $\frac{TC}{TD} \cdot \frac{BD}{BV} \cdot \frac{AV}{AC} = -1$. Es folgt $\frac{TC}{TD} = -\frac{PC}{PD}$. Nach Satz 33 liegt auch T auf der Polare des Punktes P . Diese Polare ist somit die Gerade $\ell(S, T)$, die identisch mit $\ell(U, V)$ ist. \square

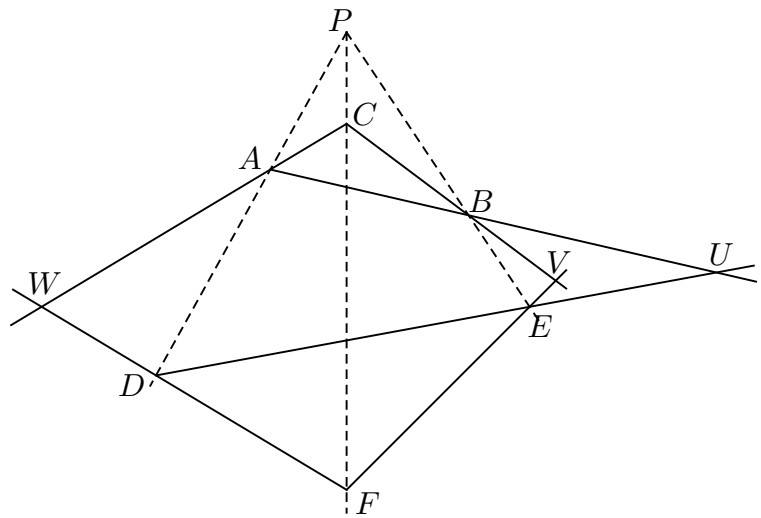
4. Die Sätze von Desargues und Pascal

Der Beweis des Satzes von Desargues ist relativ einfach.

Satz 35 (Satz von Desargues) Seien $\triangle ABC$ und $\triangle DEF$ zwei Dreiecke, sodass $A \neq D$, $B \neq E$ und $C \neq F$ gilt. Sei U der Schnittpunkt der Geraden $\ell(A, B)$ und $\ell(D, E)$. Sei V der Schnittpunkt der Geraden $\ell(B, C)$ und $\ell(E, F)$ und sei W der Schnittpunkt der Geraden $\ell(C, A)$ und $\ell(F, D)$. Wir nehmen an, dass diese Schnittpunkte existieren und eindeutig sind. Wenn die drei Geraden $\ell(A, D)$, $\ell(B, E)$ und $\ell(C, F)$ durch einen Punkt gehen oder parallel sind, dann liegen die Punkte U , V und W auf einer Geraden.

Beweis: Wir nehmen zuerst an, dass die drei Geraden $\ell(A, D)$, $\ell(B, E)$ und $\ell(C, F)$ durch einen Punkt P gehen. Der Satz von Menelaos wird auf das Dreieck $\triangle ABP$ und die Gerade $\ell(D, E)$ angewendet, dann auf Dreieck $\triangle BCP$ und die Gerade $\ell(E, F)$, und auf Dreieck $\triangle CAP$ und die Gerade $\ell(D, F)$. Das ergibt

$$\begin{aligned} \frac{UA}{UB} \cdot \frac{EB}{EP} \cdot \frac{DP}{DA} &= 1 \\ \frac{VB}{VC} \cdot \frac{FC}{FP} \cdot \frac{EP}{EB} &= 1 \\ \frac{WC}{WA} \cdot \frac{DA}{DP} \cdot \frac{FP}{FC} &= 1 \end{aligned}$$



Wir multiplizieren diese drei Gleichungen miteinander. Wir erhalten

$$\frac{UA}{UB} \cdot \frac{VB}{VC} \cdot \frac{WC}{WA} = 1$$

Aus dem Satz von Menelaos, angewendet auf das Dreieck $\triangle ABC$, folgt jetzt, dass die drei Punkte U , V und W auf einer Geraden liegen.

Wir nehmen jetzt an, dass die drei Geraden $\ell(A, D)$, $\ell(B, E)$ und $\ell(C, F)$ parallel liegen. In diesem Fall wenden wir den Strahlensatz an. Da $\ell(A, D)$ parallel zu $\ell(B, E)$ liegt, erhalten wir $\frac{UA}{UB} = \frac{AD}{BE}$. Da $\ell(B, E)$ parallel zu $\ell(C, F)$ liegt, erhalten wir $\frac{VB}{VC} = \frac{BE}{CF}$. Und da auch $\ell(C, F)$ parallel zu $\ell(A, D)$ liegt, erhalten wir $\frac{WC}{WA} = \frac{CF}{AD}$. Wir multiplizieren diese drei Gleichungen miteinander und erhalten

$$\frac{UA}{UB} \cdot \frac{VB}{VC} \cdot \frac{WC}{WA} = 1$$

Wie oben folgt, dass die drei Punkte U , V und W auf einer Geraden liegen. \square

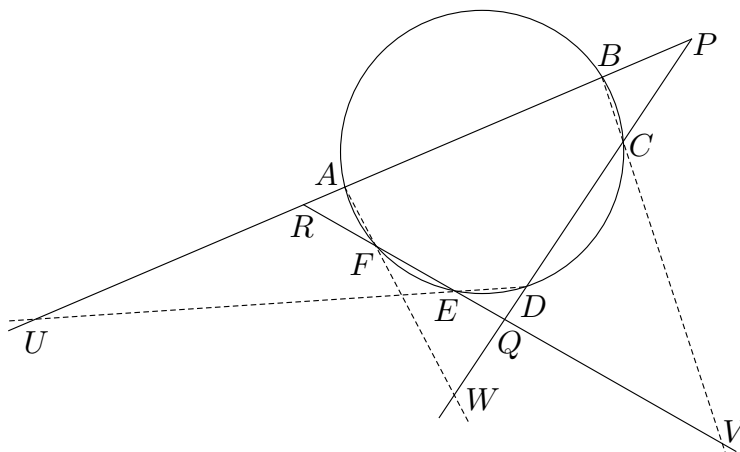
Der nachfolgende Satz ist der Satz von Pascal für einen Kreis. Als Vorbereitung beweisen wir eine Umkehrung des Strahlensatzes.

Satz 36: Seien S , A und C verschiedene Punkte auf einer Geraden g und B und D zwei weitere Punkte, die nicht auf g liegen. Weiters seien die Geraden $\ell(A, B)$ und $\ell(C, D)$ parallel. Wenn $\frac{SA}{SC} = \frac{AB}{CD}$ gilt, dann liegen die Punkte S , B und D auf einer Geraden.

Beweis: Sei h die Gerade $\ell(S, D)$. Sei B^* der Schnittpunkt von h mit $\ell(A, B)$. Man beachte, dass $\ell(A, B)$ parallel zu $\ell(C, D)$ liegt und damit nicht parallel zu h liegen kann. Da $\ell(A, B)$ und $\ell(C, D)$ parallel sind, folgt $\frac{SA}{SC} = \frac{AB^*}{CD}$ aus dem Strahlensatz. Da $\frac{SA}{SC} = \frac{AB}{CD}$ vorausgesetzt wird, erhalten wir $AB^* = AB$. Da die Punkte A , B und B^* alle auf einer Geraden liegen, folgt $B^* = B$. Somit liegen die Punkte S , B und D auf der Geraden h . \square

Satz 37 (Satz von Pascal für einen Kreis) Sei $ABCDEF$ ein konvexes Sechseck, dessen Eckpunkte auf einem Kreis liegen. Sei U der Schnittpunkt der Geraden $\ell(A, B)$ und $\ell(D, E)$. Sei V der Schnittpunkt der Geraden $\ell(B, C)$ und $\ell(E, F)$. Sei W der Schnittpunkt der Geraden $\ell(C, D)$ und $\ell(F, A)$. Wir nehmen an, dass diese Schnittpunkte existieren und eindeutig sind. Dann liegen die drei Punkte U, V und W auf einer Gerade.

Beweis: Sei P der Schnittpunkt der Geraden $\ell(A, B)$ und $\ell(C, D)$. Sei Q der Schnittpunkt der Geraden $\ell(C, D)$ und $\ell(E, F)$ und sei R der Schnittpunkt der Geraden $\ell(E, F)$ und $\ell(A, B)$. Wir wenden den Satz von Menelaos auf das Dreieck $\triangle PQR$ an und auf die Geraden $\ell(B, C)$, $\ell(D, E)$ und $\ell(F, A)$. Das ergibt



$$\begin{aligned} \frac{CP}{CQ} \cdot \frac{VQ}{VR} \cdot \frac{BR}{BP} &= 1 \\ \frac{DP}{DQ} \cdot \frac{EQ}{ER} \cdot \frac{UR}{UP} &= 1 \\ \frac{WP}{WQ} \cdot \frac{FQ}{FR} \cdot \frac{AR}{AP} &= 1 \end{aligned}$$

Wir multiplizieren diese drei Gleichungen miteinander und ordnen die Brüche auf der linken Seite anders an. Auf diese Weise ergibt sich

$$\frac{WP}{WQ} \cdot \frac{VQ}{VR} \cdot \frac{UR}{UP} \cdot \frac{CP \cdot DP}{AP \cdot BP} \cdot \frac{EQ \cdot FQ}{CQ \cdot DQ} \cdot \frac{AR \cdot BR}{ER \cdot FR} = 1$$

Aus dem Sehnensatz erhalten wir $CP \cdot DP = PC \cdot PD = PA \cdot PB = AP \cdot BP$. Ebenso ergibt sich $QE \cdot QF = CQ \cdot DQ$ und $RA \cdot RB = ER \cdot FR$. Damit erhalten wir

$$\frac{WP}{WQ} \cdot \frac{VQ}{VR} \cdot \frac{UR}{UP} = 1$$

Aus dem Satz von Menelaos, angewendet auf das Dreieck $\triangle PQR$, folgt jetzt, dass die drei Punkte U, V und W auf einer Gerade liegen.

Wir haben stillschweigend angenommen, dass die Schnittpunkte P, Q und R existieren. Das muss nicht der Fall sein. Nehmen wir an, die Geraden $\ell(A, B)$ und $\ell(C, D)$ seien parallel. Dann kann aber $\ell(E, F)$ nicht auch noch dazu parallel liegen, da das Sechseck $ABCDEF$ konvex ist. Die Schnittpunkte Q und R existieren. Aus dem Strahlensatz folgt

$$\frac{VQ}{VR} = \frac{QC}{RB}, \quad \frac{EQ}{ER} = \frac{QD}{RU}, \quad \text{und} \quad \frac{FQ}{FR} = \frac{QW}{RA}$$

Wir multiplizieren diese drei Gleichungen miteinander und ordnen die Brüche anders an

$$\frac{VQ}{VR} \cdot \frac{EQ \cdot FQ}{QC \cdot QD} = \frac{ER \cdot FR}{RA \cdot RB} \cdot \frac{QW}{RU}$$

Wir erhalten $QC \cdot QD = QE \cdot QF = EQ \cdot FQ$ und $RA \cdot RB = RE \cdot RF = ER \cdot FR$ aus dem Sehnensatz. Damit ergibt sich $\frac{VQ}{VR} = \frac{QW}{RU}$. Da die Geraden $\ell(A, B)$ und $\ell(C, D)$ parallel sind, folgt jetzt aus Satz 36, dass die drei Punkte V, W und U auf einer Gerade liegen. Der Beweis läuft analog, wenn die Geraden $\ell(A, B)$ und $\ell(E, F)$ parallel sind oder die Geraden $\ell(C, D)$ und $\ell(E, F)$. \square

Bemerkung: Der Satz gilt auch ohne die Voraussetzung, dass das Sechseck $ABCDEF$ konvex ist. Wenn man jedoch zulässt, dass die Sechseckseiten einander überkreuzen, dann kann es passieren, dass alle drei Geraden $\ell(A, B)$, $\ell(C, D)$ und $\ell(E, F)$ parallel liegen oder durch einen Punkt gehen. In diesem Fall funktioniert dieser Beweis nicht.

IV. Trigonometrie und Koordinatensystem

1. Ein Satz von Leibniz	35
2. Der Satz von Feuerbach	36
3. Sehnentangentenvierecke	39
4. Die Kieperthyperbel	42
5. Dreiecksfläche	45

In diesem Kapitel arbeiten wir mit trigonometrischen Methoden und im Koordinatensystem. Im ersten, zweiten und fünften Abschnitt wird mit trigonometrischen Methoden gearbeitet, im vierten Abschnitt arbeiten wir im Koordinatensystem und der dritte Abschnitt ist gemischt.

Im ersten kurzen Abschnitt dieses Kapitels wird ein Satz von Leibniz über die Summe der Quadrate der Abstände eines Punktes P von den Eckpunkten eines Dreiecks bewiesen. Insbesondere sieht man, dass diese Summe minimal wird, wenn P der Schwerpunkt ist.

Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels wird ein trigonometrischer Beweis des Satzes von Feuerbach gegeben. Dieser besagt, dass der Neunpunktkreis eines Dreiecks den Inkreis und die drei Ankreise berührt. Im Verlauf des Beweises werden Formeln für den Abstand von Umkreismittelpunkt und Inkreismittelpunkt (diese Formel stammt von Euler), für den Abstand von Umkreismittelpunkt und Höhenschnittpunkt und für den Abstand von Inkreismittelpunkt und Höhenschnittpunkt bewiesen. Dieser Beweis ist sehr ähnlich dem ursprünglichen Beweis, den Feuerbach gefunden hat.

Im dritten Abschnitt dieses Kapitels werden Vierecke untersucht, die sowohl einen Inkreis als auch einen Umkreis haben. Unter anderem wird gezeigt, dass der Umkreismittelpunkt, der Inkreismittelpunkt und der Diagonalschnittpunkt auf einer Gerade liegen. Man kann mit den hier verwendeten Methoden auch die Fuss'sche Formel beweisen. Das ist eine Gleichung für die Radien des Umkreises und des Inkreises und den Abstand ihrer Mittelpunkte.

Im vierten Abschnitt dieses Kapitels werden gleichschenkelige Dreiecke mit gleich großen Basiswinkeln auf den Seiten eines Dreiecks $\triangle ABC$ aufgesetzt. Verbindet man die Spitzen der aufgesetzten Dreiecke mit den gegenüberliegenden Eckpunkten des Dreiecks $\triangle ABC$, dann haben diese Verbindungslinien einen gemeinsamen Punkt P . Dieser Punkt P liegt immer auf der Hyperbel, die durch den Höhenschnittpunkt, durch den Schwerpunkt und durch die drei Eckpunkte des Dreiecks $\triangle ABC$ geht.

Im fünften Abschnitt dieses Kapitels wird eine Ungleichung für Dreiecksflächen bewiesen. Wir spiegeln die Eckpunkte eines Dreiecks an der jeweils gegenüberliegenden Dreiecksseite und vergleichen die Fläche des Dreiecks, dessen Eckpunkte die gespiegelten Punkte sind, mit der Fläche des ursprünglichen Dreiecks.

1. Ein Satz von Leibniz

Zuerst berechnen wir die Länge der Schwerlinie eines Dreiecks.

Satz 38: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Seitenlängen a , b und c . Sei s die Länge der Schwerlinie durch den Eckpunkt C . Dann gilt $s^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2$.

Beweis: Sei M der Mittelpunkt der Seite \overline{AB} . Sei $\varphi = \angle AMC$ und $\psi = \angle BMC$. Dann gilt $\psi = 180^\circ - \varphi$ und $\cos \psi = -\cos \varphi$. Der Cosinussatz angewendet auf die Dreiecke $\triangle AMC$ und $\triangle BMC$ ergibt $b^2 = \frac{c^2}{4} + s^2 - cs \cos \varphi$ und $a^2 = \frac{c^2}{4} + s^2 - cs \cos \psi$. Addiert man diese Gleichungen, so erhält man $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2s^2$. \square

Damit können wir folgenden Satz von Leibniz beweisen.

Satz 39: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Schwerpunkt S . Für jeden beliebigen Punkt P gilt dann $PA^2 + PB^2 + PC^2 = AS^2 + BS^2 + CS^2 + 3PS^2$.

Beweis: Sei M der Mittelpunkt der Seite \overline{AB} und D der Mittelpunkt der Strecke \overline{CS} . Es gilt dann $CD = DS = SM$, da der Schwerpunkt S die Schwerlinie \overline{CM} im Verhältnis 2:1 teilt. Aus der Formel in Satz 38 für die Schwerlinie erhalten wir

$$(1) \quad 2CM^2 = CA^2 + CB^2 - \frac{1}{2}AB^2$$

Wir wenden (1) auf die Dreiecke $\triangle PAB$, $\triangle PDM$ und $\triangle PCS$ an. Da S der Mittelpunkt von \overline{DM} und D der von \overline{CS} ist, ergibt sich

$$2PM^2 = PA^2 + PB^2 - \frac{1}{2}AB^2$$

$$2PS^2 = PD^2 + PM^2 - \frac{1}{2}DM^2$$

$$2PD^2 = PC^2 + PS^2 - \frac{1}{2}CS^2$$

Es gilt $|DM| = |CS|$. Daher ersetzen wir in der zweiten Gleichung DM^2 durch CS^2 . Dann multiplizieren wir die zweite Gleichung mit 2, addieren die Gleichungen und streichen weg, was wegfällt. Auf diese Weise erhalten wir

$$3PS^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2 - \frac{1}{2}AB^2 - \frac{3}{2}CS^2$$

Diese so erhaltene Gleichung gilt natürlich auch, wenn wir die Eckpunkte A , B und C vertauschen. Wir haben daher die Gleichungen $3PS^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2 - \frac{1}{2}AC^2 - \frac{3}{2}BS^2$ und $3PS^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2 - \frac{1}{2}CB^2 - \frac{3}{2}AS^2$. Addition dieser drei Gleichungen ergibt

$$9PS^2 = 3(PA^2 + PB^2 + PC^2) - \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 + CB^2) - \frac{3}{2}(AS^2 + BS^2 + CS^2)$$

Es gilt $\frac{2}{3}|CM| = |CS|$. Daher erhalten wir $\frac{9}{2}CS^2 = CA^2 + CB^2 - \frac{1}{2}AB^2$ wieder aus (1). Wie oben können wir die Eckpunkte vertauschen und erhalten daher auch die Gleichungen $\frac{9}{2}AS^2 = CA^2 + AB^2 - \frac{1}{2}CB^2$ und $\frac{9}{2}BS^2 = BA^2 + CB^2 - \frac{1}{2}AC^2$. Wir addieren diese drei Gleichungen und dividieren durch 3. Auf diese Weise ergibt sich

$$\frac{3}{2}(AS^2 + BS^2 + CS^2) = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 + CB^2)$$

Wir setzen oben ein und dividieren durch 3. Wir erhalten

$$3PS^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2 - (AS^2 + BS^2 + CS^2)$$

Das ist bereits die gesuchte Gleichung. \square

Aus Satz 39 folgt, dass $PA^2 + PB^2 + PC^2$ genau dann minimal wird, wenn P der Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$ ist.

2. Der Satz von Feuerbach

Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H , Umkreismittelpunkt U und Inkreismittelpunkt I . Weiters sei Z der Mittelpunkt des Neunpunktkreises. Da Z auch der Mittelpunkt der Strecke \overline{UH} ist, ist \overline{IZ} eine Schwerlinie im Dreieck $\triangle UHI$. Wir berechnen die Längen der Seiten des Dreiecks $\triangle UHI$ und verwenden dann die Formel aus Satz 38 für die Länge der Schwerlinie, um $|IZ|$ zu berechnen.

Um die Länge der Strecken \overline{UH} , \overline{UI} und \overline{IH} , der Seiten des Dreiecks $\triangle UHI$, zu berechnen, verwenden wir den Cosinussatz. Dazu bestimmen wir die Winkel zwischen den Strecken \overline{UC} , \overline{IC} und \overline{HC} und deren Längen. Zuvor beschaffen wir uns noch eine Formel für den Inkreisradius.

Satz 40: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Seien r und ϱ die Radien des Umkreises und des Inkreises. Dann gilt $\varrho = 4r \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$.

Beweis: Sei I der Inkreismittelpunkt und P der Punkt, in dem der Inkreis die Seite \overline{AB} berührt. Weiters sei s der halbe Umfang des Dreiecks. Es gilt $|AP| = s - a$, $|IP| = \varrho$ und $\angle IAP = \frac{\alpha}{2}$, da I auf der Winkelsymmetrale durch A liegt. Es folgt $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s-a}$.

Mit Hilfe des Sinussatzes erhalten wir $2(s-a) = b+c-a = 2r(\sin \beta + \sin \gamma - \sin \alpha)$. Für die Winkel eines Dreiecks gilt $\sin \beta + \sin \gamma - \sin \alpha = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$. Das kann man mit Hilfe der Formeln $\sin \varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$ und $\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$ beweisen. Es folgt $s-a = 4r \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$. Wegen $\varrho = (s-a) \tan \frac{\alpha}{2}$ ergibt sich $\varrho = 4r \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$. \square

Satz 41: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H , Umkreismittelpunkt U und Inkreismittelpunkt I . Wir nehmen an, dass $\gamma < 90^\circ$ und $\beta \geq \alpha$ gilt. Dann erhalten wir $\angle ICH = \angle ICU = \frac{\beta-\alpha}{2}$ und $\angle UCH = \beta - \alpha$.

Beweis: Wir zeigen $\angle ICH = \frac{\gamma}{2} + \beta - 90^\circ$. Es gilt $\angle ICB = \frac{\gamma}{2}$, da I auf der Winkelsymmetrale durch C liegt. Ist $\beta \leq 90^\circ$, dann gilt $\angle HCB = 90^\circ - \beta$. Wegen $\beta \geq \alpha$ gilt auch $\angle HCB \leq \angle ICB$. Es folgt $\angle ICH = \angle ICB - \angle HCB = \frac{\gamma}{2} + \beta - 90^\circ$. Ist $\beta > 90^\circ$, dann gilt $\angle HCB = \beta - 90^\circ$. Es folgt $\angle ICH = \angle ICB + \angle HCB = \frac{\gamma}{2} + \beta - 90^\circ$.

Wir zeigen $\angle ICU = \frac{\gamma}{2} + \beta - 90^\circ$. Es gilt $\angle ICA = \frac{\gamma}{2}$ wie oben. Ist $\beta \leq 90^\circ$, dann folgt $\angle AUC = 2\beta$ aus dem Peripheriewinkelsatz und daraus dann $\angle UCA = 90^\circ - \beta$, da das Dreieck $\triangle AUC$ ja gleichschenkelig ist. Wegen $\beta \geq \alpha$ gilt auch $90^\circ - \beta \leq \frac{\gamma}{2}$. Es folgt $\angle ICU = \angle ICA - \angle UCA = \frac{\gamma}{2} + \beta - 90^\circ$. Ist $\beta > 90^\circ$, dann folgt $\angle AUC = 360^\circ - 2\beta$ aus dem Peripheriewinkelsatz und daraus dann $\angle UCA = \beta - 90^\circ$, da das Dreieck $\triangle AUC$ ja gleichschenkelig ist. Es folgt $\angle ICU = \angle ICA + \angle UCA = \frac{\gamma}{2} + \beta - 90^\circ$.

Da die Winkelsumme in einem Dreieck 180° beträgt, erhalten wir $\frac{\gamma}{2} + \beta - 90^\circ = \frac{\beta-\alpha}{2}$. Damit ist die erste Formel gezeigt. Nun gilt $\angle UCH = \angle ICH + \angle ICU$, da \overline{IC} immer zwischen \overline{HC} und \overline{UC} liegt. Aus der ersten Formel folgt daher $\angle UCH = \frac{\beta-\alpha}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2} = \beta - \alpha$. Das ist die zweite Formel. \square

Man kann im Beweis von Satz 41 den Peripheriewinkelsatz vermeiden und so vorgehen wie zu Beginn von Abschnitt 4 in Kapitel I.

Satz 42: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H , Umkreismittelpunkt U , Inkreismittelpunkt I und Umkreisradius r . Wir nehmen an, dass $\gamma < 90^\circ$ gilt. Es gilt dann auch $|CU| = r$, $|CH| = 2r \cos \gamma$ und $|CI| = 4r \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}$.

Beweis: Es gilt $|CU| = r$, da der Umkreis ja durch den Eckpunkt C geht.

Sei D der Fußpunkt der Höhe durch A . Dann gilt $|CD| = |AC| \cos \gamma$ und $|CH| = \frac{|CD|}{\sin \beta}$, wobei wir $\angle DHC = \angle CBA = \beta$ im Fall $\beta \leq 90^\circ$ und $\angle DHC = 180^\circ - \beta$ im Fall $\beta > 90^\circ$ verwenden. Weiters erhalten wir $|AC| = 2r \sin \beta$ aus dem Sinussatz. Es folgt $|CH| = 2r \cos \gamma$.

Da der Inkreisradius ϱ der Normalabstand des Punktes I zur Dreiecksseite \overline{BC} ist und $\angle BCI = \frac{\gamma}{2}$ gilt, erhalten wir $\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{|CI|}$. Mit Satz 40 folgt $|CI| = 4r \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}$. \square

Satz 43 (Euler) *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Seien U und r Mittelpunkt und Radius des Umkreises und I und ϱ die des Inkreises. Dann gilt $|UI|^2 = r^2 - 2r\varrho$.*

Beweis: Wir können die Bezeichnung des Dreiecks so wählen, dass $\gamma < 90^\circ$ und $\beta \geq \alpha$ gilt. Wir wenden den Cosinussatz auf das Dreieck $\triangle UIC$ an, um $|UI|^2$ zu berechnen. Unter obigen Annahmen gilt $\angle ICU = \frac{\beta - \alpha}{2}$ nach Satz 41. Nach Satz 42 gilt $|CU| = r$ und $|CI| = 4r \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}$. Der Cosinussatz besagt

$$\begin{aligned} |UI|^2 &= |CU|^2 + |CI|^2 - 2|CU| \cdot |CI| \cos \frac{\beta - \alpha}{2} \\ &= r^2 + 16r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} - 8r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta - \alpha}{2} \end{aligned}$$

Aus dem Summensatz folgt $\cos \frac{\beta - \alpha}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}$. Das ergibt

$$|UI|^2 = r^2 + 8r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} - 8r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}$$

Wegen $\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} = \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \cos(90^\circ - \frac{\gamma}{2}) = \sin \frac{\gamma}{2}$ erhalten wir

$$|UI|^2 = r^2 - 8r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$$

Nun gilt $\varrho = 4r \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$ nach Satz 40. Damit folgt $|UI|^2 = r^2 - 2r\varrho$. \square

Für ein Dreieck $\triangle ABC$ mit Winkeln α , β und γ und Umkreisradius r definieren wir das Höhenabschnittsprodukt η durch $\eta = 4r^2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$.

Bemerkung: Für ein spitzwinkeliges Dreieck kann man mit einem ähnlichen Beweis wie für die Formel $|CH| = 2r \cos \gamma$ in Satz 42 zeigen, dass $|HH_c| = 2r \cos \alpha \cos \beta$ gilt, wobei H_c der Fußpunkt der Höhe durch C ist. Es folgt $\eta = |CH| \cdot |HH_c|$. Natürlich gilt auch $\eta = |AH| \cdot |HH_a|$ und $\eta = |BH| \cdot |HH_b|$, wobei H_a und H_b die Fußpunkte der Höhen durch A und durch B sind. Daher kommt der Name Höhenabschnittsprodukt. Bei einem stumpfwinkligen Dreieck ist η negativ. Auch in diesem Fall gelten obige Formeln, allerdings muss man die Höhenabschnitte als orientierte Abstände auffassen.

Satz 44: *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H . Seien U und r Mittelpunkt und Radius des Umkreises und η das Höhenabschnittsprodukt. Dann gilt $|UH|^2 = r^2 - 2\eta$.*

Beweis: Wir können die Bezeichnung des Dreiecks so wählen, dass $\gamma < 90^\circ$ und $\beta \geq \alpha$ gilt. Wir wenden den Cosinussatz auf das Dreieck $\triangle UHC$ an, um $|UH|^2$ zu berechnen. Unter obigen Annahmen gilt $\angle UCH = \beta - \alpha$ nach Satz 41 und $|CU| = r$ und $|CH| = 2r \cos \gamma$ gelten nach Satz 42. Der Cosinussatz besagt dann

$$\begin{aligned} |UH|^2 &= |CU|^2 + |CH|^2 - 2|CU| \cdot |CH| \cos(\beta - \alpha) = r^2 + 4r^2 \cos^2 \gamma - 4r^2 \cos \gamma \cos(\beta - \alpha) \\ &= r^2 - 4r^2 \cos \gamma (\cos(\beta - \alpha) - \cos \gamma) = r^2 - 4r^2 \cos \gamma (\cos(\beta - \alpha) + \cos(\beta + \alpha)) \end{aligned}$$

wobei $-\cos \gamma = \cos(\beta + \alpha)$ verwendet wurde, was ja wegen $\gamma = 180^\circ - \beta - \alpha$ gilt. Weiters folgt $\cos(\beta - \alpha) + \cos(\beta + \alpha) = 2 \cos \alpha \cos \beta$ aus dem Summensatz. Damit erhalten wir dann $|UH|^2 = r^2 - 8r^2 \cos \gamma \cos \alpha \cos \beta = r^2 - 2\eta$. \square

Satz 45: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H . Seien I und ϱ Mittelpunkt und Radius des Inkreises und η das Höhenabschnittsprodukt. Dann gilt $|IH|^2 = 2\varrho^2 - \eta$.

Beweis: Wir können die Bezeichnung des Dreiecks so wählen, dass $\gamma < 90^\circ$ und $\beta \geq \alpha$ gilt. Wir wenden den Cosinussatz auf das Dreieck $\triangle IHC$ an, um $|IH|^2$ zu berechnen. Unter obigen Annahmen gilt $\angle ICH = \frac{\beta - \alpha}{2}$ nach Satz 41. Nach Satz 42 gilt $|CH| = 2r \cos \gamma$ und $|CI| = 4r \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}$. Der Cosinussatz besagt

$$\begin{aligned} |IH|^2 &= |CI|^2 + |CH|^2 - 2|CI| \cdot |CH| \cos \frac{\beta - \alpha}{2} \\ &= 16r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} + 4r^2 \cos^2 \gamma - 16r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \gamma \cos \frac{\beta - \alpha}{2} \end{aligned}$$

Aus dem Sumsatz folgt $\cos \frac{\beta - \alpha}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}$. Das ergibt

$$|IH|^2 = 16r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} (1 - \cos \gamma) + 4r^2 \cos^2 \gamma - 16r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \gamma$$

Mit Hilfe der Formeln $1 - \cos \gamma = 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}$ und $2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = \sin \varphi$ folgt

$$|IH|^2 = 32r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} + 4r^2 \cos \gamma (\cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta)$$

Nun gilt $\cos \gamma = \cos(180^\circ - \alpha - \beta) = -\cos(\alpha + \beta) = \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta$. Damit folgt

$$|IH|^2 = 32r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} - 4r^2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$$

Mit Hilfe von Satz 40 ergibt sich $|IH|^2 = 2\varrho^2 - \eta$. \square

Schließlich kommen wir zum Satz von Feuerbach.

Satz 46: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Seien I und ϱ Mittelpunkt und Radius des Inkreises und Z und σ Mittelpunkt und Radius des Neunpunktkreises. Dann gilt $|IZ| = \sigma - \varrho$.

Beweis: Da \overline{IZ} eine Schwerlinie im Dreieck $\triangle UHI$ ist, erhalten wir aus Satz 38, dass $|IZ|^2 = \frac{1}{2}|IH|^2 + \frac{1}{2}|UI|^2 - \frac{1}{4}|UH|^2$ gilt. Wegen Satz 45, Satz 43 und Satz 44 ergibt sich

$$|IZ|^2 = \varrho^2 - \frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2}r^2 - r\varrho - \frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{2}\eta = (\frac{1}{2}r - \varrho)^2, \text{ also } |IZ| = (\sigma - \varrho)^2$$

wobei wir die Gleichung $\sigma = \frac{1}{2}r$ verwendet haben. Nach Satz 43 muss $r^2 - 2r\varrho \geq 0$ gelten, woraus $\sigma \geq \varrho$ folgt. Wir können die Wurzel ziehen und erhalten $|IZ| = \sigma - \varrho$. \square

Satz 46 besagt, dass der Inkreis den Neunpunktkreis von innen berührt, da der Abstand der Mittelpunkte dieser Kreise gleich der Differenz ihrer Radien ist.

Die folgenden fünf Übungsbeispiele geben an, wie man obige Beweise modifizieren kann, um zu zeigen, dass der Neunpunktkreis auch die drei Ankreise berührt. Dazu seien I_a, I_b, I_c die Mittelpunkte und $\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$ die Radien der Ankreise.

Übung: Man zeige $\varrho_a = 4r \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$ analog zu Satz 40 und $|CI_a| = 4r \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}$ analog zu Satz 42.

Übung: Es gilt $\angle I_aCH = 90^\circ - \frac{\beta - \alpha}{2}$ und $\angle I_aCU = 90^\circ + \frac{\beta - \alpha}{2}$.

Übung: Man zeige, dass $|UI_a|^2 = r^2 + 2r\varrho_a$ gilt. Wir können $\gamma < 90^\circ$ annehmen (sonst vertauschen wir B und C) und wie im Beweis von Satz 43 vorgehen. Ebenso gilt $|UI_b|^2 = r^2 + 2r\varrho_b$ und $|UI_c|^2 = r^2 + 2r\varrho_c$.

Übung: Man zeige $|I_aH|^2 = 2\varrho_a^2 - \eta$. Wir können $\gamma < 90^\circ$ annehmen und wie im Beweis von Satz 45 vorgehen. Ebenso gilt $|I_bH|^2 = 2\varrho_b^2 - \eta$ und $|I_cH|^2 = 2\varrho_c^2 - \eta$.

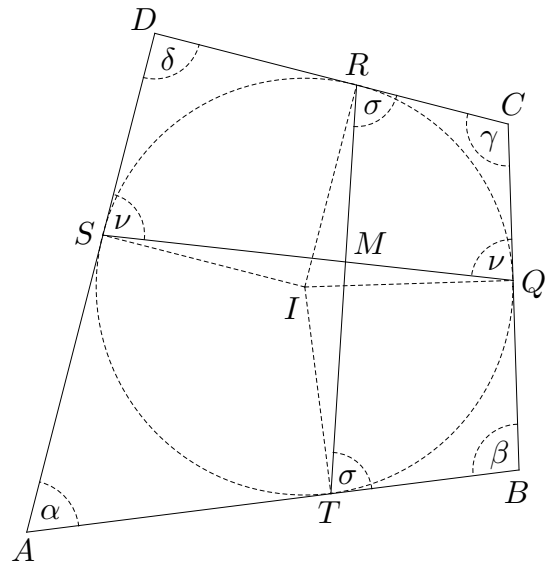
Übung: Man zeige $|I_aZ| = \sigma + \varrho_a$. Ebenso gilt $|I_bZ| = \sigma + \varrho_b$ und $|I_cZ| = \sigma + \varrho_c$.

Übung: Man berechne $|SI|^2$ und $|SH|^2$ und zeige, dass $|SI|^2 + |IH|^2 \leq |SH|^2$ gilt, wobei S der Schwerpunkt des Dreiecks ist. Es folgt, dass I im Kreis mit Durchmesser \overline{SH} liegt.

Satz 46 wurde bewiesen in “K. W. Feuerbach, Eigenschaften einiger merkwürdiger Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren: Eine analytisch-trigonometrische Abhandlung, Riegel & Wiesner, Nürnberg, 1822”

3. Sehnentangentenvierecke

Ein Tangentenviereck ist ein Viereck, das einen Inkreis besitzt. Wir führen zuerst einmal eine Standardbezeichnung für ein Tangentenviereck ein. Die Eckpunkte bezeichnen wir mit A, B, C und D und die Winkel bei diesen Eckpunkten mit den entsprechenden griechischen Buchstaben α, β, γ und δ . Die Längen der Seiten $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ und \overline{DA} bezeichnen wir in dieser Reihenfolge mit a, b, c und d . Seien I und ρ der Mittelpunkt und der Radius des Inkreises. Die Punkte, in denen der Inkreis die Seiten berührt, nennen wir T, Q, R und S . Da die Abschnitte der beiden Tangenten von einem Punkt außerhalb an einen Kreis bis zu den Berührungspunkten gleich lang sind, ergibt sich $|AT| = |AS|, |BT| = |BQ|, |CQ| = |CR|$ und $|DR| = |DS|$. Wir bezeichnen diese Abstände der Reihe nach mit t_a, t_b, t_c und t_d . Insbesondere gilt $a+c = t_a+t_b+t_c+t_d = b+d$. Sei M der Schnittpunkt der Verbindungslinien \overline{TR} und \overline{QS} gegenüberliegender Berührungspunkte des Inkreises.

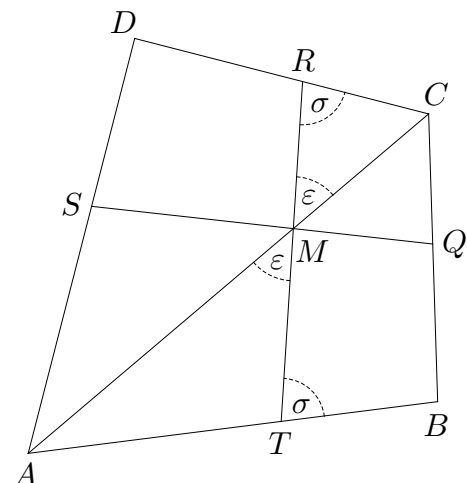


Wir wählen die Bezeichnung immer so, dass I im Viereck $ATMS$ liegt (oder auf dessen Rand). Es gilt dann $\angle BTR = \angle CRT \leq 90^\circ$ und $\angle CQS = \angle DSQ \leq 90^\circ$. Wir setzen $\sigma = \angle BTR$ und $\nu = \angle CQS$. Wir nennen σ den Sehnwinkel der Seiten \overline{AB} und \overline{CD} und ν den der Seiten \overline{BC} und \overline{DA} . Da die Radien $\overline{IT}, \overline{IR}, \overline{IQ}$ und \overline{IS} senkrecht auf die Vierecksseiten stehen, ergibt sich $\angle QIS = 2\nu$ und $\angle TIR = 2\sigma$. Ist K der Mittelpunkt von \overline{QS} und L der von \overline{TR} , dann gilt $\angle QIK = \angle SIK = \nu$ und $\angle TIL = \angle RIL = \sigma$.

Satz 47: Sei $ABCD$ ein Tangentenviereck. Die Diagonalen und die beiden Verbindungsstrecken gegenüberliegender Berührungspunkte des Inkreises gehen alle durch einen Punkt M .

Beweis: Wir verwenden obige Standardbezeichnung. Sei M der Schnittpunkt der Diagonale \overline{AC} und der Verbindungsstrecke \overline{TR} . Sei $\varepsilon = \angle AMT = \angle CMR$. Weiters gilt $\angle ATM = 180^\circ - \sigma$ und $\angle CRM = \sigma$. Der Sinussatz für die Dreiecke $\triangle ATM$ und $\triangle CRM$ liefert $\frac{|AM|}{\sin(180^\circ - \sigma)} = \frac{|AT|}{\sin \varepsilon}$ und $\frac{|CM|}{\sin \sigma} = \frac{|CR|}{\sin \varepsilon}$. Division ergibt $\frac{|AM|}{|CM|} = \frac{|AT|}{|CR|}$, da ja $\sin(180^\circ - \sigma) = \sin \sigma$ gilt.

Sei N der Schnittpunkt der Diagonale \overline{AC} und der Verbindungsstrecke \overline{QS} . Wie oben folgt $\frac{|AN|}{|CN|} = \frac{|AS|}{|CQ|}$. Weiters gilt $|AT| = |AS|$ und $|CQ| = |CR|$. Damit ist $\frac{|AM|}{|CM|} = \frac{|AN|}{|CN|}$ gezeigt. Die Punkte M und N teilen \overline{AC} im selben Verhältnis. Somit sind M und N identisch.



Wir haben gezeigt, dass die beiden Verbindungslinien gegenüberliegender Berührungspunkte und die Diagonale \overline{AC} durch einen Punkt M gehen. Genauso kann man zeigen, dass die beiden Verbindungslinien gegenüberliegender Berührungspunkte und die Diagonale \overline{BD} durch einen Punkt \tilde{M} gehen. Klarerweise muss dann $\tilde{M} = M$ gelten. \square

Ein Viereck ist ein Sehnenviereck, wenn es einen Umkreis hat. Aus dem Peripheriewinkelsatz folgt, dass das genau dann der Fall ist, wenn die Summe einander gegenüberliegender Winkel gleich 180° ist.

Satz 48: *Ein Tangentenviereck ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn die beiden Verbindungslinien gegenüberliegender Berührungspunkte des Inkreises aufeinander senkrecht stehen.*

Beweis: Wir verwenden die Standardbezeichnung. Insbesondere ist M der Schnittpunkt der Verbindungslinien $\ell(T, R)$ und $\ell(Q, S)$ einander gegenüberliegender Berührungspunkte. Wir nehmen an, dass der Inkreismittelpunkt I im Viereck $ATMS$ liegt.

Sei $\chi = \angle TMS = \angle QMR$. Es folgt $\alpha = 360^\circ - (180^\circ - \sigma + 180^\circ - \nu + \chi) = \sigma + \nu - \chi$ und $\gamma = 360^\circ - (\sigma + \nu + \chi)$. Das Viereck ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn $\alpha + \gamma = 180^\circ$ gilt. Das ist äquivalent zu $\chi = 90^\circ$. \square

Ein Viereck, das sowohl Tangentenviereck als auch Sehnenviereck ist, nennen wir Sehnentangentenviereck.

Satz 49: *Sei $ABCD$ ein Sehnentangentenviereck mit Inkreismittelpunkt I und Diagonalschnittpunkt M . Sei E der Schnittpunkt der Geraden $\ell(A, B)$ und $\ell(C, D)$ und F der Geraden $\ell(B, C)$ und $\ell(A, D)$. Wir nehmen an, dass diese Schnittpunkte existieren. Dann stehen die Geraden $\ell(I, M)$ und $\ell(E, F)$ aufeinander senkrecht.*

Beweis: Wir verwenden die Standardbezeichnung. Insbesondere ist K der Mittelpunkt der Sehne \overline{QS} und L der der Sehne \overline{TR} . Nach Satz 47 ist M auch der Schnittpunkt von \overline{QS} und \overline{TR} . Es gilt $\angle SIK = \nu$ und $\angle TIL = \sigma$. Es folgt $|IK| = \rho \cos \nu$ und $|IL| = \rho \cos \sigma$.

Da $\ell(A, B)$ und $\ell(C, D)$ die Tangenten an den Inkreis in den Endpunkten der Sehne \overline{TR} sind, erhalten wir $\angle TIE = \angle TIL = \sigma$ und $|IE| = \frac{\rho}{\cos \sigma} = \frac{\rho}{\cos \nu \cos \sigma} \cos \nu$. Ebenso ergibt sich $\angle SIF = \angle SIK = \nu$ und $|IF| = \frac{\rho}{\cos \nu} = \frac{\rho}{\cos \nu \cos \sigma} \cos \sigma$.

Die Geraden $\ell(Q, S)$ und $\ell(T, R)$ stehen nach Satz 48 senkrecht aufeinander und daher auch $\ell(I, L)$ und $\ell(I, K)$. Wir können I als Nullpunkt eines Koordinatensystems auffassen mit Koordinatenachsen $\ell(I, L)$ und $\ell(I, K)$, wobei L und K jeweils auf der positiven Achse liegen. In diesem Koordinatensystem gilt dann $\overrightarrow{IM} = \rho \begin{pmatrix} \cos \sigma \\ \cos \nu \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{EF} = \frac{\rho}{\cos \nu \cos \sigma} \begin{pmatrix} -\cos \nu \\ \cos \sigma \end{pmatrix}$. Man sieht, dass \overrightarrow{IM} senkrecht auf \overrightarrow{EF} steht. \square

Wir wollen Zusammenhänge zwischen Inkreis und Umkreis eines Sehnentangentenvierecks finden. Wir beginnen mit einem Hilfssatz.

Hilfssatz: *Für die Tangentenabschnitte und die Sehnwinkel in einem Sehnentangentenviereck gelten folgende Gleichungen, wobei wir $\varphi = \frac{\alpha}{2}$ und $\psi = \frac{\beta}{2}$ setzen.*

- (a) $t_a = \rho \cot \varphi$, $t_b = \rho \cot \psi$, $t_c = \rho \cot \frac{\gamma}{2} = \rho \tan \varphi$ und $t_d = \rho \cot \frac{\delta}{2} = \rho \tan \psi$
 (b) $\psi + \varphi = \nu$, $\psi - \varphi = 90^\circ - \sigma$, $\sigma - \varphi = 90^\circ - \psi$, $\sigma + \psi = 90^\circ + \varphi$ und $\nu + \sigma = 2\varphi + 90^\circ$

Beweis: Es gilt $\rho = |IT| = |IS|$ und $t_a = |AT| = |AS|$. Das Dreieck $\triangle ATI$ hat bei T einen rechten Winkel und bei A den Winkel $\varphi = \frac{\alpha}{2}$. Somit gilt $t_a = \rho \cot \varphi$. Die anderen Gleichungen in (a) ergeben sich analog. Wegen $\alpha + \gamma = 180^\circ$ gilt $\cot \frac{\gamma}{2} = \tan(90^\circ - \frac{\gamma}{2}) = \tan \varphi$ und wegen $\beta + \delta = 180^\circ$ gilt $\cot \frac{\delta}{2} = \tan \psi$.

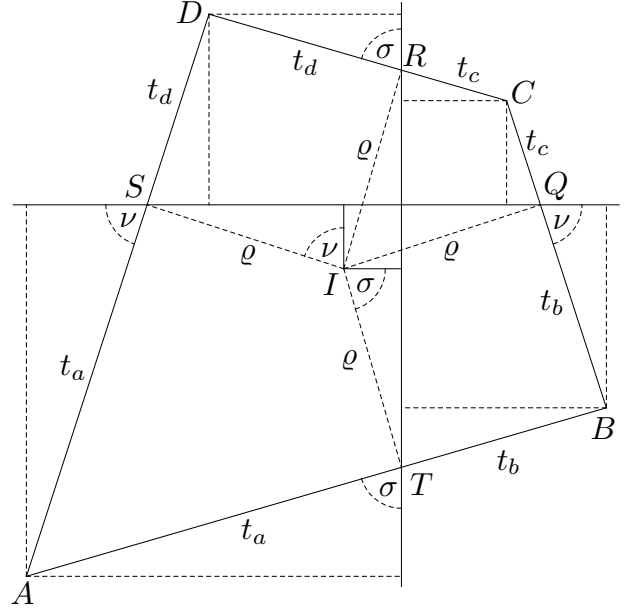
Die Winkelsumme in einem Viereck ist bekanntlich 360^0 . Für das Viereck $ABQS$ erhalten wir $\alpha + \beta + 180^0 - \nu + 180^0 - \nu = 360^0$. Es folgt $\nu = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \varphi + \psi$. Für das Viereck $BCRT$ erhalten wir $\beta + \gamma + \sigma + \sigma = 360^0$ und wegen $\alpha + \gamma = 180^0$ auch $\beta - \alpha = 180^0 - 2\sigma$. Es folgt $\psi - \varphi = 90^0 - \sigma$. Die anderen Gleichungen in (b) folgen aus den ersten beiden. \square

Satz 50: *In einem Sehnentangentenviereck liegen der Umkreismittelpunkt U , der Inkreismittelpunkt I und der Diagonalschnittpunkt M auf einer Geraden.*

Beweis: Wir verwenden die Standardbezeichnung und das im Beweis von Satz 49 eingeführte Koordinatensystem. Mit dem Inkreisradius ϱ , den Sehnenwinkeln ν und σ und den Tangentenabschnitten t_a, t_b, t_c und t_d erhalten wir die Koordinaten der Eckpunkte

$$\begin{aligned} A &= (-\varrho \sin \nu - t_a \cos \nu, -\varrho \sin \sigma - t_a \cos \sigma) \\ B &= (\varrho \sin \nu + t_b \cos \nu, -\varrho \sin \sigma + t_b \cos \sigma) \\ C &= (\varrho \sin \nu - t_c \cos \nu, \varrho \sin \sigma - t_c \cos \sigma) \\ D &= (-\varrho \sin \nu + t_d \cos \nu, \varrho \sin \sigma + t_d \cos \sigma) \end{aligned}$$

Das können wir aus der Zeichnung ablesen. Die x -Koordinate des Punktes Q ist $\varrho \sin \nu$. Addiert man $t_b \cos \nu$, dann ergibt sich die x -Koordinate des Punktes B . Subtrahiert man $t_c \cos \nu$, so hat man die x -Koordinate des Punktes C . Die x -Koordinate des Punktes S ist $-\varrho \sin \nu$. Durch Subtraktion von $t_a \cos \nu$ und Addition von $t_d \cos \nu$ hat man die x -Koordinaten der Punkte A und D . Die y -Koordinate des Punktes R ist $\varrho \sin \sigma$.



Subtraktion von $t_c \cos \sigma$ ergibt die y -Koordinate des Punktes C und Addition von $t_d \cos \sigma$ die des Punktes D . Die y -Koordinate des Punktes T ist $-\varrho \sin \sigma$. Subtraktion von $t_a \cos \sigma$ ergibt die y -Koordinate des Punktes A und Addition von $t_b \cos \sigma$ die des Punktes B .

Mit Hilfe der Formeln für die Tangentenabschnitte t_a, t_b, t_c und t_d aus dem Hilfssatz und den Sumsensätzen folgt $A = (-\varrho \frac{\cos(\nu-\varphi)}{\sin \varphi}, -\varrho \frac{\cos(\sigma-\varphi)}{\sin \varphi})$, $B = (\varrho \frac{\cos(\nu-\psi)}{\sin \psi}, \varrho \frac{\cos(\sigma+\psi)}{\sin \psi})$, $C = (\varrho \frac{\sin(\nu-\varphi)}{\cos \varphi}, \varrho \frac{\sin(\sigma-\varphi)}{\cos \varphi})$ und $D = (-\varrho \frac{\sin(\nu-\psi)}{\cos \psi}, \varrho \frac{\sin(\sigma+\psi)}{\cos \psi})$ wobei $\varphi = \frac{\alpha}{2}$ und $\psi = \frac{\beta}{2}$ gilt. Mit Hilfe der Formeln für die Sehnenwinkel ν und σ aus dem Hilfssatz ergibt sich daraus $A = (-\varrho \frac{\cos \psi}{\sin \varphi}, -\varrho \frac{\sin \psi}{\sin \varphi})$, $B = (\varrho \frac{\cos \varphi}{\sin \psi}, -\varrho \frac{\sin \varphi}{\sin \psi})$, $C = (\varrho \frac{\sin \psi}{\cos \varphi}, \varrho \frac{\cos \psi}{\cos \varphi})$, $D = (-\varrho \frac{\sin \varphi}{\cos \psi}, \varrho \frac{\cos \varphi}{\cos \psi})$

Seien (u, v) die Koordinaten des Umkreismittelpunktes U . Es gilt $|UA|^2 = |UC|^2$. Setzt man ein und vereinfacht, so hat man

$$(1) \quad \varrho^2 \frac{1}{\sin^2 \varphi} + 2\varrho \frac{u \cos \psi + v \sin \psi}{\sin \varphi} = \varrho^2 \frac{1}{\cos^2 \varphi} - 2\varrho \frac{u \sin \psi + v \cos \psi}{\cos \varphi}$$

Mit Hilfe der Sumsensätze ergibt sich

$$\varrho \frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} = -\frac{u \cos(\psi-\varphi) + v \sin(\varphi+\psi)}{\sin \varphi \cos \varphi}$$

Nach dem Hilfssatz gilt $\psi - \varphi = 90^0 - \sigma$ und $\varphi + \psi = \nu$. Es folgt

$$(2) \quad -\varrho \frac{\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi} = u \sin \sigma + v \sin \nu$$

Ebenso gilt $|UB|^2 = |UD|^2$. Setzt man ein und vereinfacht, so hat man

$$(3) \quad \varrho^2 \frac{1}{\sin^2 \psi} + 2\varrho \frac{-u \cos \varphi + v \sin \varphi}{\sin \psi} = \varrho^2 \frac{1}{\cos^2 \psi} + 2\varrho \frac{u \sin \varphi - v \cos \varphi}{\cos \psi}$$

Mit Hilfe der Summensätze ergibt sich

$$\varrho \frac{\cos^2 \psi - \sin^2 \psi}{2 \sin^2 \psi \cos^2 \psi} = \frac{u \cos(\psi - \varphi) - v \sin(\varphi + \psi)}{\sin \psi \cos \psi}$$

Nach dem Hilfssatz gilt $\psi - \varphi = 90^\circ - \sigma$ und $\varphi + \psi = \nu$. Es folgt

$$(4) \quad \varrho \frac{\cos 2\psi}{\sin 2\psi} = u \sin \sigma - v \sin \nu$$

Aus den Gleichungen (2) und (4) lassen sich jetzt u und v leicht berechnen. Mit den Summensätzen und mit (b) aus dem Hilfssatz ergibt sich

$$u = -\varrho \frac{\cos \sigma}{\sin 2\varphi \sin 2\psi} \quad \text{und} \quad v = -\varrho \frac{\cos \nu}{\sin 2\varphi \sin 2\psi}$$

Da der Schnittpunkt M der Diagonalen, der nach Satz 47 auch der Schnittpunkt der Sehnen \overline{QS} und \overline{RT} ist, die Koordinaten $(\varrho \cos \sigma, \varrho \cos \nu)$ hat, wie im Beweis von Satz 49 gezeigt wurde, liegen die Punkte U , I und M auf einer Gerade. \square

Bemerkung: In diesem Beweis wurden auch der Umkreisradius r und der Abstand d der Mittelpunkte I und U des Inkreises und des Umkreises berechnet. Wir erhalten

$$d^2 = u^2 + v^2 = \varrho^2 \frac{\cos^2 \nu + \cos^2 \sigma}{\sin^2 2\varphi \sin^2 2\psi} = \varrho^2 \frac{1 - \sin \alpha \sin \beta}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}$$

da $\cos^2 \nu + \cos^2 \sigma = \cos^2(\psi + \varphi) + \sin^2(\psi - \varphi) = 1 - \sin 2\varphi \sin 2\psi$ aus dem Hilfssatz folgt und da $2\varphi = \alpha$ und $2\psi = \beta$ gilt.

Die beiden Seiten der Gleichung (1) sind gleich $r^2 - d^2$. Wir bilden die Summe

$$2(r^2 - d^2) = \varrho^2 \frac{1}{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} + 2\varrho \frac{u \cos(\psi + \varphi) + v \sin(\psi - \varphi)}{\sin \varphi \cos \varphi} = 4\varrho^2 \frac{1}{\sin^2 2\varphi} + 4\varrho \frac{u \cos \nu + v \cos \sigma}{\sin 2\varphi}$$

Wir setzen für u und v ein und erhalten $2(r^2 - d^2) = 4\varrho^2 \frac{1}{\sin^2 2\varphi} - 4\varrho^2 \frac{2 \cos \nu \cos \sigma}{\sin^2 2\varphi \sin 2\psi}$. Wir verwenden die Formel $2 \cos \nu \cos \sigma = \cos(\nu - \sigma) + \cos(\nu + \sigma)$. Aus dem Hilfssatz erhalten wir $\nu + \sigma = 2\varphi + 90^\circ$ und $\nu - \sigma = 2\psi - 90^\circ$, womit sich dann $2 \cos \nu \cos \sigma = \sin 2\psi - \sin 2\varphi$ ergibt. Wir setzen das oben ein. Dann haben wir

$$r^2 - d^2 = 2\varrho^2 \frac{1}{\sin 2\varphi \sin 2\psi} = 2\varrho^2 \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta}$$

In diesen Formeln für d^2 und $r^2 - d^2$ kann man auch α durch γ und β durch δ ersetzen.

Übung: Man beweise die Fuss'sche Formel für ein Sehnentangentenviereck. Sind r und ϱ die Radien des Umkreises und des Inkreises und ist d der Abstand ihrer Mittelpunkte, dann gilt $2(r^2 + d^2)\varrho^2 = (r^2 - d^2)^2$. Weiters gilt $\varrho \leq \frac{r}{\sqrt{2}}$ mit Gleichheit genau dann, wenn das Sehnentangentenviereck ein Quadrat ist.

Mit der Beweismethode von Satz 47 kann man auch zeigen

Übung: Sei $\triangle ABC$ ein (spitzwinkeliges) Dreieck mit Höhenschnittpunkt H . Seien D auf \overline{BC} und E auf \overline{AC} so gewählt, dass die Punkte A, B, D und E auf einem Kreis liegen. Sei G der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $\triangle DEC$. Dann gehen die drei Geraden $\ell(G, H)$, $\ell(A, D)$ und $\ell(B, E)$ durch einen Punkt. Hinweis: Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle DEC$ sind ähnlich (Peripheriewinkelsatz), somit gilt $\frac{|AH|}{|BH|} = \frac{|DG|}{|EG|}$. Sei $\varphi = \angle DAE = \angle DBE$ (Peripheriewinkelsatz). Es gilt $\angle DAH = (90^\circ - \gamma) - \varphi = \angle EBH$, wenn $\angle AEB = \angle ADB \leq 90^\circ$, oder $\angle DAH = \varphi - (90^\circ - \gamma) = \angle EBH$, wenn $\angle AEB = \angle ADB \geq 90^\circ$. Weiters gilt $\angle GDA = 90^\circ - \varphi = \angle GEB$.

4. Die Kieperthyperbel

Wir beginnen mit folgendem Satz über gleichschenkelige Dreiecke, die auf den Seiten eines Dreiecks aufgesetzt werden.

Satz 51: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und φ ein Winkel zwischen -90^0 und 90^0 . Auf den drei Dreiecksseiten als Basis werden gleichschenkelige Dreiecke mit Basiswinkel φ aufgesetzt (außen, wenn φ positiv, und innen wenn φ negativ ist). Die Spitze des Dreiecks auf der Seite \overline{BC} sei E , die des Dreiecks auf der Seite \overline{AC} sei F und die des Dreiecks auf der Seite \overline{AB} sei G . Dann schneiden die drei Geraden $\ell(A, E)$, $\ell(B, F)$ und $\ell(C, G)$ einander in einem Punkt P .

Beweis: Wir legen das Dreieck so ins Koordinatensystem, dass die Eckpunkte A, B und C die Koordinaten $(u|0)$, $(v|0)$ und $(0|w)$ haben, wobei $u < v$ und $w > 0$ gilt.

