Übungen zu Geometrie F. Hofbauer

I. Elementargeometrie

A. Einleitung

Winkelberechnungen

1. Man zeige, dass die Winkelsumme in einem konvexen Viereck gleich 360^0 und in einem konvexen n-Eck gleich $(n-2)\cdot 180^0$ ist. Wie groß sind die Winkel im regelmäßigen n-Eck. Hinweis: konvex bedeutet, dass alle Winkel $< 180^0$ sind.
2. Auf jeder Seite eines unregelmäßigen konvexen Fünfecks, dessen Winkel $> 90^0$ sind, wird ein Dreieck errichtet, dessen Schenkel die Verlängerungen der benachbarten Fünfeckseiten sind. (Es entsteht ein fünfzackiger Stern.) Seien α_1, α_2, α_3, α_4 und α_5 die Winkel an den Spitzen der aufgesetzten Dreiecke. Man zeige $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 180^0$. (analog für ein n-Eck.)
3. Sei $ABCD$ ein Viereck. Sei g_A die Gerade durch A, die die beiden Außenwinkel beim Eckpunkt A halbiert. Entsprechend seien g_B, g_C und g_D definiert. Diese vier Geraden bilden ein Viereck. Man zeige, dass in diesem Viereck die Summe einander gegenüberliegender Winkel gleich 180^0 ist.
4. Wie letztes Beispiel. Die Geraden g_A, g_B, g_C und g_D halbieren jedoch die Innenwinkel anstatt die Außenwinkel.
5. Sei $ABCD$ ein Rechteck, sei M der Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$ und N der der Seite $\overline{CD}$. Sei P der Schnittpunkt der Geraden $\ell(B,N)$ und $\ell(D,M)$. Man zeige, dass $\measuredangle MAN = \measuredangle DPN$ gilt. Hinweis: Sei $\varphi = \measuredangle BMA = \measuredangle CMD$ und $\psi = \measuredangle DNA = \measuredangle CNB$. Winkel berechnen: $\measuredangle MPN$, $\measuredangle MAB$, ...

Kongruenzüberlegungen

6. Durch einen Punkt P auf der Diagonale eines Parallelogramms werden Parallelen zu den Seiten des Parallelogramms gezogen. Man zeige, dass von den vier entstehenden Teilparallelogrammen die beiden flächengleich sind, die nicht von der Diagonale durchschnitten werden. Hinweis: Ein Parallelogramm wird durch eine Diagonale in zwei zueinander kongruente und daher flächengleiche Dreiecke zerlegt.
7. Sei $ABCD$ ein Parallelogramm, sodass der Winkel α bei A und C spitz ist. Sei M der Mittelpunkt der Diagonale $\overline{AC}$. Wir wählen P auf $\ell(C,D)$ so, dass $\measuredangle MPC = \alpha$ gilt. Man zeige $|AP| = |BP|$.

Orientierter Abstand

8. Seien A, B und C beliebige Punkte auf einer Gerade. Welche der folgenden Gleichungen sind richtig: $AB + BC + CA = 0$, $AB = AC + BC$, $AB - AC = CB$,
9. Seien A, B, C und D beliebige Punkte auf einer Gerade. Welche der folgenden Gleichungen sind richtig: $\frac{AB}{CD} = \frac{BA}{DC}$, $\frac{AB}{AD} = 1 + \frac{DB}{AD}$, $AB \cdot AC = |AB| \cdot |AC|$, $|AB \cdot AC| = |AB| \cdot |AC|$,
10. Die vier Punkte A, B, C und D liegen auf einer Gerade. Man zeige, dass $DA \cdot BC + DB \cdot CA + DC \cdot AB = 0$ gilt.

Dreiecksflächen

11. Sei P ein beliebiger Punkt im Innern eines gleichseitigen Dreiecks. Die Summe der Normalabstände von P zu den Seiten des Dreiecks ist gleich der Höhe des Dreiecks.
12. Sei $ABCD$ ein Quadrat mit Seitenlänge 1. Sei E der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ und F der Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$. Die Strecken $\overline{AF}$ und $\overline{EC}$ teilen das Quadrat in vier Teile. Man berechne die Flächen dieser Teile. Hinweis: Man zeichne noch die Diagonale $\overline{BD}$ ein. Welche

Dreiecke sind flächengleich? Welche Dreiecke kann man zu einem Dreieck zusammenfassen, dessen Fläche bekannt ist?

13. Sei $ABCD$ ein Parallelogramm. Sei P ein beliebiger Punkt der Seite $\overline{CD}$. Sei R der Schnittpunkt der Strecke $\overline{AP}$ mit der Diagonale $\overline{BD}$. Man zeige $\#ADR = \#BRP$. Hinweis: Es gilt $\#CBD = \frac{1}{2}F$ und $\#ADP + \#BCP = \frac{1}{2}F$, wobei F die Fläche des Parallelogramms ist.

B. Strahlensatz

Anwendungen des Strahlensatzes und seiner Umkehrung

14. Sei M der Schnittpunkt der beiden Diagonalen eines Parallelogramms. Dann ist M der Mittelpunkt beider Diagonalen.
Es gilt auch die Umkehrung. Hat ein Viereck die Eigenschaft, dass der Schnittpunkt M der Diagonalen der Mittelpunkt beider Diagonalen ist, dann ist das Viereck ein Parallelogramm.
15. Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck und M der Schnittpunkt seiner Diagonalen. Man zeige $\frac{|MB|}{|MD|} = \frac{\#ABC}{\#ADC}$. Hat ein Viereck die Eigenschaft, dass beide Diagonalen die Fläche des Vierecks halbieren, dann ist das Viereck ein Parallelogramm.
16. Seien g und h nicht parallele Gerade. Seien P_1, P_2 und P_3 Punkte auf der Gerade g und Q_1, Q_2 und Q_3 Punkte auf der Gerade h, jedoch keiner dieser Punkte liege auf beiden Geraden. Man zeige: Wenn $\ell(P_2, Q_1)$ parallel zu $\ell(P_3, Q_2)$ und $\ell(P_1, Q_2)$ parallel zu $\ell(P_2, Q_3)$ liegt, dann liegt auch $\ell(P_1, Q_1)$ parallel zu $\ell(P_3, Q_3)$. (Satz von Pappos)
17. Seien g_1, g_2 und g_3 verschiedene Gerade, die einander in einem Punkt S schneiden. Seien P_1 und Q_1 Punkte auf g_1, seien P_2 und Q_2 Punkte auf g_2 und seien P_3 und Q_3 Punkte auf g_3. Man zeige: Wenn $\ell(P_1, P_2)$ parallel zu $\ell(Q_1, Q_2)$ und $\ell(P_2, P_3)$ parallel zu $\ell(Q_2, Q_3)$ liegt, dann liegt auch $\ell(P_1, P_3)$ parallel zu $\ell(Q_1, Q_3)$. (Satz von Desargues)
18. Seien k_1 und k_2 verschieden große Kreise, sodass der eine ganz außerhalb des anderen liegt. Seien M_1 und M_2 ihre Mittelpunkte und g die Gerade durch M_1 und M_2. Diese beiden Kreise haben vier gemeinsame Tangenten. Zwei dieser Tangenten gehen zwischen den Kreisen hindurch. Ihr Schnittpunkt B liegt auf g. Die anderen beiden Tangenten liegen außen an den Kreisen. Ihr Schnittpunkt A liegt ebenfalls auf g, jedoch nicht zwischen den Kreisen, sondern außerhalb beim kleineren Kreis. Man zeige, dass $\frac{AM_1}{AM_2}\frac{BM_2}{BM_1} = -1$ gilt.
19. Man zeige, dass die Seitenmitten eines beliebigen konvexen Vierecks die Eckpunkte eines Parallelogramms sind. Hinweis: Umkehrung des Strahlensatzes.
20. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und s die Schwerlinie durch C. Sei P ein Punkt auf s und h die Gerade durch P parallel zur Seite $\overline{AB}$. Sei Q der Schnittpunkt von h mit $\ell(B, C)$ und R der Schnittpunkt von h mit $\ell(A, C)$. Man zeige $|PQ| = |PR|$.

Ähnliche Dreiecke

21. In einem Dreieck $\triangle ABC$ sei D der Fußpunkt der Höhe durch C, E der Fußpunkt der Höhe durch A und F der Fußpunkt der Höhe durch B. Man zeige, dass $\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{|BF|}{|AB|}$, $\frac{|CD|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|AB|}$ und $\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|BF|}{|BC|}$ gilt.
22. Seien M_1 und M_2 die Mittelpunkte zweier Kreise k_1 und k_2, die einander nicht schneiden. Seien P_1 und Q_1 die Schnittpunkte des Kreises k_1 mit den Tangenten vom Punkt M_1 aus an den Kreis k_2. Seien P_2 und Q_2 die Schnittpunkte des Kreises k_2 mit den Tangenten vom Punkt M_2 aus an den Kreis k_1. Dann gilt $|P_1Q_1| = |P_2Q_2|$. Hinweis: Man zeichne die Gerade $\ell(M_1, M_2)$ und suche ähnliche Dreiecke.