Wir setzen $t = \tan \varphi$. Wir berechnen die Spitzen der aufgesetzten Dreiecke und erhalten $(\frac{v}{2} + t\frac{w}{2} | \frac{w}{2} + t\frac{v}{2})$ für den Punkt E , weiters $(\frac{u}{2} - t\frac{w}{2} | \frac{w}{2} - t\frac{u}{2})$ für den Punkt F und $(\frac{u+v}{2} | -t\frac{v-u}{2})$ für den Punkt G . Die Gerade $\ell(A, E)$ geht durch den Punkt $(u|0)$ und hat Normalvektor $\frac{1}{2}(\begin{smallmatrix} w+tv \\ 2u-v-tw \end{smallmatrix})$. Also ist

$$(x - u)(w + tv) + y(2u - v - tw) = 0$$

ihre Gleichung. Die Gerade $\ell(C, G)$ geht durch den Punkt $(0|w)$ und hat $\frac{1}{2}(\begin{smallmatrix} 2w+tv-tu \\ u+v \end{smallmatrix})$ als Normalvektor. Ihre Gleichung ist daher

$$x(2w + tv - tu) + (y - w)(u + v) = 0$$

Den Schnittpunkt P dieser beiden Geraden erhalten wir als Lösung des Gleichungssystems

$$x(w + tv) + y(2u - v - tw) = uw + tvv$$

$$x(2w + tv - tu) + y(u + v) = uw + vw$$

Berechnet man die Lösung, so erhält man

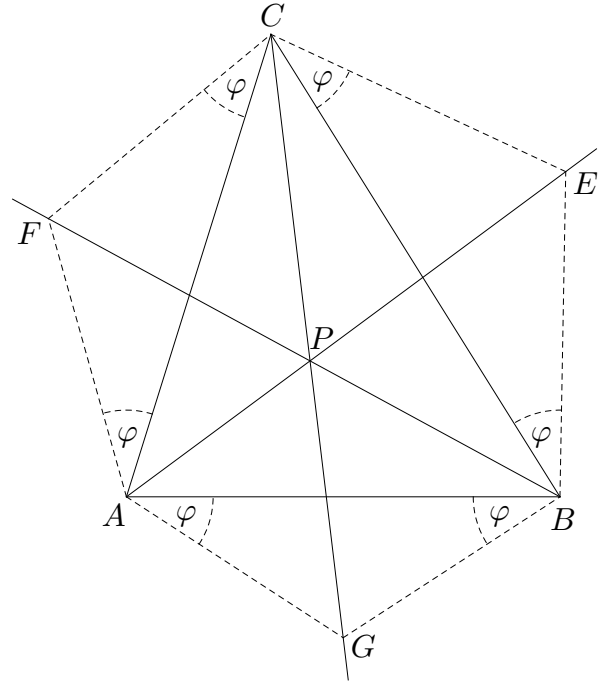
$$(*) \quad P = \left(\frac{t(u^2v+uv^2+uw^2+vw^2)+w(v^2-u^2)}{t^2w(v-u)+2t(u^2-uv+v^2+w^2)+3w(v-u)} \mid \frac{t^2(u^2v-uv^2)+tw(v-u)^2+w^2(v-u)}{t^2w(v-u)+2t(u^2-uv+v^2+w^2)+3w(v-u)} \right)$$

Vertauscht man u und v und ersetzt t durch $-t$, dann geht G in sich selbst über, aber A wird zu B und E wird zu F . Dieselbe Rechnung mit vertauschten u und v und mit $-t$ anstelle von t ergibt daher den Schnittpunkt der Geraden $\ell(B, F)$ und $\ell(C, G)$. Wir stellen fest, dass sich der oben erhaltene Schnittpunkt nicht ändert, wenn wir u und v vertauschen und gleichzeitig t durch $-t$ ersetzen. Daher ist dieser Punkt P auch der Schnittpunkt der Geraden $\ell(B, F)$ und $\ell(C, G)$. Damit ist gezeigt, dass die drei Geraden $\ell(A, E)$, $\ell(B, F)$ und $\ell(C, G)$ einander im Punkt P schneiden. \square

Lässt man den Winkel φ von -90^0 bis 90^0 laufen, dann durchläuft t die reellen Zahlen und der Schnittpunkt P durchläuft eine Kurve, die wir Kiepertkurve nennen. Wir suchen Punkte, die auf der Kiepertkurve liegen.

Ist $\varphi = 0^0$, das heißt $t = 0$, dann sind E, F und G die Mittelpunkte der Dreiecksseiten. In diesem Fall ist P der Schwerpunkt S des Dreiecks $\triangle ABC$. Setzt man $t = 0$ in $(*)$ ein, dann erhält man $(\frac{u+v}{3} | \frac{w}{3})$. Das ist tatsächlich der Schwerpunkt S .

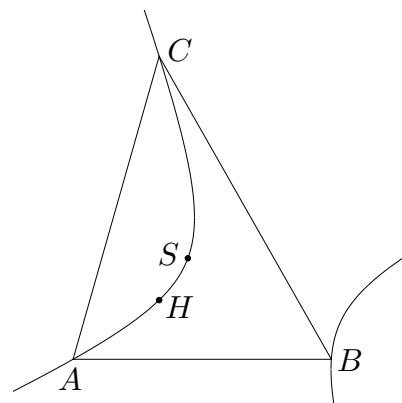
Ist $\varphi = 90^0$, das heißt $t = \infty$, dann befinden sich die Spitzen der aufgesetzten Dreiecke im Unendlichen. Die Geraden $\ell(A, E)$, $\ell(B, F)$ und $\ell(C, G)$ stehen senkrecht auf den Dreiecksseiten. Sie verlaufen entlang der Höhen und P ist der Höhenschnittpunkt H des Dreiecks $\triangle ABC$. Lässt man t in $(*)$ gegen ∞ gehen, dann erhält man $(0 | -\frac{uv}{w})$. Das ist H .



Auch die Eckpunkte des Dreiecks liegen auf der Kiepertkurve. Ist $\varphi = -\alpha$, dann liegt F auf $\ell(A, B)$ und G auf $\ell(A, C)$. Somit ist $\ell(B, F)$ identisch mit $\ell(A, B)$ und $\ell(C, G)$ ist identisch mit $\ell(A, C)$. Der Schnittpunkt P der Geraden $\ell(B, F)$ und $\ell(C, G)$ ist dann der Eckpunkt A . Analog zeigt man, dass auch die Eckpunkte B und C auf der Kiepertkurve liegen. Das passiert für $\varphi = -\beta$ und $\varphi = -\gamma$.

Ist $\varphi = -\alpha$, dann ist $t = -\tan \alpha = \frac{w}{u}$. Setzt man das in (*) ein, dann erhält man $(u|0)$. Das ist A . Ist $\varphi = -\beta$, dann ist $t = -\tan \beta = -\frac{w}{v}$. Setzt man das in (*) ein, dann erhält man $(v|0)$. Das ist B . Für $\varphi = -\gamma$ ist es schwieriger. Es gilt $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ mit $\tan \gamma_1 = -\frac{u}{w}$ und $\tan \gamma_2 = \frac{v}{w}$. Aus dem Summensatz folgt $\tan \gamma = \frac{\tan \gamma_1 + \tan \gamma_2}{1 - \tan \gamma_1 \tan \gamma_2} = \frac{w(v-u)}{w^2+uv}$, also $t = -\tan \gamma = -\frac{w(v-u)}{w^2+uv}$. Setzt man das in (*) ein, dann erhält man $(0|w)$. Das ist C .

Man kann jetzt die Frage stellen, welche Kurve die Kiepertkurve ist. Die Parameterdarstellung (*) sieht eher kompliziert aus. Wir wissen jedoch, dass die fünf Punkte A, B, C, H und S auf der Kurve liegen. Da denkt man an einen Kegelschnitt. (Man kann die Kiepertkurve ja auch von einem Computer zeichnen lassen. Dann erhält man ein Bild, das so aussieht wie das nebenstehende.) Zu fünf vorgegebenen Punkten, die keine spezielle Lage haben, gibt es jedenfalls einen eindeutig bestimmten Kegelschnitt, der durch diese Punkte hindurchläuft.



Berechnet man diesen Kegelschnitt für die Punkte A, B, C, H und S , so erhält man

$$wx^2 + 2\frac{u^2+v^2-uv-w^2}{u+v}xy - wy^2 - w(u+v)x + (w^2 - uv)y + uvw = 0$$

Man sieht, dass die Koeffizienten von x^2 und y^2 gleichen Betrag haben, aber entgegengesetztes Vorzeichen. Daher stellt diese Kegelschnittgleichung eine gleichseitige Hyperbel dar (eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} w & r \\ r & -w \end{pmatrix}$ hat $\pm\sqrt{w^2 + r^2}$ als Eigenwerte). Setzt man den durch (*) gegebenen Punkt P in diese Gleichung ein, so stellt sich heraus, dass er die Gleichung erfüllt (dazu nimmt man am besten einen Computer zu Hilfe). Das bedeutet, dass diese gleichseitige Hyperbel die Kiepertkurve ist, die man dann auch Kieperthyperbel nennt.

Eine Publikation dazu ist "Eddy, Fritsch: *The Conics of Ludwig Kiepert: A Comprehensive Lesson in the Geometry of the Triangle*, Mathematics Magazine 67, 1994, 188 - 205". In dieser Publikation wird mit baryzentrische Koordinaten gearbeitet.

Die Kieperthyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte, die als Schnittpunkte der Geraden auftreten, die die Spitzen der aufgesetzten gleichschenkeligen Dreiecke mit dem jeweils gegenüberliegenden Eckpunkt des Dreiecks verbinden. Es gibt viele andere Ortslinien, die in der Dreiecksgeometrie untersucht werden. Das sind dann oft Kurven höherer Ordnung. Siehe zum Beispiel <https://bernard-gibert.pagesperso-orange.fr/index.html>

Übung: Man beweise den Satz von Droz-Farny: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H . Seien g und h Gerade durch H , die senkrecht aufeinander stehen. Seien G_a, G_b und G_c die Schnittpunkte der Geraden g mit den (Verlängerungen der) drei Dreiecksseiten und H_a, H_b und H_c die der Geraden h . Dann liegen die Mittelpunkte K_a, K_b und K_c der Strecken $\overline{G_a H_a}, \overline{G_b H_b}$ und $\overline{G_c H_c}$ auf einer Gerade.

Hinweis: Koordinatensystem wie oben. Die Eckpunkte A, B und C sind $(u|0), (v|0)$ und $(0|w)$. Der Höhenschnittpunkt ist $(0|-\frac{uv}{w})$. Gleichungen für die Geraden g und h sind $kx - y = \frac{uv}{w}$ und $\frac{1}{k}x + y = -\frac{uv}{w}$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, -\frac{w}{u}, \frac{u}{w}, -\frac{w}{v}, \frac{v}{w}\}$. Dann rechnet man und

erhält $K_c = (\frac{uv(1-k^2)}{2kw} | 0)$ und $K_b = (\frac{(uw^2+u^2v)(k^2u+2kw-u)}{2w(kw-u)(ku+w)} | \frac{u((1-k^2)(w^2-uv)+2k(vw+uw))}{2(kw-u)(ku+w)})$.
 Vertauschen von u und v in K_b ergibt K_a . Es folgt $\overrightarrow{K_c K_a} = \frac{(kw-u)(ku+w)v}{(kw-v)(kv+w)u} \overrightarrow{K_c K_b}$.

Übung: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H . Seien g und h zwei Gerade durch H , die senkrecht aufeinander stehen. Seien G_b und G_c die Schnittpunkte der Geraden g mit $\ell(A, C)$ und $\ell(A, B)$. Seien H_b und H_c die Schnittpunkte der Geraden h mit $\ell(A, C)$ und $\ell(A, B)$. Dann liegen die Mittelpunkte M_g, M_h und M der Strecken $\overline{G_b G_c}, \overline{H_b H_c}$ und \overline{BC} auf einer Gerade.

5. Dreiecksfläche

Wir beweisen den folgenden Satz

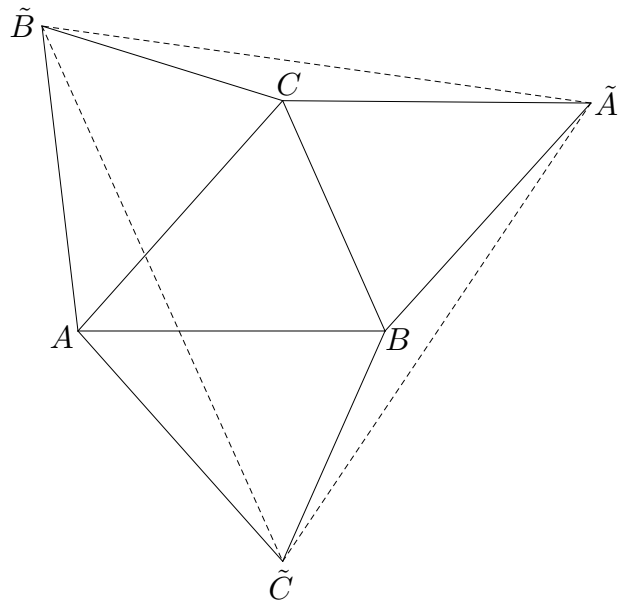
Satz 52: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Wir spiegeln A an der Seite \overline{BC} , B an der Seite \overline{AC} und C an der Seite \overline{AB} . Die Spiegelpunkte bezeichnen wir mit \tilde{A}, \tilde{B} und \tilde{C} . Sei F die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$ und \tilde{F} die des Dreiecks $\triangle \tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$. Dann gilt $\tilde{F} \leq 5F$. Sind alle Winkel des Dreiecks $\triangle ABC$ kleiner oder gleich 120° , dann gilt sogar $\tilde{F} \leq 4F$.

Wir zeigen zuerst

Hilfssatz: Gilt $u + v + w = 360^\circ$, dann auch $\cos u + \cos v + \cos w \geq -\frac{3}{2}$.

Beweis: Es gilt $\cos w = \cos(u + v) = \cos^2 \frac{u+v}{2} - \sin^2 \frac{u+v}{2} = 2 \cos^2 \frac{u+v}{2} - 1$. Weiters gilt $\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$. Setzt man $x = \cos \frac{u+v}{2}$ und $y = \cos \frac{u-v}{2}$, dann hat man $\cos u + \cos v + \cos w = 2xy + 2x^2 - 1$. Natürlich gilt auch $x \in [-1, 1]$ und $y \in [-1, 1]$. Für $x \geq 0$ folgt $2xy + 2x^2 - 1 \geq -2x + 2x^2 - 1 = 2(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{2} \geq -\frac{3}{2}$. Für $x \leq 0$ folgt $2xy + 2x^2 - 1 \geq 2x + 2x^2 - 1 = 2(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{2} \geq -\frac{3}{2}$. Also in jedem Fall $\geq -\frac{3}{2}$. \square

Wir bezeichnen die Fläche eines Dreiecks $\triangle UVW$ mit $\#UVW$. Wir beweisen Satz 52 für den Fall, dass die Winkel α, β und γ des Dreiecks $\triangle ABC$ alle $\leq 120^\circ$ sind. Wir gehen von den Dreiecken $\triangle ABC, \triangle A\tilde{B}\tilde{C}, \triangle \tilde{A}B\tilde{C}$ und $\triangle \tilde{A}\tilde{B}C$ aus, das ist das ursprüngliche Dreieck und drei aufgesetzte Dreiecke mit Spitzen \tilde{A}, \tilde{B} und \tilde{C} . Da die aufgesetzten Dreiecke kongruent zum ursprünglichen Dreieck und wegen der Voraussetzung, dass alle Winkel $\leq 120^\circ$ sind, auch paarweise disjunkt sind, haben die vier Dreiecke zusammen Fläche $4F$. Wir wollen das Dreieck $\triangle \tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ erhalten. Dazu müssen wir das Dreieck $\triangle A\tilde{B}\tilde{C}$ wegschneiden, wenn $\angle \tilde{B}\tilde{A}\tilde{C} = 3\alpha$ kleiner als 180° ist und sonst dazugeben. Analog verfahren wir mit den Dreiecken $\triangle \tilde{A}B\tilde{C}$ und $\triangle \tilde{A}\tilde{B}C$. Nun gilt aber $\#A\tilde{B}\tilde{C} = \frac{bc}{2} \sin 3\alpha$, wenn $3\alpha < 180^\circ$ ist, und $\#A\tilde{B}\tilde{C} = -\frac{bc}{2} \sin 3\alpha$, wenn $3\alpha \geq 180^\circ$ ist. Die Fläche der vier Dreiecke, nachdem wir $\triangle A\tilde{B}\tilde{C}$ im Fall $3\alpha < 180^\circ$ weggeschnitten oder im Fall $3\alpha \geq 180^\circ$ dazugegeben haben, ist $4F - \frac{bc}{2} \sin 3\alpha$. Hat man dasselbe auch mit den Dreiecken $\triangle \tilde{A}B\tilde{C}$ und $\triangle \tilde{A}\tilde{B}C$ getan, dann verbleibt die Fläche $4F - \frac{bc}{2} \sin 3\alpha - \frac{ac}{2} \sin 3\beta - \frac{ab}{2} \sin 3\gamma$. Das ist die Fläche \tilde{F} des Dreiecks $\triangle \tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$.



Nun gilt $F = \frac{bc}{2} \sin \alpha = \frac{ac}{2} \sin \beta = \frac{ab}{2} \sin \gamma$. Damit erhalten wir

$$\tilde{F} = 4F - F \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - F \frac{\sin 3\beta}{\sin \beta} - F \frac{\sin 3\gamma}{\sin \gamma} = F \left(4 - \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin 3\beta}{\sin \beta} - \frac{\sin 3\gamma}{\sin \gamma} \right)$$

Es ist also $4 - \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin 3\beta}{\sin \beta} - \frac{\sin 3\gamma}{\sin \gamma} \leq 4$ zu zeigen, das heißt $\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin 3\beta}{\sin \beta} + \frac{\sin 3\gamma}{\sin \gamma} \geq 0$.

Wegen $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha$ erhalten wir

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} = 3 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 + 2 \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha = 1 + 2 \cos 2\alpha$$

Macht man das auch für die anderen Winkel, so hat man

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin 3\beta}{\sin \beta} + \frac{\sin 3\gamma}{\sin \gamma} = 3 + 2 \cos 2\alpha + 2 \cos 2\beta + 2 \cos 2\gamma$$

Das ist $\geq 3 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 0$ nach dem Hilfssatz, da ja $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360^\circ$ gilt.

Wir beweisen den Satz für den Fall, dass $\gamma > 120^\circ$ gilt. In diesem Fall berechnen wir \tilde{F} als Summe der Flächen der drei Dreiecke $\triangle \tilde{A}\tilde{B}C$, $\triangle \tilde{A}\tilde{C}C$ und $\triangle \tilde{B}\tilde{C}C$. Sollte der Punkt C nicht im Dreieck $\triangle \tilde{A}\tilde{B}C$ liegen, dann ist die Fläche des Dreiecks $\triangle \tilde{A}\tilde{C}C$ oder die des Dreiecks $\triangle \tilde{B}\tilde{C}C$ nicht zu addieren, sondern zu subtrahieren. Das geschieht wieder automatisch, da dann der Winkel, der unten bei der Berechnung der Fläche dieses Dreiecks verwendet wird, größer als 180° und der \sin dieses Winkels somit negativ ist. Wegen $\angle \tilde{A}C\tilde{B} = 3\gamma - 360^\circ$ folgt $\# \tilde{A}\tilde{B}C = \frac{1}{2}ab \sin(3\gamma - 360^\circ)$. Da $|C\tilde{C}|$ die doppelte Höhe durch C ist, gilt $|C\tilde{C}| = 2b \sin \alpha = 2a \sin \beta$. Wegen $\angle \tilde{A}C\tilde{C} = 360^\circ - (\gamma + 90^\circ - \beta)$ und $\angle \tilde{B}C\tilde{C} = 360^\circ - (\gamma + 90^\circ - \alpha)$ erhalten wir $\# \tilde{A}\tilde{C}C = ba \sin \beta \sin(360^\circ - (\gamma + 90^\circ - \beta))$ und ebenso $\# \tilde{B}\tilde{C}C = ab \sin \alpha \sin(360^\circ - (\gamma + 90^\circ - \alpha))$. Die Summe dieser Flächen ist \tilde{F} . Nützt man, dass $\sin(\varphi - 360^\circ) = \sin \varphi$ und $\sin(360^\circ - \varphi) = -\sin \varphi$ gilt und $F = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$, dann ergibt sich

$$\tilde{F} = F \left(\frac{\sin 3\gamma}{\sin \gamma} - \frac{2 \sin \beta \sin(\gamma + 90^\circ - \beta)}{\sin \gamma} - \frac{2 \sin \alpha \sin(\gamma + 90^\circ - \alpha)}{\sin \gamma} \right)$$

Wegen $\sin(90^\circ - \varphi) = \cos \varphi$ wird das zu

$$\tilde{F} = F \left(\frac{\sin 3\gamma}{\sin \gamma} - \frac{2 \sin \beta \cos(\beta - \gamma)}{\sin \gamma} - \frac{2 \sin \alpha \cos(\alpha - \gamma)}{\sin \gamma} \right)$$

Nun gilt $\cos(\varphi - \gamma) = \cos \varphi \cos \gamma + \sin \varphi \sin \gamma$ und $2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi$. Damit erhält man

$$\tilde{F} = F \left(\frac{\sin 3\gamma}{\sin \gamma} - \frac{\cos \gamma (\sin 2\alpha + \sin 2\beta)}{\sin \gamma} - 2 \sin^2 \alpha - 2 \sin^2 \beta \right)$$

Für die Winkel eines Dreiecks gilt $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$. (Diese Gleichung beweist man am besten mit Hilfe der Eulerformel: $\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$.) Damit folgt

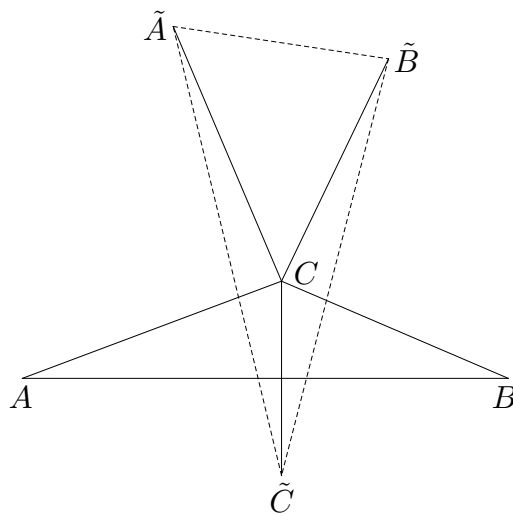
$$\tilde{F} = F \left(\frac{\sin 3\gamma + \cos \gamma \sin 2\gamma}{\sin \gamma} - \frac{4 \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\sin \gamma} - 2 \sin^2 \alpha - 2 \sin^2 \beta \right)$$

Wegen $\sin 3\gamma = 3 \sin \gamma \cos^2 \gamma - \sin^3 \gamma = \sin \gamma (4 \cos^2 \gamma - 1)$ und $\sin 2\gamma = 2 \sin \gamma \cos \gamma$ folgt

$$\tilde{F} = F (6 \cos^2 \gamma - 1 - 4 \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta - 2 \sin^2 \alpha - 2 \sin^2 \beta)$$

Nun sind $\sin \alpha$ und $\sin \beta$ größer als 0. Somit gilt $4 \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta + 2 \sin^2 \alpha + 2 \sin^2 \beta \geq -4 \sin \alpha \sin \beta + 2 \sin^2 \alpha + 2 \sin^2 \beta = 2(\sin \alpha - \sin \beta)^2 \geq 0$. Da auch $\cos^2 \gamma \leq 1$ gilt, erhalten wir schließlich $\tilde{F} \leq 5F$.

Übung: Sei $g(x) = (3 - 4x^2)(1 + 4x^2) = 3 + 8x^2 - 16x^4$. Für ein gleichschenkeliges Dreieck mit $\alpha = \beta$ zeige man $\tilde{F} = F \cdot |g(\cos \alpha)|$. Man bestimme lokale Extrema und Nullstellen von $g(x)$ für $x \in [0, 1]$. Hinweis: In den oben gefundenen Formeln setzt man $\beta = \alpha$. Es gilt $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ und $\cos \gamma = \cos(180^\circ - 2\alpha) = -\cos(2\alpha) = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1 - 2 \cos^2 \alpha$.



V. Besondere Punkte eines Dreiecks

1. Gergonnepunkt, Nagelpunkt und Mittenpunkt	48
2. Bevanpunkt, Spiekerpunkt und Longchampspunkt	50
3. Weitere Geraden und der Symmedianpunkt	52

Die bekannten besonderen Punkte eines Dreiecks $\triangle ABC$ sind der Schwerpunkt S , der Höhenschnittpunkt H , der Umkreismittelpunkt U und der Inkreismittelpunkt I . Die Punkte U , S und H liegen auf der Eulergerade, wobei $\frac{SU}{SH} = -\frac{1}{2}$ gilt. Neben diesen bekannten Punkten werden wir weitere besondere Punkte untersuchen.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels behandeln wir den Gergonnepunkt G , den Nagelpunkt N und den Mittenpunkt T . Jeder dieser Punkte ist der Schnittpunkt von drei speziellen Geraden. Wir zeigen, dass die Punkte S , I und N auf einer Gerade liegen, ebenso die Punkte S , T und G .

Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels führen wir den Bevanpunkt V ein. Er ist der Schnittpunkt der Senkrechten von den drei Ankreismittelpunkten auf die jeweils nächstliegende Dreiecksseite. Weiters werden der Spiekerpunkt K , das ist der Inkreismittelpunkt des Seitenmitten Dreiecks, und der Longchampspunkt L , das ist der am Umkreismittelpunkt U gespiegelte Höhenschnittpunkt H , eingeführt. Wir zeigen, dass U der Mittelpunkt der Strecke \overline{IV} , dass K der Mittelpunkt der Strecke \overline{VH} , und dass V der Mittelpunkt der Strecke \overline{LN} ist.

Im dritten Abschnitt dieses Kapitels wird es rechenintensiv. Wir finden einen weiteren besonderen Punkt, den Symmedianpunkt E . Er ist der Schnittpunkt der drei Symmedianen, das sind die an den Winkelsymmetralen gespiegelten Schwerlinien. Außerdem finden wir weitere Geraden, auf denen drei besondere Punkte liegen. Der Longchampspunkt L , der Gergonnepunkt G und der Inkreismittelpunkt I liegen auf einer Geraden. Der Mittenpunkt T liegt auf der Gerade durch V , K und H . Der Symmedianpunkt E , der Inkreismittelpunkt I und der Mittenpunkt T liegen ebenfalls auf einer Geraden.

Den Abschluss bildet eine Zeichnung der besonderen Punkte und der Geraden, auf denen sie liegen.

Die Beweise sind im Wesentlichen synthetisch. Hauptsächlich werden der Strahlensatz und der Satz von Ceva verwendet. Es wird aber auch auf den Cosinussatz und den Sinussatz zurückgegriffen.

Wir verwenden folgende Bezeichnungen. Die Seitenlängen des Dreiecks $\triangle ABC$ nennen wir a , b und c und $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ist der halbe Umfang. Den Inkreis des Dreiecks bezeichnen wir mit k und seinen Radius mit ϱ . Die Ankreise bezeichnen wir mit k_a , k_b und k_c , ihre Radien mit ϱ_a , ϱ_b und ϱ_c und ihre Mittelpunkte mit I_a , I_b und I_c . Die Mittelpunkte der Dreiecksseiten nennen wir M_a , M_b und M_c und die Punkte, in denen der Inkreis die Dreiecksseiten berührt, nennen wir P_a , P_b und P_c . Weiters sei Q_a der Punkt, in dem k_a die Seite \overline{BC} berührt, Q_b der Punkt, in dem k_b die Seite \overline{AC} berührt und Q_c der Punkt, in dem k_c die Seite \overline{AB} berührt. Sehr oft werden wir die Abstände dieser Berührungspunkte von den Eckpunkten des Dreiecks verwenden. Es gilt $|AP_c| = |AP_b| = s - a$, $|BP_c| = |BP_a| = s - b$ und $|CP_a| = |CP_b| = s - c$. Ebenso gilt $|BQ_c| = |CQ_b| = s - a$, $|AQ_c| = |CQ_a| = s - b$ und $|BQ_a| = |AQ_b| = s - c$.

1. Gergonnapunkt, Nagelpunkt und Mittenpunkt

Wir beginnen mit einer typischen Situation. Wir untersuchen die Geraden, die die Eckpunkte des Dreiecks mit den gegenüberliegenden Berührungspunkten des Inkreises und mit den gegenüberliegenden Berührungspunkten der Ankreise verbinden.

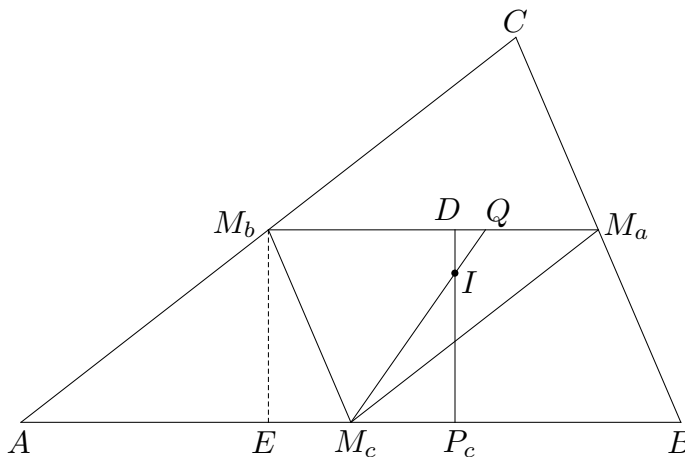
Satz 53: Die Geraden $\ell(A, P_a)$, $\ell(B, P_b)$ und $\ell(C, P_c)$ schneiden einander in einem Punkt G , der Gergonnapunkt genannt wird. Die Geraden $\ell(A, Q_a)$, $\ell(B, Q_b)$ und $\ell(C, Q_c)$ schneiden einander in einem Punkt N , der Nagelpunkt genannt wird.

Beweis: Es gilt $\frac{P_c A}{P_c B} = -\frac{s-a}{s-b}$, $\frac{P_a B}{P_a C} = -\frac{s-b}{s-c}$ und $\frac{P_b C}{P_b A} = -\frac{s-c}{s-a}$. Daher folgt die erste Aussage aus dem Satz von Ceva. Ebenso folgt die zweite Aussage aus dem Satz von Ceva, da auch $\frac{Q_c A}{Q_c B} = -\frac{s-b}{s-a}$, $\frac{Q_a B}{Q_a C} = -\frac{s-c}{s-b}$ und $\frac{Q_b C}{Q_b A} = -\frac{s-a}{s-c}$ gilt. \square

Wir untersuchen Inkreis und Ankreise auch für das Seitenmittendreieck $\triangle M_a M_b M_c$. Die Punkte, in denen der Inkreis des Dreiecks $\triangle M_a M_b M_c$ dessen Seiten berührt, bezeichnen wir mit P_a^* , P_b^* und P_c^* . Die Punkte, in denen die Seiten des Dreiecks $\triangle M_a M_b M_c$ vom jeweiligen Ankreis berührt werden, bezeichnen wir mit Q_a^* , Q_b^* und Q_c^* . Da $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$ und $\frac{c}{2}$ die Seitenlängen des Dreiecks $\triangle M_a M_b M_c$ sind, erhalten wir $|M_a P_c^*| = |M_a P_b^*| = \frac{s-a}{2}$, $|M_b P_c^*| = |M_b P_a^*| = \frac{s-b}{2}$ und $|M_c P_a^*| = |M_c P_b^*| = \frac{s-c}{2}$ aus obigen Formeln. Ebenso gilt $|M_b Q_c^*| = |M_c Q_b^*| = \frac{s-a}{2}$, $|M_a Q_c^*| = |M_c Q_a^*| = \frac{s-b}{2}$ und $|M_b Q_a^*| = |M_a Q_b^*| = \frac{s-c}{2}$.

Satz 54: Der Inkreismittelpunkt I des Dreiecks $\triangle ABC$ ist der Nagelpunkt des Seitenmittendreiecks $\triangle M_a M_b M_c$.

Beweis: Sei g die Trägergerade der Seite $\overline{M_a M_b}$ des Dreiecks $\triangle M_a M_b M_c$. Sei D der Fußpunkt des Lots von I auf g und Q der Schnittpunkt von $\ell(M_c, I)$ und g . Da g und $\ell(A, B)$ parallel sind, folgt $\frac{ID}{IP_c} = \frac{DQ}{P_c M_c}$ aus dem Strahlensatz. Ist h die Länge der Höhe durch C und F die Fläche von $\triangle ABC$, dann gilt $\varrho = \frac{F}{s} = \frac{ch}{2s}$ und $\frac{ID}{IP_c} = \frac{\frac{1}{2}h - \varrho}{-\varrho} = 1 - \frac{s}{c}$. Wegen $P_c M_c = \frac{c}{2} - (s-a)$ ergibt sich $DQ = \frac{ID \cdot P_c M_c}{IP_c} = \frac{c}{2} - (s-a) - \frac{s}{2} + \frac{s(s-a)}{c}$.



Ist E der Fußpunkt des Lots von M_b auf $\ell(A, B)$, dann gilt $M_b D = EP_c = AP_c - AE = s - a - \frac{b}{2} \cos \alpha$. Damit erhalten wir $M_b Q = M_b D + DQ = -\frac{b}{2} \cos \alpha + \frac{c}{2} - \frac{s}{2} + \frac{s(s-a)}{c}$. Mit Hilfe des Cosinussatzes ergibt sich $\frac{b}{2} \cos \alpha = \frac{s(s-a)}{c} - \frac{b}{2}$. Es folgt $M_b Q = \frac{b}{2} + \frac{c}{2} - \frac{s}{2} = \frac{s-a}{2}$. Damit ist gezeigt, dass Q der Punkt Q_c^* ist, in dem der entsprechende Ankreis die Seite $\overline{M_a M_b}$ des Seitenmittendreiecks $\triangle M_a M_b M_c$ berührt.

Somit liegt I auf der Verbindungsgerade vom Eckpunkt M_c des Dreiecks $\triangle M_a M_b M_c$ zum Berührungspunkt des gegenüberliegenden Ankreises. Dasselbe Resultat kann man ganz analog für die anderen Eckpunkte des Dreiecks $\triangle M_a M_b M_c$ zeigen. Es folgt, dass I der Nagelpunkt des Dreiecks $\triangle M_a M_b M_c$ ist. \square

Sehr ähnlich ist der Beweis des folgenden Satzes.

Satz 55: Die Punkte I_c , M_c und P_c^* liegen auf einer Geraden. Dasselbe gilt für die Punkte I_a , M_a und P_a^* und für die Punkte I_b , M_b und P_b^* .

Beweis: Sei g wieder die Trägergerade der Seite $\overline{M_a M_b}$ des Dreiecks $\triangle M_a M_b M_c$. Sei D der Fußpunkt des Lots von I_c auf g und P der Schnittpunkt von $\ell(M_c, I_c)$ und g . Da g und $\ell(A, B)$ parallel sind, folgt $\frac{I_c D}{I_c Q_c} = \frac{DP}{Q_c M_c}$ aus dem Strahlensatz. Ist h die Länge der Höhe durch C und F die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$, dann gilt $\varrho_c = \frac{F}{s-c} = \frac{ch}{2(s-c)}$ und $\frac{I_c D}{I_c Q_c} = \frac{\frac{1}{2}h + \varrho_c}{\varrho_c} = \frac{s}{c}$. Wegen $Q_c M_c = \frac{c}{2} - (s-b)$ erhalten wir

$$DP = \frac{I_c D}{I_c Q_c} \cdot Q_c M_c = \frac{s}{2} - \frac{s(s-b)}{c}.$$

Sei E der Fußpunkt des Lots von M_b auf die Gerade $\ell(A, B)$. Damit erhalten wir

$$M_b D = EQ_c = s - b - \frac{b}{2} \cos \alpha. \text{ Es folgt } M_b P = M_b D + DP = s - b - \frac{b}{2} \cos \alpha + \frac{s}{2} - \frac{s(s-b)}{c}.$$

Mit Hilfe des Cosinussatzes ergibt sich $\frac{b}{2} \cos \alpha = \frac{s(s-a)}{c} - \frac{b}{2}$. Setzen wir das oben ein, so haben wir $M_b P = s - \frac{b}{2} + \frac{s}{2} - \frac{sc}{c} = \frac{s-b}{2}$. Damit ist gezeigt, dass P der Punkt P_c^* ist, in dem der Inkreis des Seitenmittendreiecks $\triangle M_a M_b M_c$ die Seite $\overline{M_a M_b}$ berührt. Das bedeutet, dass die Punkte I_c, M_c und P_c^* auf einer Geraden liegen.

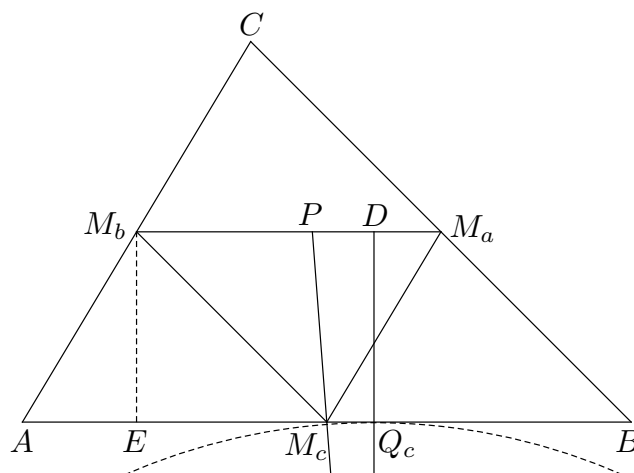
Ganz analog erhält man dieses Resultat auch für die Punkte I_a, M_a und P_a^* und für die Punkte I_b, M_b und P_b^* . \square

Wir können jetzt einen weiteren besonderen Punkt einführen. Der Mittenpunkt T des Dreiecks $\triangle ABC$ ist der Schnittpunkt der drei Geraden $\ell(I_a, M_a)$, $\ell(I_b, M_b)$ und $\ell(I_c, M_c)$. In Satz 55 wurde gezeigt, dass diese Geraden identisch sind mit den Geraden $\ell(M_a, P_a^*)$, $\ell(M_b, P_b^*)$ und $\ell(M_c, P_c^*)$. Nach Satz 53 angewendet auf das Seitenmittendreieck haben diese drei Geraden tatsächlich einen Schnittpunkt. Dieser Schnittpunkt wurde Gergonnepunkt genannt. Somit ist der Mittenpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$ gleich dem Gergonnepunkt des Seitenmittendreiecks $\triangle M_a M_b M_c$.

Satz 56: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Schwerpunkt S . Dann liegen S , der Inkreismittelpunkt I und der Nagelpunkt N auf einer Geraden und es gilt $\frac{SI}{SN} = -\frac{1}{2}$. Ebenso liegen S , der Mittenpunkt T und der Gergonnepunkt G auf einer Geraden und es gilt $\frac{SG}{SM} = -\frac{1}{2}$.

Beweis: Sei φ die zentrische Streckung mit Streckungsfaktor $-\frac{1}{2}$, die den Schwerpunkt S als Zentrum hat. Es gilt $\varphi(A) = M_a$, $\varphi(B) = M_b$ und $\varphi(C) = M_c$. Da Geraden in Geraden übergehen, werden die Seiten des Dreiecks $\triangle ABC$ auf die Seiten des Seitenmittendreiecks $\triangle M_a M_b M_c$ abgebildet. Wegen $|M_a \varphi(Q_c)| = |\varphi(A) \varphi(Q_c)| = \frac{1}{2} |AQ_c| = \frac{s-b}{2}$ erhalten wir, dass $\varphi(Q_c) = Q_c^*$ gilt. Genauso ergibt sich, dass auch $\varphi(Q_b) = Q_b^*$ gilt. Daher wird der Schnittpunkt N der Geraden $\ell(C, Q_c)$ und $\ell(B, Q_b)$ auf den Schnittpunkt der Geraden $\ell(M_c, Q_c^*)$ und $\ell(M_b, Q_b^*)$ abgebildet. Nach Satz 54 ist dieser Schnittpunkt der Inkreismittelpunkt I . Es gilt $\varphi(N) = I$. Damit ist gezeigt, dass S, I und N auf einer Geraden liegen und dass $\frac{SI}{SN} = -\frac{1}{2}$ gilt.

Ebenso zeigt man, dass $\varphi(P_c) = P_c^*$ und $\varphi(P_b) = P_b^*$ gilt. Daher wird der Schnittpunkt G der Geraden $\ell(C, P_c)$ und $\ell(B, P_b)$ auf den Schnittpunkt der Geraden $\ell(M_c, P_c^*)$ und $\ell(M_b, P_b^*)$ abgebildet. Dieser Schnittpunkt ist der Mittenpunkt T . Es gilt $\varphi(G) = T$. Damit ist gezeigt, dass S, T und G auf einer Geraden liegen und dass $\frac{SG}{ST} = -\frac{1}{2}$ gilt. \square



2. Bevanpunkt, Spiekerpunkt und Longchampspunkt

Wir suchen wieder drei Geraden, die einander in einem Punkt schneiden, und führen diesen dann als weiteren besonderen Punkt ein.

Satz 57: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und V der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle I_a I_b I_c$. Dann steht $\ell(V, I_c)$ senkrecht auf $\ell(A, B)$. Dasselbe gilt für $\ell(V, I_a)$ und $\ell(B, C)$ und auch für $\ell(V, I_b)$ und $\ell(A, C)$.

Beweis: Da I_a auf der Symmetrale der Außenwinkel bei B und bei C liegt, erhalten wir $\angle CBI_a = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$ und $\angle BCI_a = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$. Da die Winkelsumme im Dreieck $\triangle BCI_a$ gleich 180° ist, erhalten wir $\angle BI_a C = \frac{\beta + \gamma}{2}$, woraus $\angle I_c I_a I_b = \frac{\beta + \gamma}{2}$ folgt. Dieser Winkel ist kleiner als 90° . Der zugehörige Zentriwinkel ist $\angle I_c V I_b$. Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt daher $\angle I_c V I_b = \beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$. Wegen $|I_c V| = |V I_b|$ ist das Dreieck $\triangle I_c V I_b$ gleichschenkelig. Somit gilt $\angle I_b I_c V = \frac{\alpha}{2}$ und daher auch $\angle A I_c V = \frac{\alpha}{2}$. Da I_c auf der Symmetrale des Außenwinkel bei A liegt, gilt andererseits $\angle B A I_c = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Somit schließen die Geraden $\ell(I_c, V)$ und $\ell(A, B)$ einen rechten Winkel ein.

Die beiden anderen Aussagen beweist man analog. \square

Jetzt können wir einen weiteren besonderen Punkt für das Dreieck $\triangle ABC$ einführen. Der Bevanpunkt ist der Schnittpunkt der Senkrechten auf \overline{AB} durch I_c (oder Q_c), der Senkrechten auf \overline{BC} durch I_a (oder Q_a) und der Senkrechten auf \overline{AC} durch I_b (oder Q_b). Nach Satz 57 schneiden diese drei Senkrechten einander im Umkreismittelpunkt V des Dreiecks $\triangle I_a I_b I_c$. Somit ist V der Bevanpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$.

Um weitere Geraden zu finden, auf denen besondere Punkte liegen, beweisen wir die beiden folgenden Sätze.

Satz 58: Seien g und t Gerade und D_1, D_2 und D_3 verschiedene Punkte auf g . Seien d_1, d_2 und d_3 zueinander parallele Gerade durch D_1, D_2 und D_3 , die t in den Punkten R_1, R_2 und R_3 schneiden. Dann gilt $\frac{D_1 D_2}{D_1 D_3} = \frac{R_1 R_2}{R_1 R_3}$.

Beweis: Sei \tilde{t} die Parallele zu t durch D_1 . Seien $\tilde{R}_1 = D_1, \tilde{R}_2$ und \tilde{R}_3 die Schnittpunkte von d_1, d_2 und d_3 mit \tilde{t} . Dann folgt $\frac{D_1 D_2}{D_1 D_3} = \frac{D_1 \tilde{R}_2}{D_1 \tilde{R}_3}$ aus dem Strahlensatz. Da \tilde{t} parallel zu t liegt, gilt auch $D_1 \tilde{R}_2 = R_1 R_2$ und $D_1 \tilde{R}_3 = R_1 R_3$. Damit ergibt sich $\frac{D_1 D_2}{D_1 D_3} = \frac{R_1 R_2}{R_1 R_3}$. \square

Satz 59: Seien D_1, D_2 und D_3 verschiedene Punkte auf einer Gerade g und E_1, E_2 und E_3 verschiedene Punkte auf einer Gerade h , sodass $\frac{D_1 D_2}{D_1 D_3} = \frac{E_1 E_2}{E_1 E_3}$ gilt. Weiters seien d_1, d_2 und d_3 zueinander parallele Gerade durch D_1, D_2 und D_3 und e_1, e_2 und e_3 zueinander parallele Gerade durch E_1, E_2 und E_3 , die aber nicht parallel zu d_1, d_2 und d_3 liegen. Sei R_1 der Schnittpunkt von d_1 und e_1 , sei R_2 der von d_2 und e_2 und R_3 der von d_3 und e_3 . Dann liegen die Punkte R_1, R_2 und R_3 auf einer Gerade und es gilt $\frac{R_1 R_2}{R_1 R_3} = \frac{D_1 D_2}{D_1 D_3}$.

Beweis: Sei t die Gerade durch R_1 und R_2 . Sei R_d der Schnittpunkt von t und d_3 und R_e der von t und e_3 . Nach Satz 58 gilt dann $\frac{D_1 D_2}{D_1 D_3} = \frac{R_1 R_2}{R_1 R_d}$ und $\frac{E_1 E_2}{E_1 E_3} = \frac{R_1 R_2}{R_1 R_e}$. Da $\frac{D_1 D_2}{D_1 D_3} = \frac{E_1 E_2}{E_1 E_3}$ vorausgesetzt wird, erhalten wir $R_1 R_d = R_1 R_e$. Da die Punkte R_1, R_d und R_e auf der Geraden t liegen, muss $R_d = R_e$ gelten. Da R_d auf d_3 und R_e auf e_3 liegt und R_3 der Schnittpunkt von d_3 und e_3 ist, muss auch $R_3 = R_d = R_e$ gelten. Somit liegt R_3 auf t und es gilt $\frac{R_1 R_2}{R_1 R_3} = \frac{D_1 D_2}{D_1 D_3}$. \square

Satz 60: Der Inkreismittelpunkt I , der Umkreismittelpunkt U und der Bevanpunkt V eines Dreiecks $\triangle ABC$ liegen auf einer Gerade, wobei U die Strecke \overline{IV} halbiert.

Beweis: Die Fußpunkte der Lote von I , U und V auf $\ell(A, B)$ sind P_c , M_c und Q_c . Wegen $AP_c = s - a$, $AM_c = \frac{c}{2}$ und $AQ_c = s - b$ erhalten wir $M_cP_c = AP_c - AM_c = s - a - \frac{c}{2} = \frac{b-a}{2}$ und $M_cQ_c = AQ_c - AM_c = s - b - \frac{c}{2} = \frac{a-b}{2}$. Damit ist $\frac{M_cP_c}{M_cQ_c} = -1$ bewiesen. Die Fußpunkte der Lote von I , U und V auf $\ell(B, C)$ sind P_a , M_a und Q_a . Genauso wie oben zeigt man $\frac{M_aP_a}{M_aQ_a} = -1$. Aus Satz 59 folgt jetzt, dass die Punkte I , U und V auf einer Gerade liegen und dass $\frac{UI}{UV} = -1$ gilt, das heißt U halbiert die Strecke \overline{IV} .

Wenn $|AC| = |BC|$ gilt, dann fallen P_c , M_c und Q_c zusammen. Wenn $|AC| = |AB|$ gilt, dann fallen P_a , M_a und Q_a zusammen. Im Fall eines gleichschenkeligen Dreiecks wählen wir daher die Bezeichnung so, dass \overline{AB} und \overline{BC} die gleich langen Schenkel sind. In einem gleichseitigen Dreieck gilt $I = U = V$. \square

Wir definieren einen weiteren besonderen Punkt des Dreiecks $\triangle ABC$. Der Spiekerpunkt K ist der Inkreismittelpunkt des Seitenmittendreiecks $\triangle M_aM_bM_c$. Jetzt finden wir eine weitere Gerade, auf der drei besondere Punkte liegen.

Satz 61: Der Bevanpunkt V , der Spiekerpunkt K und der Höhenschnittpunkt H eines Dreiecks $\triangle ABC$ liegen auf einer Gerade und K halbiert die Strecke \overline{VH} .

Beweis: Der Fußpunkt des Lots von V auf $\ell(A, B)$ ist Q_c . Die Fußpunkte der Lote von K und H auf $\ell(A, B)$ nennen wir K_c und H_c . Es gilt $AQ_c = s - b$.

Der Fußpunkt des Lots von K auf $\overline{M_bM_a}$ ist P_c^* . Es gilt $M_bP_c^* = \frac{s-b}{2}$. Sei E der Fußpunkt des Lots von M_b auf $\ell(A, B)$. Es gilt $AE = \frac{1}{2}AH_c$ und $EK_c = M_bP_c^*$. Daraus folgt

$$AK_c = AE + EK_c = \frac{1}{2}AH_c + \frac{s-b}{2}.$$

Wir können jetzt berechnen

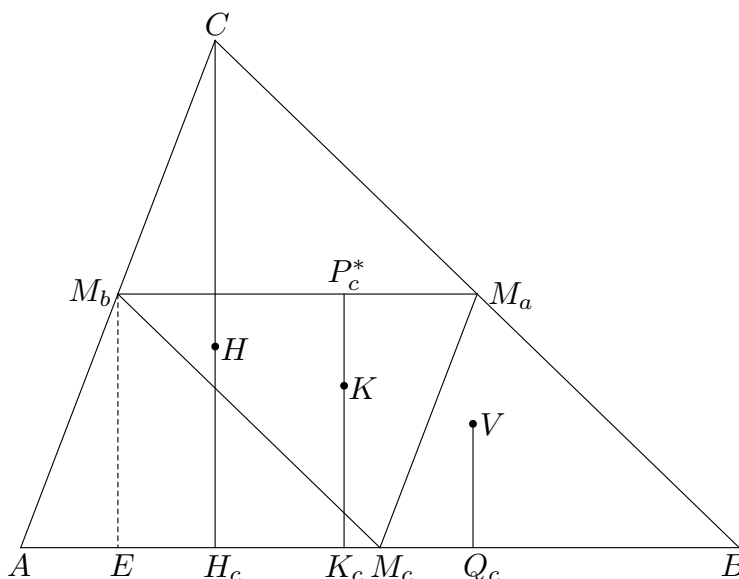
$$K_cQ_c = AQ_c - AK_c = \frac{s-b}{2} - \frac{1}{2}AH_c.$$

$$K_cH_c = AH_c - AK_c = \frac{1}{2}AH_c - \frac{s-b}{2}.$$

Damit ist $\frac{K_cQ_c}{K_cH_c} = -1$ bewiesen.

Analog zeigt man $\frac{K_aQ_a}{K_aH_a} = -1$, wobei Q_a , K_a und H_a die Fußpunkte der Lote von V , K und H auf $\ell(B, C)$ sind. Aus Satz 59 folgt jetzt, dass die Punkte V , K und H auf einer Gerade liegen und dass $\frac{KV}{KH} = -1$ gilt, das heißt K halbiert die Strecke \overline{VH} .

Im Fall eines gleichschenkeligen Dreiecks wählen wir die Bezeichnung so, dass \overline{AB} und \overline{CB} die gleich langen Schenkel sind. Dann fallen die oben verwendeten Fußpunkte nicht in einem Punkt zusammen. In einem gleichseitigen Dreieck gilt $V = K = H$. \square



Wir definieren einen weiteren besonderen Punkt des Dreiecks $\triangle ABC$. Der Longchamps-punkt L ist der am Umkreismittelpunkt U gespiegelte Höhenschnittpunkt H . Jetzt können wir noch einen weiteren Satz dieser Art beweisen.

Satz 62: Der Longchampspunkt L , der Bevanpunkt V und der Nagelpunkt N eines Dreiecks $\triangle ABC$ liegen auf einer Gerade und V halbiert die Strecke \overline{LN} .

Beweis: Der Fußpunkt des Lots von V auf $\ell(A, B)$ ist Q_c . Die Fußpunkte der Lote von L , N und H auf $\ell(A, B)$ nennen wir L_c , N_c und H_c . Es gilt $AQ_c = s - b$. Nach Definition des Longchampspunktes L gilt $\frac{UL}{UH} = -1$. Daraus folgt $\frac{M_c L_c}{M_c H_c} = -1$ wegen Satz 58. Es gilt also $M_c L_c = -M_c H_c$ und damit auch

$$AL_c = AM_c + M_c L_c = M_c B - M_c H_c = H_c B.$$

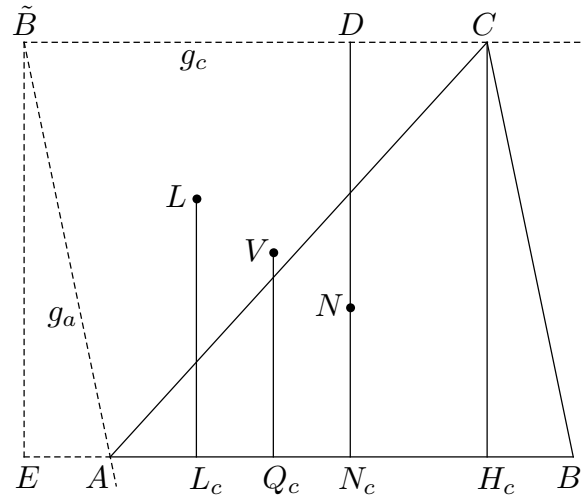
Um AN_c zu finden, zeichnen wir eine Parallele g_c zu $\ell(A, B)$ durch C , eine Parallele g_a zu $\ell(B, C)$ durch A und schließlich eine Parallele g_b zu $\ell(A, C)$ durch B . Diese Parallelen bilden ein Dreieck $\triangle \tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$, dessen Seitenmittendreieck das Dreieck $\triangle ABC$ ist. Nach Satz 54 ist

N der Inkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle \tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$. Ist D der Fußpunkt des Lots von N auf $g_c = \ell(\tilde{B}, \tilde{C})$, dann gilt $\tilde{B}D = 2(s - b)$, da die Seiten von $\triangle \tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ ja doppelt so lang sind wie die von $\triangle ABC$. Ist E der Fußpunkt des Lots von \tilde{B} auf $\ell(A, B)$, dann gilt $EA = H_c B$ und $EN_c = \tilde{B}D$. Es folgt $AN_c = EN_c - EA = 2(s - b) - H_c B$. Wir können jetzt berechnen

$$Q_c L_c = AL_c - AQ_c = H_c B - (s - b) \quad \text{und} \quad Q_c N_c = AN_c - AQ_c = (s - b) - H_c B$$

Damit ist $\frac{Q_c L_c}{Q_c N_c} = -1$ bewiesen. Analog zeigt man $\frac{Q_a L_a}{Q_a N_a} = -1$, wobei L_a , Q_a und N_a die Fußpunkte der Lote von L , V und N auf $\ell(B, C)$ sind. Aus Satz 59 folgt jetzt, dass die Punkte L , V und N auf einer Gerade liegen und dass $\frac{VL}{VN} = -1$ gilt, das heißt V halbiert die Strecke \overline{LN} .

Im Fall eines gleichschenkeligen Dreiecks wählen wir die Bezeichnung so, dass \overline{AB} und \overline{CB} die gleich langen Schenkel sind. In einem gleichseitigen Dreieck gilt $L = V = N$. \square



3. Weitere Geraden und der Symmedianpunkt

Wir verwenden Satz 59, um weitere Geraden zu finden, auf denen mehr als zwei besondere Punkte liegen. Wir untersuchen zuerst den Longchampspunkt L , den Gergonnepunkt G und den Inkreismittelpunkt I .

Satz 63: Sei $\triangle ABC$ ein nicht gleichschenkliges Dreieck mit Longchampspunkt L , Gergonnepunkt G und Inkreismittelpunkt I . Seien L_a , G_a und P_a die Fußpunkte der Lote von L , G und I auf $\ell(B, C)$, seien L_b , G_b und P_b die auf $\ell(A, C)$ und L_c , G_c und P_c die auf $\ell(A, B)$. Dann gilt $\frac{L_a P_a}{P_a G_a} = \frac{L_b P_b}{P_b G_b} = \frac{L_c P_c}{P_c G_c}$.

Beweis: Der Gergonnepunkt G ist der Schnittpunkt der Geraden $\ell(A, P_a)$, $\ell(B, P_b)$ und $\ell(C, P_c)$. Aus einer Ergänzung zum Satz von Ceva (Satz 132(b)) folgt $\frac{CG}{GP_c} = \frac{CP_a}{P_a B} + \frac{CP_b}{P_b A}$. Nun gilt $CP_a = CP_b = s - c$, $P_a B = s - b$ und $P_b A = s - a$. Damit ergibt sich

$$\frac{CG}{GP_c} = \frac{CP_a}{P_a B} + \frac{CP_b}{P_b A} = \frac{s-c}{s-b} + \frac{s-c}{s-a} = \frac{(s-c)(2s-a-b)}{(s-a)(s-b)} = \frac{(s-c)c}{(s-a)(s-b)}$$

Es folgt $\frac{P_c C}{P_c G} = \frac{P_c G + GC}{P_c G} = 1 + \frac{GC}{P_c G} = 1 + \frac{(s-c)c}{(s-a)(s-b)} = \frac{(s-a)(s-b) + (s-c)c}{(s-a)(s-b)}$. Wir berechnen $(s-a)(s-b) + (s-c)c = s^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$ und erhalten $\frac{P_c G}{P_c C} = \frac{2(s-a)(s-b)}{2s^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}$.

Sei H_c der Fußpunkt der Höhe durch C . Dann gilt $AL_c = H_cB = a \cos \beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2c}$. Wegen $AP_c = s - a$ und $P_cB = s - b$ folgt $L_cP_c = AP_c - AL_c = s - a - \frac{a^2+c^2-b^2}{2c} = s \frac{b-a}{c}$ und $P_cH_c = P_cB - H_cB = s - b - \frac{a^2+c^2-b^2}{2c} = (\frac{s}{c} - 1)(b - a)$.

Da $\overline{GG_c}$ und $\overline{HH_c}$ senkrecht auf $\ell(A, B)$ stehen und somit parallel zueinander liegen, erhalten wir $\frac{P_cG_c}{P_cH_c} = \frac{P_cG}{P_cC}$ aus dem Strahlensatz. Mit Hilfe der oben gefundenen Formeln ergibt sich $P_cG_c = \frac{P_cG}{P_cC} P_cH_c = \frac{2(s-a)(s-b)}{2s^2-(a^2+b^2+c^2)} (\frac{s}{c} - 1)(b - a) = \frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{2s^2-(a^2+b^2+c^2)} \frac{b-a}{c}$. Mit obiger Formel für L_cP_c erhalten wir schließlich $\frac{L_cP_c}{P_cG_c} = \frac{2s^3-s(a^2+b^2+c^2)}{2(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Damit ist $\frac{L_cP_c}{P_cG_c}$ berechnet. Mit einer analogen Rechnung erhält man auch $\frac{L_aP_a}{P_aG_a}$ und $\frac{L_bP_b}{P_bG_b}$, wobei die Seitenlängen a , b und c ihre Plätze vertauschen. Da sich das Endergebnis $\frac{2s^3-s(a^2+b^2+c^2)}{2(s-a)(s-b)(s-c)}$ bei dieser Vertauschung nicht ändert, ist $\frac{L_aP_a}{P_aG_a} = \frac{L_bP_b}{P_bG_b} = \frac{L_cP_c}{P_cG_c}$ gezeigt. \square

Damit erhalten wir

Satz 64: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Der Longchampspunkt L , der Gergonnepunkt G und der Inkreismittelpunkt I liegen auf einer Geraden.

Beweis: In Satz 63 haben wir $\frac{L_bP_b}{P_bG_b} = \frac{L_cP_c}{P_cG_c}$ für die Fußpunkte der Lote von den Punkten L , G und I auf die Geraden $\ell(A, C)$ und $\ell(A, B)$ gezeigt. Aus Satz 59 folgt jetzt, dass die Punkte L , G und I auf einer Gerade liegen. Ist das Dreieck gleichschenkelig, dann liegen die Punkte L , G und I auf der Symmetrieachse des Dreiecks.. \square

Indem wir diesen Satz auf das Seitenmittendreieck anwenden, erhalten wir auch

Satz 65: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Der Mittenpunkt T , der Spiekerpunkt K und der Höhenschnittpunkt H liegen auf einer Geraden.

Beweis: Nach Satz 55 ist T der Gergonnepunkt des Seitenmittendreiecks $\triangle M_aM_bM_c$. Nach Definition ist K der Inkreismittelpunkt des Seitenmittendreiecks $\triangle M_aM_bM_c$. Es bleibt zu zeigen, dass H der Longchampspunkt des Dreiecks $\triangle M_aM_bM_c$ ist. Dann folgt aus Satz 64 angewendet auf $\triangle M_aM_bM_c$, dass T , K und H auf einer Geraden liegen.

Seien U und Z die Mittelpunkte des Umkreises und des Neunpunktkreises des Dreiecks $\triangle ABC$. Die Seitensymmetralen des Dreiecks $\triangle ABC$ sind die Höhen des Seitenmittendreiecks $\triangle M_aM_bM_c$ und der Neunpunktkreis geht durch die Seitenmitten. Somit ist U der Höhenschnittpunkt und Z der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle M_aM_bM_c$. Den Longchampspunkt des Dreiecks $\triangle M_aM_bM_c$ erhält man, indem man U an Z spiegelt. Da Z der Mittelpunkt der Strecke \overline{UH} ist, erhält man H als Longchampspunkt des Dreiecks $\triangle M_aM_bM_c$. \square

In Satz 61 wurde gezeigt, dass der Bevanpunkt V , der Spiekerpunkt K und der Höhenschnittpunkt H eines Dreiecks $\triangle ABC$ auf einer Gerade liegen. Satz 65 zeigt, dass auch der Mittenpunkt T auf dieser Gerade liegt.