Menelaos und Ceva

23. Seien A, B, C und D vier Punkte in der Ebene. Sei E der Schnittpunkt der Geraden $\ell(A, C)$ und $\ell(B, D)$ und F der Schnittpunkt der Geraden $\ell(A, B)$ und $\ell(C, D)$. Man zeige $\frac{FA}{FB} \cdot \frac{EB}{ED} \cdot \frac{FD}{FC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1$. Hinweis: Satz von Menelaos zweimal anwenden.

24. Umkehrung des Satzes von Menelaos: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Sei D ein Punkt auf $\ell(A,B)$, sei E ein Punkt auf $\ell(B,C)$, und F einer auf $\ell(C,A)$. Wenn $\frac{DA}{DB} \cdot \frac{EB}{EC} \cdot \frac{FC}{FA} = 1$ gilt, dann liegen die Punkte D, E und F auf einer Gerade. Hinweis: Es ist nicht möglich, dass $\ell(D,E)$ parallel zu $\ell(C,A)$ liegt (indirekter Beweis mit Strahlensatz).
25. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Seitenmitten M_a, M_b und M_c. Sei g eine Gerade, die $\ell(B,C)$ im Punkt P_a, $\ell(A,C)$ im Punkt P_b und $\ell(A,B)$ im Punkt P_c schneidet. Sei Q_a der an M_a gespiegelte Punkt P_a. Sei Q_b der an M_b gespiegelte Punkt P_b. Sei Q_c der an M_c gespiegelte Punkt P_c. Dann liegen die Punkte Q_a, Q_b und Q_c auf einer Gerade.
26. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Seitenmitten M_a, M_b und M_c. Sei P ein Punkt. Sei P_a der Schnittpunkt der Geraden $\ell(P,A)$ und $\ell(B,C)$ und Q_a der an M_a gespiegelte Punkt P_a. Sei P_b der Schnittpunkt der Geraden $\ell(P,B)$ und $\ell(A,C)$ und Q_b der an M_b gespiegelte Punkt P_b. Sei P_c der Schnittpunkt der Geraden $\ell(P,C)$ und $\ell(A,B)$ und Q_c der an M_c gespiegelte Punkt P_c. Dann schneiden die Geraden $\ell(A,Q_a)$, $\ell(B,Q_b)$ und $\ell(C,Q_c)$ einander in einem Punkt.
27. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und P ein Punkt. Sei A_1 der Schnittpunkt von $\ell(A,P)$ mit $\ell(B,C)$, B_1 der von $\ell(B,P)$ mit $\ell(A,C)$ und C_1 der von $\ell(C,P)$ mit $\ell(A,B)$. Weiters sei A_2 der Schnittpunkt von $\ell(B_1,C_1)$ mit $\ell(B,C)$, B_2 der von $\ell(A_1,C_1)$ mit $\ell(A,C)$ und C_2 der von $\ell(A_1,B_1)$ mit $\ell(A,B)$. Man zeige, dass die Punkte A_2, B_2 und C_2 auf einer Geraden liegen. Hinweis: Menelaos und Ceva.

C. Pythagoras

Ebene Figuren

28. Man bestimme die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks und die Abschnitte, in die sie durch den Höhenschnittpunkt unterteilt wird.
29. Sei $ABCD$ ein Quadrat mit Seitenlänge a. Sei k der Kreis, der durch die Eckpunkte A und B geht und die Seite $\overline{CD}$ berührt. Man berechne den Radius dieses Kreises.
30. Sei $ABCD$ ein Quadrat mit Seitenlänge a. Die Punkte E auf der Seite $\overline{BC}$ und F auf der Seite $\overline{CD}$ werden so gewählt, dass das Dreieck $\triangle AEF$ gleichseitig ist. Man berechne die Seitenlänge dieses Dreiecks.
31. Sei $\overline{AB}$ der Durchmesser eines Halbkreises und C ein Punkt auf $\overline{AB}$. Aus diesem Halbkreis werden zwei Halbkreise mit Durchmessern $\overline{AC}$ und $\overline{CB}$ herausgeschnitten. Die verbleibende Figur heißt Arbelos. Sei D der Schnittpunkt der Senkrechten auf $\overline{AB}$ durch C mit dem ersten Halbkreis. Dann ist die Fläche des Arbelos gleich der Fläche des Kreises mit Durchmesser $\overline{CD}$. (Archimedes)
32. Sei $ABCD$ ein Quadrat mit Seitenlänge a. Sei E der Mittelpunkt der Seite $\overline{CD}$. Die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BE}$ schneiden einander im Punkt S. Man berechne die Längen der Seiten des Dreiecks $\triangle ABS$ und dessen Fläche. Hinweis: Strahlensatz: $\overline{CE}$ ist parallel zu $\overline{AB}$.
33. Sei a die Seite eines dem Einheitskreis eingeschriebenen regelmäßigen n-Ecks. Man zeige, dass $\sqrt{2-\sqrt{4-a^2}}$ die Seite eines dem Einheitskreis eingeschriebenen regelmäßigen $2n$-Ecks ist. Man berechne die Seite des regelmäßigen 8-Ecks und 16-Ecks.
34. Sei a die Seite eines dem Einheitskreis umgeschriebenen regelmäßigen n-Ecks. Man zeige, dass $\frac{4}{a}(\sqrt{1+a^2/4}-1)$ die Seite eines dem Einheitskreis umgeschriebenen regelmäßigen $2n$-Ecks ist. Man berechne die Seite des regelmäßigen 8-Ecks und 16-Ecks.