Einen weiteren besonderen Punkt können wir noch behandeln, nämlich den Symmedianpunkt, der auch Grebepunkt oder Lemoinepunkt genannt wird.

Zuerst führen wir die Symmedianen des Dreiecks $\triangle ABC$ ein. Spiegelt man die Schwerlinie durch den Eckpunkt A an der Winkelsymmetrale durch A , dann erhält man die Symmediane f_A durch A . Ganz analog sind die Symmedianen f_B und f_C durch die Eckpunkte B und C definiert.

Satz 66: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Sei D_a der Schnittpunkt von f_A mit $\ell(B, C)$, sei D_b der von f_B mit $\ell(A, C)$ und D_c der von f_C mit $\ell(A, B)$. Dann gilt $\frac{AD_c}{D_cB} = \frac{b^2}{a^2}$, $\frac{BD_a}{D_aC} = \frac{c^2}{b^2}$ und $\frac{CD_b}{D_bA} = \frac{a^2}{c^2}$. Die drei Symmedianen f_a , f_b und f_c schneiden einander in einem Punkt E , dem Symmedianpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$.

Beweis: Sei P ein beliebiger Punkt auf der Seite \overline{AB} . Sei $\varphi = \angle ACP$ und $\psi = \angle PCB$. Weiters sei $\delta = \angle APC$ und $\varepsilon = \angle BPC$. Wegen $\delta + \varepsilon = 180^\circ$ gilt $\sin \delta = \sin \varepsilon$. Der Sinussatz für die Dreiecke $\triangle ACP$ und $\triangle BCP$ ergibt dann $\frac{|AP|}{\sin \varphi} = \frac{b}{\sin \delta}$ und $\frac{|PB|}{\sin \psi} = \frac{a}{\sin \varepsilon}$. Durch Division dieser beiden Gleichungen erhalten wir $\frac{AP}{PB} = \frac{|AP|}{|PB|} = \frac{b \sin \varphi}{a \sin \psi}$.

Sei jetzt M der Mittelpunkt der Seite \overline{AB} . Sei $\varrho = \angle ACM$ und $\chi = \angle MCB$. Dann gilt $1 = \frac{AM}{MB} = \frac{b \sin \varrho}{a \sin \chi}$, das heißt $\frac{\sin \chi}{\sin \varrho} = \frac{b}{a}$. Nach Definition der Symmediane gilt $\angle ACD_c = \chi$ und $\angle D_cCB = \varrho$ und somit $\frac{AD_c}{D_cB} = \frac{b \sin \chi}{a \sin \varrho}$. Es folgt $\frac{AD_c}{D_cB} = \frac{b^2}{a^2}$. Analog zeigt man, dass auch $\frac{BD_a}{D_aC} = \frac{c^2}{b^2}$ und $\frac{CD_b}{D_bA} = \frac{a^2}{c^2}$ gilt.

Wir erhalten somit $\frac{D_cA}{D_cB} \cdot \frac{D_aB}{D_aC} \cdot \frac{D_bC}{D_bA} = -\frac{AD_c}{D_cB} \cdot \frac{BD_a}{D_aC} \cdot \frac{CD_b}{D_bA} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{a^2}{c^2} = -1$. Nach dem Satz von Ceva schneiden die drei Symmedianen einander in einem Punkt. \square

Satz 67: Sei $\triangle ABC$ ein nicht gleichschenkliges Dreieck mit Symmedianpunkt E , Inkreismittelpunkt I und Mittenpunkt T . Seien E_a , P_a und T_a die Fußpunkte der Lote von E , I und T auf $\ell(B, C)$, seien E_b , P_b und T_b die Fußpunkte der Lote auf $\ell(A, C)$ und E_c , P_c und T_c die Fußpunkte der Lote auf $\ell(A, B)$. Dann gilt $\frac{P_aE_a}{P_aT_a} = \frac{P_bE_b}{P_bT_b} = \frac{P_cE_c}{P_cT_c}$.

Beweis: Der Symmedianpunkt E ist der Schnittpunkt der Geraden $\ell(A, D_a)$, $\ell(B, D_b)$ und $\ell(C, D_c)$. Aus einer Ergänzung zum Satz von Ceva (Satz 132(b)) folgt $\frac{AE}{ED_a} = \frac{AD_c}{D_cB} + \frac{AD_b}{D_bC}$. Nach Satz 66 gilt $\frac{AD_c}{D_cB} = \frac{b^2}{a^2}$ und $\frac{AD_b}{D_bC} = \frac{D_bA}{CD_b} = \frac{c^2}{a^2}$. Es folgt $\frac{AE}{ED_a} = \frac{b^2+c^2}{a^2}$ und daraus dann $\frac{AD_a}{AE} = 1 + \frac{ED_a}{AE} = 1 + \frac{a^2}{b^2+c^2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{b^2+c^2}$.

Sei F der Fußpunkt des Lots von D_a auf $\ell(A, B)$. Da $|BD_a| + |D_aC| = a$ und $\frac{BD_a}{D_aC} = \frac{c^2}{b^2}$ nach Satz 66 gilt, erhalten wir $|BD_a| = \frac{ac^2}{b^2+c^2}$ (und $|CD_a| = \frac{ab^2}{b^2+c^2}$). Daraus folgt dann $FB = \frac{ac^2}{b^2+c^2} \cos \beta = \frac{c(a^2+c^2-b^2)}{2(b^2+c^2)}$ und $AF = AB - FB = c - \frac{c(a^2+c^2-b^2)}{2(b^2+c^2)} = \frac{c(-a^2+c^2+3b^2)}{2(b^2+c^2)}$.

Mit Hilfe des Strahlensatzes erhalten wir schließlich $AE_c = AF \cdot \frac{AE}{AD_a} = \frac{c(-a^2+c^2+3b^2)}{2(a^2+b^2+c^2)}$. Es folgt $P_cE_c = AE_c - AP_c = \frac{c(-a^2+c^2+3b^2)}{2(a^2+b^2+c^2)} - (s-a)$. Bringt man das auf gemeinsamen Nenner und vereinfacht, dann ergibt sich $P_cE_c = \frac{a^3 - a^2b + ab^2 - b^3 - 2a^2c + 2b^2c + ac^2 - bc^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$.

Wir müssen P_cT_c berechnen. Dazu verwenden wir Satz 63. Im Beweis dieses Satzes wurde $P_cG_c = \frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{2s^2-(a^2+b^2+c^2)} \frac{b-a}{c}$ gezeigt, wobei G_c der Fußpunkt des Lots vom Gergonnepunkt G auf die Seite \overline{AB} ist. Es folgt $BG_c = P_cG_c - P_cB = \frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{2s^2-(a^2+b^2+c^2)} \frac{b-a}{c} - (s-b)$.

Sei T_c^* der Fußpunkt des Lots von T auf $\ell(M_a, M_b)$. Nach Satz 55 ist T der Gergonnepunkt des Seitenmittendreiecks $\triangle M_aM_bM_c$. Daher gilt $M_bT_c^* = -\frac{1}{2}BG_c$. Damit erhalten wir dann $AT_c = \frac{b}{2} \cos \alpha + M_bT_c^* = \frac{b^2+c^2-a^2}{4c} - \frac{1}{2}BG_c$. Mit Hilfe obiger Formel für BG_c folgt $P_cT_c = AT_c - AP_c = \frac{b^2+c^2-a^2}{4c} - \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{2s^2-(a^2+b^2+c^2)} \frac{b-a}{c} + \frac{s-b}{2} - (s-a)$. Mit Hilfe eines Computeralgebrasystems ergibt sich $P_cT_c = \frac{a^3 - a^2b + ab^2 - b^3 - 2a^2c + 2b^2c + ac^2 - bc^2}{2(a^2+b^2+c^2) - 4s^2}$.

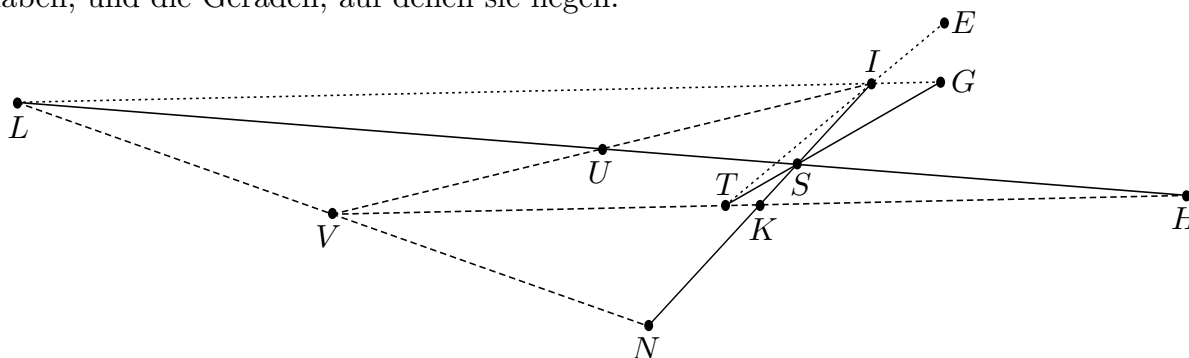
Mit Hilfe dieser Formeln für P_cE_c und P_cT_c erhalten wir $\frac{P_cE_c}{P_cT_c} = \frac{a^2+b^2+c^2-2s^2}{a^2+b^2+c^2}$. Mit einer analogen Rechnung erhält man auch $\frac{P_aE_a}{P_aT_a}$ und $\frac{P_bE_b}{P_bT_b}$, wobei die Seitenlängen a , b und c

ihre Plätze vertauschen. Da sich das Endergebnis $\frac{a^2+b^2+c^2-2s^2}{a^2+b^2+c^2}$ bei dieser Vertauschung nicht ändert, ist $\frac{P_a E_a}{P_a T_a} = \frac{P_b E_b}{P_b T_b} = \frac{P_c E_c}{P_c T_c}$ gezeigt. \square

Satz 68: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Der Symmedianpunkt E , der Inkreismittelpunkt I und der Mittenpunkt T liegen auf einer Geraden.

Beweis: In Satz 67 haben wir $\frac{P_b E_b}{P_b T_b} = \frac{P_c E_c}{P_c T_c}$ für die Fußpunkte der Lote von den Punkten E , T und I auf die Geraden $\ell(A, C)$ und $\ell(A, B)$ gezeigt. Aus Satz 59 folgt jetzt, dass die Punkte E , T und I auf einer Gerade liegen. Ist das Dreieck gleichschenkelig, dann liegen die Punkte E , T und I auf der Symmetrieachse des Dreiecks. \square

In der folgenden Darstellung sind alle besonderen Punkte eingetragen, die wir behandelt haben, und die Geraden, auf denen sie liegen.



Die Geraden, die durch den Schwerpunkt S gehen, sind als durchgehende Linien eingezeichnet. Auf der Eulergerade liegen der Höhenschnittpunkt H , der Schwerpunkt S , der Umkreismittelpunkt U und der Longchampspunkt L . Die anderen beiden durchgehenden Geraden sind die aus Satz 56. Auf der einen liegen der Mittenpunkt T , der Schwerpunkt S und der Gergonnepunkt G . Auf der anderen liegen der Inkreismittelpunkt I , der Schwerpunkt S und der Nagelpunkt N . Sie geht auch durch den Spiekerpunkt K , da dieser der Inkreismittelpunkt des Seitenmittendreiecks ist und daher $\varphi(I) = K$ für die im Beweis von Satz 56 verwendete zentrische Streckung gilt.

Die drei Geraden durch den Bevanpunkt sind strichliert gezeichnet. Die eine ist die aus Satz 60. Auf dieser liegen der Inkreismittelpunkt I , der Umkreismittelpunkt U und der Bevanpunkt V . Die zweite ist die aus Satz 62. Auf dieser liegen der Longchampspunkt L , der Bevanpunkt V und der Nagelpunkt N . Die dritte ist die aus Satz 61. Auf dieser liegen der Bevanpunkt V , der Spiekerpunkt K und der Höhenschnittpunkt H . Nach Satz 65 liegt auch der Mittenpunkt T auf dieser Gerade.

Die Geraden aus Satz 64 und Satz 68 sind punktiert gezeichnet. Auf der ersten liegen der Longchampspunkt L , der Inkreismittelpunkt I und der Gergonnepunkt G . Auf der zweiten liegen der Symmedianpunkt E , der Inkreismittelpunkt I und der Mittenpunkt T .

Üblicherweise werden die besonderen Punkte nicht mit synthetischen Methoden untersucht, sondern mit Hilfe baryzentrischer Koordinaten. Baryzentrischen Koordinaten werden in diesem Skriptum nicht behandelt. Man findet sie zum Beispiel in “Paul Yiu: *Introduction to the Geometry of the Triangle*, 2002”

Es werden laufend neue besondere Punkte erfunden. Das nimmt inzwischen unüberschaubare Ausmaße an. Siehe <https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>.

Auch für Vierecke werden besondere Punkte untersucht und noch einiges mehr, siehe <https://www.chrisvantienhoven.nl/mathematics/encyclopedia>

VI. Das Vierseit

1. Die zweite Steinergerade eines Dreiecks	57
2. Umkreise und Höhenschnittpunkte im Vierseit	58
3. Die Diagonalen eines Vierseits	60

Ein Vierseit besteht aus vier Geraden in allgemeiner Lage. Keine zwei Geraden liegen parallel und keine drei Geraden gehen durch einen Punkt. Diese vier Geraden haben dann sechs Schnittpunkte und sie bilden vier Dreiecke. Lässt man eine Gerade weg, so bleibt ein Dreieck. Diese Figur wird in diesem Kapitel untersucht.

Der erste Abschnitt dieses Kapitels dient als Vorbereitung. Es wird ein Satz von Steiner über das Dreieck bewiesen. Ein Punkt liegt genau dann auf dem Umkreis des Dreiecks, wenn die drei Punkte, die man durch Spiegelung dieses Punktes an den drei Dreiecksseiten erhält, auf einer Gerade liegen. Diese Gerade heißt zweite Steinergerade und geht auch noch durch den Höhenschnittpunkt. Den Beweis führen wir mit Hilfe kartesischer Koordinaten. (Es gibt es auch eine erste Steinergerade, die wir hier nicht brauchen. Sie wird später in Kapitel VIII behandelt – Satz 113).

Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels wird dieser Satz von Steiner verwendet, um das Vierseit zu untersuchen. Die Umkreise der vier Dreiecke eines Vierseits gehen durch einen Punkt, den sogenannten Miquelpunkt. Die vier Punkte, die man erhält, wenn man den Miquelpunkt an den vier Geraden des Vierseits spiegelt, liegen auf einer Geraden, die wir die Steinergerade des Vierseits nennen. Die Höhenschnittpunkte der vier Dreiecke liegen dann ebenfalls auf der Steinergerade. Mit Hilfe des Peripheriewinkelsatzes zeigen wir dann, dass die Umkreismittelpunkte der vier Dreiecke und der Miquelpunkt auf einem Kreis liegen.

Im dritten Abschnitt dieses Kapitels werden die drei Diagonalen des Vierseits untersucht. Das sind die Verbindungsstrecken zwischen je zwei der sechs Punkte, die nicht durch die vier Geraden des Vierseits verbunden sind. Die Mittelpunkte dieser Diagonalen liegen dann auf einer Gerade. Diese steht senkrecht auf die Steinergerade des Vierseits. Die drei Kreise, deren Durchmesser die Diagonalen sind, sind entweder disjunkt, haben zwei Punkte, die auf der Steinergerade liegen, gemeinsam, oder alle drei Kreise berühren die Steinergerade im selben Punkt (Satz von Gauß-Bodenmiller). Weiters kann man zeigen, dass der Umkreismittelpunkt des Dreiecks, dessen Seiten die Verlängerungen der drei Diagonalen sind, auf der Steinergerade liegt. Bei diesen Beweisen spielen Kreise, die senkrecht aufeinander stehen, und die Polare eines Kreises eine wesentliche Rolle.

1. Die zweite Steinergerade eines Dreiecks

Für den Satz von Steiner und die anschließenden Übungen brauchen wir folgenden Satz.

Satz 69: Projiziert man den Punkt $(p|q)$ auf die Gerade g mit der Gleichung $mx + ny = h$, dann erhält man den Punkt $(\frac{n^2p - mnq + mh}{m^2 + n^2} | \frac{m^2q - mnp + nh}{m^2 + n^2})$. Spiegelt man den Punkt $(p|q)$ an dieser Gerade g , dann erhält man den Punkt $(\frac{-2mnq + n^2p + 2mh - m^2p}{m^2 + n^2} | \frac{m^2q - 2mnp + 2nh - n^2q}{m^2 + n^2})$.

Beweis: Die Gerade durch $(p|q)$ senkrecht auf g hat die Gleichung $n(x - p) - m(y - q) = 0$. Ihr Schnittpunkt mit der Gerade g ist $(\frac{n^2p - mnq + mh}{m^2 + n^2} | \frac{m^2q - mnp + nh}{m^2 + n^2})$, das ist die Projektion des Punktes $(p|q)$ auf die Gerade g . Ist \mathbf{v} der Ortsvektor dieses Schnittpunkts, dann ist

$\mathbf{v} - ((\frac{p}{q}) - \mathbf{v}) = 2\mathbf{v} - (\frac{p}{q}) = \frac{2}{m^2 + n^2} (\frac{n^2p - mnq + mh}{m^2q - mnp + nh}) - (\frac{p}{q}) = \frac{1}{m^2 + n^2} (\frac{n^2p - 2mnq + 2mh - m^2p}{m^2q - 2mnp + 2nh - n^2q})$
 der Ortsvektor zum gespiegelten Punkt. \square

Satz 70 (Satz von Steiner) Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck, P ein beliebiger Punkt und P_a, P_b und P_c die Punkte, die man erhält, wenn man P an den drei Seiten des Dreiecks spiegelt. Genau dann liegt P auf dem Umkreis, wenn die Punkte P_a, P_b und P_c auf einer Geraden liegen, der sogenannten zweiten Steinergeraden. Der Höhenschnittpunkt des Dreiecks liegt dann ebenfalls auf der Steinergeraden.

Beweis: Wir legen das Dreieck so in ein Koordinatensystem, dass der Eckpunkt A die Koordinaten $(u|0)$, der Eckpunkt B die Koordinaten $(v|0)$ und der Eckpunkt C die Koordinaten $(0|w)$ hat, wobei $u < v$ und $w > 0$ gilt.

Seien $(x|y)$ die Koordinaten des Punktes P . Da die Seite \overline{AB} auf der x -Achse liegt, sind $(x | -y)$ die Koordinaten des Punktes P_c . Die Trägergerade der Seite \overline{BC} hat Normalvektor $(\begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix}) = (\begin{smallmatrix} w \\ v \end{smallmatrix})$ und in ihrer Gleichung auf der rechten Seite die Konstante $h = \langle (\begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} v \\ 0 \end{smallmatrix}) \rangle = vw$. Setzt man das in die Formel aus Satz 69 ein, so ergibt sich $P_a = (\frac{v^2x - 2vwy + 2vw^2 - w^2x}{v^2 + w^2} | \frac{w^2y - 2vwx + 2v^2w - v^2y}{v^2 + w^2})$. Es folgt $\overrightarrow{P_cP_a} = \frac{2w}{v^2 + w^2} (\frac{vw - vy - wx}{wy - vx + v^2})$.

Wenn man dieselbe Rechnung mit der Dreiecksseite \overline{AC} statt mit \overline{BC} , das heißt mit u statt mit v , durchführt, dann erhält man $\overrightarrow{P_cP_b} = \frac{2w}{u^2 + w^2} (\frac{uw - uy - wx}{wy - ux + u^2})$. Die drei Punkte P_c, P_a und P_b liegen genau dann auf einer Geraden, wenn die Determinante D , die die Vektoren $\overrightarrow{P_cP_b}$ und $\overrightarrow{P_cP_a}$ als Spalten hat, gleich null ist, das heißt wenn

$$\frac{2w}{u^2 + w^2} \frac{2w}{v^2 + w^2} \begin{vmatrix} uw - uy - wx & vw - vy - wx \\ wy - ux + u^2 & wy - vx + v^2 \end{vmatrix} = 0$$

gilt. Rechnet man diese Determinante aus, kürzt und fasst zusammen, so erhält man

$$(v - u)wx^2 - (v^2 - u^2)wx + (v - u)wy^2 - (v - u)(w^2 + uv)y + (v - u)uvw = 0$$

Dividiert man durch $(v - u)$, dann hat man

$Dividiert man noch durch w und ergänzt zu vollständigen Quadraten, so ergibt sich$

$$x^2 - (u + v)x + \frac{(u+v)^2}{4} + y^2 - (\frac{uv}{w} + w)y + (\frac{uv}{2w} + \frac{w}{2})^2 = \frac{u^2}{4} + \frac{uv}{2} + \frac{v^2}{4} + \frac{u^2v^2}{4w^2} + \frac{uv}{2} + \frac{w^2}{4} - uv$$

Fasst man zusammen, dann hat man schließlich

$$(x - \frac{u+v}{2})^2 + (y - (\frac{uv}{2w} + \frac{w}{2}))^2 = \frac{(u^2 + w^2)(v^2 + w^2)}{4w^2}$$

Das ist die Gleichung eines Kreises. Wir prüfen nach, dass die drei Eckpunkte $(u|0)$, $(v|0)$ und $(0|w)$ diese Gleichung erfüllen. Sie tun das tatsächlich. Also ist diese Gleichung die des Umkreises. Damit ist gezeigt, dass die drei Punkte P_a, P_b und P_c genau dann auf einer Geraden liegen, wenn P auf dem Umkreis liegt.

Sei H der Punkt $(0 | -\frac{uv}{w})$. Er liegt auf der y -Achse, der Höhe durch C , und auch auf der Höhe durch A , da der Vektor $\overrightarrow{HA} = \frac{u}{w} \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}$ senkrecht auf den Vektor $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -v \\ w \end{pmatrix}$ steht. Somit ist H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks.

Es folgt $\overrightarrow{P_cH} = \frac{1}{w} \begin{pmatrix} -wx \\ wy-uv \end{pmatrix}$. Oben wurde $\overrightarrow{P_cP_a} = \frac{2w}{v^2+w^2} \begin{pmatrix} vw-vy-wx \\ wy-vx+v^2 \end{pmatrix}$ gezeigt. Die Determinante mit den Vektoren $\overrightarrow{P_cH}$ und $\overrightarrow{P_cP_a}$ als Spalten ist

$$\frac{2}{v^2+w^2} \begin{vmatrix} -wx & vw-vy-wx \\ wy-uv & wy-vx+v^2 \end{vmatrix} = \frac{2v}{v^2+w^2} (wx^2 - uwx - vwx + wy^2 - w^2y - uvy + uvw).$$

Wenn P auf dem Umkreis liegt, dann ist diese Determinante gleich null, wie wir oben gesehen haben. Das heißt, die Vektoren $\overrightarrow{P_cH}$ und $\overrightarrow{P_cP_a}$ sind parallel, woraus folgt, dass H auf der Gerade durch die Punkte P_c und P_a liegt, also auf der Steingerade. \square

Übung: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Sei F dessen Fläche und seien U und r Mittelpunkt und Radius des Umkreises. Sei P ein beliebiger Punkt, P_a, P_b und P_c wie in Satz 70 und G die Fläche von $\triangle P_aP_bP_c$. Dann gilt $G = F \cdot \left| \frac{|PU|^2}{r^2} - 1 \right|$.

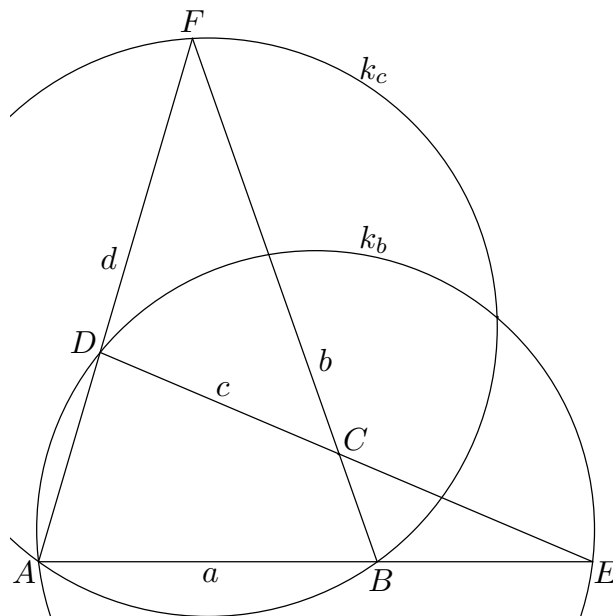
Hinweis: Im Beweis von Satz 70 findet man: $F = \frac{(v-u)w}{2}$, $G = \frac{1}{2}|D|$, $U = (\frac{u+v}{2} | \frac{uv}{2w} + \frac{w}{2})$, $r^2 = \frac{(u^2+w^2)(v^2+w^2)}{4w^2}$. Die Rechnung in diesem Beweis zeigt $D = \frac{1}{r^2} \cdot 2F \cdot (|PU|^2 - r^2)$.

Übung: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und M der Mittelpunkt der Seite \overline{BC} . Sei P ein Punkt und P_b und P_c die Fußpunkte der Lote von P auf $\ell(A, C)$ und $\ell(A, B)$. Sei K der Mittelpunkt der Strecke $\overline{P_bP_c}$. Der Punkt P liegt auf dem Umkreis genau dann, wenn \overline{PK} senkrecht auf \overline{KM} steht.

Übung: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und H_a und H_c die Fußpunkte der Höhen durch A und C . Sei P ein Punkt. Sei R der Schnittpunkt von $\ell(P, A)$ mit der Höhe durch C und S der von $\ell(P, C)$ mit der Höhe durch A . Sei K der Mittelpunkt der Strecke \overline{RS} . Der Punkt P liegt auf dem Umkreis genau dann, wenn H_c, H_a und K auf einer Gerade liegen.

2. Umkreise und Höhenschnittpunkte im Viereit

Ein Viereit besteht aus vier Geraden in allgemeiner Lage. Drei dieser Geraden bilden ein Dreieck. Wir können dieses Dreieck so wählen, dass die vierte Gerade zwei Seiten dieses Dreiecks schneidet und die Verlängerung der dritten. Wir wählen folgende Standardbezeichnung. Die Ecken des Dreiecks nennen wir A, B und F . Die vierte Gerade schneide die Seite \overline{AF} im Punkt D , die Seite \overline{BF} im Punkt C und die Verlängerung der Seite \overline{AB} im Punkt E . Wir erhalten dadurch ein Viereck $ABCD$, sodass je zwei einander gegenüberliegende Seiten die Schnittpunkte E und F haben, wenn man sie verlängert. Die vier Geraden bezeichnen wir so wie für die Seiten eines Vierecks üblich. Die Geraden $\ell(A, B)$, $\ell(B, C)$, $\ell(C, D)$ und $\ell(D, A)$ nennen wir der Reihe nach a, b, c und d .



Die vier Geraden bilden vier Dreiecke. Nimmt man eine Gerade weg, dann bleibt ein Dreieck übrig. Wir bezeichnen es durch die weggelassene Gerade. Das Dreieck Δ_a hat die Geraden b, c und d als Seiten und somit D, C und F als Eckpunkte. Analog seien Δ_b, Δ_c und Δ_d definiert. Die Umkreise der Dreiecke $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ und Δ_d nennen wir k_a, k_b, k_c und k_d . In der Zeichnung sind k_b und k_c eingezeichnet.

Um Eigenschaften der Umkreise und der Höhenschnittpunkte der vier Dreiecke $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ und Δ_d zu untersuchen, verwenden wir Satz 70. Wir beweisen damit

Satz 71: *Die Umkreise der vier Dreiecke eines Vierseits gehen durch einen Punkt P , den sogenannten Miquelpunkt. Die Höhenschnittpunkte der vier Dreiecke liegen auf einer Gerade g . Die vier Punkte, die man erhält, wenn man P an den vier Geraden des Vierseits spiegelt, liegen ebenfalls auf g . Wir nennen g die Steingerade des Vierseits.*

Beweis: Wir verwenden die oben eingeführte Standardbezeichnung. Die Umkreise k_b und k_c der Dreiecke Δ_b und Δ_c schneiden einander im Punkt A und in einem weiteren Punkt P . Seien P_a, P_b, P_c und P_d die Punkte, die man erhält, wenn man P an den vier Geraden a, b, c und d des Vierseits spiegelt. Nach Satz 70 liegen P_a, P_c und P_d auf einer Gerade g , da P auf k_b liegt, und P_a, P_b und P_d auf einer Gerade h , da P auf k_c liegt. Da P_a und P_d sowohl auf g als auch auf h liegen, sind g und h identisch. Somit liegen alle vier Punkte P_a, P_b, P_c und P_d auf g .

Jetzt wenden wir Satz 70 in die andere Richtung an. Da P_b, P_c und P_d auf einer Geraden, nämlich g , liegen, liegt P auch auf dem Umkreis k_a des Dreiecks Δ_a . Da P_a, P_b und P_c auf einer Geraden liegen, nämlich g , liegt P auch auf dem Umkreis k_d des Dreiecks Δ_d . Somit liegt P auf allen vier Umkreisen. Da g eine Steingerade für alle vier Dreiecke $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ und Δ_d ist, liegen auch alle vier Höhenschnittpunkte auf g . \square

Satz 72: *Die Umkreismittelpunkte der vier Dreiecke eines Vierseits und dessen Miquelpunkt liegen auf einem Kreis.*

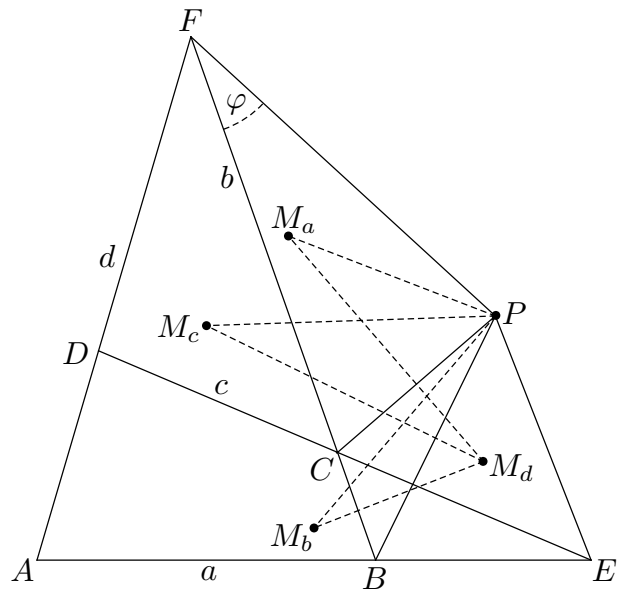
Beweis: Die Umkreismittelpunkte der vier Dreiecke $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ und Δ_d bezeichnen wir in dieser Reihenfolge mit M_a, M_b, M_c und M_d . Den Winkel $\angle PFC$ nennen wir φ .

Die Punkte P, C und F liegen auf k_a . Somit ist φ ein Peripheriewinkel im Kreis k_a über der Sehne \overline{PC} . Der Zentriwinkel $\angle PM_aC$ ist daher 2φ . Nun ist \overline{PC} auch eine Sehne im Kreis k_d . Die Gerade $\ell(M_a, M_d)$ ist die Symmetrale der Sehne \overline{PC} und halbiert den Winkel $\angle PM_aC$. Es folgt $\angle PM_aM_d = \varphi$.

Wir machen dasselbe Spiel mit k_c . Es gilt auch $\angle PFB = \varphi$. Die Punkte P, B und F liegen auf k_c . Somit ist φ ein Peripheriewinkel im Kreis k_c über der Sehne \overline{PB} . Der Zentriwinkel $\angle PM_cB$ ist daher gleich 2φ .

Nun ist \overline{PB} auch eine Sehne im Kreis k_d . Die Gerade $\ell(M_c, M_d)$ ist die Symmetrale der Sehne \overline{PB} und halbiert den Winkel $\angle PM_cB$. Wir erhalten daher $\angle PM_cM_d = \varphi$.

Jetzt kommen wir zu k_b . Wir müssen zuerst den Winkel $\angle PDE$ bestimmen. Die Punkte P, C, D und F liegen auf k_a . Somit gilt $\angle PDC = \angle PFC = \varphi$ und daher auch $\angle PDE = \varphi$.



Die Punkte P , E und D liegen auf k_b . Somit ist φ ein Peripheriewinkel im Kreis k_b über der Sehne \overline{PE} . Der Zentriwinkel $\angle PM_bE$ ist daher gleich 2φ . Nun ist \overline{PE} auch eine Sehne im Kreis k_d . Die Gerade $\ell(M_b, M_d)$ ist die Symmetrale der Sehne \overline{PE} und halbiert den Winkel $\angle PM_bE$. Wir erhalten daher $\angle PM_bM_d = \varphi$.

Es wurde $\angle PM_aM_d = \angle PM_bM_d = \angle PM_cM_d$ gezeigt. Aus der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes folgt, dass die Punkte P , M_a , M_b , M_c und M_d auf einem Kreis liegen.

In diesem Beweis haben wir aus der Zeichnung herausgelesen, dass bei der Anwendung des Peripheriewinkelsatzes der Zentriwinkel immer auf derselben Seite der Sehne liegt wie der Peripheriewinkel. Um das auch zu beweisen, genügt es, zu zeigen, dass der Peripheriewinkel φ kleiner als 90° ist: Da $\angle BCD$ kleiner als 180° ist, muss $\angle PCB$ oder $\angle PCD$ größer als 90° sein. Wir nehmen an, dass $\angle PCD$ größer als 90° ist (sonst vertauschen wir B mit D und E mit F). Da C , D , F und P auf k_a liegen, folgt $\angle PFD = 180^\circ - \angle PCD < 90^\circ$ aus dem Peripheriewinkelsatz. Daher gilt auch $\varphi = \angle PFC < 90^\circ$. \square

3. Die Diagonalen eines Viereits

Wir beginnen mit einigen Hilfssätzen. Zuvor kommen noch zwei Definitionen. Dabei lassen wir auch zu, dass ein Kreis Radius null haben kann.

Sei k ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius $r \geq 0$. Seien P und Q Punkte auf einer Halbgerade h , die von M ausgeht. Die Senkrechte auf h durch den Punkt Q heißt die Polare des Punktes P zum Kreis k , wenn $MP \cdot MQ = r^2$ gilt.

Sei k ein Kreis mit Mittelpunkt U und Radius $u \geq 0$ und l einer mit Mittelpunkt V und Radius $v \geq 0$. Wir sagen, dass k und l senkrecht aufeinander stehen, wenn $|UV|^2 = u^2 + v^2$ gilt. (Im Fall $u > 0$ und $v > 0$ stehen dann die Tangenten in den Schnittpunkten der Kreise senkrecht aufeinander.)

Hilfssatz A: Sei k ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius $r \geq 0$. Seien P ein beliebiger Punkt $\neq M$ und R einer auf der Polaren von P zum Kreis k . Der Kreis l mit Durchmesser \overline{PR} steht dann senkrecht auf k .

Beweis: Wir wählen ein Koordinatensystem mit Nullpunkt in M , sodass P auf der positiven x -Achse liegt. Seien $(p, 0)$ die Koordinaten von P und (q, d) die von R . Der Mittelpunkt N des Kreises l hat dann die Koordinaten $(\frac{p+q}{2}, \frac{d}{2})$. Für den Radius s des Kreises l gilt $s^2 = \frac{1}{4}(d^2 + (q-p)^2)$. Weiters gilt $|MN|^2 = \frac{1}{4}(d^2 + (q+p)^2)$. Da R auf der Polaren von P liegt, erhalten wir $r^2 = pq$. Damit ergibt sich dann $|MN|^2 = r^2 + s^2$. \square

Hilfssatz B: Seien k_1 mit Mittelpunkt M und Radius $r \geq 0$ und k_2 mit Mittelpunkt N und Radius $s \geq 0$ zwei Kreise. Es gelte $M \neq N$. Alle Kreise, die senkrecht auf k_1 und k_2 stehen, haben dann ihre Mittelpunkte auf einer Geraden g , die senkrecht auf $\ell(M, N)$ steht. Diese Kreise sind entweder paarweise disjunkt oder gehen alle durch zwei Punkte, die auf der Geraden $\ell(M, N)$ liegen. Im Grenzfall ist $\ell(M, N)$ Tangente an alle diese Kreise.

Beweis: Sei $d = |MN|$, $m = \frac{1}{2d}(d^2 - s^2 + r^2)$ und $n = -\frac{1}{2d}(d^2 + s^2 - r^2)$. Es gilt dann $m - n = d$ und $m^2 - r^2 = n^2 - s^2$. Wir wählen ein Koordinatensystem, sodass $M = (0, m)$ und $N = (0, n)$ gilt. Sei jetzt k ein beliebiger Kreis mit Mittelpunkt $U = (p, q)$ und Radius $u \geq 0$, der sowohl auf k_1 als auch auf k_2 senkrecht steht. Dann gilt

$$p^2 + (q - m)^2 = r^2 + u^2 \quad \text{und} \quad p^2 + (q - n)^2 = s^2 + u^2$$

Subtrahiert man die zweite von der ersten Gleichung, dann erhält man $2q(n - m) = n^2 - m^2 + r^2 - s^2$. Wegen $m^2 - r^2 = n^2 - s^2$ ergibt sich $q = 0$. Somit liegt U auf der

x -Achse. Alle Kreise, die senkrecht auf k_1 und k_2 stehen, haben somit ihre Mittelpunkte auf einer Geraden g , nämlich der x -Achse, die senkrecht auf der y -Achse $\ell(M, N)$ steht.

Weiters folgt aus obiger Gleichung, dass $p^2 = u^2 + r^2 - m^2$ gilt. Ist $r^2 - m^2 < 0$, dann geht k durch die Punkte $(0, \sqrt{m^2 - r^2})$ und $(0, -\sqrt{m^2 - r^2})$, die beide auf $\ell(M, N)$ liegen. Ist $r^2 - m^2 = 0$, dann gilt $|p| = u$, sodass k die Gerade $\ell(M, N)$ im Punkt $(0, 0)$ berührt. Ist $r^2 - m^2 > 0$, dann gilt $u = \sqrt{p^2 - (r^2 - m^2)}$, sodass ein Kreis k , der senkrecht auf k_1 und k_2 steht, nur dann existiert, wenn $|p| \geq \sqrt{r^2 - m^2}$ gilt. Da k dann die x -Achse in den Punkten $(p - \sqrt{p^2 - (r^2 - m^2)}, 0)$ und $(p + \sqrt{p^2 - (r^2 - m^2)}, 0)$ schneidet und $p \mapsto p - \sqrt{p^2 - (r^2 - m^2)}$ streng monoton fallend, aber $p \mapsto p + \sqrt{p^2 - (r^2 - m^2)}$ streng monoton wachsend ist, sind die Kreise, die senkrecht auf k_1 und k_2 stehen, paarweise disjunkt. \square

Hilfssatz C: Sei $\triangle ABC$ ein stumpf- oder rechtwinkeliges Dreieck. Den Höhenschnittpunkt dieses Dreiecks nennen wir H und die Höhenfußpunkte seien H_a, H_b und H_c . Dann gilt $HH_a \cdot HA = HH_b \cdot HB = HH_c \cdot HC$. Wir bezeichnen diesen Wert mit η^2 . Sei k der Kreis mit Mittelpunkt H und Radius $\eta \geq 0$. Jede Seite des Dreiecks $\triangle ABC$ (eigentlich deren Trägergerade) ist dann die Polare des gegenüberliegenden Eckpunkts zum Kreis k . Wir nennen k den Polarkreis des Dreiecks $\triangle ABC$.

Beweis: Die Dreiecke $\triangle HH_aB$ und $\triangle HH_bA$ sind ähnlich, da sie bei H den selben Winkel und bei H_a und H_b jeweils einen rechten Winkel haben. Es folgt $\frac{HH_a}{HH_b} = \frac{HB}{HA}$, also $HH_a \cdot HA = HH_b \cdot HB$. Ebenso sind die Dreiecke $\triangle HH_aC$ und $\triangle HH_cA$ ähnlich, womit wir die Gleichung $HH_a \cdot HA = HH_c \cdot HC$ erhalten. Für ein rechtwinkeliges Dreieck sind alle diese Produkte null, da immer einer der Faktoren null ist. Es gilt dann auch $\eta = 0$. Bei einem stumpfwinkligen Dreieck liegt H außerhalb des Dreiecks. Alle vorkommenden orientierten Abstände sind positiv, somit gilt auch $\eta > 0$.

Die Dreiecksseite $\ell(B, C)$ steht senkrecht auf die von H ausgehende Halbgerade durch A und schneidet diese im Punkt H_a . Da $HH_a \cdot HA = \eta^2$ gilt, ist $\ell(B, C)$ die Polare des Punktes A zum Kreis k . Für die anderen Dreiecksseiten beweist man das analog. \square

Für ein Viereit mit der oben eingeführten Standardbezeichnung nennt man die Strecken \overline{AC} , \overline{BD} und \overline{EF} die Diagonalen des Viereits. Für diese gilt folgender Satz.

Satz 73 (Satz von Gauß-Bodenmiller) *Die Mittelpunkte der Diagonalen \overline{AC} , \overline{BD} und \overline{EF} eines Viereits liegen auf einer Gerade. Diese steht senkrecht auf die Steinergerade des Viereits. Die drei Kreise d_1, d_2 und d_3 mit Durchmessern \overline{AC} , \overline{BD} und \overline{EF} sind entweder disjunkt, haben zwei Punkte, die auf der Steinergerade liegen, gemeinsam, oder alle drei Kreise berühren die Steinergerade im selben Punkt.*

Beweis: Es gilt $\angle ABF + \angle EBF = 180^\circ$. Einer dieser Winkel ist stumpf oder beide sind rechte Winkel. Dasselbe gilt für die Winkel $\angle ADE$ und $\angle FDE$. Mindestens zwei der Dreiecke $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ und Δ_d sind daher stumpf- oder rechtwinkelig. Seien p_1 und p_2 die in Hilfssatz C gefundenen Polarkreise dieser beiden Dreiecke. Da die Mittelpunkte dieser Polarkreise die Höhenschnittpunkte von zweien der Dreiecke $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ und Δ_d sind, ist die Steinergerade g die Gerade durch die Mittelpunkte von p_1 und p_2 .

Jede der drei Diagonalen \overline{AC} , \overline{BD} und \overline{EF} ist für jedes der vier Dreiecke $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ und Δ_d die Verbindungslinie eines Eckpunkts mit einem Punkt auf der gegenüberliegenden Dreiecksseite oder deren Verlängerung. Das lässt sich leicht nachprüfen. Nach Hilfssatz C und Hilfssatz A steht daher jeder der drei Kreise d_1, d_2 und d_3 sowohl auf p_1 senkrecht

als auch auf p_2 . Nach Hilfssatz B liegen die Mittelpunkte der Kreise d_1 , d_2 und d_3 , das sind die Mittelpunkte der Diagonalen \overline{AC} , \overline{BD} und \overline{EF} , auf einer Gerade h , die senkrecht auf die Steingerade g steht. Ebenfalls aus Hilfssatz B folgt, dass die Kreise d_1 , d_2 und d_3 entweder disjunkt sind, zwei Punkte, die auf g liegen, gemeinsam haben, oder dass alle drei Kreise d_1 , d_2 und d_3 die Gerade g im selben Punkt berühren. \square

Zu einem Vierseit kann man das Diagonaldreieck bilden. Seine Seiten werden von den Trägergeraden $\ell(A, C)$, $\ell(B, D)$ und $\ell(E, F)$ der Diagonalen gebildet. Wir untersuchen den Umkreis und seinen Mittelpunkt in den folgenden Übungsaufgaben.

Übung 1: Sei k ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius $r > 0$. Sei h eine Gerade, die k in den Punkten U und V schneidet. Weiters seien P und Q Punkte auf h , für die $\frac{QU}{QV} = -\frac{PU}{PV}$ gilt. Man zeige, dass der Kreis mit Durchmesser \overline{PQ} senkrecht auf k steht. Hinweis: Koordinatensystem: h sei die x -Achse, $M = (0, d)$, $U = (-u, 0)$, $V = (u, 0)$, $P = (p, 0)$, $Q = (q, 0)$. Dann gilt $r^2 = u^2 + d^2$ und $\frac{q+u}{q-u} = -\frac{p+u}{p-u}$, woraus $pq = u^2$ folgt.

Übung 2: Im Vierseit mit Standardbezeichnung sei U der Schnittpunkt der Geraden $\ell(A, C)$ und $\ell(B, D)$, V der der Geraden $\ell(A, C)$ und $\ell(E, F)$ und W der der Geraden $\ell(B, D)$ und $\ell(E, F)$. Dann ist $\triangle UVW$ das Diagonaldreieck. Man zeige $\frac{AU}{AV} = -\frac{CU}{CV}$, $\frac{BU}{BW} = -\frac{DU}{DW}$ und $\frac{EV}{EW} = -\frac{FW}{FW}$. Hinweis: Satz von Menelaos für $\triangle ABF$ und die Gerade durch D , C und E . Satz von Ceva für $\triangle ABC$ und die drei Geraden durch den Punkt D . Satz von Ceva für $\triangle ACF$ und die drei Geraden durch den Punkt E . Aus den drei so erhaltenen Gleichungen ergibt sich $\frac{AU}{AV} = -\frac{CU}{CV}$.

Übung 3: Seien d_1 , d_2 und d_3 die Kreise mit Durchmessern \overline{AC} , \overline{BD} und \overline{EF} . Man zeige, dass der Umkreis des Diagonaldreiecks senkrecht auf d_1 , auf d_2 und auf d_3 steht. Hinweis: Übung 1 und Übung 2.

Übung 4: Man zeige, dass in einem Vierseit der Umkreismittelpunkt des Diagonaldreiecks auf der Steingeraden liegt. Hinweis: Übung 3, Beweis von Satz 73 und Hilfssatz B.

Bemerkung: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Seien U_a, U_b und U_c die Schnittpunkte der inneren Winkelsymmetralen w_α, w_β und w_γ und V_a, V_b und V_c die Schnittpunkte der äußeren Winkelsymmetralen $\tilde{w}_\alpha, \tilde{w}_\beta$ und \tilde{w}_γ mit den jeweils gegenüberliegenden Dreiecksseiten. Das erste Übungsbeispiel in Abschnitt 3 von Kapitel III besagt, dass die Punkte V_a, V_b und V_c auf einer Gerade liegen. Dasselbe gilt für die Punkte U_a, U_b und U_c , für die Punkte U_a, V_b und U_c und für die Punkte V_a, U_b und U_c .

Das bedeutet, dass die Strecken $\overline{U_a V_a}, \overline{U_b V_b}$ und $\overline{U_c V_c}$ die Diagonalen eines Vierseits sind. Seien k_a, k_b und k_c die Kreise mit Durchmesser $\overline{U_a V_a}, \overline{U_b V_b}$ und $\overline{U_c V_c}$. Da A auf k_a liegt, B auf k_b und C auf k_c (die innere und äußere Winkelsymmetrale stehen senkrecht aufeinander), haben diese Kreise Schnittpunkte. Nach Satz 73 existieren zwei Punkte, die auf k_a, k_b und k_c liegen. Sie werden isodynamische Punkte des Dreiecks $\triangle ABC$ genannt.

Eine umfangreiche Abhandlung über das Vierseit ist "John Wentworth Clawson: *The Complete Quadrilateral*, Annals of Mathematics 20, 1919, 232-261".

Eine jüngere Publikation ist "Jean-Pierre Ehrmann: *Steiner's Theorems on the Complete Quadrilateral*, Forum Geometricorum 4, 2004, 35-52".

Ein neueres Resultat über das Vierseit findet man in "Atzema: *An Elementary Proof of a Theorem by Emelyanov*, Forum Geometricorum 8, 2008, 201-204".

VII. Koordinatenfreie Vektoren

1. Besondere Punkte des Dreiecks und der Satz von Feuerbach	64
2. Der Vierkreisesatz von Descartes	71
3. Der Satz von Desargues	73
4. Parallelogramme	75

In diesem Kapitel werden koordinatenfreie Vektoren verwendet, um verschiedene Probleme zu behandeln.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wählen wir den Umkreismittelpunkt U eines Dreiecks als Nullpunkt und spannen das Dreieck durch die Vektoren zu den drei Eckpunkten auf. Wir behandeln damit besondere Punkte und die Abstände zwischen diesen. Wir beweisen zuerst, dass die neun Punkte, nach denen er benannt ist, auf dem Neunpunktkreis liegen. Dann finden wir sehr einfache Beweise für eine Formel von Euler, die den Abstand zwischen Inkreismittelpunkt I und Umkreismittelpunkt U angibt, und für den Satz von Feuerbach, der besagt, dass der Neunpunktkreis den Inkreis und die drei Ankreise berührt. Es werden dann zusätzlich zu den oben genannten besonderen Punkten noch einige weitere untersucht, nämlich der Höhenschnittpunkt H , der Schwerpunkt S , der Bevanpunkt V , der Spiekerpunkt K , der Nagelpunkt N und der Longchampspunkt L . Wir finden Gerade, auf denen mehr als zwei dieser Punkte liegen. Die Punkte H , S , U und L liegen auf der Eulergerade und die Punkte I , S , K und N liegen auf der Nagelgerade. Weiters ist U der Mittelpunkt der Strecke \overline{VI} , V der Mittelpunkt der Strecke \overline{NL} und K der Mittelpunkt der Strecke \overline{VH} . Zum Abschluss berechnen wir noch die Abstände zwischen den Punkten, in denen der Neunpunktkreis den Inkreis und die drei Ankreise berührt, und die Abstände dieser Berührungspunkte zu den Mittelpunkten der Dreiecksseiten. Dazu verwenden wir auch den Satz von Ptolemäus, der erst später in Kapitel IX bewiesen wird.

Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels werden vier Kreise, die einander paarweise berühren, untersucht. Dazu wählen wir den Mittelpunkt eines Kreises als Nullpunkt. Es wird eine Gleichung für die Radien der vier Kreise bewiesen. Diese wird dann verwendet, um ein Problem der japanischen Tempelgeometrie zu lösen und einen Satz von Archimedes (Archimedes' Formel) zu beweisen.

Im dritten Abschnitt dieses Kapitels wird der Satz von Desargues, für den wir bereits in Kapitel III einen synthetischen Beweis gegeben haben, mit Hilfe von koordinatenfreien Vektoren bewiesen.

Im vierten Abschnitt dieses Kapitels beweisen wir Sätze über Parallelogramme mit Hilfe von koordinatenfreien Vektoren. Wir legen einen Eckpunkt des Parallelogramms in den Nullpunkt und spannen das Parallelogramm durch die Vektoren entlang der von diesem Eckpunkt ausgehenden Seiten auf. Wir wenden diese Methode auch auf das Dreieck an. Wir beweisen damit einige der unzähligen Sätze, die es für das Dreieck gibt.

1. Besondere Punkte des Dreiecks und der Satz von Feuerbach

Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Umkreisradius r und Seitenlängen a , b und c . Wir wählen ein Koordinatensystem, dessen Nullpunkt der Umkreismittelpunkt U des Dreiecks ist. Die Ortsvektoren zu den Eckpunkten A , B und C des Dreiecks nennen wir \mathbf{u} , \mathbf{v} und \mathbf{w} . Dann gilt $a = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$, $b = \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|$, $c = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ und $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| = r$. Den halben Umfang $\frac{1}{2}(a + b + c)$ des Dreiecks nennen wir s .

Satz 74: Sei $\mathbf{h} = \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$. Dann ist \mathbf{h} der Ortsvektor zum Höhenschnittpunkt H des Dreiecks $\triangle ABC$.

Beweis: Es gilt $\langle \mathbf{h} - \mathbf{w}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 = r^2 - r^2 = 0$. Somit steht $\mathbf{h} - \mathbf{w}$ senkrecht auf $\mathbf{u} - \mathbf{v}$. Der Punkt mit Ortsvektor \mathbf{h} liegt auf der Höhe durch den Eckpunkt C . Ebenso zeigt man $\langle \mathbf{h} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{w} \rangle = 0$ und $\langle \mathbf{h} - \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{w} \rangle = 0$, das heißt, der Punkt mit Ortsvektor \mathbf{h} liegt auch auf den Höhen durch die Eckpunkte B und A . Dieser Punkt ist somit der Höhenschnittpunkt H . \square

Sei $\sigma = \frac{1}{2}r$ und Z der Mittelpunkt der Strecke \overline{UH} . Der Neunpunktkreis wird definiert als der Kreis mit Mittelpunkt Z und Radius σ . Da der Umkreismittelpunkt U der Nullpunkt ist, ist $\mathbf{n} = \frac{1}{2}\mathbf{h} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w})$ der Ortsvektor des Punktes Z .

Satz 75: Seien H_a, H_b und H_c die Höhenfußpunkte und M_a, M_b und M_c die Seitenmitten des Dreiecks $\triangle ABC$. Sei H der Höhenschnittpunkt und R_a, R_b und R_c die Mittelpunkte der Strecken $\overline{HA}, \overline{HB}$ und \overline{HC} . Dann liegen die neun Punkte $H_a, H_b, H_c, M_a, M_b, M_c, R_a, R_b$ und R_c auf dem Neunpunktkreis.

Beweis: Wir beweisen nur, dass die Punkte M_c, R_c und H_c auf dem Neunpunktkreis liegen. Der Ortsvektor zum Mittelpunkt M_c der Seite \overline{AB} ist $\mathbf{m}_c = \frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$. Der Ortsvektor zum Mittelpunkt R_c des Höhenabschnitts \overline{HC} ist $\mathbf{r}_c = \frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v} + \mathbf{w}$. Es gilt $\overrightarrow{ZM_c} = \mathbf{m}_c - \mathbf{n} = -\frac{1}{2}\mathbf{w}$ und $\overrightarrow{ZR_c} = \mathbf{r}_c - \mathbf{n} = \frac{1}{2}\mathbf{w}$, also $|ZM_c| = |ZR_c| = \frac{r}{2}$. Somit liegen M_c und R_c auf dem Neunpunktkreis ($\overline{M_cR_c}$ ist ein Durchmesser des Neunpunktkreises). Sei $\mathbf{e} = \overrightarrow{ZH_c}$. Es gilt $\overrightarrow{M_cH_c} = \overrightarrow{ZH_c} - \overrightarrow{ZM_c} = \mathbf{e} + \frac{1}{2}\mathbf{w}$ und $\overrightarrow{R_cH_c} = \overrightarrow{ZH_c} - \overrightarrow{ZR_c} = \mathbf{e} - \frac{1}{2}\mathbf{w}$. Da $\overrightarrow{M_cH_c}$ und $\overrightarrow{R_cH_c}$ orthogonal sind, erhalten wir $\langle \mathbf{e} + \frac{1}{2}\mathbf{w}, \mathbf{e} - \frac{1}{2}\mathbf{w} \rangle = 0$ (das gilt auch im Fall $H_c = M_c$ oder $H_c = R_c$). Wegen $\langle \mathbf{e} + \frac{1}{2}\mathbf{w}, \mathbf{e} - \frac{1}{2}\mathbf{w} \rangle = \|\mathbf{e}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{w}\|^2$ ergibt sich $\|\mathbf{e}\| = \frac{1}{2}\|\mathbf{w}\| = \frac{r}{2}$. Das bedeutet, dass auch H_c auf dem Neunpunktkreis liegt. \square

Satz 76: Der Ortsvektor zum Inkreismittelpunkt I ist $\mathbf{m} = \frac{a}{2s}\mathbf{u} + \frac{b}{2s}\mathbf{v} + \frac{c}{2s}\mathbf{w}$.

Beweis: Den Inkreismittelpunkt finden wir als Schnittpunkt der drei Winkelsymmetralen des Dreiecks. Parameterdarstellungen dieser Winkelsymmetralen sind

$$\mathbf{u} + \lambda_1 \left(\frac{1}{c}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \frac{1}{b}(\mathbf{w} - \mathbf{u}) \right), \quad \mathbf{v} + \lambda_2 \left(\frac{1}{c}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \frac{1}{a}(\mathbf{w} - \mathbf{v}) \right) \quad \text{und} \quad \mathbf{w} + \lambda_3 \left(\frac{1}{b}(\mathbf{u} - \mathbf{w}) + \frac{1}{a}(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \right)$$

Setzt man $\lambda_1 = \frac{bc}{2s}$ in der ersten Parameterdarstellung, $\lambda_2 = \frac{ac}{2s}$ in der zweiten und $\lambda_3 = \frac{ab}{2s}$ in der dritten, dann erhält man jedes Mal \mathbf{m} . Somit ist \mathbf{m} der Ortsvektor zu einem Punkt, der auf allen drei Winkelsymmetralen liegt. Das ist der Inkreismittelpunkt I . \square

Satz 77: Die Ortsvektoren zu den Mittelpunkten I_a, I_b und I_c der drei Ankreise sind $\mathbf{m}_a = -\frac{a}{2(s-a)}\mathbf{u} + \frac{b}{2(s-a)}\mathbf{v} + \frac{c}{2(s-a)}\mathbf{w}$, $\mathbf{m}_b = \frac{a}{2(s-b)}\mathbf{u} - \frac{b}{2(s-b)}\mathbf{v} + \frac{c}{2(s-b)}\mathbf{w}$ und schließlich $\mathbf{m}_c = \frac{a}{2(s-c)}\mathbf{u} + \frac{b}{2(s-c)}\mathbf{v} - \frac{c}{2(s-c)}\mathbf{w}$.

Beweis: Den Ankreismittelpunkt I_c finden wir als Schnittpunkt der äußeren Winkelsymmetralen durch die Eckpunkte A und B und der inneren Winkelsymmetrale durch den

Eckpunkt C . Parameterdarstellungen dieser drei Winkelsymmetralen sind

$$\mathbf{u} + \lambda_1 \left(\frac{1}{c}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) - \frac{1}{b}(\mathbf{w} - \mathbf{u}) \right), \quad \mathbf{v} + \lambda_2 \left(\frac{1}{c}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) - \frac{1}{a}(\mathbf{w} - \mathbf{v}) \right) \quad \text{und} \quad \mathbf{w} + \lambda_3 \left(\frac{1}{b}(\mathbf{u} - \mathbf{w}) + \frac{1}{a}(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \right)$$

Setzt man $\lambda_1 = \frac{bc}{2(s-c)}$ in der ersten Parameterdarstellung, $\lambda_2 = \frac{ac}{2(s-c)}$ in der zweiten und $\lambda_3 = \frac{ab}{2(s-c)}$ in der dritten, dann erhält man jedes Mal \mathbf{m}_c . Somit ist \mathbf{m}_c der Ortsvektor zu einem Punkt, der auf diesen Winkelsymmetralen liegt. Das ist der Ankreismittelpunkt I_c . Auf analoge Weise findet man die anderen Ankreismittelpunkte. \square

Den folgenden Hilfssatz verwenden wir, um Abstände zwischen den oben eingeführten besonderen Punkten des Dreiecks zu berechnen.

Hilfssatz: Für beliebige reelle Zahlen d_a, d_b und d_c gilt

$$\|d_a \mathbf{u} + d_b \mathbf{v} + d_c \mathbf{w}\|^2 = r^2(d_a + d_b + d_c)^2 - (a^2 d_b d_c + b^2 d_a d_c + c^2 d_a d_b)$$

Beweis: Es gilt $c^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. Wegen $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = r$ erhalten wir $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = r^2 - \frac{1}{2}c^2$. Ebenso ergibt sich $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = r^2 - \frac{1}{2}b^2$ und $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = r^2 - \frac{1}{2}a^2$. Wenn wir auch $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| = r$ verwenden, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \|d_a \mathbf{u} + d_b \mathbf{v} + d_c \mathbf{w}\|^2 &= d_a^2 \|\mathbf{u}\|^2 + d_b^2 \|\mathbf{v}\|^2 + d_c^2 \|\mathbf{w}\|^2 + 2d_a d_b \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + 2d_a d_c \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + 2d_b d_c \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \\ &= r^2(d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 + 2d_a d_b + 2d_a d_c + 2d_b d_c) - c^2 d_a d_b - b^2 d_a d_c - a^2 d_b d_c \end{aligned}$$

Das ist bereits das gewünschte Ergebnis. \square

Wir verwenden die Heronformel $F^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ für die Fläche F des Dreiecks. Diese kann man auch als $16F^2 = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$ schreiben. Weiters verwenden wir die Formeln $\varrho = \frac{F}{s}$, $\varrho_c = \frac{F}{s-c}$ und $r = \frac{abc}{4F}$ für den Inkreisradius ϱ , den Ankreisradius ϱ_c und den Umkreisradius r . Insbesondere gilt $\varrho r = \frac{abc}{4s}$ und $\varrho_c r = \frac{abc}{4(s-c)}$.

Wir beweisen zuerst die Formel von Euler.

Satz 78 (Euler) Es gilt $|UI|^2 = r^2 - 2r\varrho$.

Beweis: Es gilt $\overrightarrow{UI} = \mathbf{m} = d_a \mathbf{u} + d_b \mathbf{v} + d_c \mathbf{w}$ mit $d_a = \frac{a}{2s}$, $d_b = \frac{b}{2s}$ und $d_c = \frac{c}{2s}$ nach Satz 76. Es folgt $d_a + d_b + d_c = 1$ und $a^2 d_b d_c + b^2 d_a d_c + c^2 d_a d_b = \frac{abc}{4s^2}(a+b+c) = \frac{abc}{2s} = 2\varrho r$. Der Hilfssatz ergibt dann die gesuchte Formel. \square

Satz 79 (Euler) Es gilt $|UI_c|^2 = r^2 + 2r\varrho_c$.

Beweis: Es gilt $\overrightarrow{UI_c} = \mathbf{m}_c = d_a \mathbf{u} + d_b \mathbf{v} + d_c \mathbf{w}$ mit $d_a = \frac{a}{2(s-c)}$, $d_b = \frac{b}{2(s-c)}$ und $d_c = \frac{-c}{2(s-c)}$. Es folgt $d_a + d_b + d_c = 1$ und $a^2 d_b d_c + b^2 d_a d_c + c^2 d_a d_b = \frac{-abc}{4(s-c)^2}(a+b-c) = \frac{-abc}{2(s-c)} = -2r\varrho_c$. Der Hilfssatz ergibt dann die gesuchte Formel. \square

Auch den Satz von Feuerbach können wir jetzt sehr einfach beweisen.

Satz 80 (Feuerbach) Es gilt $|IZ| = \frac{1}{2}r - \varrho$.

Beweis: Es gilt $\overrightarrow{IZ} = \mathbf{n} - \mathbf{m} = d_a \mathbf{u} + d_b \mathbf{v} + d_c \mathbf{w}$ mit $d_a = \frac{s-a}{2s}$, $d_b = \frac{s-b}{2s}$ und $d_c = \frac{s-c}{2s}$ nach Satz 74 und Satz 76. Es folgt $d_a + d_b + d_c = \frac{1}{2}$ und

$$\begin{aligned} a^2 d_b d_c + b^2 d_a d_c + c^2 d_a d_b &= \frac{1}{16s^2} (a^2(a^2 - (b-c)^2) + b^2(b^2 - (a-c)^2) + c^2(c^2 - (a-b)^2)) \\ &= \frac{1}{16s^2} (a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + 2abc(a+b+c)) \\ &= -\frac{F^2}{s^2} + \frac{abc}{4s} = -\varrho^2 + \varrho r \end{aligned}$$

Der Hilfssatz ergibt $|IZ|^2 = \frac{1}{4}r^2 + \varrho^2 - \varrho r = (\frac{1}{2}r - \varrho)^2$. Aus Satz 78 folgt $\frac{1}{2}r \geq \varrho$. Wir ziehen die Wurzel und erhalten $|IZ| = \frac{1}{2}r - \varrho$. \square

Satz 81 (Feuerbach) *Es gilt $|I_cZ| = \frac{1}{2}r + \varrho_c$.*

Beweis: Es gilt $\overrightarrow{I_cZ} = \mathbf{n} - \mathbf{m}_c = d_a\mathbf{u} + d_b\mathbf{v} + d_c\mathbf{w}$ mit $d_a = -\frac{s-b}{2(s-c)}$, $d_b = -\frac{s-a}{2(s-c)}$ und $d_c = \frac{s}{2(s-c)}$ nach Satz 74 und Satz 76. Es folgt $d_a + d_b + d_c = \frac{1}{2}$ und

$$\begin{aligned} a^2d_b d_c + b^2d_a d_c + c^2d_a d_b &= \frac{1}{16(s-c)^2} (a^2(a^2 - (b+c)^2) + b^2(b^2 - (a+c)^2) + c^2(c^2 - (a-b)^2)) \\ &= \frac{1}{16(s-c)^2} (a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 - 2abc(a+b-c)) \\ &= -\frac{F^2}{(s-c)^2} - \frac{abc}{4(s-c)} = -\varrho_c^2 - \varrho_c r \end{aligned}$$

Der Hilfssatz ergibt $|I_cZ|^2 = \frac{1}{4}r^2 + \varrho_c^2 + \varrho_c r = (\frac{1}{2}r + \varrho_c)^2$. Es folgt $|I_cZ| = \frac{1}{2}r + \varrho_c$. \square

Aus Satz 80 folgt, dass der Inkreis den Neunpunktkreis von innen berührt, da $\frac{1}{2}r$ ja der Radius des Neunpunktkreises ist. Aus Satz 81 folgt, dass der Ankreis an die Seite \overline{AB} den Neunpunktkreis von außen berührt. Das gilt natürlich auch für die anderen Ankreise.

Man kann mit dieser Methode auch andere Abstände berechnen, zum Beispiel

Satz 82: *Es gilt $|UH|^2 = 9r^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.*

Beweis: Folgt aus dem Hilfssatz mit $d_a = d_b = d_c = 1$, da $\overrightarrow{UH} = \mathbf{h} = \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ gilt. \square

Weitere besondere Punkte: Wir führen fünf weitere besondere Punkte des Dreiecks ein und berechnen deren Ortsvektoren. Wir beginnen mit dem Schwerpunkt.

Satz 83: *Der Ortsvektor des Schwerpunkts S ist $\frac{1}{3}\mathbf{h} = \frac{1}{3}(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w})$.*

Beweis: Geht man vom Eckpunkt A aus zwei Drittel der Schwerlinie entlang, dann kommt man zum Punkt mit Ortsvektor $\mathbf{u} + \frac{2}{3}(\frac{\mathbf{v}+\mathbf{w}}{2} - \mathbf{u}) = \frac{1}{3}\mathbf{u} + \frac{1}{3}\mathbf{v} + \frac{1}{3}\mathbf{w} = \frac{1}{3}\mathbf{h}$. Dasselbe kann man auch vom Eckpunkt B und Eckpunkt C aus machen. Man erhält jedes Mal $\frac{1}{3}\mathbf{h}$. Der Punkt mit Ortsvektor $\frac{1}{3}\mathbf{h}$ liegt auf allen drei Schwerlinien und teilt diese im Verhältnis 2 : 1. Dieser Punkt ist somit der Schwerpunkt S . \square

Der Bevanpunkt V des Dreiecks $\triangle ABC$ ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle I_a I_b I_c$, dessen Eckpunkte die Ankreismittelpunkte sind.

Satz 84: *Der Ortsvektor des Bevanpunktes V ist $-\mathbf{m}$. Außerdem gilt auch $\overline{VI_a} \perp \overline{BC}$, $\overline{VI_b} \perp \overline{AC}$ und $\overline{VI_c} \perp \overline{AB}$. Der Umkreisradius des Dreiecks $\triangle I_a I_b I_c$ ist $2r$.*

Beweis: Wir gehen umgekehrt vor. Wir wählen V als den Punkt, dessen Ortsvektor $-\mathbf{m}$ ist und zeigen, dass er der Bevanpunkt ist.

Es gilt $\overrightarrow{VI_c} = \mathbf{m}_c + \mathbf{m} = d_a\mathbf{u} + d_b\mathbf{v} + d_c\mathbf{w}$ mit $d_a = \frac{a}{2s} + \frac{a}{2(s-c)} = \frac{a(a+b)}{2s(s-c)}$, $d_b = \frac{b}{2s} + \frac{b}{2(s-c)} = \frac{b(a+b)}{2s(s-c)}$ und $d_c = \frac{c}{2s} - \frac{c}{2(s-c)} = \frac{-c^2}{2s(s-c)}$. Es folgt $d_a + d_b + d_c = 2$ und

$$\begin{aligned} a^2d_b d_c + b^2d_a d_c + c^2d_a d_b &= \frac{1}{4s^2(s-c)^2} (-a^2bc^2(a+b) - b^2ac^2(a+b) + c^2ab(a+b)^2) \\ &= \frac{abc^2(a+b)}{4s^2(s-c)^2} (-a - b + a + b) = 0 \end{aligned}$$

Der Hilfssatz ergibt $|VI_c|^2 = 4r^2$. Es folgt $|VI_c| = 2r$. Ganz analog zeigt man, dass auch $|VI_a| = 2r$ und $|VI_b| = 2r$ gilt. Somit ist V der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle I_a I_b I_c$, das heißt der Bevanpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$. Der Umkreisradius ist $2r$.

Nun zur zweiten Aussage. Wir zeigen $\overline{VI_c} \perp \overline{AB}$. Es gilt

$$\langle \mathbf{m}_c + \mathbf{m}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle = (d_a - d_b) \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - d_a \|\mathbf{u}\|^2 + d_b \|\mathbf{v}\|^2 + d_c \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle - d_c \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$$

Setzt man $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ und $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ wie im Beweis des Hilfssatzes ein, und d_a , d_b und d_c wie im ersten Teil dieses Beweises, dann erhält man $\langle \mathbf{m}_c + \mathbf{m}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle = 0$. Somit steht $\overline{VI_c}$ senkrecht auf \overline{AB} . Analog zeigt man $\overline{VI_b} \perp \overline{AC}$ und $\overline{VI_c} \perp \overline{AB}$. \square

Der Spiekerpunkt K des Dreiecks $\triangle ABC$ ist der Inkreismittelpunkt des Seitenmittendreiecks $\triangle M_a M_b M_c$.

Satz 85: Der Ortsvektor zum Spiekerpunkt K ist $\frac{1}{2}\mathbf{h} - \frac{1}{2}\mathbf{m}$.

Beweis: Den Spiekerpunkt finden wir als Schnittpunkt der drei Winkelsymmetralen des Seitenmittendreiecks $\triangle M_a M_b M_c$. Eine Parameterdarstellung der Winkelsymmetrale durch den Eckpunkt M_a ist $\frac{1}{2}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) - \lambda_1(\frac{1}{c}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \frac{1}{b}(\mathbf{w} - \mathbf{u}))$, da sie parallel zur Winkelsymmetrale durch A im Dreieck $\triangle ABC$ liegt und $\frac{1}{2}(\mathbf{v} + \mathbf{w})$ der Ortsvektor des Eckpunkts M_a ist. Parameterdarstellungen der Winkelsymmetralen durch die Eckpunkte M_b und M_c sind $\frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{w}) - \lambda_2(\frac{1}{c}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \frac{1}{a}(\mathbf{w} - \mathbf{v}))$ und $\frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \lambda_3(\frac{1}{b}(\mathbf{u} - \mathbf{w}) + \frac{1}{a}(\mathbf{v} - \mathbf{w}))$. Setzt man $\lambda_1 = \frac{bc}{4s}$ in der ersten Parameterdarstellung, $\lambda_2 = \frac{ac}{4s}$ in der zweiten und $\lambda_3 = \frac{ab}{4s}$ in der dritten, dann erhält man jedes Mal $\frac{b+c}{4s}\mathbf{u} + \frac{a+c}{4s}\mathbf{v} + \frac{a+b}{4s}\mathbf{w}$. Man rechnet nach, dass das gleich $\frac{1}{2}\mathbf{h} - \frac{1}{2}\mathbf{m}$ ist. Somit ist $\frac{1}{2}\mathbf{h} - \frac{1}{2}\mathbf{m}$ der Ortsvektor zu einem Punkt, der auf allen drei Winkelsymmetralen liegt. Das ist der Spiekerpunkt K . \square

Mit dem nächsten Satz führen wir den Nagelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$ ein.

Satz 86: Sei Q_a der Punkt, in dem der Ankreis die Seite \overline{BC} berührt, sei Q_b der Punkt, in dem der Ankreis die Seite \overline{AC} berührt und Q_c der Punkt, in dem der Ankreis die Seite \overline{AB} berührt. Die Geraden $\ell(A, Q_a)$, $\ell(B, Q_b)$ und $\ell(C, Q_c)$ schneiden einander in einem Punkt N , dem Nagelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$. Sein Ortsvektor ist $\mathbf{h} - 2\mathbf{m}$.

Beweis: Der Punkt Q_c hat Abstand $s - b$ zum Eckpunkt A . Sein Ortsvektor \mathbf{g}_c ist somit $\mathbf{u} + \frac{s-b}{c}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \frac{s-a}{c}\mathbf{u} + \frac{s-b}{c}\mathbf{v}$. Die Ortsvektoren \mathbf{g}_a und \mathbf{g}_b zu den Punkten Q_a und Q_b sind $\frac{s-b}{a}\mathbf{v} + \frac{s-c}{a}\mathbf{w}$ und $\frac{s-a}{b}\mathbf{u} + \frac{s-c}{b}\mathbf{w}$. Sei $\mathbf{g} = \frac{s-a}{s}\mathbf{u} + \frac{s-b}{s}\mathbf{v} + \frac{s-c}{s}\mathbf{w}$. Dann gilt $\mathbf{g} = \mathbf{u} + \frac{a}{s}(\mathbf{g}_a - \mathbf{u}) = \mathbf{v} + \frac{b}{s}(\mathbf{g}_b - \mathbf{v}) = \mathbf{w} + \frac{c}{s}(\mathbf{g}_c - \mathbf{w})$. Somit ist \mathbf{g} der Ortsvektor eines Punktes N , der auf allen drei Geraden $\ell(A, Q_a)$, $\ell(B, Q_b)$ und $\ell(C, Q_c)$ liegt. Er kann auch als $\mathbf{h} - 2\mathbf{m}$ geschrieben werden, wie man durch Nachrechnen leicht sieht. \square

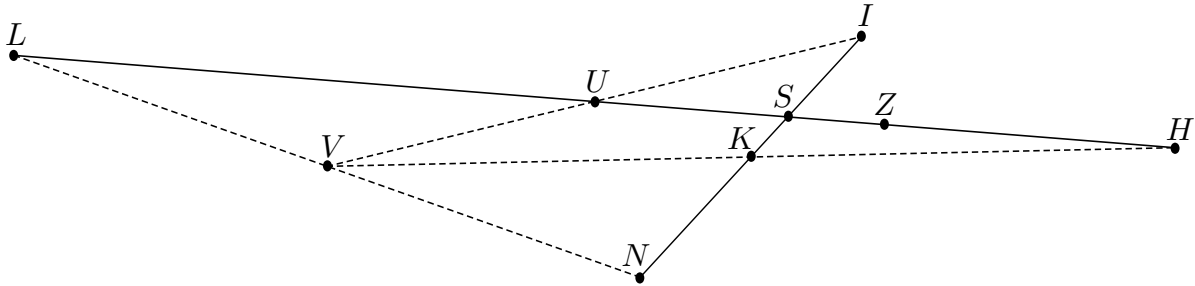
Sei L der Punkt, den man erhält, wenn man den Höhenschnittpunkt H am Umkreismittelpunkt U spiegelt. Da U der Nullpunkt des Koordinatensystems ist, ist $-\mathbf{h}$ der Ortsvektor des Punktes L . Man nennt L den Longchampspunkt des Dreiecks $\triangle ABC$.

Jetzt ist es einfach, Gerade zu finden, auf denen mehr als zwei besondere Punkte liegen. Der Longchampspunkt L , der Umkreismittelpunkt U , der Schwerpunkt S und der Höhenschnittpunkt H haben die Ortsvektoren $-\mathbf{h}$, $\mathbf{0}$, $\frac{1}{3}\mathbf{h}$ und \mathbf{h} . Es folgt $\overrightarrow{LU} = \mathbf{h}$, $\overrightarrow{US} = \frac{1}{3}\mathbf{h}$ und $\overrightarrow{SH} = \frac{2}{3}\mathbf{h}$. Somit liegen die vier Punkte L, U, S und H in dieser Reihenfolge auf einer Gerade (Eulergerade) und teilen diese im Verhältnis $3 : 1 : 2$.

Der Nagelpunkt N , der Spiekerpunkt K , der Schwerpunkt S und der Inkreismittelpunkt I haben die Ortsvektoren $\mathbf{h} - 2\mathbf{m}$, $\frac{1}{2}\mathbf{h} - \frac{1}{2}\mathbf{m}$, $\frac{1}{3}\mathbf{h}$ und \mathbf{m} . Es folgt $\overrightarrow{NK} = \frac{1}{2}(3\mathbf{m} - \mathbf{h})$, $\overrightarrow{KS} = \frac{1}{6}(3\mathbf{m} - \mathbf{h})$ und $\overrightarrow{SI} = \frac{1}{3}(3\mathbf{m} - \mathbf{h})$. Somit liegen die vier Punkte N, K, S und I in dieser Reihenfolge auf einer Gerade (Nagelgerade) und teilen diese im Verhältnis $3 : 1 : 2$.

Der Bevanpunkt V hat Ortsvektor $-\mathbf{m}$. Es gilt $\overrightarrow{VU} = \mathbf{m} = \overrightarrow{UI}$. Somit ist U der Mittelpunkt der Strecke \overline{VI} . Weiters gilt $\overrightarrow{NV} = \mathbf{m} - \mathbf{h} = \overrightarrow{VL}$. Somit ist V der Mittelpunkt der Strecke \overline{NL} . Schliesslich gilt auch $\overrightarrow{VK} = \frac{1}{2}\mathbf{h} + \frac{1}{2}\mathbf{m} = \overrightarrow{KH}$. Somit ist K der Mittelpunkt der Strecke \overline{VH} .

In der folgenden Darstellung sind alle besonderen Punkte eingetragen, die wir behandelt haben, und die Geraden, auf denen sie liegen.



Die Eulergerade und die Nagelgerade sind durchgehend gezeichnet, die Geraden durch den Bevanpunkt sind strichliert gezeichnet.

Der Mittelpunkt Z des Neunpunktkreises liegt ebenfalls auf der Eulergerade, da er ja der Mittelpunkt der Strecke \overline{UH} ist. Er liegt jedoch auf keiner der anderen Geraden. Sein Ortsvektor ist $\frac{1}{2}\mathbf{h}$. Die fünf Punkte L, U, S, Z und H liegen somit in dieser Reihenfolge auf der Eulergerade und teilen diese im Verhältnis $6 : 2 : 1 : 3$.

Ist das Dreieck gleichseitig, dann gilt $U = H = I$. Es folgt $\mathbf{h} = \mathbf{m} = \mathbf{0}$. Daher fallen alle besonderen Punkte zusammen. Ansonsten gilt folgendes

Satz 87: *Ist das Dreieck nicht gleichseitig, dann sind die Punkte U, S und H paarweise verschieden. Weiters gilt $I \neq Z$ und I liegt im Innern des Kreises mit Durchmesser \overline{SH} .*

Beweis: Das Dreieck ist nicht gleichseitig. Es gibt eine Dreiecksseite, auf der Höhenfußpunkt und Seitenmittelpunkt verschieden sind. Somit gilt $H \neq U$ und S liegt auf der Eulergerade dazwischen. Weiters folgt, dass der Neunpunktkreis zwei Schnittpunkte mit dieser Dreiecksseite hat. Würde $\varrho = \frac{1}{2}r$ gelten, dann auch $I = U$ nach Satz 78 und Inkreis und Neunpunktkreis wären identisch. Da der Inkreis die Dreiecksseiten berührt, ist das nicht möglich. Wegen $\frac{1}{2}r - \varrho = |IZ| \geq 0$ muss $\frac{1}{2}r - \varrho > 0$ gelten und somit auch $I \neq Z$. Aus Satz 78 und Satz 80 folgt $|IZ|^2 = \frac{1}{4}|IU|^2 - \varrho(\frac{1}{2}r - \varrho)$ und daraus $|IZ|^2 < \frac{1}{4}|IU|^2$.

Wir wählen ein Koordinatensystem mit Nullpunkt U und der Eulergerade als x -Achse. Der Höhenschnittpunkt H habe Koordinaten $(h, 0)$. Seien (x, y) die Koordinaten des Inkreismittelpunktes I . Die Ungleichung $|IZ|^2 < \frac{1}{4}|IU|^2$ wird zu

$$(x - \frac{1}{2}h)^2 + y^2 < \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$$

da $(\frac{1}{2}h, 0)$ ja die Koordinaten des Punktes Z sind. Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$(x - \frac{2}{3}h)^2 + y^2 < \frac{1}{9}h^2$$

Das bedeutet, dass I im Innern des Kreises k mit Mittelpunkt $(\frac{2}{3}h, 0)$ und Radius $\frac{1}{3}h$ liegt. Der Mittelpunkt liegt auf der x -Achse, das ist die Eulergerade. Die Schnittpunkte des Kreises k mit der x -Achse sind $(\frac{1}{3}h, 0)$ und $(h, 0)$. Das sind die Punkte S und H . Somit ist k der Kreis mit Durchmesser \overline{SH} . \square

Ist das Dreieck nicht gleichseitig, dann gilt $H \neq U$ und $I \neq U$ nach Satz 87, da U ja auf der Eulergerade außerhalb des Kreises mit Durchmesser \overline{SH} liegt. Daraus folgt $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$. Liegt I nicht auf der Eulergerade, dann folgt sofort, dass alle hier behandelten besonderen Punkte paarweise verschieden sind. Das gilt auch, wenn I auf der Eulergerade liegt. Nach Satz 87 liegt I dann zwischen S und H , ist aber ungleich Z . Es folgt, dass V zwischen L und U liegt, K zwischen U und S , und N liegt zwischen S und L , ist aber ungleich U . Das ergibt sich mit Hilfe der oben berechneten Verhältnisse.

Diese Methode, den Umkreismittelpunkt in den Nullpunkt zu legen, um die besonderen Punkte zu untersuchen und den Satz von Feuerbach zu beweisen, findet man in “Götz, Hofbauer: *Ein einfacher Beweis für den Satz von Feuerbach mit koordinatenfreien Vektoren*, Mathematische Semesterberichte, 65, 2018, 107 - 119”

Feuerbachpunkt: Der Punkt F , in dem Inkreis und Neunpunktkreis einander berühren, heißt Feuerbachpunkt. Er ist ebenfalls einer der besonderen Punkte des Dreiecks. Wir beweisen einen Satz über die Abstände des Feuerbachpunktes zu den Seitenmitten M_a , M_b und M_c , der erst im Jahr 2016 publiziert wurde (“Sandor N. Kiss, *A distance property of the Feuerbach point and its extension*, Forum Geometricorum 16 (2016) 283–290”).

Satz 88: Sei $k = \frac{r}{r-2\rho}$. Dann gilt $|FM_c| = \frac{\sqrt{k}}{2}|a-b|$. Ebenso gilt $|FM_a| = \frac{\sqrt{k}}{2}|b-c|$ und $|FM_b| = \frac{\sqrt{k}}{2}|a-c|$.

Beweis: Wegen $k = \frac{|ZF|}{|ZI|}$ ergibt sich $\overrightarrow{ZF} = k\overrightarrow{ZI}$. Weiters gilt $\overrightarrow{ZM_c} = -\frac{1}{2}\mathbf{w}$. Es folgt $\overrightarrow{FM_c} = \overrightarrow{ZM_c} - \overrightarrow{ZF} = -\frac{1}{2}\mathbf{w} - k(\mathbf{m} - \frac{1}{2}\mathbf{h})$ und $\frac{1}{k}\overrightarrow{FM_c} = -\frac{1}{2k}\mathbf{w} - \mathbf{m} + \frac{1}{2}\mathbf{h}$. Wir erhalten $\frac{1}{k}\overrightarrow{FM_c} = d_a\mathbf{u} + d_b\mathbf{v} + d_c\mathbf{w}$ mit $d_a = \frac{s-a}{2s}$, $d_b = \frac{s-b}{2s}$ und $d_c = \frac{s-c}{2s} - \frac{1}{2k}$ nach Satz 74 und Satz 76. Es folgt $d_a + d_b + d_c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2k} = \frac{\rho}{r}$ und $a^2d_b d_c + b^2d_a d_c + c^2d_a d_b = -\rho^2 + \rho r - \frac{1}{4sk}(b^2(s-a) + a^2(s-b))$ analog zum Beweis von Satz 80. Der Hilfssatz ergibt

$$\frac{1}{k^2}|FM_c|^2 = \rho^2 + \rho^2 - \rho r + \frac{1}{4sk}(b^2(s-a) + a^2(s-b))$$

Weiters gilt $2\rho^2 - \rho r = -\frac{r\rho}{k} = -\frac{abc}{4sk}$. Wir erhalten

$$\frac{1}{k^2}|FM_c|^2 = \frac{1}{4sk}(b^2(s-a) + a^2(s-b) - abc)$$

Es gilt auch $b^2(s-a) + a^2(s-b) - abc = s(a-b)^2$. Damit ist $|FM_c|^2 = \frac{k}{4}(a-b)^2$ gezeigt, also $|FM_c| = \frac{\sqrt{k}}{2}|a-b|$. Die beiden anderen Gleichungen zeigt man analog. \square

Unmittelbar aus Satz 88 folgt, dass einer der drei Abstände $|FM_a|$, $|FM_b|$ und $|FM_c|$ die Summe der beiden anderen ist.

Übung: Ist F_c der Punkt, in dem der Ankreis an die Seite \overline{AB} den Neunpunktkreis berührt, dann gilt $|F_c M_a| = \frac{\sqrt{k_c}}{2}(b+c)$, $|F_c M_b| = \frac{\sqrt{k_c}}{2}(a+c)$ und $|F_c M_c| = \frac{\sqrt{k_c}}{2}|a-b|$ mit $k_c = \frac{r}{r+2\rho_c}$. Der Beweis ist ähnlich wie der von Satz 88. Es gilt wieder, dass einer der drei Abstände $|F_c M_a|$, $|F_c M_b|$ und $|F_c M_c|$ die Summe der beiden anderen ist. Analoge Resultate gelten auch für die Punkte F_a und F_b , in denen der Neunpunktkreis die anderen Ankreise berührt.

In “Sandor N. Kiss, *Distances Among the Feuerbach Points*, Forum Geometricorum 16 (2016) 373–379” werden die Abstände zwischen den Punkten F_a , F_b , F_c und F berechnet. Wir verwenden dafür den Satz von Ptolemäus (Satz 125).

Satz 89: Sei $k_a = \frac{r}{r+2\varrho_a}$, $k_b = \frac{r}{r+2\varrho_b}$ und $k_c = \frac{r}{r+2\varrho_c}$. Dann gilt $|F_a F_b| = \sqrt{k_a k_b}(a+b)$, $|F_a F_c| = \sqrt{k_a k_c}(a+c)$ und $|F_b F_c| = \sqrt{k_b k_c}(b+c)$.

Beweis: Die vier Punkte F_a , F_b , M_b und M_c liegen auf dem Neunpunktkreis. Die Reihenfolge dieser Punkte ist M_c , F_b , M_b , F_a , wenn $c \leq a$ gilt, und M_c , M_b , F_b , F_a , wenn $c \geq a$ gilt. (Gilt $c = a$, dann auch $M_b = F_b$.) Aus dem Satz von Ptolemäus erhalten wir

$$|F_a F_b| \cdot |M_b M_c| = |F_a M_b| \cdot |F_b M_c| + |F_a M_c| \cdot |F_b M_b| \quad \text{im ersten Fall und}$$

$$|F_a M_b| \cdot |F_b M_c| = |F_a F_b| \cdot |M_b M_c| + |F_a M_c| \cdot |F_b M_b| \quad \text{im zweiten Fall.}$$

Nun gilt $|M_b M_c| = \frac{a}{2}$. Aus obiger Übung ergibt sich

$$|F_a M_b| = \frac{\sqrt{k_a}}{2}(a+c), \quad |F_b M_c| = \frac{\sqrt{k_b}}{2}(a+b), \quad |F_a M_c| = \frac{\sqrt{k_a}}{2}(a+b), \quad |F_b M_b| = \frac{\sqrt{k_b}}{2}|a-c|$$

Da im ersten Fall $|a-c| = a-c$ und im zweiten Fall $|a-c| = c-a$ gilt, erhalten wir $|F_a F_b| = \sqrt{k_a k_b}(a+b)$ in beiden Fällen. Die anderen Formeln beweist man analog. \square

Satz 90: Wir setzen $k_a = \frac{r}{r+2\varrho_a}$, $k_b = \frac{r}{r+2\varrho_b}$, $k_c = \frac{r}{r+2\varrho_c}$ und $k = \frac{r}{r-2\varrho}$. Dann gilt $|F_a F| = \sqrt{k_a k}|b-c|$, $|F_b F| = \sqrt{k_b k}|a-c|$ und $|F_c F| = \sqrt{k_c k}|a-b|$.

Beweis: Die vier Punkte F , F_c , M_b , M_c liegen auf dem Neunpunktkreis. Wir können annehmen, dass $a \geq b$ gilt, sonst ersetzen wir M_b durch M_a .

Seien ℓ_a , ℓ_b und ℓ_c die Bögen des Neunpunktkreises, die im Dreieck liegen, ℓ_a der gegenüber der Seite \overline{BC} und analog die anderen. Hat das Dreieck einen stumpfen Winkel, dann ist ein Bogen leer. Der Feuerbachpunkt F liegt auf dem Inkreis und daher in ℓ_a , in ℓ_b oder in ℓ_c . Der Punkt Q_c auf dem Bogen des Neunpunktkreises von M_a über M_c nach M_b , der von M_a und M_b gleichen Abstand hat, liegt nicht im Innern des Dreiecks, da die Tangente in Q_c an den Neunpunktkreis parallel zu $\overline{M_a M_b}$ und daher auch parallel zu \overline{AB} liegt. Analog wählen wir die Punkte Q_a und Q_b . Dann liegt ℓ_a im Abschnitt des Neunpunktkreises von Q_b nach Q_c , der Q_a nicht enthält, ℓ_b liegt im Abschnitt von Q_a nach Q_c , der Q_b nicht enthält, und ℓ_c liegt im Abschnitt von Q_a nach Q_b , der Q_c nicht enthält.

Gilt $a \leq c$, dann folgt $|FM_a| \geq |FM_b|$ und $|FM_a| \geq |FM_c|$ aus Satz 88. Somit liegt F auf dem Abschnitt des Neunpunktkreises von Q_b nach Q_c , der Q_a nicht enthält, und daher in ℓ_a . Die Punkte M_b , M_c , F_c , F liegen in dieser Reihenfolge auf dem Neunpunktkreis.

Gilt $a \geq c$, dann folgt entweder $|FM_b| \geq |FM_a|$ und $|FM_b| \geq |FM_c|$ oder $|FM_c| \geq |FM_a|$ und $|FM_c| \geq |FM_b|$ aus Satz 88. Wie oben erhalten wir, dass F entweder in ℓ_b oder in ℓ_c liegt. Die Punkte M_b , F , M_c , F_c liegen in dieser Reihenfolge auf dem Neunpunktkreis.

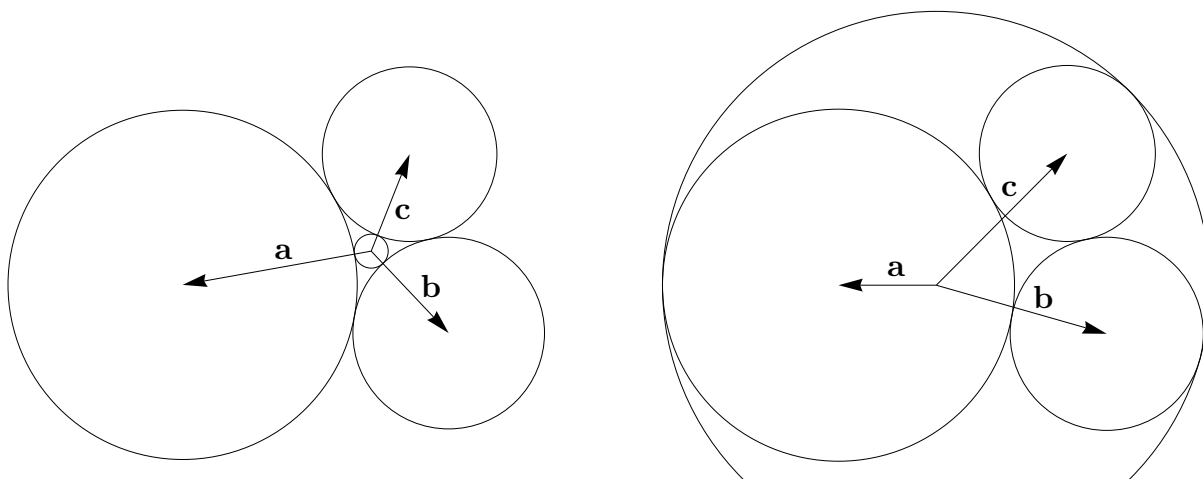
Im ersten Fall $a \leq c$ erhalten wir $|FM_c| \cdot |F_c M_b| = |F_c F| \cdot |M_b M_c| + |FM_b| \cdot |F_c M_c|$ aus dem Satz von Ptolemäus und $|F_c F| \cdot |M_b M_c| = |FM_c| \cdot |F_c M_b| + |FM_b| \cdot |F_c M_c|$ im zweiten Fall $a \geq c$. Aus Satz 88 folgt $|FM_c| = \frac{\sqrt{k}}{2}|a-b|$ und $|FM_b| = \frac{\sqrt{k}}{2}|a-c|$. Aus obiger Übung ergibt sich $|F_c M_b| = \frac{\sqrt{k_c}}{2}(a+c)$ und $|F_c M_c| = \frac{\sqrt{k_c}}{2}|a-b|$. Weiters gilt $|M_b M_c| = \frac{a}{2}$. Da im ersten Fall $|a-c| = c-a$ und im zweiten Fall $|a-c| = a-c$ gilt, erhalten wir $|F_c F| = \sqrt{k_c k}|a-b|$ in beiden Fällen. Die anderen Formeln beweist man analog. \square

Übung: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Umkreismittelpunkt U und Ankreismittelpunkt I_c . Sei W_a der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale durch A mit $\ell(B, C)$ und W_b der der Winkelsymmetrale durch B mit $\ell(A, C)$. Man zeige, dass $\ell(U, I_c)$ und $\ell(W_a, W_b)$ aufeinander senkrecht stehen. Hinweis: $\mathbf{u} + \lambda(\frac{1}{c}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \frac{1}{b}(\mathbf{w} - \mathbf{u}))$ ist eine Parameterdarstellung der Winkelsymmetrale durch A . Wählt man $\lambda = \frac{bc}{b+c}$, dann hat man einen Punkt auf $\ell(B, C)$. Weiters finde man eine Formel für $\langle d_a \mathbf{u} + d_b \mathbf{v} + d_c \mathbf{w}, \tilde{d}_a \mathbf{u} + \tilde{d}_b \mathbf{v} + \tilde{d}_c \mathbf{w} \rangle$ analog zum Hilfssatz.

2. Der Vierkreisesatz von Descartes

Satz 91: Seien k_1, k_2 und k_3 Kreise mit Radien u, v und w , die einander paarweise von außen berühren. Sei k ein vierter Kreis mit Radius t . Wird k von den anderen drei Kreisen von außen berührt, dann gilt $(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} + \frac{1}{t})^2 = \frac{2}{u^2} + \frac{2}{v^2} + \frac{2}{w^2} + \frac{2}{t^2}$. Wird k von den anderen drei Kreisen von innen berührt, dann gilt $(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} - \frac{1}{t})^2 = \frac{2}{u^2} + \frac{2}{v^2} + \frac{2}{w^2} + \frac{2}{t^2}$.

Beweis: Hier sind die beiden Fälle gezeichnet, links der Fall, in dem k von den anderen drei Kreisen von außen berührt wird, und rechts der Fall, in dem k von den anderen drei Kreisen von innen berührt wird. Seien M_1, M_2, M_3 und M die Mittelpunkte dieser vier Kreise.



Wir setzen $\mathbf{a} = \overrightarrow{MM_1}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{MM_2}$ und $\mathbf{c} = \overrightarrow{MM_3}$. Da diese drei Vektoren im \mathbb{R}^2 liegen, existieren λ und μ in \mathbb{R} mit $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}$. Indem wir innere Produkte bilden, erhalten wir $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \lambda\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \mu\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle$, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \lambda\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle + \mu\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ und $\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle = \lambda\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle + \mu\langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle$. Es folgt

$$\begin{vmatrix} \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle & \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle & \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \\ \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle & \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle & \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \\ \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle & \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle & \langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle \end{vmatrix} = 0$$

da die erste Spalte zum Nullvektor wird, wenn wir von ihr das λ -fache der zweiten Spalte und das μ -fache der dritten Spalte subtrahieren. Ausrechnen der Determinante ergibt

$$(*) \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle + 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 \langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle^2 \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle^2 \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0$$

Da die Kreise k_1, k_2 und k_3 einander paarweise von außen berühren, erhalten wir $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = u + v$, $\|\mathbf{a} - \mathbf{c}\| = u + w$ und $\|\mathbf{b} - \mathbf{c}\| = v + w$. Wird k von den anderen drei Kreisen von außen berührt, dann gilt $\|\mathbf{a}\|^2 = (u + t)^2$, $\|\mathbf{b}\|^2 = (v + t)^2$ und $\|\mathbf{c}\|^2 = (w + t)^2$. Wird k von den anderen drei Kreisen von innen berührt, dann gilt $\|\mathbf{a}\|^2 = (u - t)^2$, $\|\mathbf{b}\|^2 = (v - t)^2$ und $\|\mathbf{c}\|^2 = (w - t)^2$. Wir werden diesen zweiten Fall nicht weiter verfolgen. Es ist ja in der nachfolgenden Rechnung nur t durch $-t$ zu ersetzen.

Wir drücken die inneren Produkte durch die Normen der Vektoren aus. Wir erhalten

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{1}{2}\|\mathbf{a}\|^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{b}\|^2 - \frac{1}{2}\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = \frac{1}{2}(u + t)^2 + \frac{1}{2}(v + t)^2 - \frac{1}{2}(u + v)^2 = t^2 + ut + vt - uv$$

Analog ergibt sich $\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle = t^2 + ut + wt - uw$ und $\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = t^2 + vt + wt - vw$. Wir hatten bereits $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = t^2 + u^2 + 2ut$, $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = t^2 + v^2 + 2vt$ und $\langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle = t^2 + w^2 + 2wt$. Setzt man das alles in (*) ein, multipliziert aus und streicht alles weg, was sich aufhebt (dafür verwendet man am besten ein Computeralgebrasystem), dann erhält man

$$\begin{aligned} & 8t^2uvw^2 + 8t^2uv^2w + 8t^2u^2vw + 8tuv^2w^2 + 8tu^2vw^2 + 8tu^2v^2w \\ & - 4t^2v^2w^2 - 4t^2u^2w^2 - 4t^2u^2v^2 - 4u^2v^2w^2 = 0 \end{aligned}$$

Wir dividieren durch $4t^2u^2v^2w^2$, ordnen um und erhalten

$$\frac{2}{uv} + \frac{2}{uw} + \frac{2}{vw} + \frac{2}{tu} + \frac{2}{tv} + \frac{2}{tw} = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2} + \frac{1}{t^2}$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu $(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} + \frac{1}{t})^2 = \frac{2}{u^2} + \frac{2}{v^2} + \frac{2}{w^2} + \frac{2}{t^2}$. Im zweiten Fall ist nur t durch $-t$ zu ersetzen. Man hat also

$$\frac{2}{uv} + \frac{2}{uw} + \frac{2}{vw} - \frac{2}{tu} - \frac{2}{tv} - \frac{2}{tw} = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2} + \frac{1}{t^2}$$

was äquivalent ist zu $(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} - \frac{1}{t})^2 = \frac{2}{u^2} + \frac{2}{v^2} + \frac{2}{w^2} + \frac{2}{t^2}$. \square

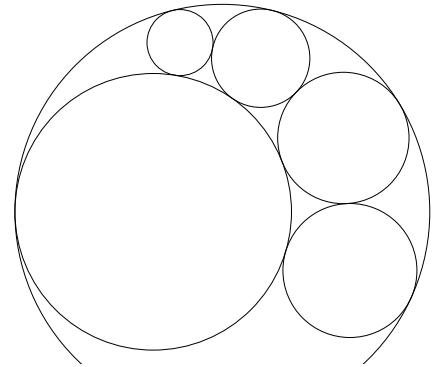
Indem man die im Beweis vorkommende 3×3 -Determinante in geeigneter Weise zu einer 5×5 -Determinante erweitert und Rechenregeln für Determinanten verwendet, kann man das Ergebnis auch ohne allzuviel Rechenarbeit erhalten. (Allerdings muss man zuerst Determinanten in höheren Dimensionen definieren und deren Rechenregeln herleiten.)

Ein zu Satz 91 analoges Resultat gilt auch in höheren Dimensionen, zum Beispiel für fünf Kugeln im \mathbb{R}^3 , die paarweise einander berühren, siehe "Christiane Hartmann: *Sangaku - Japanische Tempelgeometrie*, Schriftliche Hausarbeit, Würzburg 2008"

Wir wenden Satz 91 an, um ein Sangaku, ein geometrisches Problem aus dem 18 Jahrhundert aus Japan, zu lösen. (Siehe "Fukagawa, Rothman: *Sacred Mathematics*, 2008")

Satz 92: *Der Kreis l_2 liegt im Inneren des Kreises l_1 und berührt diesen. In dem Bereich zwischen l_1 und l_2 liegen vier weitere Kreise k_1, k_2, k_3 und k_4 , die alle l_1 von innen und l_2 von außen berühren. Weiters berühren k_1 und k_2 einander von außen. Dasselbe tun auch die Kreise k_2 und k_3 und ebenso die Kreise k_3 und k_4 . Für die Radien r_1, r_2, r_3 und r_4 dieser vier Kreise gilt dann $\frac{1}{r_1} + \frac{3}{r_3} = \frac{3}{r_2} + \frac{1}{r_4}$.*

Beweis: Wir verwenden Satz 91, um Gleichungen für die Radien von je vier Kreisen zu erhalten. Wir verwenden jedoch nicht die im Satz angegebene Gleichung, sondern die am Ende des Beweises angegebene dazu äquivalente Gleichung. Sei t der Radius von l_1 und s der Radius von l_2 . Die drei Kreise l_2, k_1 und k_2 berühren einander paarweise von außen und alle drei den Kreis l_1 von innen. Es gilt die untenstehende Gleichung (1). Dasselbe gilt auch für die Kreise k_2 und k_3 anstelle von k_1 und k_2 . Daher haben wir Gleichung (2). Es gilt auch für die Kreise k_3 und k_4 anstelle von k_1 und k_2 . So erhalten wir schließlich Gleichung (3).



$$(1) \quad \frac{2}{r_1 r_2} + \frac{2}{r_1 s} + \frac{2}{r_2 s} - \frac{2}{r_1 t} - \frac{2}{r_2 t} - \frac{2}{st} = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{t^2}$$

$$(2) \quad \frac{2}{r_2 r_3} + \frac{2}{r_2 s} + \frac{2}{r_3 s} - \frac{2}{r_2 t} - \frac{2}{r_3 t} - \frac{2}{st} = \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{t^2}$$

$$(3) \quad \frac{2}{r_3 r_4} + \frac{2}{r_3 s} + \frac{2}{r_4 s} - \frac{2}{r_3 t} - \frac{2}{r_4 t} - \frac{2}{st} = \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{t^2}$$

Wir subtrahieren (2) von (1) und erhalten

$$\frac{2}{r_1 r_2} - \frac{2}{r_2 r_3} + \frac{2}{r_1 s} - \frac{2}{r_3 s} - \frac{2}{r_1 t} + \frac{2}{r_3 t} = \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_3^2}$$

Wir können diese Gleichung durch $\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_3}$ dividieren. Das ergibt

$$\frac{2}{r_2} + \frac{2}{s} - \frac{2}{t} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3}$$

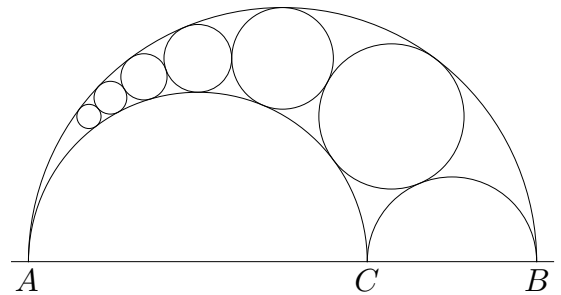
Subtrahieren wir (3) von (2) und dividieren wir dann durch $\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_4}$, so haben wir

$$\frac{2}{r_3} + \frac{2}{s} - \frac{2}{t} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}$$

Subtraktion dieser beiden Gleichungen ergibt schließlich $\frac{2}{r_2} - \frac{2}{r_3} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}$. Das ist bereits die Gleichung $\frac{3}{r_2} + \frac{1}{r_4} = \frac{1}{r_1} + \frac{3}{r_3}$. \square

Satz 93 (Archimedes' Formel) Sei \overline{AB} eine Strecke der Länge $2r$ und $q > 0$. Der Punkt C wird auf \overline{AB} so gewählt, dass $\frac{CB}{AC} = q$ gilt. Sei l_1 der Halbkreis über der Strecke \overline{AB} , sei l_2 der Halbkreis über der Strecke \overline{CB} und k_0 der Halbkreis über der Strecke \overline{CB} . (Der Halbkreis l_1 berührt l_2 in A und k_0 in B und die Halbkreise l_2 und k_0 berühren einander in C .) In dem Bereich zwischen l_1 und l_2 liegen weitere Kreise k_1, k_2, k_3 und so fort, die alle l_1 von innen und l_2 von außen berühren. Weiters berühren k_n und k_{n+1} einander von außen für alle $n \geq 0$. Sei r_n der Radius des Kreises k_n . Dann gilt $r_n = \frac{rq}{1+q+q^2n^2}$ für $n \geq 0$.

Beweis: Es gilt $|AC| + |CB| = |AB| = 2r$ und $\frac{|CB|}{|AC|} = q$, also $|AC| = \frac{2r}{1+q}$ und $|CB| = \frac{2rq}{1+q}$. Der Kreis l_1 hat Radius r , der Kreis l_2 hat Radius $\frac{r}{1+q}$ und der Kreis k_0 hat Radius $\frac{rq}{1+q}$. Damit ist der Radius r_0 des Kreises k_0 bereits gefunden. Wir machen weiter mit Induktion.



Wir nehmen an, dass $r_n = \frac{rq}{1+q+q^2n^2}$ bereits gezeigt ist. Sei u der Radius eines Kreises, der l_1 von innen und l_2 und k_n von außen berührt.

In die Formel $(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} - \frac{1}{t})^2 = \frac{2}{u^2} + \frac{2}{v^2} + \frac{2}{w^2} + \frac{2}{t^2}$ aus Satz 91 ist $t = r$, $v = \frac{r}{1+q}$ und $w = \frac{rq}{1+q+q^2n^2}$ einzusetzen. Ein wenig Herumrechnen ergibt die quadratische Gleichung

$$\frac{1}{u^2} - \frac{2}{u} \frac{1+q+q^2(n^2+1)}{rq} + (\frac{1+q+q^2(n^2+1)}{rq})^2 - \frac{4q^2n^2}{r^2} = 0$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind

$$\frac{1}{u} = \frac{1+q+q^2(n-1)^2}{rq} \quad \text{und} \quad \frac{1}{u} = \frac{1+q+q^2(n+1)^2}{rq}$$

Für die Radien der beiden Kreise, die l_1 von innen und l_2 und k_n von außen berühren, erhalten wir $\frac{rq}{1+q+q^2(n-1)^2}$ und $\frac{rq}{1+q+q^2(n+1)^2}$. Der erste ist der Radius r_{n-1} des Kreises k_{n-1} , der ja auch die geforderten Eigenschaften hat. Der zweite muss dann der Radius des Kreises k_{n+1} sein. Wir haben somit $r_{n+1} = \frac{rq}{1+q+q^2(n+1)^2}$ gezeigt. Die Induktion ist gelungen. \square

3. Der Satz von Desargues

Für den Beweis des Satzes von Desargues stellen wir folgende Überlegung an. Seien R und S zwei verschiedene Punkte und \mathbf{r} und \mathbf{s} ihre Ortsvektoren. Sei Q ein weiterer Punkt und \mathbf{q} sein Ortsvektor. Dann liegt Q genau dann auf der Geraden $\ell(R, S)$, wenn $\mathbf{q} = t\mathbf{r} + (1-t)\mathbf{s}$ für ein $t \in \mathbb{R}$ gilt. Das ist ja äquivalent zu $\mathbf{q} = \mathbf{s} + t(\mathbf{r} - \mathbf{s})$ für ein $t \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{s} + t(\mathbf{r} - \mathbf{s})$ ist eine Parameterdarstellung der Geraden $\ell(R, S)$.

Satz 94 (Satz von Desargues) Seien $\triangle ABC$ und $\triangle DEF$ zwei Dreiecke, sodass $A \neq D$, $B \neq E$ und $C \neq F$ gilt. Sei U der Schnittpunkt der Geraden $\ell(A, B)$ und $\ell(D, E)$, sei V der Schnittpunkt der Geraden $\ell(B, C)$ und $\ell(E, F)$ und sei W der Schnittpunkt der Geraden $\ell(C, A)$ und $\ell(F, D)$. Wir nehmen an, dass diese Schnittpunkte existieren und eindeutig sind. Wenn die drei Geraden $\ell(A, D)$, $\ell(B, E)$ und $\ell(C, F)$ durch einen Punkt gehen oder parallel sind, dann liegen die Punkte U , V und W auf einer Geraden.

Beweis: Im Folgenden bezeichnen wir die Ortsvektoren zu den Punkten jeweils mit dem entsprechenden Kleinbuchstaben. Wir nehmen zuerst an, dass die Geraden $\ell(A, D)$, $\ell(B, E)$ und $\ell(C, F)$ durch einen Punkt P gehen. Wir erhalten

$$\mathbf{p} = t_1 \mathbf{a} + (1 - t_1) \mathbf{d} = t_2 \mathbf{b} + (1 - t_2) \mathbf{e} = t_3 \mathbf{c} + (1 - t_3) \mathbf{f} \quad \text{mit } t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$$

Daraus folgt $t_1 \mathbf{a} - t_2 \mathbf{b} = (1 - t_2) \mathbf{e} - (1 - t_1) \mathbf{d}$. Würde $t_1 = t_2$ gelten, dann hätten wir $t_1(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = (1 - t_1)(\mathbf{e} - \mathbf{d})$ und $\ell(A, B)$ wäre parallel zu $\ell(D, E)$, ein Widerspruch zu Existenz oder Eindeutigkeit des Schnittpunkts U .

Somit erhalten wir $t_1 \neq t_2$ und $\frac{t_1}{t_1 - t_2} \mathbf{a} - \frac{t_2}{t_1 - t_2} \mathbf{b} = \frac{1 - t_2}{t_1 - t_2} \mathbf{e} - \frac{1 - t_1}{t_1 - t_2} \mathbf{d}$.

Da sowohl $\frac{t_1}{t_1 - t_2} - \frac{t_2}{t_1 - t_2} = 1$ als auch $-\frac{1 - t_1}{t_1 - t_2} + \frac{1 - t_2}{t_1 - t_2} = 1$ gilt, ist $\frac{t_1}{t_1 - t_2} \mathbf{a} - \frac{t_2}{t_1 - t_2} \mathbf{b}$ der Ortsvektor zu einem Punkt auf der Geraden $\ell(A, B)$ und $\frac{1 - t_2}{t_1 - t_2} \mathbf{e} - \frac{1 - t_1}{t_1 - t_2} \mathbf{d}$ der Ortsvektor zu einem Punkt auf der Geraden $\ell(D, E)$. Da U der einzige Punkt ist, der auf den beiden Geraden $\ell(A, B)$ und $\ell(D, E)$ liegt, muss

$$\frac{t_1}{t_1 - t_2} \mathbf{a} - \frac{t_2}{t_1 - t_2} \mathbf{b} = \mathbf{u} \quad \text{gelten. Daraus erhalten wir } t_1 \mathbf{a} - t_2 \mathbf{b} = (t_1 - t_2) \mathbf{u} \quad \text{mit } t_1 \neq t_2.$$

Analog zeigt man, dass $t_2 \mathbf{b} - t_3 \mathbf{c} = (t_2 - t_3) \mathbf{v}$ und $t_3 \mathbf{c} - t_1 \mathbf{a} = (t_3 - t_1) \mathbf{w}$ gilt mit $t_2 \neq t_3$ und $t_3 \neq t_1$. Addition dieser drei Gleichungen ergibt

$$(t_1 - t_2) \mathbf{u} + (t_2 - t_3) \mathbf{v} + (t_3 - t_1) \mathbf{w} = 0 \quad \text{oder} \quad \mathbf{u} = \frac{t_3 - t_2}{t_1 - t_2} \mathbf{v} + \frac{t_1 - t_3}{t_1 - t_2} \mathbf{w}$$

Wegen $\frac{t_3 - t_2}{t_1 - t_2} + \frac{t_1 - t_3}{t_1 - t_2} = 1$ ist damit gezeigt, dass U auf der Gerade $\ell(V, W)$ liegt.

Wir nehmen jetzt an, dass die Geraden $\ell(A, D)$, $\ell(B, E)$ und $\ell(C, F)$ parallel sind. Es gilt

$$t_1(\mathbf{a} - \mathbf{d}) = t_2(\mathbf{b} - \mathbf{e}) = t_3(\mathbf{c} - \mathbf{f}) \quad \text{mit } t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$$

Daraus folgt $t_1 \mathbf{a} - t_2 \mathbf{b} = t_1 \mathbf{d} - t_2 \mathbf{e}$. Würde $t_1 = t_2$ gelten, dann hätten wir $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{d} - \mathbf{e}$, das heißt $\ell(A, B)$ würde parallel zu $\ell(D, E)$ liegen und wir haben wie oben einen Widerspruch.

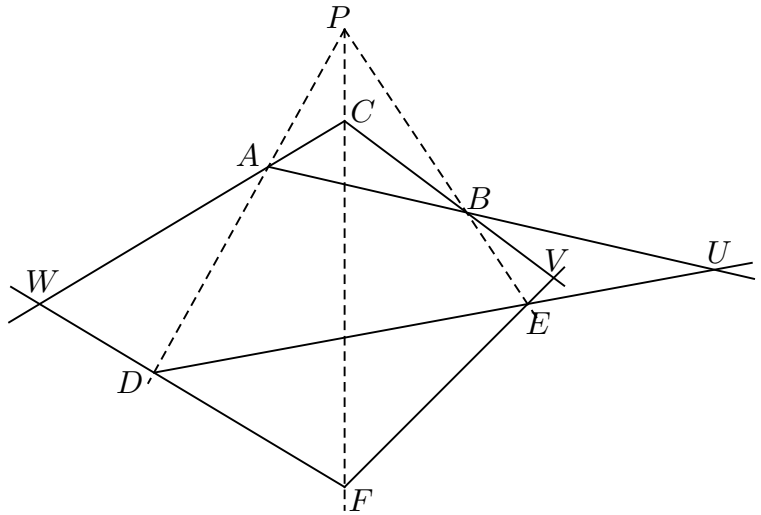
Wir erhalten $t_1 \neq t_2$ und $\frac{t_1}{t_1 - t_2} \mathbf{a} - \frac{t_2}{t_1 - t_2} \mathbf{b} = \frac{t_1}{t_1 - t_2} \mathbf{d} - \frac{t_2}{t_1 - t_2} \mathbf{e}$. Da $\frac{t_1}{t_1 - t_2} - \frac{t_2}{t_1 - t_2} = 1$ gilt, ist $\frac{t_1}{t_1 - t_2} \mathbf{a} - \frac{t_2}{t_1 - t_2} \mathbf{b}$ der Ortsvektor zu einem Punkt auf der Geraden $\ell(A, B)$ und $\frac{t_1}{t_1 - t_2} \mathbf{d} - \frac{t_2}{t_1 - t_2} \mathbf{e}$ der Ortsvektor zu einem Punkt auf der Geraden $\ell(D, E)$. Da U der einzige Punkt ist, der auf den beiden Geraden $\ell(A, B)$ und $\ell(D, E)$ liegt, muss $\frac{t_1}{t_1 - t_2} \mathbf{a} - \frac{t_2}{t_1 - t_2} \mathbf{b} = \mathbf{u}$ gelten. Es folgt $t_1 \mathbf{a} - t_2 \mathbf{b} = (t_1 - t_2) \mathbf{u}$ mit $t_1 \neq t_2$. Jetzt geht es weiter wie oben.

Analog zeigt man, dass $t_2 \mathbf{b} - t_3 \mathbf{c} = (t_2 - t_3) \mathbf{v}$ und $t_3 \mathbf{c} - t_1 \mathbf{a} = (t_3 - t_1) \mathbf{w}$ gilt mit $t_2 \neq t_3$ und $t_3 \neq t_1$. Addition dieser drei Gleichungen ergibt

$$(t_1 - t_2) \mathbf{u} + (t_2 - t_3) \mathbf{v} + (t_3 - t_1) \mathbf{w} = 0 \quad \text{oder} \quad \mathbf{u} = \frac{t_3 - t_2}{t_1 - t_2} \mathbf{v} + \frac{t_1 - t_3}{t_1 - t_2} \mathbf{w}$$

Wegen $\frac{t_3 - t_2}{t_1 - t_2} + \frac{t_1 - t_3}{t_1 - t_2} = 1$ ist damit gezeigt, dass U auf der Gerade $\ell(V, W)$ liegt. \square

Bemerkung: Man kann Satz 94 umkehren. Unter den Voraussetzungen von Satz 94 gilt auch: Wenn die Punkte U , V und W auf einer Gerade liegen, dann gehen die drei Geraden $\ell(A, D)$, $\ell(B, E)$ und $\ell(C, F)$ durch einen Punkt oder sie sind parallel. Den Beweis erhält man, indem man Satz 94 auf die Dreiecke $\triangle WAD$ und $\triangle VBE$ anwendet.



Bemerkung: Was kann passieren, wenn man die Existenz der Punkte U , V und W nicht voraussetzt. Dann können die im Beweis auftretenden Parameter t_1 , t_2 und t_3 gleich sein. Wir haben gesehen, dass $\ell(A, B)$ und $\ell(D, E)$ parallel sind, wenn $t_1 = t_2$ gilt. Gilt $t_1 = t_2 \neq t_3$, dann folgt $t_1 \mathbf{b} - t_3 \mathbf{c} = (t_1 - t_3) \mathbf{v}$ und $t_3 \mathbf{c} - t_1 \mathbf{a} = (t_3 - t_1) \mathbf{w}$ wie im Beweis und daraus dann $\mathbf{b} - \mathbf{a} = \frac{t_1 - t_3}{t_1} (\mathbf{v} - \mathbf{w})$. In diesem Fall existieren die Schnittpunkte V und W und die drei Geraden $\ell(V, W)$, $\ell(A, B)$ und $\ell(D, E)$ sind parallel. Natürlich kann es auch vorkommen, dass die Schnittpunkte U und W existieren und die drei Geraden $\ell(U, W)$, $\ell(B, C)$ und $\ell(E, F)$ parallel sind, oder dass die Schnittpunkte U und V existieren und die drei Geraden $\ell(U, V)$, $\ell(C, A)$ und $\ell(F, D)$ parallel sind. Gilt hingegen $t_1 = t_2 = t_3$, dann sind die Geraden $\ell(A, B)$ und $\ell(D, E)$ parallel, ebenso die Geraden $\ell(B, C)$ und $\ell(E, F)$ und auch die Geraden $\ell(C, A)$ und $\ell(F, D)$. Keiner der Schnittpunkte existiert.

4. Parallelogramme

Sei $ABCD$ ein Parallelogramm. Den Punkt A legen wir in den Nullpunkt und führen die Vektoren $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\mathbf{b} = \overrightarrow{AD}$ ein. Es sind die Ortsvektoren zu den Eckpunkten B und D des Parallelogramms. Sie sind linear unabhängig. Keiner ist ein Vielfaches des anderen. Gilt $s\mathbf{a} = t\mathbf{b}$ für reelle Zahlen s und t , dann folgt $s = 0$ und $t = 0$. Der Ortsvektor zum Eckpunkt C ist $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Satz 95: Sei $ABCD$ ein Parallelogramm. Sei k_b der Kreis mit Mittelpunkt B durch A und k_d der Kreis mit Mittelpunkt D durch A . Sei g eine Gerade durch A . Sei P der Schnittpunkt $\neq A$ der Gerade g mit dem Kreis k_b . Sei Q der Schnittpunkt $\neq A$ der Gerade g mit dem Kreis k_d . Dann gilt $|CP| = |CQ|$.