Körper im Raum

35. Man bestimme die Länge der Diagonale eines Würfels.
36. Man bestimme die Höhe eines regelmäßigen Tetraeders.
37. Man berechne den Radius r der Umkugel und den Radius ϱ der Inkugel eines regelmäßigen Tetraeders.
38. Wir sind im $\mathbb{R}^3$. Sei $A=(a,0,0)$, $B=(0,b,0)$ und $C=(0,0,c)$, wobei a, b und c alle >0 sind. Zusammen mit $O=(0,0,0)$ bilden diese Punkte die Ecken eines rechtwinkeligen Tetraeders. Wir betrachten die Flächeninhalte der vier Dreiecke: $R=\#ABC$, $U=\#ABO$, $V=\#ACO$

und $W = \#BCO$. Man zeige, dass $R^2 = U^2 + V^2 + W^2$ gilt. Hinweis: Man berechne die Höhe k durch O im Dreieck $\triangle ABO$ und daraus die Höhe h durch C im Dreieck $\triangle ABC$.

Berührende Kreise

39. Zwei Kreise mit Radien r_1 und r_2 berühren einander von außen und haben die Gerade g als gemeinsame Tangente, die die beiden Kreise in verschiedenen Punkten berührt. Ein weiterer Kreis mit Radius s berührt die beiden Kreise von außen und auch die Tangente g. Man zeige, dass $\frac{1}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$ gilt.
40. Sei $ABCD$ ein Quadrat mit Seitenlänge a. Man berechne den Radius des Inkreises des Dreiecks $\triangle ABC$.
41. Sei $ABCD$ ein Quadrat mit Seitenlänge a. Sei k ein Halbkreis mit $\overline{AB}$ als Durchmesser, der im Innern des Quadrats liegt. Man berechne den Radius des Kreises, der k, $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ berührt.
42. Sei $ABCD$ ein Quadrat mit Seitenlänge a. Sei k_A der Viertelkreis mit Mittelpunkt A, der den Punkt B mit dem Punkt D verbindet. Ebenso sei k_B der Viertelkreis mit Mittelpunkt B, der den Punkt A mit dem Punkt C verbindet. Diese beiden Viertelkreise teilen das Quadrat in vier Teile. Jedem dieser Teile wird ein Kreis eingeschrieben, der die Begrenzungslinien berührt. Man berechne die Radien dieser Kreise.
43. Sei $\overline{AB}$ ein Durchmesser eines Kreises k. Sei C ein beliebiger Punkt auf $\overline{AB}$ und g die Senkrechte auf $\overline{AB}$ durch C. Sei D ein Schnittpunkt von g und k. Sei l ein Kreis, der die Strecken $\overline{CB}$ und $\overline{CD}$ und den Kreis k von innen berührt. Der Punkt, in dem l die Strecke $\overline{CB}$ berührt, sei U. Man zeige, dass $|AU| = |AD|$ gilt.
44. Sei $\overline{AB}$ eine Strecke und C ein Punkt auf $\overline{AB}$. Der Kreis k_1 habe $\overline{AB}$ als Durchmesser. Seinen Radius bezeichnen wir mit r_1. Der Kreis k_2 habe $\overline{AC}$ als Durchmesser. Seinen Radius bezeichnen wir mit r_2. (Die Kreise berühren einander in A.) Der Kreis k_3 berührt die Strecke $\overline{AB}$, den Kreis k_2 von außen und den Kreis k_1 von innen. Gesucht ist der Radius von k_3.
45. Sei C ein Punkt auf $\overline{AB}$. Die Halbkreise k über $\overline{AB}$, k_1 über $\overline{AC}$ und k_2 über $\overline{CB}$ bilden den Arbelos. Sei g die Senkrechte auf $\overline{AB}$ durch C. Sei l_1 der Kreis, der g, k und k_1 berührt und l_2 der Kreis, der g, k und k_2 berührt. Dann haben l_1 und l_2 den gleichen Radius.
46. Im Arbelos aus Beispiel 45 wurde bereits die gemeinsame Tangente g im Punkt C an die Halbkreise k_1 und k_2 eingeführt. Sei D ihr Schnittpunkt mit dem großen Halbkreis k. Die Halbkreise k_1 und k_2 haben neben g eine zweite gemeinsame Tangente h. Sie berührt k_1 im Punkt U und k_2 im Punkt V. Man zeige, dass $|UV| = |CD|$ gilt. Ist S der Schnittpunkt der Tangenten $\ell(C,D)$ und $\ell(U,V)$, dann gilt $|SU| = |SC| = |SV| = |SD|$. Weiters liegen die Punkte A, U und D auf einer Gerade, ebenso die Punkte B, V und D. Hinweise: Wir berechen $|UV|$ und $|CD|$ mit Pythagoras. Tangenten von S an k_1: $|SU| = |SC|$. Tangenten von S an k_2: $|SV| = |SC|$. Damit erhalten wir $|SU| = |SC| = |SV| = |SD|$. Weiters sind $\triangle M_1US$ und $\triangle M_1CS$ kongruent, $\triangle M_1CS$ und $\triangle ACD$ sind ähnlich, $\triangle AM_1U$ ist gleichschenkelig. Es folgt $\measuredangle M_1AU = \measuredangle CAD$.