Beweis: Sei \mathbf{c} ein Richtungsvektor der Gerade g . Diese hat dann Parameterdarstellung $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{c}$. Der Punkt P liegt auf g und hat vom Punkt B den Abstand $\|\mathbf{a}\|$, da er auch auf dem Kreis k_b liegt. Der Ortsvektor des Punktes P ist $\lambda \mathbf{c}$, wobei sich λ aus $\|\lambda \mathbf{c} - \mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|$ ergibt. Es folgt $\lambda^2 \langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle - 2\lambda \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle = 0$, also $\lambda = \frac{2\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle}{\langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle}$. Der Ortsvektor des Punktes P ist daher $\mathbf{p} = \frac{2\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle}{\|\mathbf{c}\|^2} \mathbf{c}$. Analog erhält man den Ortsvektor $\mathbf{q} = \frac{2\langle \mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{c}\|^2} \mathbf{c}$ zum Punkt Q .

Es ist $|CP| = |CQ|$ zu zeigen, das heißt $\|\mathbf{p} - \mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \|\mathbf{q} - \mathbf{a} - \mathbf{b}\|$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p} - \mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 &= \|\mathbf{p}\|^2 - 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle + \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \frac{4\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle^2}{\|\mathbf{c}\|^4} \|\mathbf{c}\|^2 - \frac{4\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{c}\|^2} + \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 \\ &= -\frac{4\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{c}\|^2} + \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 \end{aligned}$$

Um $\|\mathbf{q} - \mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ zu berechnen, ist in dieser Rechnung nur \mathbf{a} und \mathbf{b} zu vertauschen. Da sich aber durch Vertauschen von \mathbf{a} und \mathbf{b} das Ergebnis $-\frac{4\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{c}\|^2} + \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2$ nicht ändert, ist $\|\mathbf{p} - \mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \|\mathbf{q} - \mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ gezeigt. \square

Satz 96: Sei $ABCD$ ein Parallelogramm und $d > 0$. Auf der Seite \overline{BC} von B aus in Richtung C tragen wir die Länge d auf und erhalten so den Punkt P . Auf der Seite \overline{DC} von D aus in Richtung C tragen wir ebenfalls die Länge d auf und erhalten so den Punkt Q . Sei S der Schnittpunkt der Geraden $\ell(B, Q)$ und $\ell(D, P)$. Dann gilt $\angle BAS = \angle DAS$.

Beweis: Eine Parameterdarstellung der Gerade $\ell(B, Q)$ ist $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda_1 (\mathbf{b} + \frac{d}{\|\mathbf{a}\|} \mathbf{a} - \mathbf{a})$. Eine Parameterdarstellung der Gerade $\ell(D, P)$ ist $\mathbf{x} = \mathbf{b} + \lambda_2 (\mathbf{a} + \frac{d}{\|\mathbf{b}\|} \mathbf{b} - \mathbf{b})$. Den Schnittpunkt dieser Geraden erhalten wir durch Gleichsetzen der Parameterdarstellungen. Das ergibt $\mathbf{a} + \lambda_1 (\mathbf{b} + \frac{d}{\|\mathbf{a}\|} \mathbf{a} - \mathbf{a}) = \mathbf{b} + \lambda_2 (\mathbf{a} + \frac{d}{\|\mathbf{b}\|} \mathbf{b} - \mathbf{b})$. Es folgt $\mathbf{a} (1 + \lambda_1 \frac{d}{\|\mathbf{a}\|} - \lambda_1 - \lambda_2) = \mathbf{b} (1 + \lambda_2 \frac{d}{\|\mathbf{b}\|} - \lambda_2 - \lambda_1)$. Daher muss $1 + \lambda_1 \frac{d}{\|\mathbf{a}\|} - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$ und $1 + \lambda_2 \frac{d}{\|\mathbf{b}\|} - \lambda_2 - \lambda_1 = 0$

gelten. Die Lösung dieses Gleichungssystems ist $\lambda_1 = \frac{\|\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| - d}$ und $\lambda_2 = \frac{\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| - d}$. Der Ortsvektor zum Schnittpunkt S ist daher $\mathbf{s} = \frac{1}{\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| - d} (\|\mathbf{b}\|\mathbf{a} + \|\mathbf{a}\|\mathbf{b})$.

Nun gilt $\langle \mathbf{s}, \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \rangle = \frac{1}{\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| - d} (\|\mathbf{b}\|\|\mathbf{a}\| + \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle)$ und $\langle \mathbf{s}, \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} \rangle = \frac{1}{\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| - d} (\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|)$. Es folgt $\frac{\langle \mathbf{s}, \mathbf{a} \rangle}{\|\mathbf{s}\| \cdot \|\mathbf{a}\|} = \frac{\langle \mathbf{s}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{s}\| \cdot \|\mathbf{b}\|}$. Somit ist der Winkel zwischen den Vektoren \mathbf{s} und \mathbf{a} und der zwischen den Vektoren \mathbf{s} und \mathbf{b} gleich groß. Es gilt $\angle BAS = \angle DAS$. \square

Satz 97: Sei $ABCD$ ein Parallelogramm und M der Mittelpunkt der Seite \overline{AB} . Sei P der Fußpunkt des Lotes vom Punkt D auf die Gerade $\ell(M, C)$. Dann gilt $|AP| = |AD|$.

Beweis: Eine Parameterdarstellung der Gerade $\ell(M, C)$ ist $\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \lambda(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{b})$. Sei \mathbf{p} der Ortsvektor zum Punkt P . Da P auf $\ell(M, C)$ liegt, gilt $\mathbf{p} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \lambda(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{b})$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Da P der Fußpunkt des Lotes vom Eckpunkt D ist, muss $\mathbf{p} - \mathbf{b}$ senkrecht auf $\ell(M, C)$ stehen, und damit auch auf den Vektor $\frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{b}$. Es muss $\langle \mathbf{p} - \mathbf{b}, \frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle = 0$ gelten. Es folgt $\langle \frac{1}{2}\mathbf{a} - \mathbf{b}, \frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle + \lambda \langle \frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{b}, \frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle = 0$ und somit $\lambda = \frac{4\|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2}{\|\mathbf{a} + 2\mathbf{b}\|^2}$.

Nun gilt $4|AP|^2 = \|2\mathbf{p}\|^2 = \|\mathbf{a} + \lambda(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + 2\lambda\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} + 2\mathbf{b} \rangle + \lambda^2\|\mathbf{a} + 2\mathbf{b}\|^2$. Wegen $\lambda\|\mathbf{a} + 2\mathbf{b}\|^2 = 4\|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2$ und $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} + 2\mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2 + 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ erhalten wir

$$4|AP|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \lambda(2\|\mathbf{a}\|^2 + 4\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + 4\|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2) = \|\mathbf{a}\|^2 + \lambda\|\mathbf{a} + 2\mathbf{b}\|^2$$

Wenden wir noch einmal $\lambda\|\mathbf{a} + 2\mathbf{b}\|^2 = 4\|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2$ an, so ergibt sich schließlich

$$4|AP|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + 4\|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2 = 4\|\mathbf{b}\|^2$$

Damit ist $|AP| = \|\mathbf{b}\|$ gezeigt, das heißt $|AP| = |AD|$. \square

Wir wenden diese Methode auch auf das Dreieck an. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Den Eckpunkt C legen wir in den Nullpunkt und führen die Vektoren $\mathbf{a} = \overrightarrow{CB}$ und $\mathbf{b} = \overrightarrow{CA}$ ein. Das sind die Ortsvektoren zu den Eckpunkten B und A des Dreiecks. Sie sind linear unabhängig. Die Längen der Dreiecksseiten bezeichnen wir wie üblich mit a, b und c und $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ ist der halbe Umfang.

Satz 98: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und \tilde{w}_c die Winkelsymmetrale eines Außenwinkels beim Eckpunkt C . Sei W_a der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale w_a durch A mit $\ell(B, C)$ und W_b der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale w_b durch B mit $\ell(A, C)$. Dann schneiden die Geraden \tilde{w}_c , $\ell(A, B)$ und $\ell(W_a, W_b)$ einander in einem Punkt P .

Beweis: Die Gerade $\ell(B, C)$ hat Parameterdarstellung $\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{a}$. Ihr Schnittpunkt mit der Winkelsymmetrale $w_a : \mathbf{x} = \mathbf{b} + \lambda_2(\frac{1}{c}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) - \frac{1}{b}\mathbf{b})$ ergibt sich durch Gleichsetzen der Parameterdarstellungen, das heißt $\lambda_1\mathbf{a} = \mathbf{b} + \lambda_2(\frac{1}{c}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) - \frac{1}{b}\mathbf{b})$. Es folgt $\mathbf{b}(1 - \frac{\lambda_2}{c} - \frac{\lambda_2}{b}) = \mathbf{a}(\lambda_1 - \frac{\lambda_2}{c})$. Daher muss $1 - \frac{\lambda_2}{c} - \frac{\lambda_2}{b} = 0$ und $\lambda_1 - \frac{\lambda_2}{c} = 0$ gelten. Die Lösung dieses Gleichungssystems ist $\lambda_2 = \frac{bc}{b+c}$ und $\lambda_1 = \frac{b}{b+c}$. Der Ortsvektor zum Schnittpunkt W_a von w_a und $\ell(B, C)$ ist daher $\frac{b}{b+c}\mathbf{a}$. Eine analoge Rechnung ergibt den Ortsvektor $\frac{a}{a+c}\mathbf{b}$ zum Schnittpunkt W_b von w_b und $\ell(A, C)$.

Die Winkelsymmetrale \tilde{w}_c hat Parameterdarstellung $\mathbf{x} = \lambda_1(\frac{1}{a}\mathbf{a} - \frac{1}{b}\mathbf{b})$. Die Gerade $\ell(A, B)$ hat Parameterdarstellung $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda_2(\mathbf{b} - \mathbf{a})$. Den Schnittpunkt dieser Geraden erhalten wir durch Gleichsetzen der Parameterdarstellungen, das heißt $\lambda_1(\frac{1}{a}\mathbf{a} - \frac{1}{b}\mathbf{b}) = \mathbf{a} + \lambda_2(\mathbf{b} - \mathbf{a})$. Es folgt $\mathbf{a}(\frac{\lambda_1}{a} - 1 + \lambda_2) = \mathbf{b}(\lambda_2 + \frac{\lambda_1}{b})$. Daher muss $\frac{\lambda_1}{a} - 1 + \lambda_2 = 0$ und $\lambda_2 + \frac{\lambda_1}{b} = 0$ gelten. Die Lösung dieses Gleichungssystems ist $\lambda_1 = \frac{ab}{b-a}$ und $\lambda_2 = \frac{-a}{b-a}$. Der Ortsvektor zum Schnittpunkt P von \tilde{w}_c und $\ell(A, B)$ ist daher $\frac{1}{b-a}(\mathbf{b}\mathbf{a} - \mathbf{a}\mathbf{b})$.

Die Gerade $\ell(W_a, W_b)$ hat Parameterdarstellung $\mathbf{x} = \frac{b}{b+c}\mathbf{a} + \lambda_3(\frac{a}{a+c}\mathbf{b} - \frac{b}{b+c}\mathbf{a})$. Setzt man $\lambda_3 = -\frac{a+c}{b-a}$, so erhält man $\frac{1}{b-a}(\mathbf{b}\mathbf{a} - \mathbf{a}\mathbf{b})$. Daher liegt P auch auf $\ell(W_a, W_b)$. \square

Satz 99: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Sei W_a der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale durch A mit $\ell(B, C)$ und W_b der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale durch B mit $\ell(A, C)$. Seien P_a und P_b die Punkte, in denen der Inkreis die Seiten \overline{BC} und \overline{AC} berührt. Seien H_a und H_b die Fußpunkte der Höhen durch A und B . Dann schneiden die Geraden $\ell(W_a, W_b)$, $\ell(P_a, P_b)$ und $\ell(H_a, H_b)$ einander in einem Punkt P .

Beweis: Im Beweis von Satz 98 wurde gezeigt, dass $\frac{b}{b+c}\mathbf{a}$ und $\frac{a}{a+c}\mathbf{b}$ die Ortsvektoren zu den Punkten W_a und W_b sind.

Es sei $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Da die Berührungspunkte P_a und P_b Abstand $s - c$ vom Eckpunkt C haben, sind $\frac{s-c}{a}\mathbf{a}$ und $\frac{s-c}{b}\mathbf{b}$ die Ortsvektoren zu diesen Punkten.

Da $\frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{a}$ die Länge der Projektion des Vektors \mathbf{b} auf den Vektor \mathbf{a} und $\frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{b}$ die Länge der Projektion des Vektors \mathbf{a} auf den Vektor \mathbf{b} ist, sind $\frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{a^2}\mathbf{a}$ und $\frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{b^2}\mathbf{b}$ die Ortsvektoren zu den Punkten H_a und H_b .

Parameterdarstellungen der Geraden $\ell(W_a, W_b)$, $\ell(P_a, P_b)$ und $\ell(H_a, H_b)$ sind $\mathbf{x} = \frac{b}{b+c}\mathbf{a} + \lambda_1(\frac{a}{a+c}\mathbf{b} - \frac{b}{b+c}\mathbf{a})$, $\mathbf{x} = \frac{s-c}{a}\mathbf{a} + \lambda_2(\frac{s-c}{b}\mathbf{b} - \frac{s-c}{a}\mathbf{a})$ und $\mathbf{x} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{a^2}\mathbf{a} + \lambda_3(\frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{b^2}\mathbf{b} - \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{a^2}\mathbf{a})$.

Den Schnittpunkt der ersten beiden Geraden erhalten wir durch Gleichsetzen der Parameterdarstellungen. Das ergibt $\mathbf{a}(\frac{b}{b+c}(1 - \lambda_1) - \frac{s-c}{a}(1 - \lambda_2)) = \mathbf{b}(\frac{s-c}{b}\lambda_2 - \frac{a}{a+c}\lambda_1)$. Es folgt $\frac{b}{b+c}(1 - \lambda_1) - \frac{s-c}{a}(1 - \lambda_2) = 0$ und $\frac{s-c}{b}\lambda_2 - \frac{a}{a+c}\lambda_1 = 0$. Die Lösung dieses Gleichungssystems ist $\lambda_1 = \frac{(a+c)((b+c)(s-c)-ab)}{ab(b-a)}$ und $\lambda_2 = \frac{(b+c)(s-c)-ab}{(b-a)(s-c)}$. Der Ortsvektor zum Schnittpunkt P ist daher $\frac{(b+c)(s-c)-ab}{(b-a)b}\mathbf{b} - \frac{(a+c)(s-c)-ab}{(b-a)a}\mathbf{a}$. Wir müssen zeigen, dass dieser Punkt auch auf der dritten Gerade liegt.

Wir wählen $\lambda_3 = \frac{(b+c)(s-c)b-ab^2}{(b-a)\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}$ in der Parameterdarstellung der dritten Gerade. Das gibt

$$\left(\frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{a^2} - \frac{(b+c)(s-c)b-ab^2}{(b-a)a^2}\right)\mathbf{a} + \frac{(b+c)(s-c)-ab}{(b-a)b}\mathbf{b}$$

Aus $c^2 = \langle a - b, a - b \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle$ folgt $2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a^2 + b^2 - c^2$, womit sich dann $2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = (a + b - c)(a + b + c) - 2ab = 2(s - c)(a + b + c) - 2ab$ ergibt. Es folgt $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle(b - a) = (s - c)b(b + c) - (s - c)a(a + c) - ab^2 + a^2b$. Damit erhalten wir dann $\frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{a^2} - \frac{(b+c)(s-c)b-ab^2}{(b-a)a^2} = \frac{-(s-c)a(a+c)+a^2b}{(b-a)a^2} = -\frac{(a+c)(s-c)-ab}{(b-a)a}$. Der durch die spezielle Wahl von λ_3 auf der Gerade $\ell(H_a, H_b)$ gefundene Punkt ist somit der Punkt P . Wir haben gezeigt, dass die drei Geraden einander im Punkt P schneiden. \square

Übung: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und P ein Punkt. Wir spiegeln P am Mittelpunkt der Seite \overline{BC} und erhalten D . Wir spiegeln P am Mittelpunkt der Seite \overline{AC} und erhalten E . Wir spiegeln P am Mittelpunkt der Seite \overline{AB} und erhalten F . Man zeige, dass die drei Strecken \overline{AD} , \overline{BE} und \overline{CF} den selben Mittelpunkt M haben. Die Spiegelung am Punkt M führt das Dreieck $\triangle ABC$ in das Dreieck $\triangle DEF$ über.

Übung: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Schwerpunkt S . Sei M der Mittelpunkt der Seite \overline{AB} . Sei g eine Gerade durch S . Sie schneide die Seite \overline{BC} im Punkt P und die Seite \overline{AC} im Punkt Q . Sei F die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$ und G die des Dreiecks $\triangle MPQ$. Man zeige, dass $G \geq \frac{2}{9}F$ gilt.

Hinweis: Die Fläche des Dreiecks, das von den beiden Vektoren \mathbf{u} und \mathbf{v} aufgespannt wird, ist $\frac{1}{2} \det(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

VIII. Geometrie mit komplexen Zahlen

1. Geraden	79
2. Kreise	83
3. Spiegelung an einer Geraden	85

Wir fassen die Ebene als die Menge \mathbb{C} der komplexen Zahlen auf. Jeder Punkt entspricht einer komplexen Zahl. Auch Vektoren werden durch komplexe Zahlen dargestellt. So lassen sich geometrische Sachverhalte in Aussagen über komplexe Zahlen übersetzen. Die Menge der imaginären Zahlen bezeichnen wir mit \mathbb{I} .

Um umständliche Formulierungen zu vermeiden, werden wir oft Punkte und komplexe Zahlen identifizieren, ebenso Vektoren und komplexe Zahlen. Wenn zum Beispiel von einer Gerade durch zwei komplexe Zahlen gesprochen wird, dann ist natürlich die Gerade durch die beiden Punkte gemeint, die diesen komplexen Zahlen entsprechen. Und wenn gesagt wird, dass zwei komplexe Zahlen aufeinander senkrecht stehen, dann ist natürlich gemeint, dass die Vektoren aufeinander senkrecht stehen, die diesen komplexen Zahlen entsprechen.

Die Addition zweier komplexer Zahlen entspricht der Vektoraddition. Die Multiplikation mit einer komplexen Zahl lässt sich als Drehstreckung interpretieren. Wir werden weitere geometrische Sachverhalte mit Hilfe komplexer Zahlen formulieren.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels geben wir Bedingungen dafür an, dass Geraden senkrecht aufeinander stehen oder parallel liegen, und dafür, dass drei Punkte auf einer Geraden liegen. Damit beweisen wir dann Sätze über das Dreieck und auch einen über das Sehnenviereck.

Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels geben wir eine Formulierung des Peripheriewinkelsatzes und des Tangentenwinkelsatzes mit Hilfe komplexer Zahlen. Diese hat den Vorteil, dass man keine Fallunterscheidungen machen muss. Aus dem Peripheriewinkelsatz erhält man eine Bedingung dafür, dass vier Punkte auf einem Kreis liegen. Aus dem Tangentenwinkelsatz erhält man eine Bedingung dafür, dass drei Punkte auf einem Kreis liegen und ein vierter Punkt auf der Tangente an den Kreis in einem dieser drei Punkte. Damit beweisen wir dann die Sätze von Miquel und Brocard.

Im dritten Abschnitt dieses Kapitels finden wir eine Formel für die Spiegelung eines Punktes an einer Geraden. Dafür wird die konjugiert komplexen Zahl verwendet. Wir beweisen damit einige Sätze über das Dreieck, insbesondere die Sätze über die Steinergeraden.

In Kapitel IX wird ebenfalls Geometrie in der komplexen Ebene betrieben. Wir finden dort Gleichungen für Gerade und Kreise und eine sehr einfache Formel für die Inversion an einem Kreis. Weitere Anwendungen der komplexen Zahlen in der Geometrie findet man in dem Buch “Liang-shin Hahn: *Complex Numbers and Geometry*, MAA, 1994”.

In “Gregoire Nicollier: *Minimal Proof of a Generalized Droz-Farny Theorem*, Forum Geometricorum 16, 2016, 397-398” wird eine Verallgemeinerung des Satzes von Droz-Farny mit Hilfe komplexer Zahlen bewiesen. Der Beweis ist im Wesentlichen derselbe wie der im Übungsbeispiel am Ende von Abschnitt 4 in Kapitel IV.

1. Geraden

Der folgende Satz gibt Bedingungen dafür, dass Punkte eine bestimmte Lage zueinander haben. Wir verwenden dazu das Argument $\arg z$ einer komplexen Zahl $z \neq 0$. Das ist der Winkel, den man erhält, wenn man von der positiven reellen Achse im Gegenuhrzeigersinn bis zum Vektor wandert, der der komplexen Zahl z entspricht. Für komplexe Zahlen p und q gilt $\arg pq = \arg p + \arg q$ und $\arg \frac{p}{q} = \arg p - \arg q$.

Satz 100: Seien u, v, w und z komplexe Zahlen mit $u \neq v$ und $w \neq z$. Dann gilt

(1) $u - v$ senkrecht auf $w - z \iff \frac{u-v}{w-z} \in \mathbb{I} \iff (u - v)(\bar{w} - \bar{z}) \in \mathbb{I}$

(2) $u - v$ parallel zu $w - z \iff \frac{u-v}{w-z} \in \mathbb{R} \iff (u - v)(\bar{w} - \bar{z}) \in \mathbb{R}$

(3) v, w und z auf einer Gerade $\iff \frac{v-z}{w-z} \in \mathbb{R} \iff (v-z)(\bar{w}-\bar{z}) \in \mathbb{R} \iff v\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{v} \in \mathbb{R}$

Beweis: (1) Die komplexen Zahlen $u - v$ und $w - z$ (als Vektoren aufgefasst) stehen senkrecht aufeinander genau dann, wenn $\arg(u - v) - \arg(w - z) = \arg \frac{u-v}{w-z}$ gleich $\pm 90^\circ$ oder gleich $\pm 270^\circ$ ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $\frac{u-v}{w-z}$ imaginär ist. Die zweite Äquivalenz folgt durch Multiplikation mit der reellen Zahl $(w - z)(\bar{w} - \bar{z})$.

(2) Die komplexen Zahlen $u - v$ und $w - z$ (als Vektoren aufgefasst) sind parallel genau dann, wenn $\arg(u - v) - \arg(w - z) = \arg \frac{u-v}{w-z}$ gleich 0° oder gleich $\pm 180^\circ$ ist. Das gilt genau dann, wenn $\frac{u-v}{w-z}$ reell ist. Die zweite Äquivalenz folgt wieder durch Multiplikation mit der reellen Zahl $(w - z)(\bar{w} - \bar{z})$.

(3) Da v, w und z genau dann auf einer Gerade liegen, wenn $v = z$ gilt oder wenn $v - z$ und $w - z$ parallel liegen, ergibt sich mit Hilfe von (2), dass die ersten beiden Äquivalenzen in (3) gelten. Weiters gilt $-(v - z)(\bar{w} - \bar{z}) = v\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{v} - z\bar{z} - (v\bar{w} + w\bar{v})$. Da $v\bar{w} + w\bar{v}$ als Summe einer Zahl und ihrer konjugiert Komplexen in \mathbb{R} liegt und ebenso $z\bar{z} = |z|^2$, erhalten wir auch die dritte Äquivalenz in (3). \square

Senkrechte Geraden: Zum Aufwärmen behandeln wir den Höhenschnittpunkt eines Dreiecks. Danach wird es komplizierter.

Satz 101: Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.

Beweis: Wir fassen die Eckpunkte des Dreiecks als komplexe Zahlen a, b und c auf. Wir legen das Dreieck so, dass der Schnittpunkt der Höhe durch a und der durch b der Nullpunkt ist. Der Vektor von c nach b und der von 0 nach a stehen senkrecht aufeinander, daher ist $(b - c)\bar{a}$ imaginär. Ebenso stehen der Vektor von c nach a und der von 0 nach b senkrecht aufeinander, daher ist auch $(a - c)\bar{b}$ imaginär. Durch Subtraktion erhält man, dass $(b - c)\bar{a} - (a - c)\bar{b} = b\bar{a} - a\bar{b} - c(\bar{a} - \bar{b})$ imaginär ist. Da aber $b\bar{a} - a\bar{b}$ als Differenz einer Zahl und ihrer konjugiert Komplexen imaginär ist, ist auch $c(\bar{a} - \bar{b})$ imaginär. Damit ist bewiesen, dass der Vektor von 0 nach c und der Vektor von b nach a senkrecht aufeinander stehen. Das heißt, 0 liegt auch auf der Höhe durch c . \square

Übung: Man zeige mit Hilfe komplexer Zahlen, dass die drei Symmetralen der Seiten eines Dreiecks einander in einem Punkt schneiden.

Satz 102: Auf die Seiten eines Dreiecks $\triangle ABC$ als Basis werden gleichschenkelige Dreiecke $\triangle AFB, \triangle BDC$ und $\triangle CEA$ gesetzt. Sei h_a die Senkrechte auf $\ell(E, F)$ durch A , sei h_b die Senkrechte auf $\ell(D, F)$ durch B und h_c die Senkrechte auf $\ell(D, E)$ durch C . Dann schneiden diese drei Geraden einander in einem Punkt.

Beweis: Wir fassen die Eckpunkte des Dreiecks als komplexe Zahlen a , b und c auf. Wir legen das Dreieck so, dass der Schnittpunkt der Geraden h_a und h_b der Nullpunkt ist. Die Punkte D , E und F entsprechen dann komplexen Zahlen d , e und f .

Die Gerade durch a und b steht senkrecht auf die Gerade durch f und den Mittelpunkt $\frac{a+b}{2}$ der Dreiecksseite von a nach b . Daher gilt $(f - \frac{a+b}{2})(\bar{a} - \bar{b}) \in \mathbb{I}$. Ausmultiplizieren ergibt $f\bar{a} - f\bar{b} - \frac{1}{2}a\bar{a} + \frac{1}{2}a\bar{b} - \frac{1}{2}b\bar{a} + \frac{1}{2}b\bar{b} \in \mathbb{I}$. Da aber $\frac{1}{2}a\bar{b} - \frac{1}{2}b\bar{a}$ als Differenz einer Zahl und ihrer konjugiert Komplexen imaginär ist, gilt auch $f\bar{a} - f\bar{b} - \frac{1}{2}a\bar{a} + \frac{1}{2}b\bar{b} \in \mathbb{I}$. Führt man dieselbe Rechnung auch für die anderen beiden Dreiecksseiten durch, dann erhält man $e\bar{c} - e\bar{a} - \frac{1}{2}c\bar{c} + \frac{1}{2}a\bar{a} \in \mathbb{I}$ und $d\bar{b} - d\bar{c} - \frac{1}{2}b\bar{b} + \frac{1}{2}c\bar{c} \in \mathbb{I}$. Addiert man diese drei Ausdrücke, so ergibt sich $f\bar{a} - f\bar{b} + e\bar{c} - e\bar{a} + d\bar{b} - d\bar{c} \in \mathbb{I}$.

Die Geraden h_a und h_b gehen durch den Nullpunkt. Somit gilt $(e-f)\bar{a} \in \mathbb{I}$ und $(f-d)\bar{b} \in \mathbb{I}$. Addiert man diese beiden Ausdrücke zu dem, den wir zuletzt erhalten haben, dann ergibt sich $e\bar{c} - d\bar{c} \in \mathbb{I}$, also $(e-d)\bar{c} \in \mathbb{I}$. Das aber bedeutet, dass der Nullpunkt auch auf der Geraden durch c liegt, die senkrecht auf die Gerade durch d und e steht, also auf h_c . Damit ist gezeigt, dass die drei Geraden h_a , h_b und h_c durch einen Punkt gehen. \square

Projiziert man den Punkt, der einer komplexen Zahl z entspricht, auf die reelle Achse, dann erhält man den Punkt, der der komplexen Zahl $\frac{1}{2}(z + \bar{z})$ entspricht.

Satz 103: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und h eine Gerade. Seien D , E und F die Fußpunkte der Lote von den Eckpunkten A , B und C auf die Gerade h . Sei g_a die Senkrechte durch D auf $\ell(B, C)$, g_b die Senkrechte durch E auf $\ell(A, C)$ und g_c die Senkrechte durch F auf $\ell(A, B)$. Dann schneiden die Geraden g_a , g_b und g_c einander in einem Punkt P . Dieser Punkt P heißt Orthopol der Geraden h und des Dreiecks $\triangle ABC$.

Beweis: Wir können Dreieck und Gerade so in die komplexe Ebene legen, dass die Gerade auf der reellen Achse liegt. Die Eckpunkte des Dreiecks entsprechen komplexen Zahlen a , b und c . Die Fußpunkte der Lote sind $d = \frac{1}{2}(a + \bar{a})$, $e = \frac{1}{2}(b + \bar{b})$ und $f = \frac{1}{2}(c + \bar{c})$. Sei p die komplexe Zahl, die dem Schnittpunkt P der Geraden g_a und g_b entspricht. Dann folgt $(p-d)(\bar{b}-\bar{c}) \in \mathbb{I}$ und $(p-e)(\bar{c}-\bar{a}) \in \mathbb{I}$. Es gilt $(p-d)(\bar{b}-\bar{c}) + (p-e)(\bar{c}-\bar{a}) = (p-f)(\bar{b}-\bar{a}) + w$ mit $w = f(\bar{b}-\bar{a}) - d(\bar{b}-\bar{c}) - e(\bar{c}-\bar{a}) = \frac{1}{2}(c\bar{b} - b\bar{c} + a\bar{c} - c\bar{a} + b\bar{a} - ab)$. Da die Differenz einer komplexen Zahl und ihrer konjugiert Komplexen in \mathbb{I} liegt, erhalten wir $w \in \mathbb{I}$. Es folgt $(p-f)(\bar{b}-\bar{a}) \in \mathbb{I}$. Das zeigt, dass p auch auf der Geraden durch f liegt, die senkrecht auf die Gerade durch a und b steht, also auf g_c . \square

Satz 104: Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck mit Umkreis k . Seien k_{AB} , k_{BC} , k_{CD} und k_{DA} die Bögen, in die k durch die Punkte A , B , C und D geteilt wird. Sei P der Mittelpunkt von k_{AB} , Q der von k_{BC} , R der von k_{CD} und S der von k_{DA} . Dann stehen die Strecken \overline{PR} und \overline{QS} senkrecht aufeinander.

Beweis: Der Umkreis k sei der Einheitskreis. Die Ecken des Sehnenvierecks entsprechen komplexen Zahlen $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$, $e^{i\gamma}$ und $e^{i\delta}$ mit $0^0 \leq \alpha < \beta < \gamma < \delta < 360^0$. Sei $\varepsilon = \alpha + 360^0$. Die Mittelpunkte der Bögen entsprechen dann den komplexen Zahlen $p = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$, $q = e^{i\frac{\beta+\gamma}{2}}$, $r = e^{i\frac{\gamma+\delta}{2}}$ und $s = e^{i\frac{\delta+\varepsilon}{2}}$. Wir setzen $u = e^{i\frac{\alpha}{2}}$, $v = e^{i\frac{\beta}{2}}$, $w = e^{i\frac{\gamma}{2}}$ und $z = e^{i\frac{\delta}{2}}$. Wegen $\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\alpha}{2} + 180^0$ gilt $e^{i\frac{\varepsilon}{2}} = -e^{i\frac{\alpha}{2}} = -u$. Wir erhalten $p = uv$, $q = vw$, $r = wz$ und $s = -zu$. In der folgenden Rechnung ist zu beachten, dass $u\bar{u} = 1$, $v\bar{v} = 1$, $w\bar{w} = 1$ und $z\bar{z} = 1$ gilt.

$$(p-r)(\bar{q}-\bar{s}) = (uv-wz)(\bar{v}\bar{w} + \bar{z}\bar{u}) = u\bar{w} + v\bar{z} - z\bar{v} - w\bar{u}$$

Da $u\bar{w} - w\bar{u}$ und $v\bar{z} - z\bar{v}$ imaginär sind, ist auch $(p-r)(\bar{q}-\bar{s})$ imaginär. Somit stehen $p-r$ und $q-s$ aufeinander senkrecht, das sind die Strecken \overline{PR} und \overline{QS} . \square

Übung: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Umkreis k . Seien k_{AB} , k_{BC} und k_{CA} die Bögen, in die k durch die Punkte A , B und C geteilt wird. Sei P der Mittelpunkt von k_{AB} , Q der von k_{BC} und R der von k_{CA} . Dann stehen die Strecken \overline{PC} und \overline{QR} senkrecht aufeinander.

Aufgesetzte Figuren: Es gibt viele Sätze über Figuren, die auf den Seiten eines Dreiecks aufgesetzt werden. Wir beweisen zwei dieser Sätze. Dabei verwenden wir, dass die Multiplikation mit einer komplexen Zahl λ vom Betrag 1 eine Drehung um den Winkel $\varphi = \arg \lambda$ bewirkt. Sind U und V Punkte, die den komplexen Zahlen u und v entsprechen, dann entspricht die komplexe Zahl $u + (v - u)\lambda$ dem Punkt, den man erhält, wenn man V um den Punkt U um den Winkel φ dreht. Hat die komplexe Zahl λ den Betrag $c \neq 1$, dann erfolgt zusätzlich zur Drehung eine zentrische Streckung mit Zentrum U und Streckungsfaktor c .

Satz 105: Auf den Seiten eines Dreiecks $\triangle ABC$ werden gleichseitige Dreiecke aufgesetzt. Sei D die Spitze des Dreiecks auf \overline{BC} , E die des Dreiecks auf \overline{AC} und F die des Dreiecks auf \overline{AB} . Dann gilt $|AD| = |BE| = |CF|$ und die Geraden $\ell(A, D)$, $\ell(B, E)$ und $\ell(C, F)$ schneiden einander in einem Punkt, dem Fermatpunkt, und bilden dort Winkel von 60° .

Beweis: Wir fassen die Eckpunkte des vorgegebenen Dreiecks als komplexe Zahlen a , b und c auf. Die Spitzen der über den Dreiecksseiten errichteten gleichschenkeligen Dreiecke entsprechen komplexen Zahlen, die wir mit f , d und e bezeichnen. Sei $\lambda = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\tan 60^\circ}{2}$. Die Multiplikation mit λ bewirkt eine Drehung um 60° . Damit erhalten wir

$$d = c + (b - c)\lambda = c + (b - c)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = b\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + c\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = b\lambda + c\bar{\lambda}$$

$$e = a + (c - a)\lambda = a + (c - a)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = a\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + c\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = c\lambda + a\bar{\lambda}$$

$$f = b + (a - b)\lambda = b + (a - b)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = a\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + b\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = a\lambda + b\bar{\lambda}$$

Es gilt $\lambda^2 = -\lambda$ und $\lambda\bar{\lambda} = 1$. Damit erhalten wir $(d - a)\lambda = c - f$ und $(c - f)\lambda = e - b$. Das bedeutet, dass die Strecken von c nach f , von a nach d und von b nach e gleich lang sind, und dass die Winkel zwischen diesen Strecken 60° betragen.

Das Dreieck liege so, dass der Schnittpunkt der Gerade durch a und d mit der durch b und e der Nullpunkt ist. Da d , a und 0 auf einer Geraden liegen, ist $d\bar{a} = b\bar{a}\lambda + c\bar{a}\bar{\lambda}$ reell. Da e , b und 0 auf einer Geraden liegen, ist $e\bar{b} = c\bar{b}\lambda + a\bar{b}\bar{\lambda}$ reell. Addition ergibt, dass $b\bar{a}\lambda + a\bar{b}\bar{\lambda} + c\bar{a}\bar{\lambda} + c\bar{b}\lambda$ reell ist. Da aber $b\bar{a}\lambda + a\bar{b}\bar{\lambda}$ als Summe einer Zahl und ihrer konjugiert Komplexen reell ist, ist $c\bar{a}\bar{\lambda} + c\bar{b}\lambda$ reell. Das ist gleich $c\bar{f}$. Damit ist bewiesen, dass c , f und 0 auf einer Geraden liegen, das heißt, 0 liegt auch auf der Gerade durch c und f . \square

Satz 106: Auf den Seiten eines Dreiecks $\triangle ABC$ werden Quadrate aufgesetzt, auf \overline{AB} das Quadrat $AKLB$ (über A liegt K , über B liegt L), auf \overline{BC} das Quadrat $BMNC$ (über B liegt M , über C liegt N) und auf \overline{CA} das Quadrat $CPQA$ (über C liegt P , über A liegt Q). Dann schneiden die Symmetrale der Strecke \overline{QK} , die der Strecke \overline{LM} und die der Strecke \overline{NP} einander in einem Punkt.

Beweis: Wir fassen die Eckpunkte des vorgegebenen Dreiecks als komplexe Zahlen a , b und c auf. Die komplexen Zahlen, die den Punkten K und L entsprechen, sind dann $k = a - (b - a)i$ und $l = b + (a - b)i$. Die komplexen Zahlen, die den Punkten M und N entsprechen, sind $m = b - (c - b)i$ und $n = c + (b - c)i$. Die komplexen Zahlen, die den Punkten P und Q entsprechen, sind $p = c - (a - c)i$ und $q = a + (c - a)i$. Der Mittelpunkt

der Strecke \overline{QK} entspricht der komplexen Zahl $d = \frac{q+k}{2} = a + i\frac{c-b}{2}$. Der Mittelpunkt der Strecke \overline{LM} entspricht der komplexen Zahl $e = \frac{l+m}{2} = b + i\frac{a-c}{2}$. Der Mittelpunkt der Strecke \overline{NP} entspricht der komplexen Zahl $f = \frac{n+p}{2} = c + i\frac{b-a}{2}$.

Wir legen das Dreieck so, dass der Schnittpunkt der Symmetrale der Strecke \overline{QK} und der der Strecke \overline{LM} einander im Nullpunkt schneiden. Die Gerade durch q und k und die durch d und 0 stehen senkrecht aufeinander, daher ist $(q-k)\bar{d}$ imaginär. Setzt man ein, so hat man $(b+c-2a)(\bar{a} - i\frac{\bar{c}-\bar{b}}{2}) \in \mathbb{R}$. Das ist $b\bar{a} + c\bar{a} - 2a\bar{a} - i\frac{c\bar{c}-b\bar{b}+b\bar{c}-c\bar{b}}{2} + i(a\bar{c} - a\bar{b})$. Da $a\bar{a}$ reell und $b\bar{c} - c\bar{b}$ imaginär ist, folgt $b\bar{a} + c\bar{a} - i\frac{c\bar{c}-b\bar{b}}{2} + i(a\bar{c} - a\bar{b}) \in \mathbb{R}$.

Die Gerade durch l und m und die durch e und 0 stehen ebenfalls senkrecht aufeinander, daher ist $(l-m)\bar{e}$ imaginär. Es folgt $(a+c-2b)(\bar{b} - i\frac{\bar{a}-\bar{c}}{2}) \in \mathbb{R}$. Durch Ausmultiplizieren folgt $a\bar{b} + c\bar{b} - i\frac{a\bar{a}-c\bar{c}}{2} + i(b\bar{a} - b\bar{c}) \in \mathbb{R}$ wie oben.

Diese beiden Zahlen, die sich als reell erwiesen haben, addieren wir und erhalten so, dass $b\bar{a} + a\bar{b} + c\bar{a} + c\bar{b} - i\frac{a\bar{a}-b\bar{b}}{2} + i(b\bar{a} - a\bar{b} + a\bar{c} - b\bar{c})$ reell ist. Da $b\bar{a} + a\bar{b}$ reell und $b\bar{a} - a\bar{b}$ imaginär ist, ist auch $c\bar{a} + c\bar{b} - i\frac{a\bar{a}-b\bar{b}}{2} + i(a\bar{c} - b\bar{c})$ reell. Jetzt kommt etwas dazu. Da $c\bar{c}$ reell und $a\bar{b} - b\bar{a}$ imaginär ist, ist $c\bar{a} + c\bar{b} - 2c\bar{c} - i\frac{a\bar{a}-b\bar{b}+a\bar{b}-b\bar{a}}{2} + i(a\bar{c} - b\bar{c})$ reell. Das aber ist gleich $f(\bar{p} - \bar{n})$. Damit ist gezeigt, dass die Gerade durch f und 0 und die durch p und n aufeinander senkrecht stehen, das heißt, die Symmetrale der Strecke \overline{PN} geht durch den Nullpunkt, den Schnittpunkt der beiden anderen Symmetralen. \square

Übung: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Auf den Seiten \overline{AC} und \overline{BC} werden Quadrate $CEDA$ (wobei D über A und E über C liegt) und $BFGC$ (wobei F über B und G über C liegt) errichtet. Die Mittelpunkte dieser Quadrate seien M und L . Die Mittelpunkte der Strecken \overline{AB} und \overline{EG} seien U und V . Dann ist das Viereck $MULV$ ein Quadrat. Die Gerade $\ell(E, G)$ steht senkrecht auf $\ell(U, C)$ und es gilt $|EG| = 2|UC|$. Die Gerade $\ell(V, C)$ steht senkrecht auf $\ell(A, B)$ und es gilt $|AB| = 2|VC|$.

Übung: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Über jeder Dreiecksseite wird ein Quadrat errichtet. Die Mittelpunkte dieser Quadrate seien L, M und N , wobei N der Mittelpunkt des Quadrats über der Seite \overline{AB} ist. Dann stehen die beiden Strecken \overline{NC} und \overline{LM} aufeinander senkrecht und es gilt $|NC| = |LM|$.

Übung: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und g eine Gerade, die die Gerade $\ell(B, C)$ im Punkt D , die Gerade $\ell(A, C)$ im Punkt E und die Gerade $\ell(A, B)$ im Punkt F schneidet. Die Punkte R, S und T werden so gewählt, dass $AFRE, BFSD$ und $CDTE$ Parallelogramme sind. Dann liegen die Punkte R, S und T auf einer Geraden. Hinweis: Man verwende die dritte Aussage in (3) aus Satz 100. Für komplexe Zahlen p und q gilt $p\bar{p} \in \mathbb{R}$ und $p\bar{q} + q\bar{p} \in \mathbb{R}$.

Übung: Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck. Seien P, Q, R und S in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Quadrate, die auf den Seiten $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ und \overline{DA} außen aufgesetzt werden. Man zeige, dass die Strecken \overline{PR} und \overline{QS} aufeinander senkrecht stehen und gleich lang sind. Weiters seien Seien K, L, M und N in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Strecken $\overline{PQ}, \overline{QR}, \overline{RS}$ und \overline{SP} . Dann ist das Viereck $KL MN$ ein Quadrat.

Übung: Über den Seiten eines Dreiecks $\triangle ABC$ werden Quadrate $BPQC$ (wobei P über B und Q über C liegt), $CRSA$ (wobei R über C und S über A liegt) und $ATUB$ (wobei T über A und U über B liegt) errichtet. Weiters bilden wir die Parallelogramme $UBPD$ und $RCQE$. Man zeige, dass das Dreieck $\triangle ADE$ gleichschenkelig und rechtwinkelig ist.

2. Kreise

Wir formulieren Peripheriewinkelsatz und Tangentenwinkelsatz mit komplexen Zahlen.

Satz 107: Seien u, v, w und z komplexe Zahlen mit $u \neq v$ und $w \neq z$, die aber nicht alle auf einer Gerade liegen. Dann gilt

- (1) u, v, w und z auf einem Kreis $\iff \frac{(w-v)(u-z)}{(u-v)(w-z)} \in \mathbb{R}$
 (2) u, v, w auf einem Kreis und z auf der Tangente durch w $\iff \frac{(w-v)(u-w)}{(u-v)(z-w)} \in \mathbb{R}$

Beweis: (1) Wenn $u = z, v = w$ oder $u = w$ gilt, dann liegen u, v, w und z natürlich auf einem Kreis und es gilt auch $\frac{(w-v)(u-z)}{(u-v)(w-z)} \in \mathbb{R}$. Somit ist (1) erfüllt. Wir können daher $u \neq z, v \neq w$ und $u \neq w$ annehmen.

Sei g die Gerade durch u und w . Sei H^+ die Halbebene links von g , wenn wir von u nach w blicken, einschließlich der Gerade g . Sei H^- die Halbebene rechts von g , jedoch ohne die Gerade g . Sei $p \in \mathbb{C} \setminus \{u, w\}$. Der Winkel zwischen den Vektoren $u - p$ und $w - p$, und zwar von $u - p$ nach $w - p$ gemessen, ist $\arg(w - p) - \arg(u - p) = \arg \frac{w-p}{u-p}$. Für $p \in H^+$ gilt $\arg \frac{w-p}{u-p} \in [0^0, 180^0]$ und für $p \in H^-$ gilt $\arg \frac{w-p}{u-p} \in (-180^0, 0^0)$. Der Peripheriewinkelsatz macht Aussagen über die Beträge dieser Winkel. Nach Voraussetzung liegt v oder z nicht auf g . Wir nehmen an, dass v nicht auf g und in H^+ liegt. (sonst nehmen wir z anstelle von v und vertauschen gegebenenfalls die Rollen von u und w). Es gilt dann $0^0 < \arg \frac{w-v}{u-v} < 180^0$. Sei k der Kreis durch u, v und w .

Wir nehmen zuerst an, dass z in H^+ liegt. Dann gilt

$$\begin{aligned} z \text{ auf } k &\iff |\arg \frac{w-v}{u-v}| = |\arg \frac{w-z}{u-z}| && \text{nach dem Peripheriewinkelsatz} \\ &\iff \arg \frac{w-v}{u-v} = \arg \frac{w-z}{u-z} && \text{da } \arg \frac{w-v}{u-v} \geq 0^0 \text{ und } \arg \frac{w-z}{u-z} \geq 0^0 \\ &\iff \arg \frac{(w-v)(u-z)}{(u-v)(w-z)} = \arg \frac{w-v}{u-v} - \arg \frac{w-z}{u-z} = 0^0 \\ &\iff \frac{(w-v)(u-z)}{(u-v)(w-z)} \in \mathbb{R} && \text{da } -180^0 < \arg \frac{w-v}{u-v} - \arg \frac{w-z}{u-z} < 180^0 \text{ immer gilt} \end{aligned}$$

Wir nehmen jetzt an, dass z in H^- liegt. Auch in diesem Fall erhalten wir

$$\begin{aligned} z \text{ auf } k &\iff |\arg \frac{w-v}{u-v}| = 180^0 - |\arg \frac{w-z}{u-z}| && \text{nach dem Peripheriewinkelsatz} \\ &\iff \arg \frac{w-v}{u-v} = 180^0 + \arg \frac{w-z}{u-z} && \text{da } \arg \frac{w-v}{u-v} \geq 0^0 \text{ und } \arg \frac{w-z}{u-z} \leq 0^0 \\ &\iff \arg \frac{(w-v)(u-z)}{(u-v)(w-z)} = \arg \frac{w-v}{u-v} - \arg \frac{w-z}{u-z} = 180^0 \\ &\iff \frac{(w-v)(u-z)}{(u-v)(w-z)} \in \mathbb{R} && \text{da } 0^0 < \arg \frac{w-v}{u-v} - \arg \frac{w-z}{u-z} < 360^0 \text{ immer gilt} \end{aligned}$$

In beiden Fällen gilt: u, v, w und z auf einem Kreis genau dann, wenn $\frac{(w-v)(u-z)}{(u-v)(w-z)} \in \mathbb{R}$.

(2) Gilt $u = w$ oder $v = w$, dann gibt es einen Kreis durch u, v und w mit z auf der Tangente durch w und es gilt auch $\frac{(w-v)(u-w)}{(u-v)(z-w)} \in \mathbb{R}$. Somit ist (2) erfüllt. Wir können $u \neq w$ und $v \neq w$ annehmen. Gilt $u = z$ oder $v = z$, dann gibt es keinen Kreis durch u, v und w mit z auf der Tangente durch w und es gilt auch $\frac{(w-v)(u-w)}{(u-v)(z-w)} \notin \mathbb{R}$ wegen Satz 100, da w nicht auf der Gerade durch u und v liegt. Somit ist (2) erfüllt. Wir können $u \neq z$ und $v \neq z$ annehmen. Wenn u, v und w auf einer Gerade liegen, dann gibt es keinen Kreis durch u, v und w . Da z nach Voraussetzung nicht auf dieser Gerade liegt, gilt nach Satz 100 zwar $\frac{w-v}{u-v} \in \mathbb{R}$, aber $\frac{u-w}{z-w} \notin \mathbb{R}$ und somit auch $\frac{(w-v)(u-w)}{(u-v)(z-w)} \notin \mathbb{R}$. Wieder ist (2) erfüllt. Wir können annehmen, dass u, v und w nicht auf einer Gerade liegen.

Sei k der Kreis durch u, v und w und t die Tangente in w . Seien H^+ und H^- wie oben und $v \in H^+$. Für $p \in H^+$ gilt $\arg \frac{p-w}{u-w} \in [-180^0, 0^0]$ und für $p \in H^-$ gilt $\arg \frac{p-w}{u-w} \in (0^0, 180^0)$.

Aus dem Tangentenwinkelsatz folgt: Ist $z \in H^-$, dann liegt z genau dann auf t , wenn $\arg \frac{w-v}{u-v} = \arg \frac{z-w}{u-w}$ gilt. Ist $z \in H^+$, dann liegt z genau dann auf t , wenn $\arg \frac{w-v}{u-v} = 180^\circ + \arg \frac{z-w}{u-w}$ gilt. Jetzt geht es weiter wie oben. Für $v \in H^-$ ist der Beweis analog. \square

Satz 108 (Satz von Miquel) Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Sei D ein Punkt auf $\ell(B, C)$, sei E ein Punkt auf $\ell(A, C)$ und sei F ein Punkt auf $\ell(A, B)$, jedoch keiner dieser Punkte falle mit einem Eckpunkt zusammen. Sei k_a der Kreis durch die Punkte A, E und F , sei k_b der Kreis durch die Punkte B, D und F und sei k_c der Kreis durch die Punkte C, D und E . Dann haben diese drei Kreise einen gemeinsamen Punkt Z .

Beweis: Wir fassen die Eckpunkte des vorgegebenen Dreiecks als komplexe Zahlen a, b und c auf. Die Punkte D, E und F entsprechen komplexen Zahlen, die wir mit d, e und f bezeichnen. Da die Punkte A, B und F auf einer Gerade liegen, gilt

$$(1) \quad \frac{b-a}{f-a} \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \frac{a-b}{f-b} \in \mathbb{R}$$

Da die Punkte A, C und E auf einer Gerade liegen, gilt

$$(2) \quad \frac{c-a}{e-a} \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \frac{a-c}{e-c} \in \mathbb{R}$$

Da die Punkte B, C und D auf einer Gerade liegen, gilt

$$(3) \quad \frac{c-b}{d-b} \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \frac{b-c}{d-c} \in \mathbb{R}$$

Der Schnittpunkt $\neq F$ der Kreise k_a und k_b entspricht einer komplexen Zahl z . Da a, e, f und z auf k_a liegen, erhalten wir $\frac{(f-a)(e-z)}{(e-a)(f-z)} \in \mathbb{R}$. Mit Hilfe von (1) und (2) folgt $\frac{(b-a)(e-z)}{(c-a)(f-z)} \in \mathbb{R}$. Da b, d, f und z auf k_b liegen, erhalten wir $\frac{(d-b)(f-z)}{(f-b)(d-z)} \in \mathbb{R}$. Mit Hilfe von (1) und (3) folgt $\frac{(c-b)(f-z)}{(a-b)(d-z)} \in \mathbb{R}$. Multiplikation der beiden so erhaltenen Quotienten ergibt $\frac{(b-c)(e-z)}{(a-c)(d-z)} \in \mathbb{R}$. Mit Hilfe von (2) und (3) folgt $\frac{(d-c)(e-z)}{(e-c)(d-z)} \in \mathbb{R}$. Das aber bedeutet, dass c, d, e und z auf einem Kreis liegen. Da c, d und e auf k_c liegen, muss dieser Kreis der Kreis k_c sein. Somit liegt z auf allen drei Kreisen.

Allerdings funktioniert dieser Beweis nicht, wenn z mit d, e oder f zusammenfällt. Fällt z mit d oder e zusammen, dann liegt z bereits auf allen drei Kreisen. Gilt $z = f$, dann berühren die Kreise k_a und k_b einander in z . Sie haben eine gemeinsame Tangente in z , auf der wir einen Punkt $q \neq z$ wählen. Da auch a und e auf k_a liegen, gilt $\frac{(f-a)(e-z)}{(e-a)(q-z)} \in \mathbb{R}$. Da auch b und d auf k_b liegen, gilt $\frac{(f-b)(d-z)}{(d-b)(q-z)} \in \mathbb{R}$. (Es ist $z = f$ zu beachten.) Division ergibt $\frac{(f-a)(e-z)(d-b)}{(e-a)(f-b)(d-z)} \in \mathbb{R}$. Wegen (1) gilt $\frac{f-a}{f-b} \in \mathbb{R}$ und somit auch $\frac{(e-z)(d-b)}{(e-a)(d-z)} \in \mathbb{R}$. Wegen (2) und (3) erhalten wir $\frac{(b-c)(e-z)}{(a-c)(d-z)} \in \mathbb{R}$. Jetzt ergibt sich wie oben, dass z auf k_c liegt. \square

Satz 109 (Satz von Brocard) Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Der Kreis k_a durch A , der $\ell(B, C)$ in B berührt, der Kreis k_b durch B , der $\ell(C, A)$ in C berührt, und der Kreis k_c durch C , der $\ell(A, B)$ in A berührt, schneiden einander in einem Punkt P .

Beweis: Da $\ell(B, C)$ Tangente an k_a im Punkt B ist, aber nicht Tangente an k_b , muss neben B ein zweiter Schnittpunkt P der Kreise k_a und k_b existieren. Da A auf der Tangente des Kreises k_b im Punkt C liegt, liegt A nicht auf k_b . Da C auf der Tangente des Kreises k_a im Punkt B liegt, liegt C nicht auf k_a . Somit gilt $P \neq A$ und $P \neq C$.

Wir fassen die Eckpunkte des vorgegebenen Dreiecks als komplexe Zahlen a, b und c auf. Sei p die komplexe Zahl, die dem Punkt P entspricht. Da a, p und b auf k_a liegen und c auf der Tangente in b , haben wir $\frac{(b-a)(p-b)}{(p-a)(c-b)} \in \mathbb{R}$. Ebenso gilt $\frac{(c-b)(p-c)}{(p-b)(a-c)} \in \mathbb{R}$, da b, p und c auf k_b liegen und a auf der Tangente in c . Multipliziert man diese beiden Quotienten,

so ergibt sich $\frac{(b-a)(p-c)}{(p-a)(a-c)} \in \mathbb{R}$. Auch der Kehrwert $\frac{(a-c)(p-a)}{(p-c)(b-a)}$ ist reell. Das aber bedeutet: der Punkt b liegt auf der Tangente im Punkt a an den Kreis, der durch a , c und p geht. Da dieser Kreis durch c und a geht und b auf der Tangente in a liegt, ist er der Kreis k_c . Damit ist bewiesen, dass p auch auf k_c liegt. \square

3. Spiegelung an einer Geraden

Die Multiplikation mit einer komplexen Zahl bewirkt eine Drehstreckung. Jetzt überlegen wir uns, wie man eine Spiegelung mit Hilfe komplexer Zahlen darstellen kann.

Satz 110: Seien u , v und p komplexe Zahlen. Dann entspricht die komplexe Zahl

$$(\bar{p} - \bar{u}) \frac{v-u}{\bar{v}-\bar{u}} + u = (\bar{p} - \bar{v}) \frac{u-v}{\bar{u}-\bar{v}} + v$$

dem Punkt, den man erhält, wenn man den der komplexen Zahl p zugeordneten Punkt an der Gerade g durch u und v spiegelt.

Beweis: Die Spiegelung von p an der Gerade g durch u und v erhält man durch Hintereinanderausführung folgender fünf Abbildungen:

- (a) Subtraktion von u : Translation, die den Punkt u in den Punkt 0 verschiebt
- (b) Division durch $\frac{v-u}{|v-u|}$: dreht die verschobene Gerade g auf die reelle Achse
- (c) Bilden der konjugiert komplexen Zahl: Spiegelung an der reellen Achse
- (d) Multiplikation mit $\frac{v-u}{|v-u|}$: dreht die reelle Achse wieder in Richtung der Gerade g
- (e) Addition von u : Translation, die den Punkt 0 in den Punkt u zurückschiebt

Die Zusammensetzung dieser Abbildungen ergibt $p \mapsto ((p-u) \frac{v-u}{v-u})^{-} \frac{v-u}{|v-u|} + u$. Das Bilden der konjugiert komplexen Zahl ist mit den Rechenoperationen verträglich. Wir können den Querstrich in die Klammern hineinziehen ($|v-u| \in \mathbb{R}$ ändert sich nicht). Wir erhalten

$$p \mapsto (\bar{p} - \bar{u}) \frac{|v-u|}{\bar{v}-\bar{u}} \frac{v-u}{|v-u|} + u = (\bar{p} - \bar{u}) \frac{v-u}{\bar{v}-\bar{u}} + u$$

Das ist die erste Formel. Die Gleichheit mit der zweiten Formel ist leicht zu zeigen. \square

Satz 111: Spiegelt man den Höhenschnittpunkt H eines Dreiecks $\triangle ABC$ an den (Verlängerungen der) drei Seiten, dann liegen die gespiegelten Punkte auf dem Umkreis.

Beweis: Wir fassen die Eckpunkte des vorgegebenen Dreiecks als komplexe Zahlen a , b und c auf und den Höhenschnittpunkt als komplexe Zahl h . Da die Höhen senkrecht auf den jeweiligen Dreiecksseiten stehen, sind die Zahlen $\frac{h-a}{b-c}$ und $\frac{h-b}{a-c}$ imaginär.

Sei G der an der Seite \overline{AB} gespiegelte Höhenschnittpunkt H und g die entsprechende komplexe Zahl. Nach Satz 110 gilt

$$g = (\bar{h} - \bar{a}) \frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}} + a = (\bar{h} - \bar{b}) \frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}} + b$$

Wir können $g \neq a$ und $g \neq b$ annehmen, da andernfalls die Aussage des Satzes zutrifft. Es gilt dann auch $h \neq a$ und $h \neq b$. Es folgt $\frac{a-g}{b-g} = \frac{\bar{h}-\bar{a}}{\bar{h}-\bar{b}}$ und damit dann

$$\frac{(b-c)(a-g)}{(a-c)(b-g)} = \frac{(b-c)(\bar{h}-\bar{a})}{(a-c)(\bar{h}-\bar{b})} = \frac{(b-c)(\bar{h}-\bar{a})(h-a)(h-b)}{(a-c)(\bar{h}-\bar{b})(h-b)(h-a)} = \frac{|h-a|^2(h-b)(b-c)}{|h-b|^2(a-c)(h-a)}$$

Nun ist $\frac{|h-a|^2}{|h-b|^2}$ reell und oben haben wir gesehen, dass $\frac{h-b}{a-c}$ und $\frac{b-c}{h-a}$ imaginär sind. Damit ist gezeigt, dass $\frac{(b-c)(a-g)}{(a-c)(b-g)}$ reell ist. Das bedeutet, dass a , b , c und g auf einem Kreis liegen. Da a , b und c auf dem Umkreis liegen, muss dieser Kreis der Umkreis sein. \square

Satz 112: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und P ein Punkt. Seien D , E und F die Punkte, die man erhält, wenn man P an den Dreiecksseiten spiegelt. Die Punkte D , E und F liegen auf einer Gerade (zweite Steinergerade) genau dann, wenn P auf dem Umkreis liegt.

Beweis: Ist P ein Eckpunkt des Dreiecks, dann fallen zwei der drei Punkte D , E und F zusammen. Die Punkte D , E und F liegen trivialerweise auf einer Gerade. Wir nehmen daher an, dass P kein Eckpunkt ist.