Zum Satz von Carnot

47. Sei $ABCD$ ein Rechteck und P ein Punkt. Man zeige $|PA|^2 - |PB|^2 + |PC|^2 - |PD|^2 = 0$.
48. Man zeige, dass die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ genau dann aufeinander senkrecht stehen, wenn $AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$ gilt.
49. Sei $\triangle ABC$ ein gleichseitiges Dreieck und P ein Punkt. Seien P_a, P_b und P_c die Fußpunkte der Lote von P auf die Geraden $\ell(B,C)$, $\ell(A,C)$ und $\ell(A,B)$. Man zeige $AP_c + BP_a + CP_b = P_cB + P_aC + P_bA$. Hinweis: Satz von Carnot, gleichseitiges Dreieck!
50. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Seitenmitten M_a, M_b und M_c. Sei P ein Punkt. Seien P_a, P_b und P_c die Fußpunkte der Lote von P auf die Geraden $\ell(B,C)$, $\ell(A,C)$ und $\ell(A,B)$. Sei Q_a der an M_a gespiegelte Punkt P_a und g_a die Senkrechte auf $\ell(B,C)$ durch Q_a. Sei Q_b der an M_b gespiegelte Punkt P_b und g_b die Senkrechte auf $\ell(A,C)$ durch Q_b. Sei Q_c der an M_c gespiegelte Punkt P_c und g_c die Senkrechte auf $\ell(A,B)$ durch Q_c. Dann schneiden die Geraden g_a, g_b und

g_c einander in einem Punkt.

51. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und D, E und F beliebige Punkte. Die Senkrechte durch D auf $\ell(A,B)$, die Senkrechte durch E auf $\ell(B,C)$ und die Senkrechte durch F auf $\ell(C,A)$ schneiden einander in einem Punkt genau dann, wenn $|AD|^2 - |DB|^2 + |BE|^2 - |EC|^2 + |CF|^2 - |FA|^2 = 0$ gilt. Hinweis: Sei D^* der Fußpunkt des Lots von D auf $\ell(A,B)$. Dann gilt $|AD^*|^2 - |D^*B|^2 = |AD|^2 - |DB|^2$.
52. Auf den Seiten eines Dreiecks $\triangle ABC$ als Basis werden gleichschenkelige Dreiecke $\triangle AC^*B$, $\triangle BA^*C$ und $\triangle CB^*A$ gesetzt. Sei g_A die Senkrechte auf $\ell(B^*,C^*)$ durch A, sei g_B die Senkrechte auf $\ell(A^*,C^*)$ durch B und g_C die Senkrechte auf $\ell(A^*,B^*)$ durch C. Dann schneiden diese drei Geraden einander in einem Punkt. Hinweis: Beispiel 51 auf das Dreieck $\triangle A^*B^*C^*$ anwenden.