Wir fassen die Eckpunkte des vorgegebenen Dreiecks wieder als komplexe Zahlen a , b und c auf und den Punkt P als komplexe Zahl p . Aus Satz 110 folgt, dass $d = (\bar{p} - \bar{b}) \frac{c-b}{\bar{c}-\bar{b}} + b$, $e = (\bar{p} - \bar{a}) \frac{c-a}{\bar{c}-\bar{a}} + a$ und $f = (\bar{p} - \bar{a}) \frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}} + a = (\bar{p} - \bar{b}) \frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} + b$ die komplexen Zahlen sind, die den Punkten D , E und F entsprechen. Wir berechnen

$$\begin{aligned} f - e &= (\bar{p} - \bar{a}) \left(\frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}} - \frac{c-a}{\bar{c}-\bar{a}} \right) = (\bar{p} - \bar{a}) \frac{(b-a)(\bar{c}-\bar{a}) - (c-a)(\bar{b}-\bar{a})}{(\bar{c}-\bar{a})(\bar{b}-\bar{a})} \\ &= \frac{(\bar{p}-\bar{a})(p-a)(c-a)}{(p-a)(c-a)(\bar{c}-\bar{a})} \frac{(b-a)(\bar{c}-\bar{a}) - (c-a)(\bar{b}-\bar{a})}{\bar{b}-\bar{a}} = \frac{(c-a)|p-a|^2}{(p-a)|c-a|^2} \frac{(b-a)(\bar{c}-\bar{a}) - (c-a)(\bar{b}-\bar{a})}{\bar{b}-\bar{a}} \end{aligned}$$

Nun sind $|p-a|^2$ und $|c-a|^2$ reell und $(b-a)(\bar{c}-\bar{a}) - (c-a)(\bar{b}-\bar{a})$ ist die Differenz zweier zueinander konjugiert komplexer Zahlen und daher imaginär. Es existiert eine reelle Zahl s mit $f - e = \frac{(c-a)si}{(p-a)(\bar{b}-\bar{a})}$. Analog erhält man $f - d = \frac{(c-b)ti}{(p-b)(\bar{a}-\bar{b})}$ für eine reelle Zahl t (man muss in obiger Rechnung nur b durch a und a durch b ersetzen). Wir erhalten daher

$$\frac{f-e}{f-d} = -\frac{(c-a)(p-b)s}{(p-a)(c-b)t} \quad \text{mit} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Somit ist $\frac{f-e}{f-d}$ genau dann reell, wenn $\frac{(c-a)(p-b)}{(p-a)(c-b)}$ reell ist. Das bedeutet, dass d , e und f genau dann auf einer Gerade liegen, wenn a , b , c und p auf einem Kreis liegen. Da a , b und c die Eckpunkte des Dreiecks sind, ist dieser Kreis der Umkreis. \square

Die Gerade im folgenden Satz ist die erste Steinersche Gerade. Wir behandeln nur die durch den Eckpunkt A . Es gibt auch je eine durch die Eckpunkte B und C .

Satz 113: Sei P ein Punkt auf dem Umkreis eines Dreiecks $\triangle ABC$. Sei Q der Schnittpunkt $\neq P$ des Umkreises mit dem Lot von P auf die Seite \overline{BC} . Wenn $Q \neq A$ gilt, dann liegt die Gerade durch Q und den Eckpunkt A parallel zur zweiten Steinerschen Geraden.

Beweis: Ist $P = A$, dann ist die Senkrechte durch A auf die Seite \overline{BC} sowohl die zweite Steinergerade als auch die Gerade durch Q und A . Die Aussage des Satzes ist erfüllt. Wir nehmen daher an, dass $P \neq A$ gilt.

Wir verwenden die Bezeichnungen aus dem letzten Beweis und den Punkt Q fassen wir als komplexe Zahl q auf. Da die Gerade durch b und c auf der Gerade durch q und p senkrecht steht, ist $\frac{q-p}{b-c}$ imaginär. Da a , b , c , p und q alle auf dem Umkreis liegen, sind $\frac{(p-a)(c-b)}{(c-a)(p-b)}$ und $\frac{(b-p)(q-a)}{(q-p)(b-a)}$ reell (wenn $p = b$ gilt, dann tauschen wir die Rollen von b und c). Multiplikation dieser drei Quotienten ergibt, dass $\frac{(p-a)(q-a)}{(c-a)(b-a)}$ imaginär ist.

Im letzten Beweis wurde gezeigt, dass $f - e = \frac{(c-a)si}{(p-a)(\bar{b}-\bar{a})}$ für ein $s \in \mathbb{R}$ gilt. Durch Erweitern mit $b - a$ erhalten wir $f - e = \frac{(c-a)(b-a)si}{(p-a)(\bar{b}-\bar{a})(b-a)} = \frac{(c-a)(b-a)si}{(p-a)|b-a|^2}$. Wegen $|b-a|^2 \in \mathbb{R}$ ergibt sich $f - e = \frac{(c-a)(b-a)ri}{(p-a)}$ für ein $r \in \mathbb{R}$. Daraus folgt $\frac{q-a}{f-e} = \frac{(p-a)(q-a)}{(c-a)(b-a)ri}$ mit $r \in \mathbb{R}$. Wegen $\frac{(p-a)(q-a)}{(c-a)(b-a)} \in \mathbb{I}$ ist $\frac{q-a}{f-e}$ reell. Damit ist gezeigt, dass die Gerade durch q und a parallel zur Geraden durch f und e liegt. Die erste Steinergerade liegt parallel zur zweiten. \square

Übung: Der Beweis von Satz 113 funktioniert nicht, wenn das Lot von P auf die Seite \overline{BC} eine Tangente an den Umkreis ist (P und Q fallen zusammen). Wie muss man den Beweis von Satz 113 modifizieren, um einen Beweis für diesen Fall zu erhalten?

Hinweis: Sei r auf der Tangente beliebig: $\frac{r-p}{b-c} \in \mathbb{I}$, $\frac{(b-c)(p-a)}{(p-c)(b-a)} \in \mathbb{R}$, $\frac{(p-a)(c-p)}{(c-a)(r-p)} \in \mathbb{R}$.

IX. Beweisen mit Hilfe von Abbildungen

1. Drehungen, zentrische Streckungen und Spiegelungen	88
2. Inversion an einem Kreis	92
3. Der Satz von Feuerbach mit Inversion	95
4. Sätze über einander berührende Kreise	96

Zuerst arbeiten wir mit den bekannten Abbildungen, das sind Translation, Drehung um einen Punkt, zentrische Streckung und Spiegelung an einer Geraden, dann mit der Inversion an einem Kreis.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels führen wir die Beweise mit Hilfe von Drehungen, zentrischen Streckungen und Spiegelungen. Gelegentlich greifen wir auch auf den Peripheriewinkelsatz zurück. Wir beweisen damit Sätze über geometrische Figuren, die auf den Seiten eines Dreiecks aufgesetzt werden. Es sind Quadrate und gleichseitige Dreiecke. Insbesondere erhalten wir auch einen Beweis des Satzes von Napoleon. Dieser besagt, dass die drei Mittelpunkte der gleichseitigen Dreiecke, die auf den Seiten eines beliebigen Dreiecks aufgesetzt werden, die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks bilden.

Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels definieren wir die Inversion (Spiegelung) an einem Kreis und untersuchen ihre Eigenschaften. Ein Punkt im Innern des Kreises wird durch die Inversion auf einen Punkt außerhalb des Kreises abgebildet und dieser wieder zurück auf den ursprünglichen Punkt. Die Punkte auf dem Kreis werden auf sich selbst abgebildet. Sie sind Fixpunkte. Für den Mittelpunkt des Kreises ist die Inversion nicht definiert. Wir beweisen eine Formel für den Abstand der Bilder zweier Punkte unter dieser Inversion. Gerade und Kreise werden durch die Inversion wieder in Gerade und Kreise abgebildet. Das beweisen wir mit Hilfe komplexer Zahlen. Zur Illustration dieser Eigenschaften werden einige Sätze bewiesen, unter anderem der Satz von Ptolemäus. Dieser gibt eine Ungleichung für die Längen der Seiten und Diagonalen eines Vierecks, die für ein Sehnenviereck zu einer Gleichung wird.

Im dritten Abschnitt dieses Kapitels geben wir einen Beweis des Satzes von Feuerbach mit Hilfe der Inversion. Das gelingt deshalb, da es eine Inversion gibt, die sowohl den Inkreis als auch einen der drei Ankreise eines Dreiecks in sich selbst überführt, und die eine gemeinsame Tangente des Inkreises und dieses Ankreises auf den Neunpunktkreis abbildet. So beweist man gleichzeitig, dass der Neunpunktkreis den Inkreis und diesen Ankreis berührt.

Im vierten Abschnitt dieses Kapitels beweisen wir Sätze, die einander berührende Kreise zum Inhalt haben. Diese kann man deshalb mit Hilfe der Inversion an einem Kreis behandeln, da einander berührende Kreise durch eine geeignete Inversion in parallele Gerade verwandelt werden können. Wir beweisen den Vierkreisesatz von Descartes, der eine Gleichung für die Radien von vier einander berührenden Kreisen angibt, und eine Verallgemeinerung von Archimedes' Formel, das ist eine Formel für die Radien von einander berührenden Kreisen, die in dem sichelförmigen Gebiet zwischen zwei Kreisen, die einander ebenfalls berühren, eingeschlossen sind. Für diese Beweise nehmen wir ebenfalls komplexe Zahlen zu Hilfe.

1. Drehungen, zentrische Streckungen und Spiegelungen

Wir beginnen mit Quadraten, die auf die Seiten eines Dreiecks aufgesetzt werden. Später werden dann Dreiecke aufgesetzt.

Satz 114: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Auf den Seiten \overline{AC} und \overline{BC} werden Quadrate $ADEC$ (D über A und E über C) und $BFGC$ (F über B und G über C) errichtet. Ihre Mittelpunkte seien M und L . Die Mittelpunkte der Strecken \overline{AB} und \overline{EG} seien U und V . Weiters seien P der Schnittpunkt der Geraden $\ell(A, G)$ und $\ell(B, E)$, Q der der Geraden $\ell(B, E)$ und $\ell(M, L)$ und R der der Geraden $\ell(A, G)$ und $\ell(M, L)$.

(a) Dann sind die beiden Vierecke $QPRC$ und $MULV$ Quadrate.

(b) Die Gerade $\ell(E, G)$ steht senkrecht auf $\ell(U, C)$ und es gilt $|EG| = 2|UC|$.

Beweis: Die Drehung um den Punkt C mit Winkel 90° führt E in A und B in G über. Daher stehen die Strecken \overline{EB} und \overline{AG} senkrecht aufeinander und sind gleich lang. Die Drehstreckung mit Drehwinkel 45° und Streckungsfaktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$, die C als Zentrum hat, führt E in M und B in L über. Daher schließen die Strecken \overline{EB} und \overline{ML} den Winkel 45° ein. Die Geraden $\ell(M, L)$, $\ell(E, B)$ und $\ell(A, G)$ liegen auf den Seiten des Dreiecks $\triangle QPR$. Es ergibt sich $\angle QPR = 90^\circ$ und $\angle PRQ = \angle PQR = 45^\circ$.

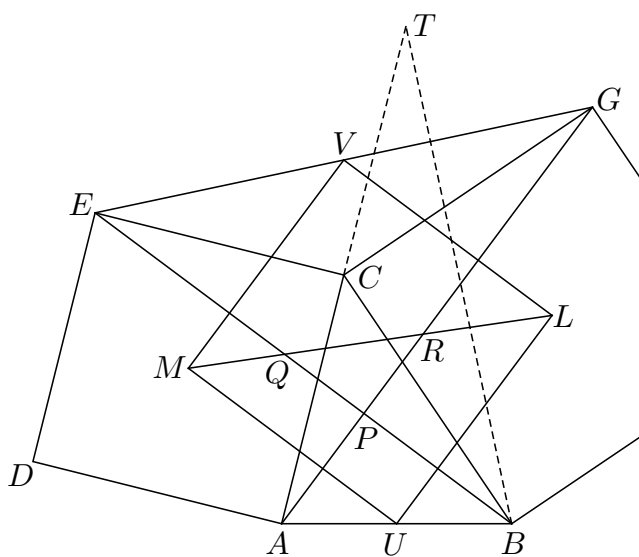
Wegen $\angle APE = 90^\circ$ liegt P nach dem Satz von Thales auf dem Umkreis des

Quadrats $ADEC$. Wegen $\angle BPG = 90^\circ$ liegt P auch auf dem Umkreis des Quadrats $BFGC$. Die Schnittpunkte der Umkreise sind daher C und P . Die Mittelpunkte M und L der Umkreise liegen auf der Symmetrale der Strecke \overline{CP} . Die Punkte C und P liegen spiegelbildlich zur Gerade $\ell(Q, R)$. Das zeigt, dass das Viereck $QPRC$ ein Quadrat ist.

Die zentrischen Streckungen mit Faktor $\frac{1}{2}$ und Zentren A und G führen \overline{EB} in \overline{MU} und \overline{VL} über. Somit liegen \overline{MU} und \overline{VL} parallel zu \overline{EB} und es gilt $|MU| = |VL| = \frac{1}{2}|EB|$. Die zentrischen Streckungen mit Faktor $\frac{1}{2}$ und Zentren B und E führen \overline{AG} in \overline{UL} und \overline{MV} über. Somit liegen \overline{UL} und \overline{MV} parallel zu \overline{AG} und es gilt $|UL| = |MV| = \frac{1}{2}|AG|$. Da die Strecken \overline{EB} und \overline{AG} senkrecht aufeinander stehen und gleich lang sind, steht auch \overline{MU} senkrecht auf \overline{UL} und es gilt $|MU| = |VL| = |UL| = |MV|$. Somit ist das Viereck $MULV$ ein Quadrat und (a) vollständig bewiesen.

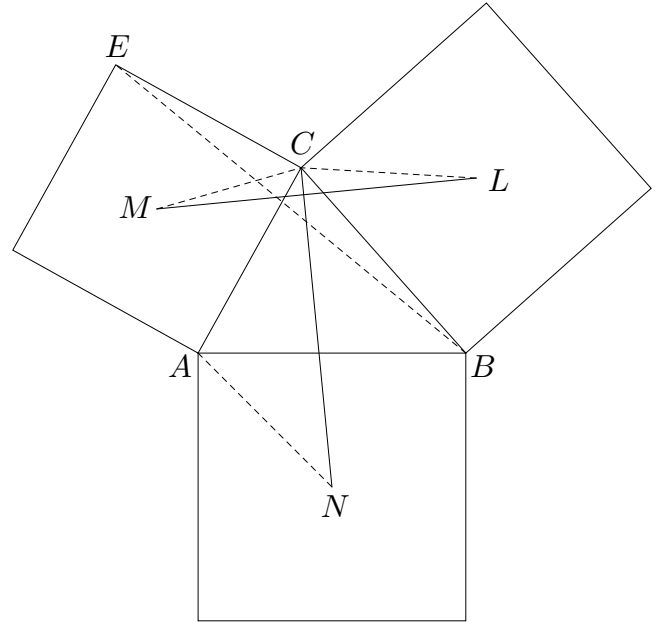
Sei T der am Punkt C gespiegelte Punkt A . Die Drehung um den Punkt C mit Winkel -90° führt E in T und G in B über. Daher steht $\ell(E, G)$ senkrecht auf $\ell(B, T)$ und es gilt $|EG| = |BT|$. Die zentrische Streckung mit Faktor $\frac{1}{2}$ und Zentrum A führt \overline{BT} in \overline{UC} über. Daher liegen $\ell(B, T)$ und $\ell(U, C)$ parallel und es gilt $|BT| = 2|UC|$. Es folgt, dass $\ell(E, G)$ senkrecht auf $\ell(U, C)$ steht und dass $|EG| = 2|UC|$ gilt. Das ist (b). \square

Übung: Unter den Voraussetzungen von Satz 114 gilt auch, dass die Punkte D , P und F auf einer Gerade liegen. Hinweis: Es gilt $\angle DPE = 45^\circ$ und $\angle FPG = 45^\circ$.



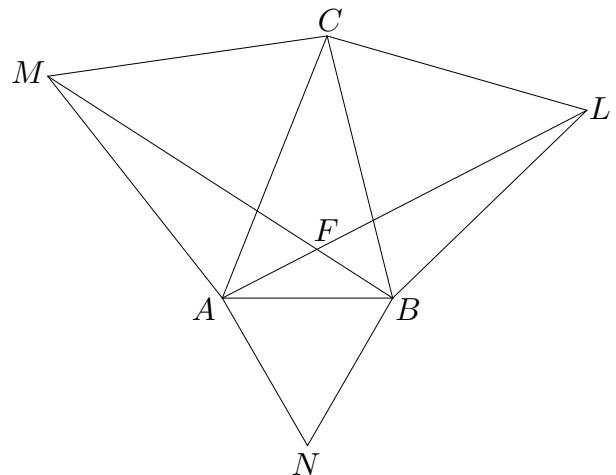
Satz 115: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Über jeder Dreiecksseite wird ein Quadrat errichtet. Die Mittelpunkte dieser Quadrate seien L , M und N , wobei N der Mittelpunkt des Quadrats über der Seite \overline{AB} ist. Dann stehen die beiden Strecken \overline{NC} und \overline{LM} aufeinander senkrecht und es gilt $|NC| = |LM|$.

Beweis: Sei E der Eckpunkt des über der Seite \overline{AC} errichteten Quadrats, der über dem Eckpunkt C liegt. Eine Drehung um den Punkt A um 45° und eine anschließende Streckung mit Zentrum A und Streckungsfaktor $\sqrt{2}$ führt N in B und C in E über. Daher schließen die Strecken \overline{NC} und \overline{BE} den Winkel 45° ein und es gilt $|NC| = \sqrt{2} \cdot |BE|$. Eine Drehung um den Punkt C um -45° und eine anschließende Streckung mit Zentrum C und Streckungsfaktor $\sqrt{2}$ führt L in B und M in E über. Daher schließen die Strecken \overline{LM} mit \overline{BE} den Winkel -45° ein und es gilt $|LM| = \sqrt{2} \cdot |BE|$. Es folgt, dass die Strecken \overline{NC} und \overline{LM} einen Winkel von 90° einschließen und dass $|NC| = |LM|$ gilt. \square



Satz 116: Auf den Seiten eines Dreiecks $\triangle ABC$ werden gleichseitige Dreiecke aufgesetzt. Sei L die Spitze des Dreiecks auf der Seite \overline{BC} , M die des Dreiecks auf der Seite \overline{AC} und N die des Dreiecks auf der Seite \overline{AB} . Dann gilt $|AL| = |BM| = |CN|$. Außerdem schneiden die Geraden $\ell(A, L)$, $\ell(B, M)$ und $\ell(C, N)$ einander in einem Punkt F , dem sogenannten Fermatpunkt, und bilden dort Winkel von 60° . Weiters gehen die Umkreise der aufgesetzten Dreiecke durch F .

Beweis: Sei F der Schnittpunkt der Geraden $\ell(A, L)$ und $\ell(B, M)$. Die Drehung um den Punkt C um 60° bildet B auf L und M auf A ab. Es folgt $|BM| = |LA|$. Die Gerade $\ell(B, M)$ schließt mit ihrem Bild $\ell(A, L)$ einen Winkel von 60° ein, das heißt $\angle BFL = \angle AFM = 60^\circ$. Wegen $\angle BFL = \angle BCL$ liegt F auf dem Umkreis k_a von $\triangle BCL$. Wegen $\angle AFM = \angle ACM$ liegt F auf dem Umkreis k_b von $\triangle ACM$. Wegen $\angle AFB = 120^\circ = 180^\circ - \angle ANB$ liegt F auch auf dem Umkreis k_c von $\triangle AFB$.



Ist ein Winkel des Dreiecks $\triangle ABC$ größer als 120° , dann liegt F außerhalb von $\triangle ABC$. Auch in diesem Fall erhalten wir aus der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes angewendet auf die Sehnen \overline{BL} , \overline{AM} und \overline{AB} , dass F auf den Umkreisen k_a , k_b und k_c liegt.

Durch die Drehung um den Punkt A um 60° zeigt man wie oben, dass $|CN| = |MB|$ gilt und dass die Geraden $\ell(C, N)$ und $\ell(B, M)$ bei ihrem Schnittpunkt, den wir G nennen, einen Winkel von 60° bilden. Da G dann ebenfalls auf k_a , k_b und k_c liegen muss, erhalten wir $G = F$. Alle drei Geraden $\ell(A, L)$, $\ell(B, M)$ und $\ell(C, N)$ gehen durch F . \square

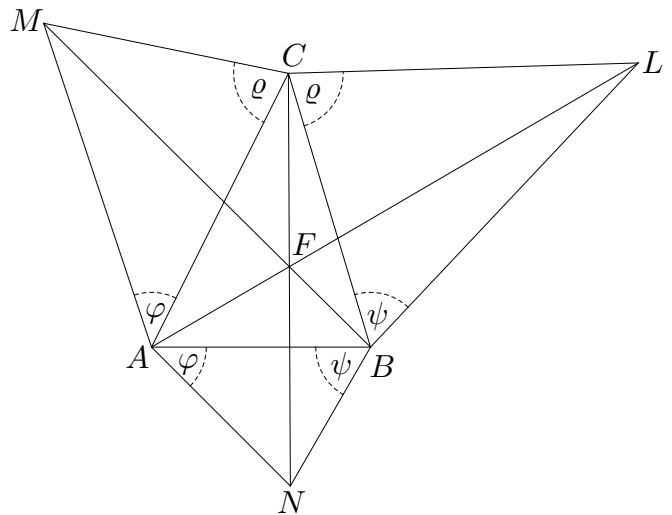
Damit kann man auch den Satz von Napoleon beweisen.

Satz 117: *Auf den Seiten eines Dreiecks werden gleichseitige Dreiecke aufgesetzt. Seien M_a, M_b und M_c ihre Umkreismittelpunkte. Dann ist das Dreieck $\triangle M_a M_b M_c$ gleichseitig.*

Beweis: Seien k_a, k_b und k_c die Umkreise der aufgesetzten Dreiecke. Nach Satz 116 gehen diese Umkreise durch den Fermatpunkt F . Daher ist \overline{AF} eine gemeinsame Sehne der Kreise k_b und k_c . Die Streckensymmetrale der Sehne \overline{AF} geht durch M_b und M_c . Insbesondere steht \overline{AF} senkrecht auf $\overline{M_b M_c}$. Genauso zeigt man, dass \overline{BF} und $\overline{M_c M_a}$ aufeinander senkrecht stehen und ebenso \overline{CF} und $\overline{M_a M_b}$.

Da nach Satz 116 die Winkel zwischen den Strecken $\overline{AF}, \overline{BF}$ und \overline{CF} alle 120° betragen, sind die Winkel im Dreieck $\triangle M_a M_b M_c$ alle 60° . \square

Die beiden letzten Sätze lassen sich verallgemeinern. Seien φ, ψ und ϱ drei Winkel, deren Summe 180° ist. Wie in Satz 116 setzen wir Dreiecke auf den Seiten des Dreiecks $\triangle ABC$ auf. Diese sind jedoch nicht gleichseitig, sondern nur mehr zueinander ähnlich, und zwar so, dass die Winkel bei A und L gleich φ , die Winkel bei B und M gleich ψ und die Winkel bei C und N gleich ϱ sind. Unter diesen Voraussetzungen gilt: Die Geraden $\ell(A, L), \ell(B, M)$ und $\ell(C, N)$ schneiden einander in einem Punkt F . Die Winkel, die die Geraden $\ell(C, N)$ und $\ell(B, M)$ einschließen, sind φ und $180^\circ - \varphi$, die Winkel, die die Geraden $\ell(A, L)$ und $\ell(C, N)$ einschließen, sind ψ und $180^\circ - \psi$, und die Winkel, die die Geraden $\ell(A, L)$ und $\ell(B, M)$ einschließen, sind ϱ und $180^\circ - \varrho$.



Weiters gilt: Die Umkreise der aufgesetzten Dreiecke laufen alle durch den Punkt F . Sind M_a, M_b und M_c die Umkreismittelpunkte, dann hat das Dreieck $\triangle M_a M_b M_c$ bei M_a den Winkel φ , bei M_b den Winkel ψ und bei M_c den Winkel ϱ .

Die Beweise verlaufen analog zu denen der obigen Sätze. Allerdings muss man jeder Drehung noch eine zentrische Streckung hinzufügen.

Wir behandeln noch das sogenannte Problem von Fermat, das ist die Frage, für welchen Punkt die Summe der Abstände zu den Ecken eines Dreiecks minimal ist. Wir beginnen mit einem Hilfssatz.

Hilfssatz: *Sei P ein Punkt in einem gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$ und h die Länge seiner Höhe. Seien u, v und w die Normalabstände vom Punkt P zu den Seiten des Dreiecks. Dann gilt $u + v + w = h$.*

Beweis: Die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$ ist die Summe der Flächen der Dreiecke $\triangle ABP, \triangle BCP$ und $\triangle CAP$. Ist a die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks, dann ergibt sich daraus die Gleichung $\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}au + \frac{1}{2}av + \frac{1}{2}aw$ mit Hilfe der Formel für die Dreiecksfläche. Wir kürzen und erhalten $h = u + v + w$. \square

Satz 118: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck, dessen Winkel alle kleiner als 120° sind. Dann ist der Fermatpunkt F des Dreiecks $\triangle ABC$ der einzige Punkt P im Innern dieses Dreiecks, für den $|PA| + |PB| + |PC|$ minimal wird.

Beweis: Sei F der Fermatpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$. Nach Satz 116 liegt F innerhalb des Dreiecks, da alle Winkel $< 120^\circ$ sind, und es gilt $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA = 120^\circ$. Sei g_A die Senkrechte auf \overline{FA} durch A , sei g_B die Senkrechte auf \overline{FB} durch B und g_C die Senkrechte auf \overline{FC} durch C . Sei U der Schnittpunkt von g_B und g_C , sei V der von g_A und g_C und W der von g_A und g_B . So entsteht ein Dreieck $\triangle UVW$. Das Viereck $FBUC$ hat Winkel 90° bei B und C und den Winkel 120° bei F . Daher hat es den Winkel 60° bei U . Es gilt somit $\angle VUW = \angle CUB = 60^\circ$. Analog folgt $\angle UVW = 60^\circ$ und $\angle UWV = 60^\circ$. Das Dreieck $\triangle UVW$ ist gleichseitig.

Sei h die Länge der Höhe im gleichseitigen Dreieck $\triangle UVW$. Da \overline{FA} , \overline{FB} und \overline{FC} die Lote von F auf die Seiten des Dreiecks $\triangle UVW$ sind, folgt $|FA| + |FB| + |FC| = h$ aus dem Hilfssatz. Sei jetzt Q ein Punkt $\neq F$ im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$. Sei u der Normalabstand von Q zu g_A , sei v der von Q zu g_B und w der von Q zu g_C . Wieder nach dem Hilfssatz gilt $u + v + w = h$, da Q auch im Innern von $\triangle UVW$ liegt. Weiters gilt $|QA| \geq u$, da A auf g_A liegt, ebenso $|QB| \geq v$, da B auf g_B liegt, und $|QC| \geq w$, da C auf g_C liegt. Außerdem kann in höchstens einer dieser drei Ungleichungen Gleichheit gelten, da Q höchstens auf einer der drei Geraden $\ell(F, A)$, $\ell(F, B)$ oder $\ell(F, C)$ liegen kann. Wir erhalten somit, dass $|QA| + |QB| + |QC| > h$ gilt. Somit ist F der einzige Punkt P im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$, für den $|PA| + |PB| + |PC|$ minimal wird. \square

Bemerkung: Ist einer der Winkel des Dreiecks $\triangle ABC$ größer oder gleich 120° , dann liegt der Fermatpunkt F nicht mehr innerhalb dieses Dreiecks. Der Punkt P , für den $|AP| + |BP| + |CP|$ minimal wird, ist dann der Eckpunkt mit Winkel $\geq 120^\circ$.

Übung: Seien g und h Halbgerade, die vom Punkt S ausgehen und einen spitzen Winkel einschließen. Sei P ein Punkt zwischen g und h . Gesucht sind ein Punkt A auf g und ein Punkt B auf h , sodass der Umfang des Dreiecks $\triangle PAB$ minimal ist.

Übung: Die drei Geraden f , g und h seien parallel. Gesucht sind ein Punkt A auf f , ein Punkt B auf g und ein Punkt C auf h , sodass $\triangle ABC$ gleichseitig ist.

Übung: Sei $ABCD$ ein Quadrat. Sei g eine Gerade durch A , die \overline{BC} im Punkt U schneidet. Sei h eine Gerade durch A , die \overline{CD} im Punkt V schneidet. Sei K der Fußpunkt des Lotes von B auf g und L der des Lotes von B auf h . Sei M der Fußpunkt des Lotes von D auf g und N der des Lotes von D auf h . Man zeige, dass die Strecken \overline{KL} und \overline{MN} senkrecht aufeinander stehen und gleich lang sind. Hinweis: Die Dreiecke $\triangle BKA$ und $\triangle AMD$ sind kongruent. Ebenso die Dreiecke $\triangle BLA$ und $\triangle AND$. Eine Drehung um den Mittelpunkt des Quadrats um 90° im Uhrzeigersinn führt K in M und L in N über.

Übung: Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck. Seien P , Q , R und S in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Quadrate, die auf den Seiten \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} und \overline{DA} außen aufgesetzt werden. Man zeige, dass die Strecken \overline{PR} und \overline{QS} aufeinander senkrecht stehen und gleich lang sind. Hinweis: Sei M der Mittelpunkt der Diagonale \overline{BD} . Nach Satz 114(a) sind M , P und S drei Eckpunkte eines Quadrats. Ebenso M , Q und R . Auf diese beiden Quadrate, die den Eckpunkt M gemeinsam haben, lässt sich der erste Schritt im Beweis von Satz 114 anwenden. Das ergibt das gewünschte Resultat.

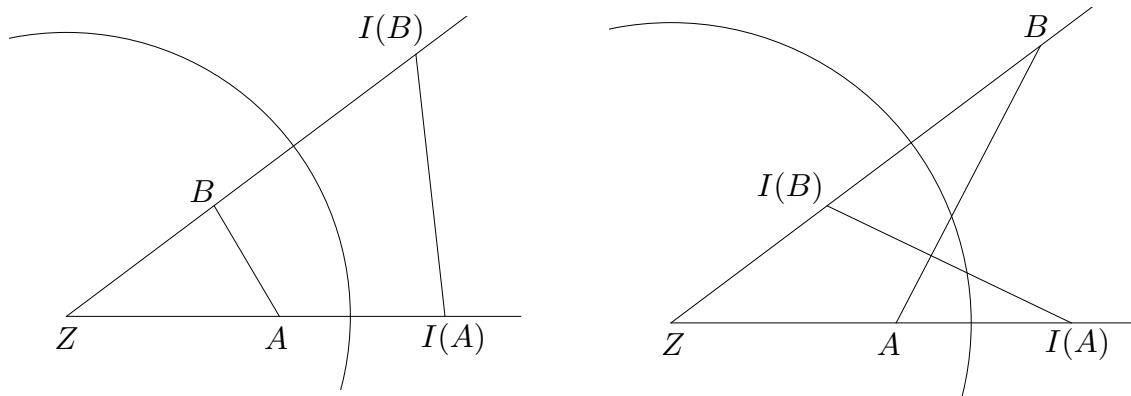
2. Inversion an einem Kreis

Sei K ein Kreis mit Mittelpunkt Z und Radius R . Die Inversion oder Spiegelung am Kreis K ist wie folgt definiert. Sei P ein Punkt, der ungleich Z ist. Sein Bild ist jener Punkt Q auf der Halbgerade von Z durch P , für den $|ZP| \cdot |ZQ| = R^2$ gilt. Der Mittelpunkt Z des Kreises K heißt Inversionszentrum oder kurz Zentrum. Den Radius R des Kreises K nennen wir Inversionsradius und den Kreis K nennen wir Inversionskreis.

Sei jetzt I diese Inversion mit Zentrum Z und Inversionsradius R . Aus obiger Definition erkennt man, dass die Abbildung I ihre eigene Inverse ist. Wenn $I(P) = Q$ gilt, dann gilt auch $I(Q) = P$. Wir beobachten, dass $I(P)$ umso weiter vom Zentrum Z entfernt ist, je näher P bei Z liegt. Liegt P auf dem Kreis K , dann gilt $I(P) = P$.

Satz 119: Sei I die Inversion am Kreis K mit Mittelpunkt Z und Radius R . Seien A und B zwei Punkte, die ungleich Z sind. Dann sind die Dreiecke $\triangle ZAB$ und $\triangle ZI(B)I(A)$ ähnlich. Weiters gilt $|I(A)I(B)| = \frac{R^2}{|ZA| \cdot |ZB|} |AB|$.

Beweis: Die Punkte A und B können innerhalb oder außerhalb des Kreises K liegen oder auch auf dem Kreis. Links ist der Fall dargestellt, in dem beide Punkte im Kreis liegen. Im rechten Bild sieht man den Fall, in dem A im Kreis und B außerhalb des Kreises liegt.



Nach Definition von I liegen die Punkte A und $I(A)$ auf einer Halbgerade, die in Z beginnt, und ebenso die Punkte B und $I(B)$. Es gilt $|ZA| \cdot |ZI(A)| = R^2 = |ZB| \cdot |ZI(B)|$. Es folgt $\frac{|ZA|}{|ZB|} = \frac{|ZI(B)|}{|ZI(A)|}$. Da die Dreiecke $\triangle ZAB$ und $\triangle ZI(B)I(A)$ bei Z auch den selben Winkel haben, sind sie ähnlich (das folgt aus dem Übungsbeispiel vor Satz 33). Nun wenden wir den Strahlensatz auf die ähnlichen Dreiecke $\triangle ZAB$ und $\triangle ZI(B)I(A)$ an und erhalten $\frac{|I(A)I(B)|}{|AB|} = \frac{|ZI(A)|}{|ZB|}$. Wegen $|ZI(A)| = \frac{R^2}{|ZA|}$ folgt $|I(A)I(B)| = \frac{R^2}{|ZA| \cdot |ZB|} |AB|$. \square

Satz 120: Eine Gerade, die durch Z geht, wird durch eine Inversion mit Inversionszentrum Z auf sich selbst abgebildet.

Beweis: Das folgt sofort aus der Definition der Inversion. \square

Um herauszufinden, wie die Bilder von anderen Geraden und von Kreisen aussehen, stellen wir Geraden und Kreise in der komplexen Ebene dar. Die Variablen in Geraden- und Kreisgleichungen im kartesischen Koordinatensystem sind üblicherweise x und y . Diese werden zur Variable $z = x + iy$ in der komplexen Ebene. Komplexe Zahlen entsprechen dann Vektoren oder Punkten.

Satz 121: Sei $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $c > 0$. Dann ist $z\bar{a} + \bar{z}a - c = 0$ die Gleichung der Gerade, die Normalabstand $\frac{c}{2|a|}$ vom Nullpunkt hat, und für die a ein Normalvektor ist, der vom Nullpunkt zur Gerade zeigt.

Beweis: Sei $a = u + iv$. Die Gleichung $z\bar{a} + \bar{z}a - c = 0$ wird dann zu $2ux + 2vy - c = 0$. Der Punkt $(\frac{cu}{2u^2+2v^2}, \frac{cv}{2u^2+2v^2})$ liegt auf dieser Gerade. Der zugehörige Ortsvektor $\frac{c}{2u^2+2v^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf die Gerade. Das zeigt, dass $a = u + iv$ ein Normalvektor ist, der vom Nullpunkt zur Gerade zeigt. Der Normalabstand der Geraden vom Nullpunkt ist die Länge des Vektors $\frac{c}{2u^2+2v^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Dieser ist daher $\frac{c}{2u^2+2v^2} \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{c}{2|a|}$. \square

Satz 122: Sei $m \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Die Gleichung des Kreises mit Mittelpunkt m und Radius r ist $z\bar{z} - z\bar{m} - \bar{z}m + |m|^2 - r^2 = 0$.

Beweis: Die Gleichung des Kreises mit Mittelpunkt m und Radius r ist $|z - m|^2 = r^2$. Das wird zu $(z - m)(\bar{z} - \bar{m}) = r^2$ oder $z\bar{z} - z\bar{m} - m\bar{z} + |m|^2 = r^2$. \square

Die Inversion mit Zentrum Z und Inversionsradius R stellen wir in der komplexen Ebene dar. Wir legen das Zentrum Z in den Nullpunkt. Dann ist $I(z) = \frac{R^2}{\bar{z}}$ das Bild von z unter dieser Inversion. Das sieht man am besten in der Polarkoordinatendarstellung. Ist $z = re^{i\varphi}$, dann folgt $\bar{z} = re^{-i\varphi}$ und $I(z) = \frac{R^2}{re^{-i\varphi}} = \frac{R^2}{r} e^{i\varphi}$. Man sieht, dass z und $I(z)$ dasselbe Argument haben, das heißt beide liegen auf der selben vom Nullpunkt ausgehenden Halbgerade. Weiters gilt $|z| \cdot |I(z)| = r \frac{R^2}{r} = R^2$. Damit ist nachgewiesen, dass die Inversion durch die Formel $I(z) = \frac{R^2}{\bar{z}}$ richtig wiedergegeben wird.

Satz 123: Sei I die Inversion mit Zentrum 0 und Inversionsradius R . Sei k ein Kreis, der durch das Zentrum 0 geht. Sein Mittelpunkt sei m . Sein Radius ist dann $r = |m|$. Sei h die Halbgerade vom Zentrum 0 aus durch m und g die Gerade senkrecht auf h , die Abstand $\frac{R^2}{2r}$ vom Zentrum 0 hat. Dann werden g und k durch die Inversion I aufeinander abgebildet.

Beweis: Die Gleichung des Kreises k ist $z\bar{z} - z\bar{m} - \bar{z}m = 0$. Die Gleichung der Geraden g ist $z\bar{m} + \bar{z}m - c = 0$ mit $\frac{c}{2|m|} = \frac{R^2}{2r}$, das heißt $c = R^2$. Ersetzt man z in der Gleichung von g durch $I(z) = \frac{R^2}{\bar{z}}$, dann erhält man $\frac{R^2}{\bar{z}}\bar{m} + \frac{R^2}{z}m - R^2 = 0$, das ist $z\bar{z} - z\bar{m} - \bar{z}m = 0$, die Gleichung des Kreises k . Umgekehrt funktioniert es auch. Ersetzt man z in der Gleichung von k durch $I(z) = \frac{R^2}{\bar{z}}$, dann erhält man die Gleichung der Geraden g . \square

Satz 124: Sei I die Inversion mit Zentrum 0 und Inversionsradius R . Sei $m \in \mathbb{C}$ und $r > 0$, jedoch $r \neq |m|$. Sei k_1 der Kreis mit Mittelpunkt m und Radius r . Sei k_2 der Kreis mit Mittelpunkt $\frac{mR^2}{|m|^2-r^2}$ und Radius $|\frac{R^2r}{|m|^2-r^2}|$. Dann werden k_1 und k_2 durch die Inversion I aufeinander abgebildet.

Beweis: Die Gleichung des Kreises k_1 ist $z\bar{z} - z\bar{m} - \bar{z}m + |m|^2 - r^2 = 0$. Die Gleichung des Kreises k_2 ist $z\bar{z} - \frac{z\bar{m}R^2}{|m|^2-r^2} - \frac{\bar{z}mR^2}{|m|^2-r^2} + \frac{R^4|m|^2}{(|m|^2-r^2)^2} - \frac{R^4r^2}{(|m|^2-r^2)^2} = 0$, die durch Umformen zu $z\bar{z}(|m|^2 - r^2) - z\bar{m}R^2 - \bar{z}mR^2 + R^4 = 0$ wird. Ersetzt man z in der Gleichung von k_1 durch $I(z) = \frac{R^2}{\bar{z}}$, dann erhält man die Gleichung von k_2 . Umgekehrt gilt das auch. \square

Bemerkung: Wir haben obige Beweise nur für den Fall durchgeführt, dass der Nullpunkt das Inversionszentrum ist. Man kann jedoch die gesamte Figur an eine andere Stelle der Ebene verschieben. An der Definition erkennt man, dass sich dadurch das Bild unter der

Inversion nicht ändert. Für eine Inversion mit Inversionszentrum Z und Inversionsradius R kann man Satz 123 und Satz 124 folgendermaßen formulieren:

Ein Kreis k mit Mittelpunkt M und Radius r , der durch das Zentrum Z geht, wird auf die Gerade g abgebildet, die Normalabstand $\frac{R^2}{2r}$ vom Zentrum Z hat und die senkrecht auf die Halbgerade steht, die von Z aus durch M geht. Umgekehrt gilt das auch. Die Gerade g wird durch die Inversion auf den Kreis k abgebildet.

Ein Kreis k mit Mittelpunkt M und Radius r , der nicht durch das Zentrum Z geht, wird auf den Kreis mit Mittelpunkt N und Radius s abgebildet, für den $\overrightarrow{ZN} = \overrightarrow{ZM} \frac{R^2}{d^2 - r^2}$ und $s = \left| \frac{R^2 r}{d^2 - r^2} \right|$ gilt, wobei d der Abstand des Mittelpunkts M vom Zentrum Z ist. Insbesondere liegen die Punkte Z , M und N auf einer Geraden, jedoch wird M durch die Inversion nicht auf N abgebildet.

Die Inversion führt den Kreis k genau dann in sich selbst über, wenn $R^2 = d^2 - r^2$ gilt. Das ist genau dann der Fall, wenn der Kreis k und der Inversionskreis einander in einem rechten Winkel schneiden.

Wir geben einen Beweis des Satzes von Ptolemäus mit Hilfe der Inversion.

Satz 125: Für jedes Viereck $ABCD$ gilt $|AC| \cdot |BD| \leq |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|$. Gleichheit gilt genau dann, wenn $ABCD$ ein Sehnenviereck ist.

Beweis: Sei I die Inversion mit Inversionszentrum A und mit beliebigem Inversionsradius R . Nach Satz 119 gilt dann

$$|I(B)I(C)| = \frac{R^2}{|AB| \cdot |AC|} |BC|, \quad |I(C)I(D)| = \frac{R^2}{|AC| \cdot |AD|} |CD|, \quad |I(B)I(D)| = \frac{R^2}{|AB| \cdot |AD|} |BD|$$

Die Dreiecksungleichung besagt, dass

$$|I(B)I(D)| \leq |I(B)I(C)| + |I(C)I(D)|$$

gilt. Wir setzen die oben gefundenen Gleichungen ein und erhalten

$$\frac{R^2}{|AB| \cdot |AD|} |BD| \leq \frac{R^2}{|AB| \cdot |AC|} |BC| + \frac{R^2}{|AC| \cdot |AD|} |CD|.$$

Wir kürzen diese Ungleichung durch R^2 und multiplizieren sie mit $|AB| \cdot |AC| \cdot |AD|$. Wir erhalten $|AC| \cdot |BD| \leq |AD| \cdot |BC| + |AB| \cdot |CD|$. Damit ist die Ungleichung gezeigt.

Gleichheit gilt genau dann, wenn in der Dreiecksungleichung Gleichheit gilt. Das passiert genau dann, wenn $I(B)$, $I(C)$ und $I(D)$ in dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen. Nach Satz 123 ist das genau dann der Fall, wenn B , C und D auf einem Kreis liegen, der durch das Inversionszentrum A geht, wobei A auf dem Bogen von B nach D liegt, der C nicht enthält, also genau dann, wenn $ABCD$ ein Sehnenviereck ist. \square

Für den nächsten Beweis stellen wir einige vorbereitende Überlegungen an. Sei I die Inversion am Kreis K mit Mittelpunkt Z und Radius R . Sei P ein Punkt außerhalb von K . Die Tangenten von P aus an den Kreis K berühren diesen in den Punkten T_1 und T_2 . Sei Q der Mittelpunkt der Strecke $\overline{T_1 T_2}$, das ist auch der Schnittpunkt der Geraden $\ell(T_1, T_2)$ und $\ell(Z, P)$. Dann werden die Punkte P und Q durch I aufeinander abgebildet: Aus dem Kathetensatz angewendet auf das Dreieck $\triangle PT_1 Z$, das bei T_1 einen rechten Winkel und Q als Höhenfußpunkt hat, folgt ja $|ZP| \cdot |ZQ| = |ZT_1|^2 = R^2$. Außerdem liegt Q auf der Halbgerade durch P , die von Z ausgeht.

Satz 126: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Eulergerade g . Dann liegt der Umkreismittelpunkt V des Tangendendreiecks auf g . Das Tangendendreieck ist jenes, das von den Tangenten an den Umkreis des Dreiecks $\triangle ABC$ in dessen Eckpunkten gebildet wird.

Beweis: Sei P der Schnittpunkt der Tangenten an den Umkreis in den Eckpunkten B und C , sei Q der Schnittpunkt der Tangenten in A und C und R der Schnittpunkt der Tangenten in A und B . Dann ist $\triangle PQR$ das Tangentendreieck.

Sei I die Inversion am Umkreis K des Dreiecks $\triangle ABC$. Nach obiger Bemerkung ist $I(P)$ dann der Mittelpunkt der Strecke \overline{BC} , $I(Q)$ der der Strecke \overline{AC} und $I(R)$ der der Strecke \overline{AB} . Der Umkreis k des Dreiecks $\triangle PQR$ wird durch I auf den Kreis l durch $I(P)$, $I(Q)$ und $I(R)$ abgebildet. Somit ist l der Neunpunktkreis des Dreiecks $\triangle ABC$, da er durch dessen Seitenmitten geht. Sein Mittelpunkt N liegt auf der Eulergerade g . Somit liegt auch V auf g , da nach Satz 124 der Mittelpunkt V des Kreises k , der Mittelpunkt N seines Bildkreises l und das Inversionszentrum U auf einer Geraden liegen. \square

Bei der Inversion an einem Kreis bleiben Schnittwinkel unverändert. Wir brauchen diese Eigenschaft nicht. Der Vollständigkeit halber geben wir einen Beweis dieser Eigenschaft.

Sei I eine Inversion mit Zentrum Z . Sei P ein Punkt ungleich Z und g_1 und g_2 Gerade durch P , die den Winkel α einschließen. Wenn g_1 nicht durch Z geht, dann ist $I(g_1)$ ein Kreis durch Z , dessen Tangente in Z parallel zu g_1 liegt. Wenn g_1 durch Z geht, dann ist $I(g_1)$ gleich g_1 , und man kann ebenfalls sagen, dass die Tangente an $I(g_1)$ im Punkt Z parallel zu g_1 liegt. Genauso sieht man, dass $I(g_2)$ durch Z geht und die Tangente an $I(g_2)$ im Punkt Z parallel zu g_2 liegt. Die Tangenten im Punkt Z an $I(g_1)$ und $I(g_2)$ schließen somit ebenfalls den Winkel α ein. Nun ist $Q = I(P)$ neben Z der zweite Schnittpunkt von $I(g_1)$ und $I(g_2)$. Die Tangenten an $I(g_1)$ und $I(g_2)$ im Punkt Q sind die Bilder der Tangenten im Punkt Z bei Spiegelung an der Streckensymmetrale der Sehne \overline{ZQ} . Daher schließen sie ebenfalls den Winkel α ein. Man sieht somit, dass g_1 und g_2 in ihrem Schnittpunkt P denselben Winkel einschließen wie $I(g_1)$ und $I(g_2)$ im Punkt $I(P)$.

Seien jetzt k_1 und k_2 Kreise (oder ein Kreis und eine Gerade), die einander im Punkt P ungleich Z schneiden und dort den Winkel α einschließen. (Ist P gleich Z , dann existiert $I(P)$ nicht.) Seien g_1 und g_2 die Tangenten an k_1 und k_2 im Punkt P . Sie schließen ebenfalls den Winkel α ein. Da sich bei der Inversion die Anzahl der Schnittpunkte von k_1 und g_1 nicht ändert, haben auch $I(k_1)$ und $I(g_1)$ nur einen Schnittpunkt, das heißt $I(k_1)$ und $I(g_1)$ berühren einander im Punkt $I(P)$. Ebenso berühren $I(k_2)$ und $I(g_2)$ einander im Punkt $I(P)$. Da $I(g_1)$ und $I(g_2)$ im Punkt $I(P)$ den Winkel α einschließen, gilt das auch für $I(k_1)$ und $I(k_2)$. Man sieht, dass k_1 und k_2 in ihrem Schnittpunkt P denselben Winkel einschließen wie $I(k_1)$ und $I(k_2)$ im Punkt $I(P)$.

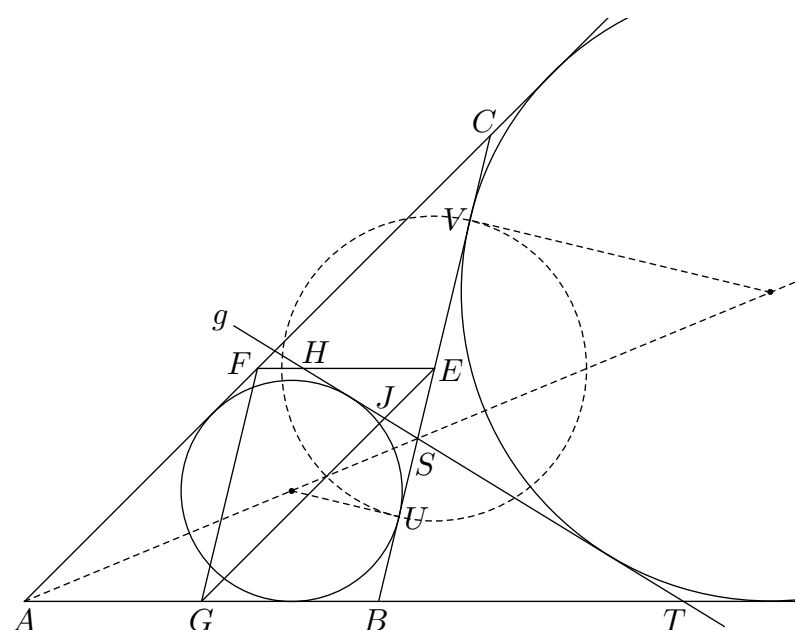
3. Der Satz von Feuerbach mit Inversion

Nachdem wir bereits drei Beweise des Satzes von Feuerbach gesehen haben, geben wir jetzt einen vierten Beweis, der die Inversion an einem Kreis verwendet.

Satz 127 (Satz von Feuerbach) *Der Neunpunktkreis eines Dreiecks $\triangle ABC$ berührt den Inkreis und die drei Ankreise.*

Beweis: Mit a , b und c bezeichnen wir wie üblich die Längen der Dreiecksseiten und mit s den halben Umfang. Die Mittelpunkte der Seiten \overline{BC} , \overline{AC} und \overline{AB} nennen wir E , F und G . Wir beweisen, dass der Neunpunktkreis f den Inkreis k und den Ankreis k_a an die Seite \overline{BC} berührt. Wenn $b = c$ gilt, dann berühren diese drei Kreise einander im Mittelpunkt E der Seite \overline{BC} . Wir nehmen daher $b \neq c$ an und behandeln den Fall $c < b$. Die Trägergeraden der drei Dreiecksseiten sind gemeinsame Tangenten der Kreise k und k_a . Die Kreise k und k_a haben noch eine vierte gemeinsame Tangente, die wir g nennen. Wir

erhalten sie durch Spiegelung der Trägergerade der Seite \overline{BC} an der Winkelsymmetrale w_α durch den Eckpunkt A , die ja durch die Mittelpunkte der Kreise k und k_a geht. Sei U der Punkt, in dem k , und V der Punkt, in dem k_a die Seite \overline{BC} berührt. Es gilt dann $|BU| = s - b = |CV|$. Daher ist E auch der Mittelpunkt der Strecke \overline{UV} . Sei K der Kreis mit Mittelpunkt E durch U und V und I die Inversion am Kreis K . Der Radius dieses Kreises ist $R = \frac{a}{2} - (s - b) = \frac{b-c}{2}$. Da \overline{EU} Tangente an den Inkreis k ist und \overline{EV} Tangente an den Ankreis k_a , schneiden die Kreise K und k einander in einem rechten Winkel und ebenso die Kreise K und k_a . Sowohl k als auch k_a wird durch I auf sich selbst abgebildet. Wir zeigen, dass I die Gerade g auf den Neunpunktkreis f abbildet. Da g die Kreise k und k_a berührt, berührt $f = I(g)$ die Kreise $k = I(k)$ und $k_a = I(k_a)$. Da man einen analogen Beweis auch für die beiden anderen Ankreise führen kann, ist der Satz damit bewiesen. Um zu zeigen, dass $I(g)$ gleich f ist, beweisen wir, dass die drei Seitenmitten E, F und G auf $I(g)$ liegen. Wir wissen, dass $I(g)$ ein Kreis oder eine Gerade ist, und da $I(g)$ durch E, F und G geht, muss $I(g)$ der Neunpunktkreis f sein. Da g eine Gerade ist, geht $I(g)$ jedenfalls durch das Inversionszentrum E . Sei S der Schnittpunkt von g mit $\ell(B, C)$ und T der Schnittpunkt von g mit $\ell(A, B)$. Da S auch der Schnittpunkt von $\ell(B, C)$ mit der Winkelsymmetrale w_α durch A ist, teilt S die Strecke \overline{BC} im Verhältnis $\frac{c}{b}$. Wir erhalten $BS = a \frac{c}{b+c}$ und $SE = BE - BS = \frac{a}{2} - a \frac{c}{b+c} = \frac{a(b-c)}{2(b+c)}$. Da T das Bild von C bei Spiegelung an w_α ist, erhalten wir $AT = b$ und $BT = b - c$. (Wir rechnen hier mit orientierten Abständen, wobei auf $\ell(A, B)$ die positive Richtung rechts ist und auf $\ell(B, C)$ oben.) Sei H der Schnittpunkt von g mit $\ell(E, F)$. Da $\ell(E, F)$ parallel zu $\ell(A, B)$ liegt erhalten wir $\frac{SE}{SB} = \frac{EH}{BT}$ aus dem Strahlensatz. Es folgt



$$EH = \frac{SE}{SB} BT = -\frac{SE}{BS} BT = -\frac{a(b-c)}{2(b+c)} \frac{b+c}{ac} (b - c) = -\frac{(b-c)^2}{2c}$$

Da EH negatives Vorzeichen hat, also anders orientiert ist als BT , liegt H links von E , das heißt auf der Halbgerade von E durch F . Weiters gilt $|EF| = \frac{c}{2}$, womit sich dann $|EF| \cdot |EH| = \frac{(b-c)^2}{4} = R^2$ ergibt. Damit ist $I(H) = F$ gezeigt. Ist J der Schnittpunkt von g mit $\ell(E, G)$, dann kann man durch einen analogen Beweis zeigen, dass $I(J) = G$ gilt. Somit liegen die Punkte E, F und G auf $I(g)$. □

4. Sätze über einander berührende Kreise

Hat man zwei Kreise oder einen Kreis und eine Gerade, die einander berühren, dann gilt das auch für deren Bilder unter einer Inversion, wobei diese Bilder Kreise oder Geraden sind. Das gilt deshalb, weil sich die Anzahl der Schnittpunkte bei der Inversion nicht ändert. Wenn sie einander berühren, dann haben sie genau einen Schnittpunkt. Die

Bilder haben dann ebenfalls genau einen Schnittpunkt, in dem sie einander berühren. Ist der Berührungspunkt zweier Kreise das Inversionszentrum, dann sind die Bilder zueinander parallele Geraden. (Ihr Berührungspunkt liegt im Unendlichen.)

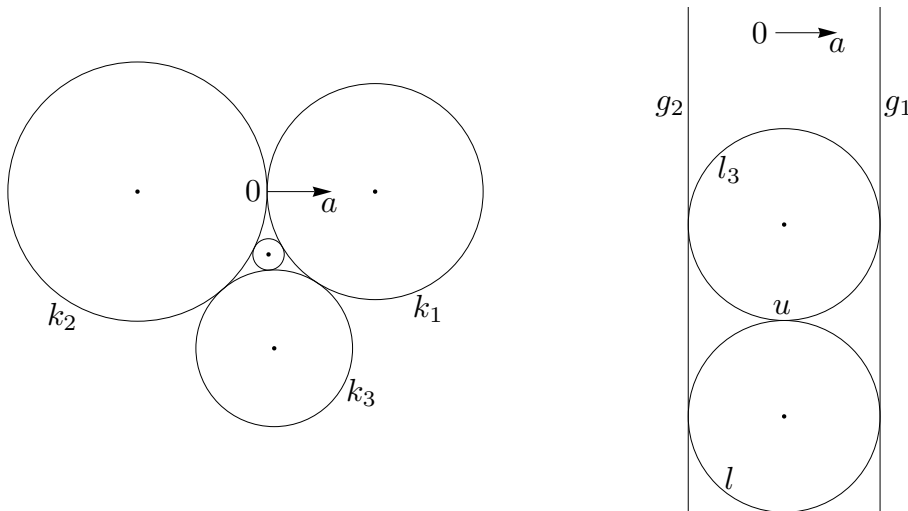
Wir beginnen mit dem Vierkreisesatz von Descartes.

Satz 128: Seien k_1, k_2 und k_3 Kreise in der komplexen Ebene mit Radien r_1, r_2 und r_3 und Mittelpunkten m_1, m_2 und m_3 , die einander paarweise von außen berühren. Sei k ein vierter Kreis mit Radius r_4 und Mittelpunkt m_4 . Wird k von den anderen drei Kreisen von außen berührt, dann gilt $(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4})^2 = \frac{2}{r_1^2} + \frac{2}{r_2^2} + \frac{2}{r_3^2} + \frac{2}{r_4^2}$ und $(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \frac{m_4}{r_4})^2 = \frac{2m_1^2}{r_1^2} + \frac{2m_2^2}{r_2^2} + \frac{2m_3^2}{r_3^2} + \frac{2m_4^2}{r_4^2}$. Wird k von den anderen drei Kreisen jedoch von innen berührt, dann gilt $(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4})^2 = \frac{2}{r_1^2} + \frac{2}{r_2^2} + \frac{2}{r_3^2} + \frac{2}{r_4^2}$ und $(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} - \frac{m_4}{r_4})^2 = \frac{2m_1^2}{r_1^2} + \frac{2m_2^2}{r_2^2} + \frac{2m_3^2}{r_3^2} + \frac{2m_4^2}{r_4^2}$.

Beweis: Wir behandeln zuerst den Fall, dass k die anderen Kreise von außen berührt. Sei $P(z) = (\frac{m_1-z}{r_1} + \frac{m_2-z}{r_2} + \frac{m_3-z}{r_3} + \frac{m_4-z}{r_4})^2 - 2(\frac{m_1-z}{r_1})^2 - 2(\frac{m_2-z}{r_2})^2 - 2(\frac{m_3-z}{r_3})^2 - 2(\frac{m_4-z}{r_4})^2$. Sei b die komplexe Zahl, die dem Berührungspunkt der Kreise k_1 und k_2 entspricht. Wir zeigen, dass $P(b) = 0$ gilt. Wir verschieben die Figur um den Vektor $-b$. Dann ist 0 der Berührungspunkt. Die Mittelpunkte der vier Kreise entsprechen dann den komplexen Zahlen $\tilde{m}_1 = m_1 - b, \tilde{m}_2 = m_2 - b, \tilde{m}_3 = m_3 - b$ und $\tilde{m}_4 = m_4 - b$.

Da k_1 und k_2 jetzt durch 0 gehen, haben wir $|\tilde{m}_1| = r_1$ und $|\tilde{m}_2| = r_2$. Sei $a = \frac{\tilde{m}_1}{r_1}$. Die komplexe Zahl a hat Betrag 1. Als Vektor zeigt sie von 0 in Richtung \tilde{m}_1 . Da der Kreis k_2 den Kreis k_1 in 0 berührt, zeigt $-a$ von 0 in Richtung \tilde{m}_2 . Es gilt somit $-a = \frac{\tilde{m}_2}{r_2}$.

Wir wenden die Inversion mit Zentrum 0 und beliebigem Inversionsradius an. Da der Kreis k_1 durch das Zentrum 0 geht, ist sein Bild eine Gerade g_1 mit Normalvektor a , die auf derselben Seite von 0 liegt wie k_1 . Ebenso ist das Bild von k_2 eine Gerade g_2 mit Normalvektor a , die auf derselben Seite von 0 liegt wie k_2 . Somit liegt 0 zwischen g_1 und g_2 . Die Geraden g_1 und g_2 liegen parallel. Ihren Normalabstand bezeichnen wir mit $2s$.



Die Bilder von k_3 und k sind Kreise l_3 und l , die die Geraden g_1 und g_2 und auch einander berühren. Sie liegen zwischen g_1 und g_2 und haben daher beide Radius s . Ihr Berührungspunkt entspricht einer komplexen Zahl u . Das Inversionszentrum 0 liegt außerhalb von k_3 und k und daher auch außerhalb von l_3 und l . Die Kreise k_1, k_2, k_3 und k und ihre Bilder unter der Inversion sind in zwei getrennte Zeichnungen gezeichnet. Diese sind jedoch so übereinander zu legen, dass der Vektor a übereinstimmt.

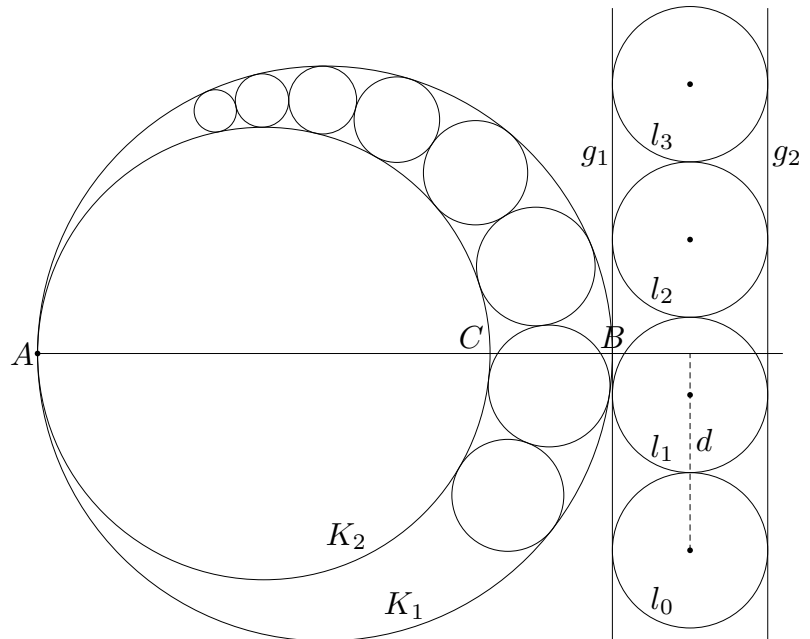
Oben hatten wir bereits $\frac{\tilde{m}_1}{r_1} = a$ und $\frac{\tilde{m}_2}{r_2} = -a$. Der Berührungspunkt der Bildkreise l_3 und l entspricht der komplexen Zahl u , und ihre Radien sind gleich s . Da a senkrecht zu g_1 und g_2 liegt und Betrag 1 hat, entsprechen die komplexen Zahlen $u + ias$ und $u - ias$ den Mittelpunkten der Bildkreise l_3 und l . Aus Satz 124 folgt $\frac{\tilde{m}_3}{r_3} = \frac{u+ias}{s}$ und $\frac{\tilde{m}_4}{r_4} = \frac{u-ias}{s}$. Wir erhalten $\frac{\tilde{m}_1}{r_1} + \frac{\tilde{m}_2}{r_2} + \frac{\tilde{m}_3}{r_3} + \frac{\tilde{m}_4}{r_4} = \frac{2u}{s}$ und $\frac{2\tilde{m}_1^2}{r_1^2} + \frac{2\tilde{m}_2^2}{r_2^2} + \frac{2\tilde{m}_3^2}{r_3^2} + \frac{2\tilde{m}_4^2}{r_4^2} = 4a^2 + 4\frac{u^2 - a^2 s^2}{s^2} = \frac{4u^2}{s^2}$. Damit ergibt sich $P(b) = (\frac{\tilde{m}_1}{r_1} + \frac{\tilde{m}_2}{r_2} + \frac{\tilde{m}_3}{r_3} + \frac{\tilde{m}_4}{r_4})^2 - (\frac{2\tilde{m}_1^2}{r_1^2} + \frac{2\tilde{m}_2^2}{r_2^2} + \frac{2\tilde{m}_3^2}{r_3^2} + \frac{2\tilde{m}_4^2}{r_4^2}) = \frac{4u^2}{s^2} - \frac{4u^2}{s^2} = 0$. Genauso gilt, dass $P(z)$ auch im Berührungspunkt der Kreise k_1 und k_3 und im Berührungspunkt der Kreise k_2 und k_3 eine Nullstelle hat. Das Polynom $P(z)$ hat Grad 2, aber drei Nullstellen, und muss daher identisch null sein. Nun ist $(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4})^2 - \frac{2}{r_1^2} - \frac{2}{r_2^2} - \frac{2}{r_3^2} - \frac{2}{r_4^2}$ der Koeffizient von z^2 und $(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \frac{m_4}{r_4})^2 - \frac{2m_1^2}{r_1^2} - \frac{2m_2^2}{r_2^2} - \frac{2m_3^2}{r_3^2} - \frac{2m_4^2}{r_4^2}$ das konstante Glied im Polynom $P(z)$. Beide sind somit gleich 0.

Im zweiten Fall, in dem k von den anderen drei Kreisen von innen berührt wird, liegt l auf der anderen Seite von l_3 und das Inversionszentrum 0 ist im Innern von l . Das hat $\frac{\tilde{m}_3}{r_3} = \frac{u-ias}{s}$ und $\frac{\tilde{m}_4}{-r_4} = \frac{u+ias}{s}$ zur Folge. Es gilt jetzt $|u + ias|^2 - s^2 < 0$, daher das Minuszeichen bei r_4 . Die Rechnung bleibt dieselbe, es ist nur r_4 durch $-r_4$ zu ersetzen. \square

Wir beweisen folgende Verallgemeinerung von Archimedes' Formel.

Satz 129: Sei \overline{AB} eine Strecke der Länge $2r$ und $q > 0$. Der Punkt C wird auf \overline{AB} so gewählt, dass $\frac{CB}{AC} = q$ gilt. Sei K_1 der Kreis mit Durchmesser \overline{AB} und K_2 der Kreis mit Durchmesser \overline{AC} . (Die Kreise K_1 und K_2 berühren einander in A .) In dem Bereich zwischen K_1 und K_2 liegen weitere Kreise k_0, k_1, k_2, k_3 und so fort, die alle K_1 von innen und K_2 von außen berühren. Weiters berühren k_n und k_{n+1} einander von außen für alle $n \geq 0$. Sei r_n der Radius des Kreises k_n . Dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $r_n = \frac{rq}{1+q+c^2+2cqn+q^2n^2}$ für alle $n \geq 0$ gilt.

Beweis: Es gilt $\frac{|CB|}{|AC|} = q$ und $|AC| + |CB| = |AB| = 2r$, also $|AC| = \frac{2r}{1+q}$ und $|CB| = \frac{2rq}{1+q}$. Der Kreis K_1 hat Radius r und der Kreis K_2 hat Radius $\frac{r}{1+q}$. Wir legen die Figur in die komplexe Ebene, sodass dem Punkt A die Zahl 0 entspricht, und die Strecke \overline{AB} auf der positiven reellen Achse liegt. Insbesondere liegen dort auch die Mittelpunkte der Kreise K_1 und K_2 . Wir wenden die Inversion mit Zentrum 0 und Inversionsradius $R = 2r$ an. Die Kreise K_1 und K_2 gehen durchs Inversionszentrum 0. Ihre Bilder sind Gerade



g_1 und g_2 , die senkrecht auf die reelle Achse stehen. Der Abstand von g_1 zum Zentrum 0 ist $\frac{R^2}{2r} = 2r$ und der Abstand von g_2 zum Zentrum 0 ist $\frac{R^2(1+q)}{2r} = 2r(1+q)$. Die Kreise k_0, k_1, k_2, \dots werden auf Kreise l_0, l_1, l_2, \dots abgebildet, die sowohl g_1 als auch g_2 berühren und somit zwischen diesen beiden Geraden liegen. Weiters berühren l_n und l_{n+1} einander

von außen für alle $n \geq 0$. In der Zeichnung sind nur l_0, l_1, l_2 und l_3 dargestellt. Die Radien dieser Kreise sind alle gleich rq , das ist der halbe Normalabstand der Geraden g_1 und g_2 . Sei d der Abstand des Mittelpunkts des Kreises l_0 von der reellen Achse. Er hat positives Vorzeichen, wenn der Mittelpunkt oberhalb der reellen Achse liegt, sonst negatives. Dem Mittelpunkt des Kreises l_n entspricht dann die komplexe Zahl $2r + rq + i(d + 2nrq)$. Nach Satz 124 gilt dann für den Radius r_n des Kreises k_n

$$r_n = \frac{R^2 rq}{(2r+rq)^2 + (d+2nrq)^2 - r^2 q^2} = \frac{4r^3 q}{4r^2 + 4r^2 q + d^2 + 4ndrq + 4n^2 r^2 q^2}$$

Setzt man $c = \frac{d}{2r}$, so erhält man $r_n = \frac{rq}{1+q+c^2+2cqn+q^2n^2}$, die gesuchte Formel. \square

Bemerkung: Liegt in Satz 129 der Mittelpunkt von k_0 auf der Strecke \overline{AB} , dann gilt $d = 0$ für den im Beweis eingeführten Abstand. Daraus folgt dann $c = 0$ und $r_n = \frac{rq}{1+q+q^2n^2}$. Das ist Archimedes' Formel.

Liegt k_0 oberhalb der Strecke \overline{AB} und berührt diese, dann berührt l_0 die Verlängerung der Strecke \overline{AB} von oben und es gilt $d = rq$. Es folgt $c = \frac{q}{2}$ und $r_n = \frac{rq}{(1+\frac{q}{2})^2 + q^2n + q^2n^2}$.

Übung: Es liege die Situation aus Satz 129 vor. Man zeige $\frac{1}{r_0} - \frac{3}{r_1} + \frac{3}{r_2} - \frac{1}{r_3} = 0$.

Übung: Es liege die Situation aus Satz 129 vor. Man zeige $\frac{j}{r_0} - \frac{m}{r_{m-j}} + \frac{m}{r_{m+j}} - \frac{j}{r_{2m}} = 0$ und $\frac{2j-1}{r_0} - \frac{2m-1}{r_{m-j}} + \frac{2m-1}{r_{m+j-1}} - \frac{2j-1}{r_{2m-1}} = 0$, wobei $m > j \geq 1$ gilt.

Übung: Es liege die Situation aus Satz 129 vor, aber der Mittelpunkt des Kreises k_0 liege auf der Strecke \overline{AB} . Sei d_n der Normalabstand des Mittelpunkts des Kreises k_n von der Strecke \overline{AB} . Man zeige, dass $d_n = 2nr_n$ gilt (Pappos Circle Theorem oder Pappos Chain Theorem). Hinweis: Inversion mit Zentrum A und Inversionsradius $\sqrt{u_n^2 - r_n^2}$, wobei u_n der Abstand des Mittelpunkts des Kreises k_n vom Punkt A ist. Diese Inversion führt k_n in sich selbst über und ebenso die Gerade $\ell(A, B)$.

Übung: Gegeben seien ein Punkt A und zwei Kreise k_1 und k_2 . Man konstruiere einen Kreis k , der durch A geht und k_1 und k_2 berührt. Hinweis: Inversion mit Zentrum A .

Übung: Gegeben seien zwei Punkte A und B sowie ein Kreis k_1 . Man konstruiere einen Kreis k , der durch A und B geht und k_1 berührt. Hinweis: Inversion mit Zentrum A .

Übung: Seien k_1, k_2, k_3 und k_4 Kreise, sodass k_1 und k_2 einander im Punkt P_1 von außen berühren, ebenso k_2 und k_3 im Punkt P_2 , k_3 und k_4 im Punkt P_3 und schließlich k_4 und k_1 im Punkt P_4 . Man zeige, dass die Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 auf einem Kreis liegen. Hinweis: Inversion mit Zentrum P_1 .

Übung: Seien l_1 und l_2 Kreise, wobei l_2 innerhalb von l_1 liegt und diesen nicht berührt. Angenommen, es existiere eine Kette von Kreisen k_0, k_1, \dots, k_{n-1} , die l_1 von innen und l_2 von außen berühren, und von denen jeder den nächsten berührt, wobei $k_n = k_0$ sei. Sei k_0^* ein beliebiger Kreis, der l_1 von innen und l_2 von außen berührt. Man zeige, dass eine Kette von Kreisen wie oben existiert, die den Kreis k_0^* als Startkreis k_0 hat. Hinweis: Inversion, die l_1 und l_2 in Kreise mit gemeinsamen Mittelpunkt überführt.

X. Orientierte Flächen und orientierte Normalabstände

1. Orientierte Dreiecksfläche	101
2. Orientierter Normalabstand	103
3. Vierecke	104
4. Die Erdős-Mordell-Ungleichung	107

In diesem Kapitel arbeiten wir mit orientierten Dreiecksflächen und dem orientierten Normalabstand von einer Gerade. Durch die Orientierung erspart man sich Fallunterscheidungen.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels definieren wir die orientierte Dreiecksfläche und finden einige Rechenregeln. Damit beweisen wir dann den Satz von Ceva mit einigen Ergänzungen und den Satz von Routh, der den Satz von Ceva verallgemeinert.

Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels führen wir den orientierten Normalabstand von einer Gerade ein und beweisen eine fundamentale Eigenschaft für die orientierten Normalabstände eines Punktes von den Trägergeraden der Seiten eines Dreiecks. Zur Illustration beweisen wir damit einen einfachen Satz über das Dreieck.

Im dritten Abschnitt dieses Kapitels werden Vierecke untersucht. Wir übertragen die fundamentale Eigenschaft, die wir im zweiten Abschnitt für orientierten Normalabstände bewiesen haben, auf orientierte Dreiecksflächen und beweisen sie für Vierecke. Damit können wir dann einen Satz von Newton über Tangentenvierecke beweisen. Dieser besagt, dass der Inkreismittelpunkt und die Mittelpunkte der beiden Diagonalen auf einer Gerade liegen. Mit derselben Methode erhält man auch einen Beweis für den Satz von Gauß, der besagt, dass die Mittelpunkte der Diagonalen eines Vierseits auf einer Gerade liegen.

Im vierten Abschnitt dieses Kapitels kommen wir auf die Erdős-Mordell-Ungleichung zurück, die bereits in Kapitel I bewiesen wurde. Wir beweisen eine Verschärfung dieser Ungleichung. Ist P ein Punkt im Innern eines Dreiecks, dann ist die doppelte Summe der Normalabstände von P zu den Seiten des Dreiecks kleiner oder gleich der Summe der Normalabstände von P zu den Tangenten an den Umkreis in den Eckpunkten des Dreiecks. Den Beweis führen wir mit Hilfe von orientierten Normalabständen und ein wenig Trigonometrie.

1. Orientierte Dreiecksfläche

Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Die orientierte Dreiecksfläche bezeichnen wir mit $[ABC]$ und bestimmen sie so: Wir stellen uns in das Dreieck. Wir schauen zum Punkt A , drehen uns dann zum Punkt B , weiter zum Punkt C und kommen so zum Punkt A zurück. Drehen wir uns dabei in positiver Richtung (im Gegenuhrzeigersinn), dann hat die Fläche positives Vorzeichen. Drehen wir uns aber in negativer Richtung (im Uhrzeigersinn), dann hat die Fläche negatives Vorzeichen. Fallen zwei Eckpunkte zusammen, dann ist die Fläche natürlich gleich null. Es gilt $[ABC] = [BCA] = [CAB]$, da nur der Punkt, in dem wir beginnen, ein anderer ist, nicht aber die Drehrichtung. Vertauscht man zwei Punkte, dann ändert sich auch die Drehrichtung. Es gilt daher $[BAC] = -[ABC]$, $[CBA] = -[ABC]$ und $[ACB] = -[ABC]$. Wir werden diese Gleichungen später oft verwenden, ohne darauf hinzuweisen.

Es folgen noch zwei Rechenregeln, die wir immer wieder verwenden werden. Wir beginnen mit dem Zusammenhang zwischen dem orientiertem Abstand zweier Punkte und der orientierten Fläche eines Dreiecks.

Satz 130: *Seien T, U, V und W Punkte auf einer Gerade g , sodass $T \neq U$ und $V \neq W$ gilt. Weiters sei P ein Punkt, der nicht auf g liegt. Dann gilt $\frac{[TUP]}{[VWP]} = \frac{TU}{VW}$.*

Beweis: Wir drehen die Zeichnung so, dass links die negative und rechts die positive Richtung der Gerade g ist (mit deren Hilfe die orientierten Abstände zwischen den Punkten T, U, V und W bestimmt werden). Wir versehen den Normalabstand d des Punktes P zur Gerade g mit positivem Vorzeichen, wenn P oberhalb von g liegt, und mit negativem Vorzeichen, wenn P unterhalb von g liegt. Dann gilt $[TUP] = TU \cdot \frac{d}{2}$ und $[VWP] = VW \cdot \frac{d}{2}$. Daraus folgt bereits das gesuchte Resultat. \square

Satz 131: *Seien U, V und W Punkte auf einer Gerade g und P ein weiterer Punkt, dann gilt $[UWP] = [UVP] + [VWP]$.*

Beweis: Fallen zwei der drei Punkte U, V und W zusammen, dann ist eine der Flächen null und die Gleichung leicht zu überprüfen. Liegt P auf der Geraden g , dann sind alle drei Flächen gleich null. Wir nehmen daher an, dass die Punkte U, V und W verschieden sind und P nicht auf g liegt.

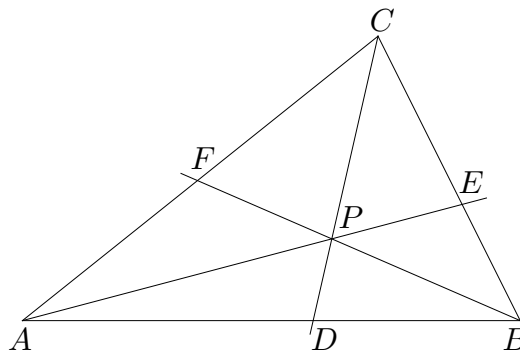
Sei λ so gewählt, dass $[UWP] = \lambda \cdot UW$ gilt. Es gilt auch $\frac{[UVP]}{[UWP]} = \frac{UV}{UW}$ und $\frac{[VWP]}{[UWP]} = \frac{VW}{UW}$ wegen Satz 130. Damit erhalten wir dann $[UVP] = \lambda \cdot UV$ und $[VWP] = \lambda \cdot VW$. Weiters gilt $UW = UV + VW$ für diese orientierten Abstände. Multiplizieren wir diese Gleichung mit λ , so ergibt sich $[UWP] = [UVP] + [VWP]$. \square

Wir beweisen den folgenden Satz, der den Satz von Ceva als Teilresultat enthält, aber auch noch weitere Gleichungen, die von van Aubel und von Gergonne stammen.

Satz 132: *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und P ein Punkt, der nicht auf der Trägergerade einer Dreiecksseite liegt. Sei E der Schnittpunkt der Geraden $\ell(B, C)$ und $\ell(A, P)$, sei F der Schnittpunkt der Geraden $\ell(C, A)$ und $\ell(B, P)$ und sei D der Schnittpunkt der Geraden $\ell(A, B)$ und $\ell(C, P)$. Wir nehmen an, dass diese Schnittpunkte existieren. Sie fallen mit keinem Eckpunkt des Dreiecks zusammen, da P auf keiner Trägergerade liegt. Dann gilt*

- (a) $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$ (Ceva)
- (b) $\frac{AP}{PE} = \frac{AD}{DB} + \frac{AF}{FC}$ (van Aubel)
- (c) $\frac{AP}{AE} + \frac{BP}{BF} + \frac{CP}{CD} = 2$ (Gergonne)

Beweis: Um nicht die Übersicht zu verlieren, setzen wir $x = [BCP]$, $y = [CAP]$ und $z = [ABP]$. Nach Satz 130 gilt $\frac{[PAB]}{[PEB]} = \frac{PA}{PE}$ und $\frac{[PAC]}{[PEC]} = \frac{PA}{PE}$. Wir setzen $[PAB] = z$ und $[PAC] = -y$ ein und erhalten $\frac{[PEB]}{[PEC]} = -\frac{z}{y}$, woraus $\frac{[BEP]}{[ECP]} = \frac{z}{y}$ folgt. Analog ergibt sich $\frac{[CFP]}{[FAP]} = \frac{x}{z}$ und $\frac{[ADP]}{[DBP]} = \frac{y}{x}$. Es gilt $\frac{[BEP]}{[ECP]} = \frac{BE}{EC}$, $\frac{[CFP]}{[FAP]} = \frac{CF}{FA}$ und $\frac{[ADP]}{[DBP]} = \frac{AD}{DB}$ wieder wegen Satz 130, sodass wir schlussendlich $\frac{BE}{EC} = \frac{z}{y}$, $\frac{CF}{FA} = \frac{x}{z}$ und $\frac{AD}{DB} = \frac{y}{x}$ erhalten. Nun ergibt sich $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = \frac{y}{x} \cdot \frac{z}{y} \cdot \frac{x}{z} = 1$. Damit ist die erste Gleichung bereits gezeigt.



Nach Satz 131 gilt $[ADP] + [DBP] = [ABP] = z$. Oben hatten wir $\frac{[ADP]}{[DBP]} = \frac{y}{x}$. Aus diesen Gleichungen folgt $[ADP] = \frac{yz}{x+y}$. Analog ergibt sich $[BEP] = \frac{xz}{y+z}$ und $[CFP] = \frac{xy}{x+z}$.

Aus Satz 130 erhalten wir $\frac{[PAB]}{[EPB]} = \frac{PA}{EP}$. Da $[PAB] = z$ gesetzt und soeben $[EPB] = \frac{xz}{y+z}$ gezeigt wurde, ergibt sich $\frac{AP}{PE} = \frac{PA}{EP} = \frac{y+z}{x}$. Oben haben wir $\frac{AD}{DB} = \frac{y}{x}$ und $\frac{AF}{FC} = \frac{FA}{CF} = \frac{z}{x}$ gefunden. Es folgt $\frac{AP}{PE} = \frac{AD}{DB} + \frac{AF}{FC}$, die zweite gesuchte Gleichung.

Wegen $\frac{AP}{PE} = \frac{y+z}{x}$ erhalten wir $\frac{AE}{AP} = \frac{AP+PE}{AP} = 1 + \frac{PE}{AP} = 1 + \frac{x}{y+z} = \frac{x+y+z}{y+z}$. Es folgt $\frac{AP}{AE} = \frac{y+z}{x+y+z}$. Analog ergibt sich $\frac{BP}{BF} = \frac{x+z}{x+y+z}$ und $\frac{CP}{CD} = \frac{x+y}{x+y+z}$. Damit erhalten wir schließlich $\frac{AP}{AE} + \frac{BP}{BF} + \frac{CP}{CD} = 2$, die dritte Gleichung. \square

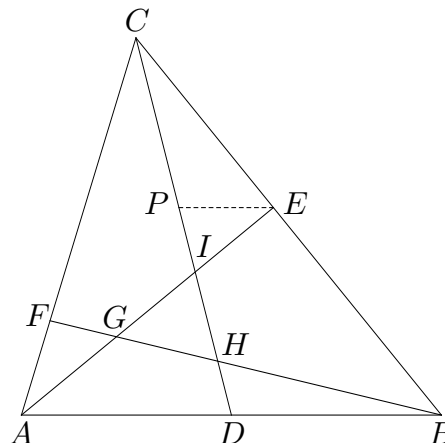
Eine Verallgemeinerung des Satzes von Ceva ist der Satz von Routh.

Satz 133: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Es seien D, E und F Punkte auf den Geraden $\ell(A, B)$, $\ell(B, C)$ und $\ell(C, A)$, die jedoch nicht mit den Eckpunkten des Dreiecks zusammenfallen. Wir setzen $r = \frac{AD}{DB}$, $s = \frac{BE}{EC}$ und $t = \frac{CF}{FA}$. Weiters sei G der Schnittpunkt der Geraden $\ell(A, E)$ und $\ell(B, F)$, sei H der Schnittpunkt der Geraden $\ell(B, F)$ und $\ell(C, D)$ und I der Schnittpunkt der Geraden $\ell(C, D)$ und $\ell(A, E)$. Wir nehmen an, dass diese Schnittpunkte existieren. Dann gilt $[GHI] = \frac{(rst-1)^2}{(1+r+rs)(1+s+st)(1+t+tr)} [ABC]$.

Beweis: Wir beginnen damit, zu zeigen, dass

$$(1) \quad [ABC] = [CHB] + [AIC] + [BGA] + [GHI]$$

gilt. Das lässt sich aus der Zeichnung ablesen. Man muss allerdings auf die Orientierung der Flächen achten und die Punkte D, E und F können auch auf den Verlängerungen der drei Dreieckseiten liegen. Daher beweisen wir die Gleichung (1) durch wiederholtes Anwenden von Satz 131. Da $[BGA] = [BHA] + [HGA]$ und $[IGH] + [HGA] = [IGH] + [GAH] = [IAH]$ gilt, erhalten wir $[BGA] + [IGH] = [BHA] + [IAH]$. Wegen $[BHA] = [ABH] = [ADH] + [DBH]$ folgt $[BGA] + [IGH] = [ADH] + [DBH] + [IAH]$ und daraus dann $[BGA] + [GHI] = [DIA] + [HDB]$, da ja $[ADH] + [IAH] = [DHA] + [HIA] = [DIA]$ gilt und natürlich auch $[IGH] = [GHI]$ und $[DBH] = [HDB]$. Jetzt müssen wir nur noch $[CHB]$ und $[AIC]$ dazuaddieren. Wegen $[CHB] + [HDB] = [CDB]$ und $[DIA] + [AIC] = [DIA] + [ICA] = [DCA]$ ergibt



sich $[CHB] + [AIC] + [BGA] + [GHI] = [CDB] + [DCA]$. Wegen $[CDB] + [DCA] = [ADC] + [DBC] = [ABC]$ ist (1) gezeigt.

Wir zeichnen eine Parallele durch E zu \overline{AB} . Ihren Schnittpunkt mit \overline{CD} bezeichnen wir mit P . Aus dem Strahlensatz folgt $\frac{CE}{CB} = \frac{EP}{BD}$ und $\frac{IA}{IE} = \frac{AD}{EP}$. Multipliziert man diese Gleichungen, so erhält man $\frac{IA}{IE} \cdot \frac{CE}{CB} = \frac{AD}{BD}$ oder $\frac{AI}{IE} = \frac{AD}{DB} \cdot \frac{CB}{CE}$. Weiters gilt $\frac{AD}{DB} = r$ und $\frac{CB}{CE} = \frac{BC}{EC} = \frac{BE+EC}{EC} = s + 1$. Es folgt $\frac{AI}{IE} = r(s + 1)$ und $\frac{AE}{IE} = \frac{AI+IE}{IE} = 1 + r + rs$. Es folgt auch $\frac{EC}{BC} = \frac{1}{1+s}$.

Es gilt $\frac{[AIC]}{[ABC]} = \frac{[AEC]-[IEC]}{[BCA]} = \frac{[AEC]}{[BCA]}(1 - \frac{[IEC]}{[AEC]})$ wegen Satz 131. Wegen $[AEC] = [ECA]$ und Satz 130 folgt $\frac{[AIC]}{[ABC]} = \frac{EC}{BC}(1 - \frac{IE}{AE})$. Da wir soeben $\frac{IE}{AE} = \frac{1}{1+r+rs}$ und $\frac{EC}{BC} = \frac{1}{1+s}$ gezeigt haben, erhalten wir $\frac{[AIC]}{[ABC]} = \frac{1}{1+s}(1 - \frac{1}{1+r+rs}) = \frac{r}{1+r+rs}$.

Analog kann man $\frac{[CHB]}{[ABC]} = \frac{t}{1+t+tr}$ und $\frac{[BGA]}{[ABC]} = \frac{s}{1+s+st}$ zeigen. Mit Hilfe von (1) ergibt sich $\frac{[GHI]}{[ABC]} = 1 - \frac{[CHB]}{[ABC]} - \frac{[AIC]}{[ABC]} - \frac{[BGA]}{[ABC]}$. Aus den soeben gezeigten Gleichungen folgt dann $\frac{[GHI]}{[ABC]} = 1 - \frac{t}{1+t+tr} - \frac{r}{1+r+rs} - \frac{s}{1+s+st}$. Bringt man das auf gemeinsamen Nenner, dann hat man $\frac{[GHI]}{[ABC]} = \frac{(rst-1)^2}{(1+r+rs)(1+s+st)(1+t+tr)}$. □

2. Orientierter Normalabstand

Wir orientieren den Normalabstand zu einer Gerade. Auf der einen Seite der Gerade hat er positives Vorzeichen, auf der anderen negatives. Wir beweisen folgende fundamentale Eigenschaft.

Satz 134: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und P ein Punkt. Sei $d_a(P)$ ein entsprechend definierter orientierter Normalabstand vom Punkt P zur Gerade $\ell(B, C)$, das heißt wir versehen $d_a(P)$ mit einem positiven Vorzeichen, wenn P auf derselben Seite von $\ell(B, C)$ liegt wie das Dreieck $\triangle ABC$, und mit einem negativen Vorzeichen, wenn P auf der anderen Seite von $\ell(B, C)$ liegt. Analog werden $d_b(P)$ und $d_c(P)$ definiert. Seien u, v, w und s in \mathbb{R} . Sei \mathcal{K} die Menge aller Punkte P , für die $u d_a(P) + v d_b(P) + w d_c(P) = s$ gilt. Dann ist \mathcal{K} leer, eine Gerade oder die ganze Ebene.

Beweis: Wir setzen $P = (x_1, x_2)$. Sei $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ der Normalvektor der Länge 1 auf die Gerade $\ell(B, C)$, der ins Innere des Dreiecks $\triangle ABC$ zeigt. Weiters setzen wir $B = (b_1, b_2)$ und φ sei der Winkel zwischen den Vektoren \mathbf{n} und \overrightarrow{BP} . Es gilt dann

$$d_a(P) = |BP| \cos \varphi = \langle \overrightarrow{BP}, \mathbf{n} \rangle = (x_1 - b_1)n_1 + (x_2 - b_2)n_2 = p_a x_1 + q_a x_2 - r_a$$

wobei wir $p_a = n_1$, $q_a = n_2$ und $r_a = b_1 n_1 + b_2 n_2$ gesetzt haben. Genauso erhalten wir $d_b(P) = p_b x_1 + q_b x_2 - r_b$ und $d_c(P) = p_c x_1 + q_c x_2 - r_c$ mit entsprechenden Konstanten p_b, q_b, r_b, p_c, q_c und r_c . Setzt man das in die Gleichung $u d_a(P) + v d_b(P) + w d_c(P) = s$ ein, so erhält man $e x_1 + f x_2 = h$ mit $e = u p_a + v p_b + w p_c$, $f = u q_a + v q_b + w q_c$ und $h = s + u r_a + v r_b + w r_c$. Somit ist \mathcal{K} die Menge aller Punkte $P = (x_1, x_2)$, für die $e x_1 + f x_2 = h$ gilt. Wenn e und f nicht beide gleich 0 sind, dann ist \mathcal{K} eine Gerade. Im Fall $e = f = 0$ ist \mathcal{K} leer, wenn $h \neq 0$ gilt, und die ganze Ebene, wenn auch $h = 0$ gilt. □

Satz 135: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck, P ein Punkt und $d_a(P)$, $d_b(P)$ und $d_c(P)$ wie im letzten Satz definiert. Sei E der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale durch A mit $\ell(B, C)$ und F der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale durch B mit $\ell(A, C)$. Genau dann liegt der Punkt P auf der Geraden $\ell(E, F)$, wenn $d_c(P) = d_a(P) + d_b(P)$ gilt.

Beweis: Sei \mathcal{K} die Menge aller Punkte P , für die $d_c(P) = d_a(P) + d_b(P)$ gilt. Für den Eckpunkt C gilt $d_a(C) = d_b(C) = 0$ und $d_c(C) > 0$. Somit liegt C nicht in \mathcal{K} .

Es gilt $d_b(E) = d_c(E)$, da E ja auf der Winkelsymmetrale durch A liegt. Weiters gilt $d_a(E) = 0$, da E auf $\ell(B, C)$ liegt. Es folgt $d_c(E) = d_a(E) + d_b(E)$. Somit ist E ein Element der Menge \mathcal{K} . Genauso zeigt man, dass auch F ein Element der Menge \mathcal{K} ist.

Wir haben gesehen, dass \mathcal{K} weder leer noch die gesamte Ebene ist. Nach Satz 134 ist \mathcal{K} eine Gerade. Da E und F Elemente der Menge \mathcal{K} sind, ist \mathcal{K} die Gerade $\ell(E, F)$. \square

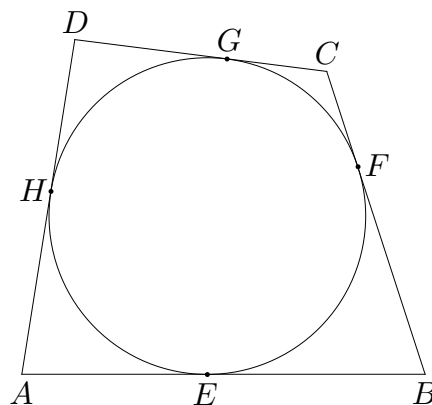
Übung: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und h_a, h_b und h_c die Längen der Höhen. Sei P ein Punkt und $d_a(P), d_b(P)$ und $d_c(P)$ wie in Satz 134 definiert. Dann gilt $\frac{d_a(P)}{h_a} + \frac{d_b(P)}{h_b} + \frac{d_c(P)}{h_c} = 1$.

3. Vierecke

Ein Viereck heißt Tangentenviereck, wenn es einen Inkreis besitzt. Die Seiten des Vierecks sind Tangenten an einen Kreis.

Satz 136: Für ein Tangentenviereck $ABCD$ gilt $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$.

Beweis: Seien E, F, G und H die Punkte, in denen der Inkreis die Seiten $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ und \overline{DA} des Tangentenvierecks berührt. Legt man von einem Punkt außerhalb eines Kreises die beiden Tangenten an den Kreis, dann sind die Abstände von diesem Punkt zu den beiden Berührungspunkten gleich lang. Damit erhalten wir $|AE| = |AH|$, $|BE| = |BF|$, $|CF| = |CG|$ und $|DG| = |DH|$. Weiters gilt $|AB| = |AE| + |BE|$, $|CD| = |CG| + |DG|$, $|BC| = |BF| + |CF|$ und $|DA| = |AH| + |DH|$. Daraus ergibt sich dann, dass $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$ gilt. \square



Ein Parallelogramm $ABCD$, das auch ein Tangentenviereck ist, ist ein Rhombus. Für ein Parallelogramm gilt ja $|AB| = |CD|$ und $|BC| = |AD|$. Da $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$ für ein Tangentenviereck nach Satz 136 gilt, erhalten wir $|AB| = |CD| = |BC| = |AD|$. Wir haben somit einen Rhombus.

Wir arbeiten jetzt wieder mit orientierten Dreiecksflächen. Diese haben dieselbe fundamentale Eigenschaft wie der orientierte Normalabstand.

Satz 137: Sei $ABCD$ ein Viereck und P ein Punkt. Seien t, u, v, w und r reelle Zahlen. Sei \mathcal{L} die Menge aller Punkte P , für die $t \cdot [ABP] + u \cdot [BCP] + v \cdot [CDP] + w \cdot [DAP] = s$ gilt. Dann ist \mathcal{L} leer, eine Gerade oder die gesamte Ebene.

Beweis: Für das Viereck definieren wir den orientierten Normalabstand genauso wie für das Dreieck. Mit $d_a(P), d_b(P), d_c(P)$ und $d_d(P)$ bezeichnen wir die orientierten Normalabstände vom Punkt P zu den Geraden $\ell(A, B), \ell(B, C), \ell(C, D)$, und $\ell(D, A)$, wobei das Vorzeichen positiv ist, wenn P auf derselben Seite der Gerade liegt wie das Viereck. Es gilt $[ABP] = \frac{|AB|}{2} d_a(P)$, $[BCP] = \frac{|BC|}{2} d_b(P)$, $[CDP] = \frac{|CD|}{2} d_c(P)$ und $[DAP] = \frac{|DA|}{2} d_d(P)$. Wir setzen $\tilde{t} = \frac{|AB|}{2} t$, $\tilde{u} = \frac{|BC|}{2} u$, $\tilde{v} = \frac{|CD|}{2} v$ und $\tilde{w} = \frac{|DA|}{2} w$. Dann ist \mathcal{L} die Menge aller Punkte P , für die $\tilde{t} d_a(P) + \tilde{u} d_b(P) + \tilde{v} d_c(P) + \tilde{w} d_d(P) = s$ gilt. Wir gehen jetzt vor wie im Beweis von Satz 134 und setzen $P = (x_1, x_2)$. Wie dort finden wir

Konstanten $p_a, q_a, r_a, p_b, q_b, r_b, p_c, q_c, r_c, p_d, q_d$ und r_d , sodass $d_a(P) = p_ax_1 + q_ax_2 - r_a$, $d_b(P) = p_bx_1 + q_bx_2 - r_b$, $d_c(P) = p_cx_1 + q_cx_2 - r_c$ und $d_d(P) = p_dx_1 + q_dx_2 - r_d$ gilt. Setzt man das in die Gleichung $\tilde{t}d_a(P) + \tilde{u}d_b(P) + \tilde{v}d_c(P) + \tilde{w}d_d(P) = s$ ein, so erhält man $ex_1 + fx_2 = h$ mit $e = \tilde{t}p_a + \tilde{u}p_b + \tilde{v}p_c + \tilde{w}p_d$, $f = \tilde{t}q_a + \tilde{u}q_b + \tilde{v}q_c + \tilde{w}q_d$ und $h = s + \tilde{t}r_a + \tilde{u}r_b + \tilde{v}r_c + \tilde{w}r_d$. Somit ist \mathcal{L} die Menge aller Punkte $P = (x_1, x_2)$, für die $ex_1 + fx_2 = h$ gilt. Wenn e und f nicht beide gleich 0 sind, dann ist \mathcal{L} eine Gerade. Im Fall $e = f = 0$ ist \mathcal{L} leer, wenn $h \neq 0$ gilt, und die ganze Ebene, wenn auch $h = 0$ gilt. \square

Satz 138: Sei M der Schnittpunkt der beiden Diagonalen eines Parallelogramms $ABCD$. Dann ist M der Mittelpunkt beider Diagonalen.

Hat ein konvexes Viereck die Eigenschaft, dass der Schnittpunkt M der Diagonalen der Mittelpunkt beider Diagonalen ist, dann ist das Viereck ein Parallelogramm.

Beweis: Das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm. Die Seiten \overline{AB} und \overline{CD} sind parallel. Es gilt $\frac{MA}{MC} = \frac{MB}{MD} = \frac{AB}{CD}$ nach dem Strahlensatz. Wegen $AB = -CD$ folgt $MA = -MC$ und $MB = -MD$. Somit ist M der Mittelpunkt der Diagonalen \overline{AC} und \overline{BD} .

Der Schnittpunkt M der Diagonalen eines konvexen Vierecks sei der Mittelpunkt beider Diagonalen. Dann gilt $\frac{MA}{MC} = -1$ und $\frac{MB}{MD} = -1$. Es folgt $\frac{MA}{MC} = \frac{MB}{MD}$ und $\frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB}$. Aus dem Strahlensatz erhalten wir dann, dass die Seiten \overline{AB} und \overline{CD} parallel liegen und ebenso die Seiten \overline{BC} und \overline{DA} . Das Viereck ist daher ein Parallelogramm. \square

Satz 139: Hat ein konvexes Viereck $ABCD$ die Eigenschaft, dass beide Diagonalen die Fläche halbieren, dann ist das Viereck ein Parallelogramm.

Beweis: Sei M der Schnittpunkt der Diagonalen. Wegen Satz 130 gilt $\frac{[AMB]}{[MCB]} = \frac{AM}{MC}$ und $\frac{[AMD]}{[MCD]} = \frac{AM}{MC}$. Setzt man $\frac{AM}{MC} = \lambda$, so folgt $[AMB] = \lambda \cdot [MCB]$ und $[AMD] = \lambda \cdot [MCD]$. Aus Satz 131 folgt $[AMB] + [MCB] = [ACB]$ und $[ACD] = [AMD] + [MCD]$. Weiters gilt $[ACB] = -[ACD]$ nach Voraussetzung. Es folgt $[AMB] + [MCB] = -[AMD] - [MCD]$. Setzt man $[AMB] = \lambda \cdot [MCB]$ und $[AMD] = \lambda \cdot [MCD]$ ein und dividiert durch $1 + \lambda$, so ergibt sich $[MCB] = -[MCD]$. Das lässt sich auch schreiben als $[BMC] = [MDC]$. Aus Satz 130 folgt $\frac{[BMC]}{[MDC]} = \frac{BM}{MD}$. Damit ist $\frac{BM}{MD} = 1$ gezeigt. Genauso zeigt man $\frac{AM}{MC} = 1$.

Wir haben gezeigt, dass der Schnittpunkt M der Diagonalen der Mittelpunkt beider Diagonalen ist. Aus Satz 138 folgt, dass das Viereck ein Parallelogramm ist. \square

Satz 140: Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck, aber kein Parallelogramm. Sei M der Mittelpunkt der Diagonale \overline{AC} und N der der Diagonale \overline{BD} . Die Menge \mathcal{L} aller Punkte P , für die $[ABP] + [CDP] = [BCP] + [DAP]$ gilt, ist dann die Gerade $\ell(M, N)$.

Beweis: Es gilt $M \neq N$. Ansonsten wäre der Schnittpunkt der Diagonalen der Mittelpunkt beider Diagonalen. Nach Satz 138 wäre das Viereck dann ein Parallelogramm.

Da das Viereck $ABCD$ kein Parallelogramm ist, wird es wegen Satz 139 von einer der Diagonalen nicht in zwei flächengleiche Teile geteilt. Wir nehmen an, es sei die Diagonale \overline{AC} . Es gilt dann $[CDA] \neq [BCA]$. Wegen $[ABA] = 0$ und $[DAA] = 0$ erhalten wir, dass A nicht in \mathcal{L} liegt. Wenn die Diagonale \overline{AC} das Viereck in zwei flächengleiche Teile teilt, aber \overline{BD} nicht, dann zeigen wir auf dieselbe Weise, dass B nicht in \mathcal{L} liegt.

Nach Satz 130 gilt $\frac{[CMB]}{[MAB]} = \frac{CM}{MA}$. Da M der Mittelpunkt von \overline{AC} ist, haben wir $\frac{CM}{MA} = 1$. Somit gilt $[CMB] = [MAB]$. Ebenso gilt $\frac{[AMD]}{[MCD]} = \frac{AM}{MC} = 1$, woraus $[AMD] = [MCD]$ folgt. Diese Gleichungen kann man schreiben als $[BCM] = [ABM]$ und $[DAM] = [CDM]$.

Damit ist gezeigt, dass M ein Element der Menge \mathcal{L} ist. Genauso zeigt man, dass auch N ein Element der Menge \mathcal{L} ist.

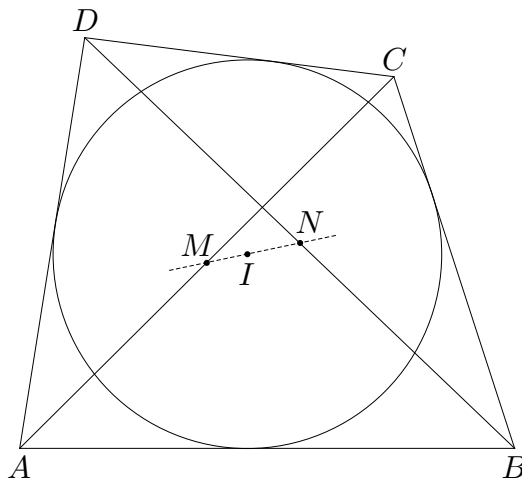
Wir haben gesehen, dass \mathcal{L} weder leer noch die gesamte Ebene ist. Nach Satz 137 ist \mathcal{L} eine Gerade. Da M und N Elemente der Menge \mathcal{L} sind, ist \mathcal{L} die Gerade $\ell(M, N)$. \square

Satz 141 (Satz von Newton) *Sei $ABCD$ ein Tangentenviereck. Sei M der Mittelpunkt der Diagonale \overline{AC} und N der der Diagonale \overline{BD} . Der Inkreismittelpunkt I liegt dann auf der Geraden $\ell(M, N)$. Für einen Rhombus gilt $I = M = N$.*

Beweis: Ein Rhombus hat einen Inkreis, dessen Mittelpunkt I auf beiden Diagonalen liegt. Daher ist I der Schnittpunkt der Diagonalen. Nach Satz 138 gilt $I = M = N$.

Das Tangentenviereck sei kein Rhombus. Wegen der Bemerkung nach Satz 136 ist es dann auch kein Parallelogramm. Wir können daher Satz 140 anwenden. Sei ϱ der Inkreisradius. Für den Inkreismittelpunkt I gilt $[ABI] = |AB| \cdot \frac{\varrho}{2}$ und $[CDI] = |CD| \cdot \frac{\varrho}{2}$. Daraus ergibt sich dann $[ABI] + [CDI] = (|AB| + |CD|) \cdot \frac{\varrho}{2}$. Es gilt auch $[BCI] = |BC| \cdot \frac{\varrho}{2}$ und $[DAI] = |DA| \cdot \frac{\varrho}{2}$, woraus $[BCI] + [DAI] = (|BC| + |DA|) \cdot \frac{\varrho}{2}$ folgt. Nun gilt $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$ nach Satz 136.

Es folgt $[ABI] + [CDI] = [BCI] + [DAI]$. Wegen Satz 140 ist damit gezeigt, dass der Inkreismittelpunkt I auf der Geraden $\ell(M, N)$ liegt. \square



Mit dieser Methode können wir auch folgenden Satz über ein Viereck zeigen. Er wird Satz von Gauß oder Satz von Gauß-Bodenmiller genannt.

Satz 142: *Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck. Sei E der Schnittpunkt der Geraden $\ell(A, B)$ und $\ell(C, D)$. Sei F der Schnittpunkt der Geraden $\ell(A, D)$ und $\ell(B, C)$. Wir nehmen an, dass diese Schnittpunkte existieren. Dann liegen die Mittelpunkte M , N und K der Strecken \overline{AC} , \overline{BD} und \overline{EF} auf einer Geraden.*

Beweis: Das Viereck $ABCD$ ist kein Parallelogramm, sonst würden E und F gar nicht existieren. Wir können daher Satz 140 anwenden. Wir berechnen die Flächen, die eine der Seiten des Vierecks $ABCD$ als Basis und K als Spitze haben.

Es gilt $[ABK] = [AEK] + [EBK]$ und $[CDK] = [CEK] + [EDK]$ nach Satz 131, da E auf den Geraden $\ell(A, B)$ und $\ell(C, D)$ liegt. Durch Addition der beiden Gleichungen folgt

$$[ABK] + [CDK] = [EKA] + [KEB] + [KED] + [EKC]$$

Ebenso gilt $[BCK] = [BFK] + [FCK]$ und $[DAK] = [DFK] + [FAK]$ nach Satz 131, da F auf den Geraden $\ell(A, D)$ und $\ell(B, C)$ liegt. Wie oben ergibt sich

$$[BCK] + [DAK] = [FKB] + [KFC] + [KFA] + [FKD]$$

Nun gilt $[EKA] = [KFA]$, $[KEB] = [FKB]$, $[EKC] = [KFC]$ und $[KED] = [FKD]$ wegen Satz 130, da K der Mittelpunkt der Strecke \overline{EF} ist und somit die Gleichungen $EK = KF$ und $KE = FK$ bestehen. Es folgt $[ABK] + [CDK] = [BCK] + [DAK]$. Somit liegt K in der Menge \mathcal{L} , die in Satz 140 definiert wurde. Da diese Menge die Gerade $\ell(M, N)$ durch die Mittelpunkte der Strecken \overline{AC} und \overline{BD} ist, sind wir fertig. \square

4. Die Erdős-Mordell-Ungleichung

Wir nennen eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ linear, wenn reelle Zahlen k_1, k_2 und d existieren, sodass $f(x_1, x_2) = k_1x_1 + k_2x_2 + d$ für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt. Wie man leicht nachrechnet, gilt dann $f(\lambda(x_1, x_2) + (1 - \lambda)(y_1, y_2)) = \lambda f(x_1, x_2) + (1 - \lambda)f(y_1, y_2)$ für alle (x_1, x_2) und (y_1, y_2) in \mathbb{R}^2 und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Ebene, in der das Dreieck liegt, identifizieren wir mit dem \mathbb{R}^2 . Wir verwenden dann auch eine entsprechende Schreibweise. Die lineare Funktion f ordnet jedem Punkt der Ebene eine reelle Zahl zu. Es gilt $f(\lambda P + (1 - \lambda)Q) = \lambda f(P) + (1 - \lambda)f(Q)$ für alle Punkte P und Q und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Hilfssatz: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und f eine lineare Funktion. Ist m eine reelle Zahl, sodass $f(A), f(B)$ und $f(C)$ größer oder gleich m sind, dann gilt $f(P) \geq m$ für alle Punkte P des Dreiecks $\triangle ABC$.

Beweis: Sei zuerst Q ein Punkt auf der Seite \overline{AB} . Es existiert dann ein $\lambda \in [0, 1]$ mit $Q = \lambda A + (1 - \lambda)B$. Es folgt $f(Q) = \lambda f(A) + (1 - \lambda)f(B) \geq \lambda m + (1 - \lambda)m = m$, da f linear ist.

Sei jetzt P ein beliebiger Punkt des Dreiecks $\triangle ABC$. Dann hat die Gerade $\ell(C, P)$ einen Schnittpunkt Q mit der Seite \overline{AB} . Da P auf der Strecke \overline{CQ} liegt, existiert ein $\mu \in [0, 1]$ mit $P = \mu C + (1 - \mu)Q$. Es folgt $f(P) = \mu f(C) + (1 - \mu)f(Q) \geq \mu m + (1 - \mu)m = m$, da f linear ist. \square

Der folgende Satz wurde in “Dao, Nguyen Tien Dung, Pham: *A strengthened version of the Erdos-Mordell inequality*, Forum Geometricorum 16, 2016, 317–321” bewiesen.

Satz 143: Sei P ein Punkt im Dreieck $\triangle ABC$. Seien D, E und F die Fußpunkte der Lote von P auf die Geraden $\ell(B, C), \ell(A, C)$ und $\ell(A, B)$. Seien H, K und L die Fußpunkte der Lote von P auf die Tangenten des Umkreises in den Punkten A, B und C . Dann gilt

$$|PH| + |PK| + |PL| \geq 2|PD| + 2|PE| + 2|PF|$$

Beweis: Seien $d_a(P), d_b(P)$ und $d_c(P)$ wie in Satz 134 definiert. Wir setzen $P = (x_1, x_2)$. Im Beweis dieses Satzes wurde gezeigt, dass Konstanten $p_a, q_a, r_a, p_b, q_b, r_b, p_c, q_c$ und r_c existieren, für die $d_a(P) = p_ax_1 + q_ax_2 - r_a, d_b(P) = p_bx_1 + q_bx_2 - r_b$ und $d_c(P) = p_cx_1 + q_cx_2 - r_c$ gilt. Somit sind $d_a(P), d_b(P)$ und $d_c(P)$ lineare Funktionen, die jedem Punkt P der Ebene eine reelle Zahl zuordnen.

Mit u, v und w bezeichnen wir die Seiten des Dreiecks, das von den Tangenten des Umkreises in den Punkten A, B und C gebildet wird, und mit $d_u(P), d_v(P)$ und $d_w(P)$ die orientierten Abstände des Punktes P von diesen Seiten. Wir können obiges Resultat auch auf das von den Tangenten gebildete Dreieck anwenden und erhalten, dass $d_u(P), d_v(P)$ und $d_w(P)$ ebenfalls lineare Funktionen sind, die jedem Punkt P der Ebene eine reelle Zahl zuordnen.

Sei $f(P) = d_u(P) + d_v(P) + d_w(P) - 2d_a(P) - 2d_b(P) - 2d_c(P)$. Dann ist f ebenfalls eine lineare Funktion, wie man leicht nachrechnet. Nun gilt $d_u(P) = |PH|, d_v(P) = |PK|, d_w(P) = |PL|, d_a(P) = |PD|, d_b(P) = |PE|$ und $d_c(P) = |PF|$, da P im Dreieck $\triangle ABC$ und somit auch im Tangentendreieck liegt und daher alle vorkommenden orientierten Abstände größer oder gleich null sind. Es genügt also, $f(P) \geq 0$ für alle Punkte P des Dreiecks $\triangle ABC$ zu zeigen. Wegen des Hilfssatzes müssen wir nur $f(A) \geq 0, f(B) \geq 0$ und $f(C) \geq 0$ zeigen. Dazu verwenden wir Trigonometrie und die Standardbezeichnungen, die für ein Dreieck üblich sind. Auch der Tangentenwinkelsatz kommt zum Einsatz.

Wir zeigen $f(A) \geq 0$. Es gilt $d_b(A) = d_c(A) = 0$, da A auf den Seiten \overline{AC} und \overline{AB} liegt. Weiters gilt $d_a(A) = c \sin \beta$. Wegen $\sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta$ gilt das auch, wenn β stumpf ist. Aus dem Sinussatz folgt $d_a(A) = 2r \sin \gamma \sin \beta$, wobei r der Umkreisradius ist. Es gilt $d_u(A) = 0$, da A auf der Tangente des Umkreises im Punkt A liegt. Aus dem Tangentenwinkelsatz folgt, dass \overline{AB} mit der Tangente des Umkreises im Punkt B den Winkel γ bildet. Das ergibt $d_v(A) = c \sin \gamma$. Ebenso bildet \overline{AC} mit der Tangente des Umkreises im Punkt C den Winkel β , woraus $d_w(A) = b \sin \beta$ folgt. Aus dem Sinussatz ergibt sich $d_v(A) = 2r \sin^2 \gamma$ und $d_w(A) = 2r \sin^2 \beta$. Setzt man alles ein, so erhält man

$$f(A) = 2r \sin^2 \gamma + 2r \sin^2 \beta - 4r \sin \gamma \sin \beta = 2r(\sin \gamma - \sin \beta)^2 \geq 0$$

Genauso zeigt man, dass $f(B) \geq 0$ und $f(C) \geq 0$ gilt. \square

Als Folgerung erhalten wir die Erdős-Mordell-Ungleichung.

Satz 144: Sei P ein Punkt in einem Dreieck $\triangle ABC$. Seien D , E und F die Fußpunkte der Lote von P auf die Geraden $\ell(B, C)$, $\ell(A, C)$ und $\ell(A, B)$. Dann gilt

$$|PA| + |PB| + |PC| \geq 2|PD| + 2|PE| + 2|PF|$$

Beweis: Die Bezeichnung sei wie in Satz 143. Da A ein Punkt auf der Tangente des Umkreises im Punkt A ist, erhalten wir $|PA| \geq |PH|$. Ebenso ergibt sich $|PB| \geq |PK|$ und $|PC| \geq |PL|$. Die gesuchte Ungleichung folgt jetzt aus Satz 143. \square

Übung: Die Bezeichnung sei wie in Satz 143. Für beliebige t_1 , t_2 und t_3 in \mathbb{R} gilt dann

$$t_1^2 |PH| + t_2^2 |PK| + t_3^2 |PL| \geq 2t_2 t_3 |PD| + 2t_1 t_3 |PE| + 2t_1 t_2 |PF|$$

Mit $f(P) = t_1^2 d_u(P) + t_2^2 d_v(P) + t_3^2 d_w(P) - 2t_2 t_3 d_a(P) - 2t_1 t_3 d_b(P) - 2t_1 t_2 d_c(P)$ funktioniert der Beweis wie oben.

XI. Homogene Koordinaten und Kegelschnitte

1. Geraden und Kegelschnitte	110
2. Homogene Koordinaten	111
3. Der Satz von Desargues	113
4. Die Sätze von Pascal und Brianchon	115
5. Verhältnisse von Abständen	118

In diesem Kapitel arbeiten wir mit homogenen kartesischen Koordinaten. Wir betreiben keine projektive Geometrie sondern rechnen mit Vektoren, Matrizen und Determinanten.

Der erste Abschnitt dieses Kapitels dient der Vorbereitung. Es wird gezeigt, dass man Gleichungen von Geraden und Kegelschnitten einfach aufschreiben kann, wenn man den Ortsvektoren zu Punkten im \mathbb{R}^2 als dritte Koordinate 1 anfügt. Damit finden wir dann die Tangentengleichung für Kegelschnitte in allgemeiner Lage.

Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels werden homogene Koordinaten und Fernpunkte eingeführt. Dann existiert durch zwei nicht identische Punkte genau eine Gerade und zwei nicht identische Geraden haben genau einen Schnittpunkt (auch wenn sie parallel sind). Damit werden Kegelschnitte behandelt, die Tangentengleichung und eine Berührbedingung.

Im dritten Abschnitt dieses Kapitels wird der Satz von Desargues mit Hilfe homogener Koordinaten behandelt. Dieser Satz wurde bereits in Kapitel III und in Kapitel VII bewiesen, jedoch nur in eine Richtung. Jetzt beweisen wir eine Äquivalenz. Im Beweis wird vor allem mit Determinanten gerechnet.

Im vierten Abschnitt dieses Kapitels werden die Sätze von Pascal und Brianchon bewiesen. Der Satz von Pascal besagt, dass die Eckpunkte eines Sechsecks genau dann auf einem Kegelschnitt liegen, wenn die drei Schnittpunkte der Verlängerungen einander gegenüberliegender Sechseckseiten auf einer Gerade liegen. Der Satz von Brianchon besagt, dass die Seiten eines Sechsecks genau dann Tangenten eines Kegelschnitts sind, wenn die drei Verbindungsgeraden von einander gegenüberliegenden Eckpunkten des Sechsecks durch einen gemeinsamen Punkt gehen.

Im fünften Abschnitt arbeiten wir mit Verhältnissen von orientierten Abständen. Wir wechseln dazu zwischen homogenen und kartesischen Koordinaten hin und her. Wir beweisen die Sätze von Menelaos und Ceva und eine Ergänzung zum Satz von Pascal.

1. Geraden und Kegelschnitte

Wir versuchen die Gleichungen von Geraden und Kegelschnitten möglichst einfach aufzuschreiben. Wir stellen Punkte durch ihre Ortsvektoren dar.

Die Gleichung einer Geraden ist $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3 = 0$. Zu einem Vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ definieren wir den erweiterten Vektor $\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Mit Hilfe von $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ lässt sich dann die Geradengleichung schreiben als $\langle \mathbf{a}, \hat{\mathbf{x}} \rangle = 0$ oder als $\mathbf{a}^t \hat{\mathbf{x}} = 0$.

Die Gleichung eines Kegelschnitts ist $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + 2a_3x_1x_2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + c = 0$. Wir führen die Matrix $C = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & b_1 \\ a_3 & a_2 & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}$ ein. Dann lässt sich die Kegelschnittgleichung schreiben als $\hat{\mathbf{x}}^t C \hat{\mathbf{x}} = 0$.

Die Hauptachsentransformation bringt einen Kegelschnitt $\hat{\mathbf{x}}^t C \hat{\mathbf{x}} = 0$ in Hauptlage. Er hat dann die Gleichung $\hat{\mathbf{x}}^t D \hat{\mathbf{x}} = 0$, wobei für D folgende Matrizen auftreten können

$$\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & e \\ d & e & c \end{pmatrix}$$

Die erste Matrix ergibt eine Ellipse, wenn p und q positiv sind, und eine Hyperbel, wenn sie verschiedenes Vorzeichen haben. (Sind beide negativ, dann gibt es keinen Punkt, der die Kegelschnittgleichung erfüllt.) Die zweite Matrix stellt eine Parabel dar. Das sind die echten Kegelschnitte. Die anderen drei Matrizen ergeben unechte Kegelschnitte. Das kann ein Punkt sein, ein Paar einander schneidender Geraden, ein Paar paralleler Geraden oder eine einzelne Gerade.

Man prüft leicht nach, dass bei einem echten Kegelschnitt die Matrix D eine Inverse D^{-1} besitzt, bei einem unechten Kegelschnitt hat D jedoch keine Inverse.

Ein beliebiger Kegelschnitt $\hat{\mathbf{x}}^t C \hat{\mathbf{x}} = 0$ kann durch eine Rotation $\mathbf{x} \mapsto R_\alpha \mathbf{x}$ mit Matrix $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ und eine anschließende Translation $T_{\mathbf{d}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{d}$ in Hauptlage gebracht werden. Wir schreiben diese Abbildungen mit Hilfe der erweiterten Vektoren. Sei $\hat{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\hat{T}_{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $\hat{R}_\alpha \hat{\mathbf{x}}$ der um die Koordinate 1 erweiterte Vektor $R_\alpha \mathbf{x}$ und $\hat{T}_{\mathbf{d}} \hat{\mathbf{x}}$ der um die Koordinate 1 erweiterte Vektor $\mathbf{x} + \mathbf{d}$. Die Matrizen \hat{R}_α und $\hat{T}_{\mathbf{d}}$ stellen somit die Rotation und die Translation für erweiterte Vektoren dar.