D. Dreieck

Schwerlinie, Streckensymmetrale, Winkelsymmetrale

53. Ein beliebiges Dreieck wird durch die Schwerlinien in sechs flächengleiche Teile geteilt. Hinweis: Man suche Dreiecke mit gleich langer Basis und gemeinsamer Höhe.
54. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und M der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$. Sei P ein beliebiger Punkt auf der Schwerlinie $\overline{CM}$. Sei Q der Schnittpunkt von $\ell(B,P)$ und $\ell(A,C)$. Dann gilt $\frac{CP}{PM} = 2\frac{CQ}{QA}$. Hinweis: Parallele durch M zu $\ell(B,P)$. Strahlensatz.
55. Sei $\overline{AB}$ eine Strecke, P ein Punkt und F der Fußpunkt des Lots von P auf $\ell(A,B)$. Man zeige $|PA|^2 - |PB|^2 = |FA|^2 - |FB|^2$. Damit beweise man, dass P genau dann auf der Symmetrale der Strecke $\overline{AB}$ liegt, wenn $|PA| = |PB|$ gilt.
56. Zwei Kreise berühren einander von außen im Punkt P. Eine gemeinsame Tangente berührt den einen Kreis im Punkt U, den anderen im Punkt V. Man zeige $\measuredangle UPV = 90^0$. Hinweis: Welche Dreiecke sind gleichschenkelig?
57. Man zeige: Die sechs Symmetrieebenen der Kanten eines unregelmäßigen Tetraeders schneiden einander in einem Punkt (Mittelpunkt der Umkugel).
58. Zwei Halbebenen H_1 und H_2 im Raum, die von derselben Gerade ausgehen, haben eine winkelhalbierende Halbebene. Jeder Punkt dieser winkelhalbierenden Halbebene hat gleichen Normalabstand von H_1 und H_2. Man zeige, dass ein unregelmäßiger Tetraeder eine Inkugel besitzt (und vier Ankugeln). Hinweis: Drei winkelhalbierende Halbebenen, von denen jede eine Kante einer Seitenfläche enthält, schneiden einander in einem Punkt. Dieser hat gleichen Normalabstand von allen vier Tetraederflächen.
59. In einem Viereck bezeichnen wir die Ecken der Reihe nach mit A, B, C und D. Man zeige, dass für ein Tangentenviereck $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$ gilt. Ein Tangentenviereck ist ein Viereck, das einen Inkreis hat.
60. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Winkeln α, β und γ. Man drücke den Winkel, den die Winkelsymmetralen durch die Eckpunkte B und C miteinander bilden, durch α, β und γ aus.
61. Sei $\triangle ABC$ ein beliebiges Dreieck, I der Inkreismittelpunkt und I_a, I_b und I_c die Ankreismittelpunkte. Man drücke die Winkel des Dreiecks $\triangle I_aI_bI$ durch α, β und γ aus. Hinweis: Beispiel 60. Die innere und äußere Winkelsymmetrale durch einen Eckpunkt stehen senkrecht aufeinander.
62. Sei $\triangle ABC$ ein beliebiges Dreieck und I_a, I_b und I_c die Ankreismittelpunkte. Man drücke die Winkel des Dreiecks $\triangle I_aI_bI_c$ durch α, β und γ aus.
63. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Seien U und V die Fußpunkte der Lote von C auf die Symmetralen der Innenwinkel bei A und bei B. Seien P und Q die Fußpunkte der Lote von C auf die Symmetralen der Außenwinkel bei A und bei B. Dann liegen die vier Punkte P, Q, U und V auf einer Gerade. Auch die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ liegen auf dieser Gerade. Hinweis: Die innere und äußere Winkelsymmetrale durch einen Eckpunkt stehen senkrecht aufeinander. Damit erhält man Rechtecke. Was gilt für deren Diagonalen?

64. Seien A und B Punkte auf einem Kreis k. Wir nehmen an, dass die Tangenten in den Punkten A und B an den Kreis k einander im Punkt C schneiden. Man zeige, dass der Inkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$ auf k liegt.