Sei $L_{\alpha, \mathbf{d}} = \hat{T}_{\mathbf{d}} \hat{R}_\alpha$, die Hintereinanderausführung einer Rotation und einer Translation, die den Kegelschnitt in Hauptlage bringt. Umgekehrt sei $K_{\alpha, \mathbf{d}} = \hat{R}_\alpha \hat{T}_{\mathbf{d}}$. Man berechnet

$$L_{\alpha, \mathbf{d}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & d_1 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & d_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad K_{\alpha, \mathbf{d}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & d_1 \cos \alpha - d_2 \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha & d_1 \sin \alpha + d_2 \cos \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Insbesondere ist $K_{-\alpha, -\mathbf{d}}$ die Inverse zu $L_{\alpha, \mathbf{d}}$, was man auch leicht nachrechnen kann.

Sei $\hat{\mathbf{x}}^t C \hat{\mathbf{x}} = 0$ ein Kegelschnitt. Sei $L = L_{\alpha, \mathbf{d}}$ die Matrix, die diesen Kegelschnitt in Hauptlage $\hat{\mathbf{x}}^t D \hat{\mathbf{x}} = 0$ bringt, das heißt $\hat{\mathbf{x}}$ erfüllt die Gleichung $\hat{\mathbf{x}}^t C \hat{\mathbf{x}} = 0$ genau dann, wenn $L \hat{\mathbf{x}}$ die Gleichung $\hat{\mathbf{x}}^t D \hat{\mathbf{x}} = 0$ erfüllt. Somit muss $C = L^t D L$ gelten. Damit erhalten wir

Satz 145: Sei $\hat{\mathbf{x}}^t C \hat{\mathbf{x}} = 0$ die Gleichung eines Kegelschnitts. Der Kegelschnitt ist genau dann echt, wenn die Matrix C invertierbar ist.

Beweis: Sei L die Matrix, die den Kegelschnitt in Hauptlage $\hat{\mathbf{x}}^t D \hat{\mathbf{x}} = 0$ bringt. Es gilt $C = L^t D L$. Wie wir bereits durch Untersuchung der einzelnen Fälle gesehen haben, ist der Kegelschnitt genau dann echt, wenn die Matrix D invertierbar ist.

Nun hat L eine Inverse K . Es gilt $LK = KL = I_3$ und daher auch $K^t L^t = L^t K^t = I_3$. Daraus folgt dann $K^t C K = D$. Ist D invertierbar, dann auch C , da $K D^{-1} K^t$ die inverse Matrix zu C ist. Ist C invertierbar, dann auch D , da $L C^{-1} L^t$ die inverse Matrix zu D ist. Somit ist C genau dann invertierbar, wenn D invertierbar ist. Das beweist den Satz. \square

Wir schauen uns noch die Tangentengleichung an. Tangenten kann man sinnvollerweise nur für echte Kegelschnitte definieren. Sei $\hat{\mathbf{x}}^t D \hat{\mathbf{x}} = 0$ ein echter Kegelschnitt in Hauptlage. Sei \mathbf{q} ein Punkt auf dem Kegelschnitt, es gilt $\hat{\mathbf{q}}^t D \hat{\mathbf{q}} = 0$. In allen drei Fällen, für Ellipse, Hyperbel und Parabel in Hauptlage, lässt sich die Gleichung der Tangente im Punkt \mathbf{q} schreiben als $\hat{\mathbf{q}}^t D \hat{\mathbf{x}} = 0$. Das lässt sich leicht nachprüfen. Der nächste Satz zeigt, dass das auch gilt, wenn der Kegelschnitt nicht in Hauptlage liegt.

Satz 146: Sei \mathbf{p} ein Punkt auf dem Kegelschnitt mit der Gleichung $\hat{\mathbf{x}}^t C \hat{\mathbf{x}} = 0$. Die Gleichung der Tangente im Punkt \mathbf{p} an den Kegelschnitt ist dann $\hat{\mathbf{p}}^t C \hat{\mathbf{x}} = 0$.

Beweis: Sei L die Matrix, die den Kegelschnitt in Hauptlage $\hat{\mathbf{x}}^t D \hat{\mathbf{x}} = 0$ bringt. Es gilt dann $C = L^t D L$. Sei $\hat{\mathbf{q}} = L \hat{\mathbf{p}}$. Wegen $\hat{\mathbf{p}}^t C \hat{\mathbf{p}} = 0$ folgt $\hat{\mathbf{q}}^t D \hat{\mathbf{q}} = 0$. Somit ist \mathbf{q} ein Punkt auf dem Kegelschnitt in Hauptlage. Die Gleichung der Tangente in diesem Punkt ist $\hat{\mathbf{q}}^t D \hat{\mathbf{x}} = 0$. Wegen $\hat{\mathbf{q}}^t = \hat{\mathbf{p}}^t L^t$ kann man diese Gleichung auch schreiben als $\hat{\mathbf{p}}^t L^t D \hat{\mathbf{x}} = 0$. Wir müssen diese Tangentengleichung zurücktransformieren. Sei K die Inverse zur Matrix L . Ist $\hat{\mathbf{x}}$ der erweiterte Vektor eines Punktes in ursprünglicher Lage, dann ist $L \hat{\mathbf{x}}$ der erweiterte Vektor des entsprechenden Punktes in Hauptlage. In der Gleichung in Hauptlage (sowohl für den Kegelschnitt als auch für die Tangente) müssen wir $\hat{\mathbf{x}}$ durch $L \hat{\mathbf{x}}$ ersetzen, um in die ursprüngliche Lage zurückzukehren. Die Tangentengleichung in ursprünglicher Lage ist daher $\hat{\mathbf{p}}^t L^t D L \hat{\mathbf{x}} = 0$. Wegen $C = L^t D L$ erhalten wir somit $\hat{\mathbf{p}}^t C \hat{\mathbf{x}} = 0$ als Gleichung der Tangente im Punkt \mathbf{p} . \square

2. Homogene Koordinaten

Punkte (x_1, x_2) der Ebene haben wir durch erweiterte Vektoren $\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit 1 als dritter Koordinate dargestellt. Dadurch lassen sich Geraden- und Kegelschnittgleichungen einfach als $\mathbf{a}^t \hat{\mathbf{x}} = 0$ und $\hat{\mathbf{x}}^t C \hat{\mathbf{x}} = 0$ schreiben. Allerdings können wir \mathbf{x} genausogut durch $\lambda \hat{\mathbf{x}}$ mit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ darstellen. Es gilt ja dann auch $\mathbf{a}^t (\lambda \hat{\mathbf{x}}) = 0$ und $(\lambda \hat{\mathbf{x}})^t C (\lambda \hat{\mathbf{x}}) = 0$.

Sei $\mathbb{P} = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Wir fassen \mathbb{P} als die Menge aller Punkte der Ebene auf. Sind \mathbf{u} und \mathbf{v} in \mathbb{P} , dann stellen sie jedoch denselben Punkt dar, wenn $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$ für ein $\lambda \neq 0$ gilt. Das ist genauso wie bei Brüchen. Der Wert des Bruches ändert sich nicht, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl $\neq 0$ multipliziert.

Sei $\mathbf{u} \in \mathbb{P}$. Ist $u_3 \neq 0$, dann stellt \mathbf{u} den Punkt $(\frac{u_1}{u_3}, \frac{u_2}{u_3})$ dar. Das sind die eigentlichen Punkte. Wir lassen jedoch auch Punkte $\mathbf{u} \in \mathbb{P}$ mit $u_3 = 0$ zu. Diese Punkte heißen Fernpunkte. Der Vektor $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$ entspricht dem Punkt $(\frac{u_1}{\varepsilon}, \frac{u_2}{\varepsilon})$. Für $\varepsilon \rightarrow 0$ wandert er die Gerade $\{t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\}$ entlang nach Unendlich, in die eine oder die andere Richtung, je nachdem, welches Vorzeichen ε hat. Wir können uns den Fernpunkt $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ so vorstellen, dass er die Gerade $\{t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\}$ zu einer durchgehenden Kurve schließt. Wir können die Gerade hinauswandern, durch den Fernpunkt hindurchgehen, und dann die Gerade von der anderen Seite wieder hereinwandern.

Ähnliches gilt für Geraden. Die Gerade $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 = 0$ stellen wir durch den Vektor \mathbf{a} der Koeffizienten dar. Auch hier gilt, dass durch $\lambda \mathbf{a}$ mit $\lambda \neq 0$ dieselbe Gerade

dargestellt wird. Sei $\mathbb{G} = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Das ist dieselbe Menge wie \mathbb{P} , wir fassen jedoch \mathbb{G} als die Menge aller Geraden der Ebene auf. Sind \mathbf{a} und \mathbf{b} in \mathbb{G} , dann stellen sie dieselbe Gerade dar, wenn $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$ für ein $\lambda \neq 0$ gilt.

Ein Punkt $\mathbf{u} \in \mathbb{P}$ liegt auf einer Geraden $\mathbf{a} \in \mathbb{G}$, wenn $a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 0$ gilt. Das kann man auch als $\mathbf{a}^t \mathbf{u} = 0$ schreiben. Die zu \mathbf{a} gehörige Geradengleichung in der Variable \mathbf{x} ist dann $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ oder $\mathbf{a}^t \mathbf{x} = 0$. Ein Punkt $\mathbf{u} \in \mathbb{P}$ liegt genau dann auf der Gerade, wenn er die Geradengleichung erfüllt.

Es sei noch auf $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{G}$ hingewiesen. Dieser Vektor stellt auch eine Gerade dar. Ein Punkt \mathbf{u} liegt genau dann auf dieser Gerade, wenn $u_3 = 0$ gilt. Somit liegen genau die Fernpunkte auf dieser Gerade. Man nennt sie daher Ferngerade.

Satz 147: *Seien \mathbf{u} und \mathbf{v} in \mathbb{P} . Wenn \mathbf{u} und \mathbf{v} nicht denselben Punkt darstellen, dann existiert genau eine Gerade durch diese zwei Punkte.*

Beweis: Ist $\mathbf{a} \in \mathbb{G}$ eine Gerade durch die zwei Punkte, dann muss gelten

$$\begin{aligned} a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 &= 0 \\ a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 &= 0 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist nach den Variablen a_1 , a_2 und a_3 aufzulösen. Führt man das Eliminationsverfahren durch, dann verschwindet die zweite Gleichung nicht, da $\mathbf{u} \neq \lambda \mathbf{v}$ für alle λ gilt. Es ergibt sich eine einparametrische Lösungsmenge. Da $\mathbf{0}$ eine Lösung ist, existiert ein $\mathbf{b} \in \mathbb{G}$, sodass $\{\lambda \mathbf{b} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ die Lösungsmenge ist. Die Gerade \mathbf{b} ist die einzige, die durch \mathbf{u} und \mathbf{v} geht (durch $\lambda \mathbf{b}$ mit $\lambda \neq 0$ wird ja dieselbe Gerade dargestellt). \square

Der folgende Satz hat denselben Beweis wie der vorhergehende. Er wird aber anders interpretiert. Punkte und Geraden tauschen ihre Rollen. Solche Sätze nennt man dual.

Satz 148: *Seien \mathbf{a} und \mathbf{b} in \mathbb{G} . Wenn \mathbf{a} und \mathbf{b} nicht dieselbe Gerade darstellen, dann existiert genau ein Punkt, der auf beiden Geraden liegt.*

Beweis: Ist $\mathbf{u} \in \mathbb{P}$ ein Punkt auf beiden Geraden, dann muss gelten

$$\begin{aligned} a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 &= 0 \\ b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3 &= 0 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist nach den Variablen u_1 , u_2 und u_3 zu lösen. Führt man das Eliminationsverfahren durch, dann verschwindet die zweite Gleichung nicht, da $\mathbf{a} \neq \lambda \mathbf{b}$ für alle λ gilt. Es ergibt sich eine einparametrische Lösungsmenge. Da $\mathbf{0}$ eine Lösung ist, existiert ein $\mathbf{v} \in \mathbb{P}$, sodass $\{\lambda \mathbf{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ die Lösungsmenge ist. Der Punkt \mathbf{v} ist der einzige, der auf \mathbf{a} und \mathbf{b} liegt (durch $\lambda \mathbf{v}$ mit $\lambda \neq 0$ wird ja derselbe Punkt dargestellt). \square

Bemerkung: Bemerkenswert ist, dass auch zwei zueinander parallele Geraden einen Schnittpunkt haben. In diesem Fall sind $a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 0$ und $a_1 u_1 + a_2 u_2 + b_3 u_3 = 0$ mit $a_3 \neq b_3$ die Gleichungen. Beide haben denselben Normalvektor $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. Die Lösung ist $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und alle Vielfachen davon. Der Schnittpunkt ist der Fernpunkt, den beide Geraden gemeinsam haben.

Jetzt kommen wir zu den Kegelschnitten. Ein Kegelschnitt ist durch eine symmetrische 3×3 -Matrix C bestimmt, das heißt es gilt $C^t = C$. Die Gleichung des Kegelschnitts in der Variable \mathbf{x} ist $\mathbf{x}^t C \mathbf{x} = 0$. Ein Punkt $\mathbf{u} \in \mathbb{P}$ liegt genau dann auf dem Kegelschnitt, wenn $\mathbf{u}^t C \mathbf{u} = 0$ gilt, wobei die Gleichung bestehen bleibt, wenn wir den Punkt durch eine

andere Darstellung ersetzen. Ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, dann ist zu beachten, dass es zwei Fernpunkte gibt, die auf der Hyperbel liegen. Es sind die Fernpunkte der beiden Asymptoten. Ist der Kegelschnitt eine Parabel, dann gibt es einen solchen Fernpunkt. Es ist der Fernpunkt der Parabelachse.

Sind die Eintragungen der Matrix C so wie zu Beginn des ersten Abschnitts, dann gilt $\mathbf{x}^t C \mathbf{x} = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + 2a_3 x_1 x_2 + 2b_1 x_1 x_3 + 2b_2 x_2 x_3 + c x_3^2$. Den auf der rechten Seite stehenden Ausdruck nennt man eine quadratische Form in den Variablen x_1, x_2, x_3 .

Analog lässt sich die Gleichung einer Tangente in einem Punkt \mathbf{u} an den Kegelschnitt übertragen. Man bildet einfach den Vektor $C\mathbf{u}$. Da die Matrix C eines echten Kegelschnitts eine Inverse besitzt, liegt $C\mathbf{u}$ in \mathbb{G} . Diese Gerade $C\mathbf{u}$ ist dann die Tangente im Punkt \mathbf{u} , da ja $(C\mathbf{u})^t \hat{\mathbf{x}} = 0$ die in Satz 146 gefundene Tangentengleichung ist.

Wir geben noch eine Bedingung dafür, dass eine Gerade Tangente an einen Kegelschnitt ist. Diese Bedingung nennen wir Berührbedingung.

Satz 149: Sei $\mathbf{a} \in \mathbb{G}$ und C die Matrix eines echten Kegelschnitts. Die Gerade \mathbf{a} ist genau dann Tangente an den Kegelschnitt, wenn $\mathbf{a}^t C^{-1} \mathbf{a} = 0$ gilt. Da der Kegelschnitt echt ist, existiert die inverse Matrix C^{-1} .

Beweis: Die Gerade \mathbf{a} sei eine Tangente. Dann existiert ein Punkt \mathbf{u} auf dem Kegelschnitt, das heißt $\mathbf{u}^t C \mathbf{u} = 0$, sodass $\mathbf{a} = C\mathbf{u}$ gilt. Es folgt $\mathbf{a}^t = \mathbf{u}^t C^t = \mathbf{u}^t C$ und $\mathbf{u} = C^{-1} \mathbf{a}$. Setzt man das in die Gleichung $\mathbf{u}^t C \mathbf{u} = 0$ ein, so hat man $\mathbf{a}^t C^{-1} \mathbf{a} = 0$.

Sei $\mathbf{a}^t C^{-1} \mathbf{a} = 0$. Wir setzen $\mathbf{u} = C^{-1} \mathbf{a}$. Es folgt $\mathbf{a} = C\mathbf{u}$ und $\mathbf{a}^t = \mathbf{u}^t C^t = \mathbf{u}^t C$. Setzt man das in die Gleichung $\mathbf{a}^t C^{-1} \mathbf{a} = 0$ ein, so hat man $\mathbf{u}^t C \mathbf{u} = 0$. Somit ist \mathbf{u} ein Punkt auf dem Kegelschnitt. Da auch $\mathbf{a} = C\mathbf{u}$ gilt, ist \mathbf{a} die Tangente im Punkt \mathbf{u} . \square

Bemerkung: Damit Satz 149 richtig ist, muss man bei der Hyperbel auch die beiden Asymptoten als Tangenten auffassen. Jede der beiden Asymptoten hat einen Fernpunkt. Diese beiden Fernpunkte liegen auch auf der Hyperbel und die Asymptoten sind die Tangenten in diesen Punkten.

Auch bei der Parabel hat man dieses Problem. Der Fernpunkt der Parabelachse liegt auf der Parabel. Die Tangente in diesem Fernpunkt ist die Ferngerade.

3. Der Satz von Desargues

Sind \mathbf{u}, \mathbf{v} und \mathbf{w} Vektoren im \mathbb{R}^3 , dann bezeichnen wir mit $|\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}|$ die Determinante mit den Spalten \mathbf{u}, \mathbf{v} und \mathbf{w} .

Satz 150: Seien \mathbf{u}, \mathbf{v} und \mathbf{w} in \mathbb{P} . Die drei Punkte \mathbf{u}, \mathbf{v} und \mathbf{w} liegen genau dann auf einer Geraden, wenn $|\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}| = 0$ gilt.

Beweis: Die drei Punkte \mathbf{u}, \mathbf{v} und \mathbf{w} liegen genau dann auf einer Geraden, wenn

$$\mathbf{a}^t \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{a}^t \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{a}^t \mathbf{w} = 0$$

für ein $\mathbf{a} \in \mathbb{G}$ gilt. Ein homogenes lineares Gleichungssystem mit drei Variablen und drei Gleichungen hat genau dann eine Lösung $\neq \mathbf{0}$, wenn die Determinante gleich Null ist.

Daher liegen \mathbf{u}, \mathbf{v} und \mathbf{w} genau dann auf einer Geraden, wenn $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$ gilt. Wegen

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \text{ ist das äquivalent zu } \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0. \quad \square$$

Wir beweisen auch gleich den dazu dualen Satz, auch wenn wir ihn erst später brauchen. Der Beweis ist derselbe, er ist nur anders zu interpretieren.

Satz 151: Seien \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} in \mathbb{G} . Die drei Geraden \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} gehen genau dann durch einen Punkt, wenn $|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}| = 0$ gilt.

Beweis: Die drei Geraden \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} gehen genau dann durch einen Punkt, wenn

$$\mathbf{a}^t \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{b}^t \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{c}^t \mathbf{u} = 0$$

für ein $\mathbf{u} \in \mathbb{P}$ gilt. Wie im letzten Beweis folgt, dass das genau dann der Fall ist, wenn $|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}| = 0$ gilt. \square

Seien \mathbf{p} und \mathbf{q} in \mathbb{P} . Wir nehmen an, dass sie verschiedene Punkte darstellen. Dann bezeichnen wir die Gerade durch \mathbf{p} und \mathbf{q} mit $\ell(\mathbf{p}, \mathbf{q})$.

Hilfssatz A: Durch $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathbb{P}$ seien vier Punkte gegeben, die nicht alle auf einer Geraden liegen. Die Punkte \mathbf{p} und \mathbf{q} seien verschieden, ebenso die Punkte \mathbf{r} und \mathbf{s} . Weiters sei $\mathbf{u} = |\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}| \cdot \mathbf{s} - |\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{s}| \cdot \mathbf{r}$. Dann ist \mathbf{u} der Schnittpunkt der beiden Geraden $\ell(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ und $\ell(\mathbf{r}, \mathbf{s})$.

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass \mathbf{u} in \mathbb{P} liegt. Es kann nicht $|\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}| = 0$ und $|\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{s}| = 0$ gelten, sonst würden entweder \mathbf{p} und \mathbf{q} denselben Punkt darstellen oder die vier Punkte $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ und \mathbf{s} würden nach Satz 150 auf einer Geraden liegen. Da auch \mathbf{r} und \mathbf{s} in \mathbb{P} liegen und nicht denselben Punkt darstellen, kann $|\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}| \cdot \mathbf{s} = |\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{s}| \cdot \mathbf{r}$ nicht gelten. Somit ist \mathbf{u} nicht der Nullvektor, das heißt \mathbf{u} liegt in \mathbb{P} .

Es gilt $|\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{u}| = |\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}| \cdot |\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{s}| - |\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{s}| \cdot |\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}| = 0$, da die Determinante linear in den Spalten ist. Nach Satz 150 liegt \mathbf{u} auf der Gerade $\ell(\mathbf{p}, \mathbf{q})$.

Es gilt auch $|\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{u}| = |\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}| \cdot |\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{s}| - |\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{s}| \cdot |\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{r}| = 0$, da eine Determinante mit zwei gleichen Spalten gleich 0 ist. Nach Satz 150 liegt \mathbf{u} auf der Gerade $\ell(\mathbf{r}, \mathbf{s})$.

Damit ist gezeigt, dass \mathbf{u} der Schnittpunkt der Geraden $\ell(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ und $\ell(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ ist. \square

Übung: Man zeige, dass $|\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{a}, \mathbf{e}, \mathbf{c}| - |\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{e}| \cdot |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}| + |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}| \cdot |\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{c}| = 0$ für beliebige Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ und \mathbf{e} im \mathbb{R}^3 gilt.

Hinweis: Da die vier Vektoren $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ und \mathbf{e} im \mathbb{R}^3 liegen, muss einer von ihnen eine Linearkombination der anderen sein. Wir nehmen an, dass das für \mathbf{e} zutrifft, das heißt es gilt $\mathbf{e} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}$ mit λ_1, λ_2 und λ_3 in \mathbb{R} . Wir setzen das ein und wenden die Rechenregeln für Determinanten an.

Satz 152 (Desargues) Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}$ und \mathbf{f} in \mathbb{P} gegeben, sodass weder die drei Punkte \mathbf{a}, \mathbf{b} und \mathbf{c} noch die drei Punkte \mathbf{d}, \mathbf{e} und \mathbf{f} auf einer Geraden liegen. Weiters nehmen wir an, dass weder die vier Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}$ und \mathbf{e} , noch die vier Punkte $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}$ und \mathbf{f} , noch die vier Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ und \mathbf{f} auf einer Geraden liegen. Sei \mathbf{u} der Schnittpunkt der Geraden $\ell(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ und $\ell(\mathbf{d}, \mathbf{e})$. Sei \mathbf{v} der Schnittpunkt der Geraden $\ell(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ und $\ell(\mathbf{e}, \mathbf{f})$. Sei \mathbf{w} der Schnittpunkt der Geraden $\ell(\mathbf{c}, \mathbf{a})$ und $\ell(\mathbf{f}, \mathbf{d})$. Dann sind äquivalent

- (1) Es existiert ein Punkt $\mathbf{s} \in \mathbb{P}$, sodass die Punkte \mathbf{s}, \mathbf{a} und \mathbf{d} , die Punkte \mathbf{s}, \mathbf{b} und \mathbf{e} und die Punkte \mathbf{s}, \mathbf{c} und \mathbf{f} jeweils auf einer Geraden liegen.
- (2) Die Punkte \mathbf{u}, \mathbf{v} und \mathbf{w} liegen auf einer Geraden.

Beweis: Für \mathbf{p} und \mathbf{q} in \mathbb{P} schreiben wir $\mathbf{p} \sim \mathbf{q}$, wenn \mathbf{p} und \mathbf{q} den selben Punkt darstellen, das heißt, wenn $\mathbf{p} = \lambda \mathbf{q}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. Sonst schreiben wir $\mathbf{p} \not\sim \mathbf{q}$.

Sollte $\mathbf{a} \sim \mathbf{d}$ oder $\mathbf{b} \sim \mathbf{e}$ oder $\mathbf{c} \sim \mathbf{f}$ gelten, dann nehmen wir an, dass $\mathbf{c} \sim \mathbf{f}$ gilt. Ansonsten ändern wir die Bezeichnung. Es folgt $\mathbf{a} \not\sim \mathbf{d}$ und $\mathbf{b} \not\sim \mathbf{e}$, sonst würden die Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ und \mathbf{f} beziehungsweise die Punkte $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}$ und \mathbf{f} auf einer Geraden liegen, im Widerspruch zu einer der Voraussetzungen.

Da die Punkte \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} nicht auf einer Gerade liegen, gilt $|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}| \neq 0$ nach Satz 150. Es existieren reelle Zahlen α , β und γ , sodass $\mathbf{f} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ gilt.

Da $\mathbf{a} \not\sim \mathbf{d}$ und $\mathbf{b} \not\sim \mathbf{e}$ gilt und die Punkte \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{d} und \mathbf{e} nicht auf einer Gerade liegen, ist $\mathbf{s} = |\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{b}| \cdot \mathbf{e} - |\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{e}| \cdot \mathbf{b}$ nach Hilfssatz A der Schnittpunkt von $\ell(\mathbf{a}, \mathbf{d})$ und $\ell(\mathbf{b}, \mathbf{e})$. Genau dann gilt (1), wenn die Punkte \mathbf{s} , \mathbf{c} und \mathbf{f} auf einer Gerade liegen, das heißt, wenn $|\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{f}| = 0$ gilt. Wir setzen ein und erhalten $||\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{b}| \cdot \mathbf{e} - |\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{e}| \cdot \mathbf{b}, \mathbf{c}, \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}| = 0$. Mit Hilfe der Rechenregeln für Determinanten ergibt sich

$$\alpha \cdot |\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{c}, \mathbf{a}| - \alpha \cdot |\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{e}| \cdot |\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}| + \beta \cdot |\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{c}, \mathbf{b}| = 0.$$

Aus obiger Übung erhalten wir $|\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{c}, \mathbf{a}| - |\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{e}| \cdot |\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}| = -|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{d}|$. Somit ist (1) genau dann erfüllt, wenn $\alpha \cdot |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{d}| = \beta \cdot |\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{c}, \mathbf{b}|$ gilt.

Aus den Voraussetzungen folgt $\mathbf{a} \not\sim \mathbf{b}$ und $\mathbf{d} \not\sim \mathbf{e}$. Weiters liegen die Punkte \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{d} und \mathbf{e} nicht auf einer Gerade. Daher folgt $\mathbf{u} = |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}| \cdot \mathbf{e} - |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}| \cdot \mathbf{d}$ aus Hilfssatz A. Ebenso erhalten wir $\mathbf{v} = |\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}| \cdot \mathbf{f} - |\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{f}| \cdot \mathbf{e}$ und $\mathbf{w} = |\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{f}| \cdot \mathbf{d} - |\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{d}| \cdot \mathbf{f}$. Wegen Satz 150 ist (2) genau dann erfüllt ist, wenn $|\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}| = 0$ gilt. Wir setzen für \mathbf{u} , \mathbf{v} und \mathbf{w} ein

$$||\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}| \cdot \mathbf{e} - |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}| \cdot \mathbf{d}, \quad |\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}| \cdot \mathbf{f} - |\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{f}| \cdot \mathbf{e}, \quad |\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{f}| \cdot \mathbf{d} - |\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{d}| \cdot \mathbf{f}| = 0$$

Da die Determinante in jeder Spalte linear ist, ergibt sich eine Summe mit acht Summanden, von denen jedoch nur zwei ungleich null sind, da alle anderen eine Determinante mit zwei gleichen Spalten als Faktor enthalten und somit null sind. Übrig bleibt nur

$$|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}| \cdot |\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{f}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{d}| - |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}| \cdot |\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{f}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{d}| \cdot |\mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}| = 0$$

Da $|\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{d}| = |\mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}| \neq 0$ aus einer Voraussetzung folgt, können wir kürzen. Es bleibt nur $|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}| \cdot |\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{f}| - |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}| \cdot |\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{f}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{d}| = 0$. Wir setzen $\mathbf{f} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ ein und wenden die Rechenregeln für Determinanten an. Da auch $|\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}| = |\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}| \neq 0$ aus einer Voraussetzung folgt, können wir wieder kürzen. Übrig bleibt nur

$$\beta \cdot |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}| \cdot |\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}| - \alpha \cdot |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{d}| = 0$$

Somit ist (2) genau dann erfüllt, wenn $\alpha \cdot |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{d}| = \beta \cdot |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}| \cdot |\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}|$ gilt. Wegen $|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}| \cdot |\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}| = |\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{c}, \mathbf{b}|$ ist damit die Äquivalenz von (1) und (2) gezeigt. \square

4. Die Sätze von Pascal und Brianchon

Satz 153 (Satz von Pascal) *Seien \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} , \mathbf{e} , $\mathbf{f} \in \mathbb{P}$ verschiedene Punkte, sodass keine vier auf einer Geraden liegen. Sei \mathbf{u} der Schnittpunkt von $\ell(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ und $\ell(\mathbf{d}, \mathbf{e})$. Sei \mathbf{v} der Schnittpunkt von $\ell(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ und $\ell(\mathbf{e}, \mathbf{f})$. Sei \mathbf{w} der Schnittpunkt von $\ell(\mathbf{c}, \mathbf{d})$ und $\ell(\mathbf{f}, \mathbf{a})$. Die drei Punkte \mathbf{u} , \mathbf{v} und \mathbf{w} liegen genau dann auf einer Gerade, wenn die sechs Punkte \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} , \mathbf{e} und \mathbf{f} auf einem Kegelschnitt liegen.*

Beweis: Aus Hilfssatz A folgt $\mathbf{u} = |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}| \cdot \mathbf{e} - |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}| \cdot \mathbf{d}$, $\mathbf{v} = |\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{b}| \cdot \mathbf{c} - |\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{c}| \cdot \mathbf{b}$ und $\mathbf{w} = |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{f}| \cdot \mathbf{a} - |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}| \cdot \mathbf{f}$. Nach Satz 150 liegen die Punkte \mathbf{u} , \mathbf{v} und \mathbf{w} genau dann auf einer Gerade, wenn $|\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}| = 0$ gilt. Setzt man \mathbf{u} , \mathbf{v} und \mathbf{w} ein, so hat man

$$||\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}| \cdot \mathbf{e} - |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}| \cdot \mathbf{d}, \quad |\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{b}| \cdot \mathbf{c} - |\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{c}| \cdot \mathbf{b}, \quad |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{f}| \cdot \mathbf{a} - |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}| \cdot \mathbf{f}| = 0$$

Da die Determinante in jeder Spalte linear ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} & |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{f}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{c}, \mathbf{a}| - |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{c}, \mathbf{f}| \\ & - |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{c}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{f}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{b}, \mathbf{a}| + |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{c}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{b}, \mathbf{f}| \\ & - |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{f}| \cdot |\mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{a}| + |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{f}| \\ & + |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{c}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{f}| \cdot |\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{a}| - |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{c}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{f}| = 0 \end{aligned}$$

Da die Determinante bei Vertauschen zweier Spalten das Vorzeichen ändert, kürzen sich der zweite und der vierte Summand, der dritte und der siebente Summand und der fünfte und der sechste Summand weg. Übrig bleibt nur

$$|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{f}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{c}, \mathbf{a}| - |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{c}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{f}| = 0$$

Wir setzen $\varphi(\mathbf{x}) = |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{x}, \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{x}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{c}, \mathbf{a}| - |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{x}, \mathbf{c}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{x}|$. Dann liegen die Punkte \mathbf{u} , \mathbf{v} und \mathbf{w} genau dann auf einer Geraden, wenn $\varphi(\mathbf{f}) = 0$ gilt.

Eine Determinante, die \mathbf{x} als eine Spalte enthält, ist eine lineare Funktion in x_1 , x_2 und x_3 . Somit ist $\varphi(\mathbf{x})$ eine quadratische Form in den Variablen x_1 , x_2 , x_3 und die Gleichung $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ ist die eines Kegelschnitts.

Die Funktion φ kann nicht identisch null sein. Wir zeigen, dass ein $\mathbf{x} \in \mathbb{P}$ existiert, für das $\varphi(\mathbf{x}) \neq 0$ gilt. Wir schreiben $\varphi(\mathbf{x}) = \alpha \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{x}, \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{x}| - \beta \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{x}, \mathbf{c}| \cdot |\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{x}|$ mit $\alpha = |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{c}, \mathbf{a}|$ und $\beta = |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}|$. Wir zeigen, dass $\alpha = \beta = 0$ nicht gelten kann. Würde es gelten, dann müsste eine der folgenden vier Aussagen erfüllt sein

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}| = |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}| = 0, & \quad |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}| = |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}| = 0, \\ |\mathbf{e}, \mathbf{c}, \mathbf{a}| = |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}| = 0, & \quad |\mathbf{e}, \mathbf{c}, \mathbf{a}| = |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}| = 0 \end{aligned}$$

Wegen Satz 150 würde in jedem der vier Fälle folgen, dass vier der fünf Punkte \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} , \mathbf{e} auf einer Geraden liegen. Dieser Widerspruch zeigt, dass α und β nicht beide null sein können. Wir nehmen an, dass $\alpha \neq 0$ gilt. Der Beweis für $\alpha = 0$ und $\beta \neq 0$ verläuft analog. Ein ähnlicher Beweis wie oben zeigt auch, dass $|\mathbf{e}, \mathbf{d}, \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{b}|$ und $|\mathbf{e}, \mathbf{c}, \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}|$ nicht beide null sein können. Ist $|\mathbf{e}, \mathbf{d}, \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{b}| \neq 0$, dann wählen wir $\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{d}$ und erhalten $\varphi(\mathbf{b} + \mathbf{d}) = \alpha \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{d}, \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{b}| - \beta \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{b} + \mathbf{d}, \mathbf{c}| \cdot |\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{b} + \mathbf{d}| = \alpha \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{d}, \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{b}| \neq 0$. Ist das null, dann muss $|\mathbf{e}, \mathbf{c}, \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}| \neq 0$ gelten. Wir wählen $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \mathbf{e}$ und erhalten $\varphi(\mathbf{c} + \mathbf{e}) = \alpha \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{c}, \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}| - \beta \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{c} + \mathbf{e}, \mathbf{c}| \cdot |\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c} + \mathbf{e}| = \alpha \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{c}, \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}| \neq 0$. In allen Fällen existiert somit ein $\mathbf{x} \in \mathbb{P}$ mit $\varphi(\mathbf{x}) \neq 0$.

Es gilt $\varphi(\mathbf{a}) = |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{a}, \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{c}, \mathbf{a}| - |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{a}, \mathbf{c}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{a}| = 0$, da die Determinante bei Vertauschen zweier Spalten das Vorzeichen ändert. Ebenso gilt $\varphi(\mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{c}) = \varphi(\mathbf{d}) = \varphi(\mathbf{e}) = 0$, da eine Determinante mit zwei gleichen Spalten null ist. Somit ist $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ die Gleichung eines Kegelschnitts, auf dem die fünf Punkte \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} und \mathbf{e} liegen. Die Punkte \mathbf{u} , \mathbf{v} und \mathbf{w} liegen genau dann auf einer Geraden, wenn $\varphi(\mathbf{f}) = 0$ gilt, das heißt, wenn auch der sechste Punkt \mathbf{f} auf diesem Kegelschnitt liegt. \square

Bemerkung: Dieser Beweis zeigt auch, dass durch

$$(*) \quad |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{x}, \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{x}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{c}, \mathbf{a}| - |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{x}, \mathbf{c}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{x}| = 0$$

die Gleichung eines Kegelschnitts gegeben ist, auf dem die fünf Punkte \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} , \mathbf{e} liegen, wenn keine vier dieser Punkte auf einer Geraden liegen.

Liegen von diesen fünf Punkten \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} und \mathbf{e} keine drei auf einer Geraden, dann ist der Kegelschnitt, auf dem sie liegen, ein echter Kegelschnitt. Wäre er unecht, dann bestünde er aus einem Punkt, einer Gerade oder einem Geradenpaar. Der erste Fall ist nicht möglich, da fünf verschiedene Punkte auf dem Kegelschnitt liegen. Die beiden anderen auch nicht, da dann mindestens drei der fünf Punkte auf einer Geraden liegen müssten.

Dieses Resultat kann man mit Hilfe von Satz 150 und Satz 145 auch so formulieren: Zur Kegelschnittgleichung (*) gibt es eine symmetrische Matrix C , sodass diese als $\mathbf{x}^t C \mathbf{x} = 0$ geschrieben werden kann. Aus den fünf Vektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} und \mathbf{e} kann man zehn Determinanten bilden mit je drei dieser Vektoren als Spalten. Sind alle diese Determinanten ungleich Null, dann hat die Matrix C eine inverse Matrix.

Der Satz von Brianchon ist dual zum Satz von Pascal. Für dessen Beweis benötigen wir den zum Hilfssatz A dualen Satz.

Hilfssatz B: *Durch $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathbb{G}$ seien vier Gerade gegeben, die nicht alle durch einen Punkt gehen. Die Geraden \mathbf{p} und \mathbf{q} seien verschieden, ebenso die Geraden \mathbf{r} und \mathbf{s} . Weiters sei $\mathbf{u} = |\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}| \cdot \mathbf{s} - |\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{s}| \cdot \mathbf{r}$. Dann ist \mathbf{u} die Gerade durch den Schnittpunkt von \mathbf{p} und \mathbf{q} und durch den von \mathbf{r} und \mathbf{s} .*

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass \mathbf{u} in \mathbb{G} liegt. Es kann nicht $|\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}| = 0$ und $|\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{s}| = 0$ gelten, sonst würden entweder \mathbf{p} und \mathbf{q} dieselbe Gerade darstellen oder die vier Geraden $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ und \mathbf{s} würden nach Satz 151 durch einen Punkt gehen. Da auch \mathbf{r} und \mathbf{s} in \mathbb{G} liegen und nicht dieselbe Gerade darstellen, kann $|\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}| \cdot \mathbf{s} = |\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{s}| \cdot \mathbf{r}$ nicht gelten. Somit ist \mathbf{u} nicht der Nullvektor, das heißt \mathbf{u} liegt in \mathbb{G} .

Es gilt $|\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{u}| = |\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}| \cdot |\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{s}| - |\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{s}| \cdot |\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}| = 0$, da die Determinante linear in den Spalten ist. Es gilt auch $|\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{u}| = |\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}| \cdot |\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{s}| - |\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{s}| \cdot |\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{r}| = 0$, da eine Determinante mit zwei gleichen Spalten gleich 0 ist. Nach Satz 151 geht die Gerade \mathbf{u} durch den Schnittpunkt der Geraden \mathbf{p} und \mathbf{q} und durch den Schnittpunkt der Geraden \mathbf{r} und \mathbf{s} . \square

Satz 154 (Satz von Brianchon) *Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f} \in \mathbb{G}$ verschiedene Gerade, sodass keine drei durch einen Punkt gehen. Sei \mathbf{u} die Gerade durch den Schnittpunkt von \mathbf{a} und \mathbf{b} und durch den von \mathbf{d} und \mathbf{e} . Sei \mathbf{v} die Gerade durch den Schnittpunkt von \mathbf{b} und \mathbf{c} und durch den von \mathbf{e} und \mathbf{f} . Sei \mathbf{w} die Gerade durch den Schnittpunkt von \mathbf{c} und \mathbf{d} und durch den von \mathbf{f} und \mathbf{a} . Die drei Geraden \mathbf{u}, \mathbf{v} und \mathbf{w} gehen genau dann durch einen Punkt, wenn die sechs Geraden $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}$ und \mathbf{f} Tangenten an einen Kegelschnitt sind.*

Beweis: Der Beweis ist weitgehend derselbe wie der von Satz 153, er ist nur anders zu interpretieren. Aus Hilfssatz B folgt $\mathbf{u} = |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}| \cdot \mathbf{e} - |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}| \cdot \mathbf{d}$, $\mathbf{v} = |\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{b}| \cdot \mathbf{c} - |\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{c}| \cdot \mathbf{b}$ und $\mathbf{w} = |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{f}| \cdot \mathbf{a} - |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}| \cdot \mathbf{f}$. Nach Satz 151 gehen die Geraden \mathbf{u}, \mathbf{v} und \mathbf{w} genau dann durch einen Punkt, wenn $|\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}| = 0$ gilt. Setzt man \mathbf{u}, \mathbf{v} und \mathbf{w} ein, so hat man

$$| |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}| \cdot \mathbf{e} - |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}| \cdot \mathbf{d}, |\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{b}| \cdot \mathbf{c} - |\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{c}| \cdot \mathbf{b}, |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{f}| \cdot \mathbf{a} - |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}| \cdot \mathbf{f} | = 0$$

Wir setzen $\varphi(\mathbf{x}) = |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{x}, \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{x}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{c}, \mathbf{a}| - |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{x}, \mathbf{c}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{x}|$. Wie im Beweis von Satz 153 folgt, dass die Geraden \mathbf{u}, \mathbf{v} und \mathbf{w} genau dann durch einen Punkt gehen, wenn $\varphi(\mathbf{f}) = 0$ gilt. Nun ist $\varphi(\mathbf{x})$ eine quadratische Form in den Variablen x_1, x_2 und x_3 . Es existiert daher eine symmetrische Matrix M , sodass $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t M \mathbf{x}$ gilt. Aus der Voraussetzung und mit Hilfe von Satz 151 folgt, dass die zehn Determinanten, die man mit je drei der Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ und \mathbf{e} als Spalten bilden kann, ungleich Null sind. Aus obiger Bemerkung folgt dann, dass die Matrix M eine inverse Matrix C besitzt.

Es gilt $MC = CM = I_3$. Es folgt $C^t M^t = M^t C^t = I_3$ und $C^t M = MC^t = I_3$ wegen $M^t = M$. Wir erhalten $CM = C^t M$, woraus $CMC = C^t MC$ und wegen $MC = I_3$ auch $C = C^t$ folgt. Somit ist C eine symmetrische Matrix, deren Inverse die Matrix M ist. Die Gleichung $\mathbf{x}^t C \mathbf{x} = 0$ ist die eines echten Kegelschnitts und es folgt $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t C^{-1} \mathbf{x}$.

Es gilt $\varphi(\mathbf{a}) = |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{a}, \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{c}, \mathbf{a}| - |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{a}, \mathbf{c}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{a}| = 0$, da die Determinante bei Vertauschen zweier Spalten das Vorzeichen ändert. Ebenso gilt $\varphi(\mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{c}) = \varphi(\mathbf{d}) = \varphi(\mathbf{e}) = 0$, da eine Determinante mit zwei gleichen Spalten null ist. Nach Satz 149 sind die fünf Geraden $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ und \mathbf{e} Tangenten an den Kegelschnitt mit der Gleichung $\mathbf{x}^t C \mathbf{x} = 0$. Wie oben gezeigt wurde, gehen die Geraden \mathbf{u}, \mathbf{v} und \mathbf{w} genau dann durch einen Punkt, wenn $\varphi(\mathbf{f}) = 0$ gilt, das heißt, wenn auch die sechste Gerade \mathbf{f} Tangente an diesen Kegelschnitt ist. \square

5. Verhältnisse von Abständen

Da wir jetzt mit Abständen arbeiten, müssen wir ins kartesische Koordinatensystem zurückkehren. Wir werden jedoch auch zu homogenen Koordinaten wechseln. Einen Punkt bezeichnen wir wieder wie üblich mit einem Großbuchstaben, homogene Koordinaten des Punktes mit dem entsprechenden Kleinbuchstaben. Wird ein Punkt zum Beispiel mit A bezeichnet, dann bezeichnet $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ homogene Koordinaten dieses Punktes. Handelt es sich um keinen Fernpunkt, dann gilt $A = (\frac{a_1}{a_3}, \frac{a_2}{a_3})$.

Für drei voneinander verschiedene Punkte A , B und U , die auf einer Gerade liegen, wobei A und B keine Fernpunkte sind, führen wir das Verhältnis $\frac{AU}{UB}$ der orientierten Abstände AU und UB ein. Ist U kein Fernpunkt, dann sind diese orientierten Abstände ja definiert. Ist U jedoch ein Fernpunkt, dann definieren wir $\frac{AU}{UB} = -1$.

Satz 155: *Seien A , B und U drei voneinander verschiedene Punkte, die auf einer Gerade liegen, wobei A und B keine Fernpunkte sind, U jedoch auch ein Fernpunkt sein darf. Dann existieren reelle Zahlen s und t , die ungleich 0 sind und für die $\mathbf{u} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ gilt. Weiters gilt auch $\frac{AU}{UB} = \frac{tb_3}{sa_3}$.*

Beweis: Da die Punkte A , B und U auf einer Gerade liegen, gilt $|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u}| = 0$ nach Satz 150. Somit existieren reelle Zahlen λ_1 , λ_2 und λ_3 , die nicht alle gleich 0 sind, sodass $\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b} + \lambda_3\mathbf{u} = \mathbf{0}$ gilt. Wäre λ_3 gleich 0, dann würde $\lambda_1\mathbf{a} = -\lambda_2\mathbf{b}$ folgen mit $\lambda_1 \neq 0$ und $\lambda_2 \neq 0$, das hieße die Punkte A und B fallen zusammen. Somit ist λ_3 nicht gleich 0. Wir setzen $s = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3}$ und $t = -\frac{\lambda_2}{\lambda_3}$ und erhalten $\mathbf{u} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$. Es gilt $s \neq 0$, sonst würden die Punkte U und B zusammenfallen. Ebenso gilt $t \neq 0$, sonst würden die Punkte U und A zusammenfallen.

In den folgenden Rechnungen ist zu beachten, dass $a_3 \neq 0$ und $b_3 \neq 0$ gilt. Wenn U kein Fernpunkt ist, dann gilt auch $u_3 \neq 0$.

Ist U ein Fernpunkt, dann gilt $0 = sa_3 + tb_3$ und $\frac{AU}{UB} = -1 = \frac{tb_3}{sa_3}$.

Sei U kein Fernpunkt. Dann gilt $u_1 = sa_1 + tb_1$, $u_2 = sa_2 + tb_2$ und $u_3 = sa_3 + tb_3$. Aus der dritten Gleichung erhalten wir $s = \frac{u_3}{a_3} - t\frac{b_3}{a_3}$. Wir setzen das in die Gleichungen $u_1 = sa_1 + tb_1$ und $u_2 = sa_2 + tb_2$ ein und dividieren durch u_3 . Wir erhalten

$$\frac{u_1}{u_3} = \frac{a_1}{a_3} + t\frac{b_3}{u_3}\left(\frac{b_1}{b_3} - \frac{a_1}{a_3}\right) \quad \text{und} \quad \frac{u_2}{u_3} = \frac{a_2}{a_3} + t\frac{b_3}{u_3}\left(\frac{b_2}{b_3} - \frac{a_2}{a_3}\right)$$

Es folgt $\overrightarrow{AU} = t\frac{b_3}{u_3} \cdot \overrightarrow{AB} = t\frac{b_3}{u_3} \cdot (\overrightarrow{AU} + \overrightarrow{UB})$ und daraus $t\frac{b_3}{u_3} \cdot \overrightarrow{UB} = (1 - t\frac{b_3}{u_3}) \cdot \overrightarrow{AU} = s\frac{a_3}{u_3} \cdot \overrightarrow{AU}$, das heißt $sa_3 \cdot \overrightarrow{AU} = tb_3 \cdot \overrightarrow{UB}$. Somit gilt auch $sa_3 \cdot AU = tb_3 \cdot UB$, also $\frac{AU}{UB} = \frac{tb_3}{sa_3}$. \square

Mit Hilfe dieses Satzes können wir die Sätze von Menelaos und Ceva beweisen.

Satz 156: *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck, dessen Eckpunkte keine Fernpunkte sind. Sei D ein Punkt auf $\ell(A, B)$, sei E ein Punkt auf $\ell(B, C)$ und sei F ein Punkt auf $\ell(C, A)$. Diese Punkte seien von den Eckpunkten des Dreiecks verschieden, dürfen aber Fernpunkte sein.*

- (1) *Die Punkte D , E und F liegen auf einer Gerade genau dann, wenn $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = -1$ gilt. (Satz von Menelaos)*
- (2) *Die Geraden $\ell(A, E)$, $\ell(B, F)$ und $\ell(C, D)$ gehen durch einen Punkt genau dann, wenn $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$ gilt. (Satz von Ceva)*

Beweis: Aus Satz 155 folgt die Existenz von reellen Zahlen s_1 , t_1 , s_2 , t_2 , s_3 und t_3 , die alle ungleich 0 sind, sodass $\mathbf{d} = s_1\mathbf{a} + t_1\mathbf{b}$, $\mathbf{e} = s_2\mathbf{b} + t_2\mathbf{c}$ und $\mathbf{f} = s_3\mathbf{c} + t_3\mathbf{a}$ gilt. Weiters

folgt auch $\frac{AD}{DB} = \frac{t_1 b_3}{s_1 a_3}$, $\frac{BE}{EC} = \frac{t_2 c_3}{s_2 b_3}$ und $\frac{CF}{FA} = \frac{t_3 a_3}{s_3 c_3}$. Damit ist $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = \frac{t_1 t_2 t_3}{s_1 s_2 s_3}$ gezeigt. Man beachte, dass die Zahlen a_3 , b_3 und c_3 ungleich 0 sind.

Nach Satz 150 liegen die Punkte D , E und F auf einer Gerade genau dann, wenn gilt

$$0 = |\mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}| = s_1 s_2 s_3 \cdot |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}| + t_1 t_2 t_3 \cdot |\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}|$$

wobei wir für \mathbf{d} , \mathbf{e} und \mathbf{f} bereits eingesetzt und die Determinante auch ausgerechnet haben. Da weiters $|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}| = |\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}| \neq 0$ wegen Satz 150 gilt, ist diese Gleichung äquivalent zu $-1 = \frac{t_1 t_2 t_3}{s_1 s_2 s_3}$, das heißt zu $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = -1$. Damit ist (1) bereits bewiesen.

Wir zeigen (2). Nach Hilfssatz A hat der Schnittpunkt U der Geraden $\ell(A, E)$ und $\ell(B, F)$ homogene Koordinaten $\mathbf{u} = |\mathbf{a}, \mathbf{e}, \mathbf{f}| \cdot \mathbf{b} - |\mathbf{a}, \mathbf{e}, \mathbf{b}| \cdot \mathbf{f}$. Die Geraden $\ell(A, E)$, $\ell(B, F)$ und $\ell(C, D)$ gehen durch einen Punkt genau dann, wenn die Punkte U , C und D auf einer Gerade liegen, das heißt wegen Satz 150, wenn gilt

$$(*) \quad 0 = |\mathbf{u}, \mathbf{c}, \mathbf{d}| = |\mathbf{a}, \mathbf{e}, \mathbf{f}| \cdot |\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}| - |\mathbf{a}, \mathbf{e}, \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{f}, \mathbf{c}, \mathbf{d}|$$

Wir setzen für \mathbf{d} , \mathbf{e} und \mathbf{f} ein und berechnen

$$|\mathbf{a}, \mathbf{e}, \mathbf{f}| = s_2 s_3 \cdot |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}|, \quad |\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}| = s_1 \cdot |\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}|, \quad |\mathbf{a}, \mathbf{e}, \mathbf{b}| = t_2 \cdot |\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}|, \quad |\mathbf{f}, \mathbf{c}, \mathbf{d}| = t_3 t_1 \cdot |\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}|$$

Da $|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}| = |\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}| = -|\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}| \neq 0$ wegen Satz 150 gilt, ist die Gleichung (*) äquivalent zu $0 = s_1 s_2 s_3 - t_1 t_2 t_3$. Somit gehen die Geraden $\ell(A, E)$, $\ell(B, F)$ und $\ell(C, D)$ durch einen Punkt genau dann, wenn $1 = \frac{t_1 t_2 t_3}{s_1 s_2 s_3}$ gilt, das heißt $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$. \square

Wir beweisen noch eine Ergänzung zum Satz von Pascal.

Satz 157: *Seien A, B, C, D, E und F verschiedene Punkte, sodass keine drei dieser Punkte auf einer Geraden liegen. Diese sechs Punkte seien keine Fernpunkte. Sei U der Schnittpunkt der Geraden $\ell(A, B)$ und $\ell(D, E)$, sei V der Schnittpunkt der Geraden $\ell(B, C)$ und $\ell(E, F)$, und sei W der Schnittpunkt der Geraden $\ell(C, D)$ und $\ell(F, A)$. Wenn die sechs Punkte A, B, C, D, E und F auf einem Kegelschnitt liegen (das ist äquivalent dazu, dass die Punkte U, V und W auf einer Gerade liegen), dann gilt $\frac{AU}{UB} \cdot \frac{BV}{VC} \cdot \frac{CW}{WD} \cdot \frac{DU}{UE} \cdot \frac{EV}{VF} \cdot \frac{FW}{WA} = 1$.*

Beweis: Man beachte, dass die Punkte A, B, C, D, E und F keine Fernpunkte sind. Somit sind die Zahlen a_3, b_3, c_3, d_3, e_3 und f_3 immer ungleich null. Da keine drei der sechs Punkte A, B, C, D, E und F auf einer Gerade liegen, sind wegen Satz 150 alle im Beweis auftretenden Determinanten ungleich null.

Im Beweis von Satz 153 wurde folgende Gleichung hergeleitet

$$(1) \quad |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{f}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{c}, \mathbf{a}| = |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{c}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{f}|$$

Wenn man die Punkte A und D , die Punkte B und E und die Punkte C und F vertauscht, dann ändern sich die Voraussetzungen des Satzes nicht. Daher bleibt auch Gleichung (1) bestehen, wenn man \mathbf{a} mit \mathbf{d} , \mathbf{b} mit \mathbf{e} und \mathbf{c} mit \mathbf{d} vertauscht. Es gilt daher auch

$$(2) \quad |\mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}| \cdot |\mathbf{f}, \mathbf{a}, \mathbf{c}| \cdot |\mathbf{b}, \mathbf{f}, \mathbf{d}| = |\mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{f}| \cdot |\mathbf{f}, \mathbf{a}, \mathbf{d}| \cdot |\mathbf{a}, \mathbf{e}, \mathbf{c}|$$

Wir multiplizieren die Gleichungen (1) und (2). Wir dividieren diese Gleichung durch ihre rechte Seite. Wegen $|\mathbf{e}, \mathbf{c}, \mathbf{a}| = |\mathbf{a}, \mathbf{e}, \mathbf{c}|$ und $|\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{f}| = |\mathbf{b}, \mathbf{f}, \mathbf{d}|$ können wir kürzen. Es bleibt

$$(3) \quad \frac{|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{f}| \cdot |\mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}| \cdot |\mathbf{f}, \mathbf{a}, \mathbf{c}|}{|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}| \cdot |\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{c}| \cdot |\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{f}| \cdot |\mathbf{f}, \mathbf{a}, \mathbf{d}|} = 1$$

Da U der Schnittpunkt der Geraden $\ell(A, B)$ und $\ell(D, E)$ ist, erhalten wir

$$\mathbf{u} = |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}| \cdot \mathbf{d} - |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}| \cdot \mathbf{e} \quad \text{und} \quad \mathbf{u} = |\mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{b}| \cdot \mathbf{a} - |\mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{a}| \cdot \mathbf{b}$$

aus Hilfssatz A. Mit Hilfe von Satz 155 folgt dann

$$\frac{AU}{UB} = \frac{-|\mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{a}| \cdot a_3}{|\mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{b}| \cdot b_3} \quad \text{und} \quad \frac{DU}{UE} = \frac{-|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}| \cdot d_3}{|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}| \cdot e_3}.$$

Ganz analog erhalten wir auch die folgenden vier Gleichungen

$$\frac{BV}{VC} = \frac{-|\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{b}| \cdot b_3}{|\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{c}| \cdot c_3}, \quad \frac{EV}{VF} = \frac{-|\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}| \cdot e_3}{|\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{f}| \cdot f_3}, \quad \frac{CW}{WD} = \frac{-|\mathbf{f}, \mathbf{a}, \mathbf{c}| \cdot c_3}{|\mathbf{f}, \mathbf{a}, \mathbf{d}| \cdot d_3} \quad \text{und} \quad \frac{FW}{WA} = \frac{-|\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{f}| \cdot f_3}{|\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}| \cdot a_3}.$$

Aus diesen Gleichungen und aus (3) ergibt sich $\frac{AU}{UB} \cdot \frac{BV}{VC} \cdot \frac{CW}{WD} \cdot \frac{DU}{UE} \cdot \frac{EV}{VF} \cdot \frac{FW}{WA} = 1$. Damit ist der Satz bereits bewiesen. \square

Übung: Für den Fall, dass die Punkte U , V und W keine Fernpunkte sind, beweise man Satz 157 mit Hilfe des Strahlensatzes.

Hinweise: Keiner der Punkte A , B , C , D , E und F fällt mit einem der Punkte U , V und W zusammen. (Wäre zum Beispiel A gleich U , dann würden die Punkte D , E und A auf einer Gerade liegen.) Sei g die Gerade durch die Punkte U , V und W . Keiner der Punkte A , B , C , D , E und F liegt auf g . (Würde zum Beispiel A auf g liegen, dann auch B , und dann auch C und so weiter.) Sei A^* der Fußpunkt des Lots von A auf g , sei B^* der Fußpunkt des Lots von B auf g , und so weiter. Nach dem Strahlensatz gilt dann $\frac{UA}{UB} = \frac{AA^*}{BB^*}$, $\frac{VB}{VC} = \frac{BB^*}{CC^*}$, und so weiter.

Dieser Beweis funktioniert auch, wenn die Punkte A , C , und E auf einer Gerade liegen und die Punkte B , D und F auf einer anderen, jedoch keiner der Punkte auf beiden Geraden.

Bemerkung: In Satz 157 kann man die Voraussetzung, dass keine drei der sechs Punkte A , B , C , D , E und F auf einer Gerade liegen, nicht einfach weglassen. Wenn zum Beispiel die drei Punkte A , B und D auf einer Gerade liegen, und die drei Punkte C , E und F auf einer anderen, dann fallen die Punkte U und D zusammen und ebenso die Punkte V und C . Es folgt $DU = 0$ und $VC = 0$. Die Aussage des Satzes wird sinnlos.

Index

Arbelos	2	Satz von Brianchon	117
Archimedes' Broken-Chord-Theorem	17	Satz von Brocard	84
Archimedes' Formel	73, 98	Satz von Carnot	6
Archimedeskreise	3	Satz von Ceva	26, 101, 118
Aufgesetzte Figuren	81	Satz von Desargues	32, 73, 114
Bevanpunkt	50, 66	Satz von Droz-Farny	44
Diagonalen eines Vierseits	60	Satz von Feuerbach	15, 38, 65, 95
Erdős-Mordell-Ungleichung	10, 107	Satz von Gauß-Bodenmiller	61, 108
Eulers Formel für ein Dreieck	37, 65	Satz von Leibniz	35
Fermatpunkt	81, 89	Satz von Menelaos	26, 118
Feuerbachpunkt	69	Satz von Miquel	84
Fuss'sche Formel	42	Satz von Monge	29
Gergonnepunkt	48	Satz von Napoleon	90
Höhensatz	1	Satz von Newton	106
Homogene Koordinaten	111	Satz von Pappos	19
Inversion an einem Kreis	92	Satz von Pascal	32, 115
Isodynamische Punkte	62	Satz von Ptolemäus	94
Isogonal konjugierte Punkte	23	Satz von Pythagoras	1
Kathetensatz	1	Satz von Routh	102
Kegelschnitt	21, 110	Satz von Sawayama-Thebault	20
Kieperthyperbel	43	Sehnensatz (Sekantensatz)	12
Longchampspunkt	51, 67	Sehntangentenviereck	40
Miquelpunkt eines Vierseits	59	Spiegelung an einer Gerade	85
Mittelpunkt	49	Spiekerpunkt	51, 67
Nagelpunkt	48, 67	Steinergeraden eines Dreiecks	57, 86
Neunpunktkreis	64	Steinergerade eines Vierseits	59
Orientierte Dreiecksfläche	101	Strahlensatz	1
Orientierter Normalabstand	103	Südpol- und Nordpolsatz	16
Orthogonale Kreise	60	Symmedianpunkt	54
Orthopol eines Dreiecks	7, 80	Tangentenviereck	39, 104
Pappos Chain Theorem	99	Tangentenwinkelsatz	11, 83
Peripheriewinkelsatz	11, 83	Vierkreisesatz von Descartes	71, 97
Polare für einen Kreis	30, 60	Vierseit	58
Problem von Fermat	90	Zentrische Streckung	49, 88