Besondere Punkte mit Ceva und Carnot

65. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und D der Schnittpunkt der Symmetrale eines Außenwinkels bei C mit $\ell(A, B)$. Man zeige, dass $\frac{AD}{DB} = -\frac{|AC|}{|BC|}$ gilt. Hinweis: Die Parallele zu $\overline{AC}$ durch B schneidet die Symmetrale des Außenwinkels in einem Punkt E. Man wende den Strahlensatz an und zeige $|BE| = |BC|$.
66. Sei D der Schnittpunkt der Symmetrale eines Außenwinkels bei C mit $\ell(A, B)$. Sei E der Schnittpunkt der Symmetrale eines Außenwinkels bei A mit $\ell(B, C)$. Sei F der Schnittpunkt der Symmetrale eines Außenwinkels bei B mit $\ell(A, C)$. Dann liegen die Punkte D, E und F auf einer Gerade. Hinweis: Beispiel 65 und Beispiel 24.
67. Seien Q_a, Q_b und Q_c die Punkte, in denen ein Ankreis eines Dreiecks $\triangle ABC$ die (Verlängerungen der) drei Dreiecksseiten berührt. Man zeige mit Hilfe der Umkehrung des Satzes von Ceva, dass die drei Geraden $\ell(A, Q_a)$, $\ell(B, Q_b)$ und $\ell(C, Q_c)$ einander in einem Punkt schneiden. Hinweis: $|AQ_b| = |AQ_c|$, $|BQ_a| = |BQ_c|$ und $|CQ_a| = |CQ_b|$.

Zentrische Streckung, Eulergerade

68. Sei $ABCD$ ein Parallelogramm. Sei P ein Punkt auf der Diagonale $\overline{AC}$. Weiters seien E auf $\overline{AB}$ und G auf $\overline{CD}$ so gewählt, dass E, P und G auf einer Gerade liegen. Ebenso seien F auf $\overline{BC}$ und H auf $\overline{AD}$ so gewählt, dass F, P und H auf einer Gerade liegen. Man zeige, dass $\overline{EH}$ und $\overline{FG}$ parallel sind. Hinweis: Die zentrische Streckung mit Zentrum P, die C auf A abbildet, bildet G auf E und F auf H ab.
69. Sei $\triangle ABC$ ein beliebiges Dreieck mit Inkreismittelpunkt I und Umkreismittelpunkt U. Man zeige, dass I der Höhenschnittpunkt und U der Mittelpunkt des Neunpunktkreises für das Dreieck $\triangle I_aI_bI_c$ sind. Weiters zeige man, dass U der Mittelpunkt der Strecke $\overline{IV}$ ist, wobei V der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle I_aI_bI_c$ ist. Hinweis: Eulergerade für $\triangle I_aI_bI_c$.
70. Mit Hilfe der Eigenschaften eines Parallelogramms beweisen wir, dass M_c, R_c und H_c auf dem Neunpunktkreis liegen. Das ergibt einen alternativen Beweis zum Beweis in der Vorlesung.
(a) Die Höhe durch C und die Symmetrale der Seite $\overline{AB}$ sind parallel. Die Schwerlinie $\ell(C, M_c)$ und die Eulergerade $\ell(U, H)$ schneiden einander im Schwerpunkt S. Der Strahlensatz ergibt $\frac{CH}{M_cU} = \frac{SC}{SM_c} = -2$. Es folgt $CH = 2UM_c$ und $UM_c = CR_c = R_cH$ (R_c Mittelpunkt von $\overline{CH}$).
(b) Nun ist UM_cR_cC ein Parallelogramm. Es folgt $|M_cR_c| = |UC| = r$. Ebenso ist UM_cHR_c ein Parallelogramm und N ist nach Definition der Mittelpunkt der Diagonale $\overline{UH}$. Daher ist N auch der Mittelpunkt der anderen Diagonale $\overline{M_cR_c}$. Was folgt daraus für M_c und R_c? (Ist $\measuredangle ACB = 90^0$, dann gilt $U = M_c$ und $C = H = R_c$.)
(c) Jetzt zum Höhenfußpunkt H_c: Wegen $\measuredangle R_cH_cM_c = 90^0$ können wir $\triangle R_cH_cM_c$ zu einem Rechteck ergänzen. Da N der Mittelpunkt der Diagonale $\overline{M_cR_c}$ ist, ist $\overline{NH_c}$ die Hälfte der anderen Diagonale. Es gilt somit $|NH_c| = |NM_c|$. Was folgt daraus für H_c?
Wenn $|AC| = |BC|$ gilt, dann funktioniert dieser Beweis nicht. In diesem Fall liegen C, R_c, H, S, U und M_c auf einer Gerade. Es gilt $SC = -2SM_c$ (Schwerlinie) und $SH = -2SU$ (Eulergerade). Wie kann man damit den Beweis führen? Es gilt auch $H_c = M_c$.

E. Peripheriewinkelsatz

Umkreis, Höhen, Winkelsymmetralen

71. In einem Viereck bezeichnen wir die Winkel der Reihe nach mit α, β, γ und δ. Ein Sehnenviereck ist ein Viereck, dessen vier Eckpunkte auf einem Kreis liegen. Man zeige, dass ein Viereck genau dann ein Sehnenviereck ist, wenn $\alpha + \gamma = 180^0$ gilt. (Es gilt dann auch $\beta + \delta = 180^0$, da die Winkelsumme im Viereck ja 360^0 ist.)

72. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und U der Umkreismittelpunkt. Man bestimme die Winkel in den Dreiecken $\triangle ABU$, $\triangle BCU$ und $\triangle ACU$.
73. Seien M_a, M_b und M_c die Seitenmitten und H_a, H_b und H_c die Höhenfußpunkte eines Dreiecks $\triangle ABC$. Seien a, b und c die Seitenlängen, U der Umkreismittelpunkt und r der Umkreisradius. Man zeige $\frac{|AH_b|}{c} = \frac{|AH_c|}{b} = \frac{|UM_a|}{r}$. Analog gilt $\frac{|BH_a|}{c} = \frac{|BH_c|}{a} = \frac{|UM_b|}{r}$ und $\frac{|CH_a|}{b} = \frac{|CH_b|}{a} = \frac{|UM_c|}{r}$. Hinweis: Die Dreiecke $\triangle ABH_b$, $\triangle ACH_c$ und $\triangle UM_aB$ sind ähnlich (Beispiel 72).
74. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Ein Kreis, der durch A und B geht, schneide die Seite $\overline{AC}$ im Punkt F und die Seite $\overline{BC}$ im Punkt E. Man bestimme die Winkel im Dreieck $\triangle FEC$. Sei V der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle FEC$. Man zeige, dass $\ell(C,V)$ senkrecht auf $\ell(A,B)$ steht. Hinweis: Beispiel 72 auf $\triangle FEC$ anwenden.
75. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit $\alpha \neq \beta$. Sei W_c der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale durch C mit der Seite $\overline{AB}$. Sei P der Schnittpunkt der Gerade $\ell(A,B)$ mit der Tangente im Punkt C an den Umkreis. Man zeige $|PC| = |PW_c|$. Hinweis: Tangentenwinkelsatz.
76. In einem spitzwinkeligen Dreieck $\triangle ABC$ sei D der Fußpunkt der Höhe durch C, E der Fußpunkt der Höhe durch A und F der Fußpunkt der Höhe durch B. Man zeige $\measuredangle BED = \measuredangle CEF = \alpha$, $\measuredangle AFD = \measuredangle CFE = \beta$ und $\measuredangle ADF = \measuredangle BDE = \gamma$. Hinweis: Die Punkte D und E liegen auf dem Kreis mit Durchmesser $\overline{AC}$.
77. Sei $\triangle ABC$ ein spitzwinkeliges Dreieck und H der Höhenschnittpunkt. Das Dreieck, dessen Ecken die Höhenfußpunkte sind, heißt Höhenfußpunktdreieck. Mit Hilfe von Beispiel 76 zeige man, dass H der Inkreismittelpunkt des Höhenfußpunktdreiecks ist.
78. Sei $\triangle ABC$ ein spitzwinkeliges Dreieck. Das Dreieck, dessen Ecken die Höhenfußpunkte sind, heißt Höhenfußpunktdreieck. Das Dreieck, dessen Seiten die Tangenten an den Umkreis in den Punkten A, B und C sind, heißt Tangentendreieck. Man zeige, dass die einander entsprechenden Seiten des Höhenfußpunktdreiecks und des Tangentendreiecks zueinander parallel liegen. Hinweis: Tangentenwinkelsatz, Beispiel 76.
79. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck, E ein Punkt auf $\overline{BC}$ und F einer auf $\overline{AC}$. Sei $\tilde{w}_\gamma$ die Gerade durch C, die die beiden Außenwinkel bei C halbiert. Sei N der Schnittpunkt $\neq C$ von $\tilde{w}_\gamma$ mit dem Umkreis von $\triangle BCF$ und M der Schnittpunkt $\neq C$ von $\tilde{w}_\gamma$ mit dem Umkreis von $\triangle ACE$. Dann sind die Dreiecke $\triangle AEM$ und $\triangle BFN$ gleichschenkelig und zueinander ähnlich. (Thebault) Hinweis: Drücke die Winkel der Dreiecke $\triangle AEM$ und $\triangle BFN$ mit Hilfe des Peripheriewinkelsatzes durch γ aus.
80. Zum Südpolsatz: Man zeige, dass der Eckpunkt A und der Ankreismittelpunkt I_c gleichen Abstand vom Südpol P haben. Hinweis: Man zeige, dass das Dreieck $\triangle API_c$ gleichschenkelig ist. Die innere und äußere Winkelsymmetrale durch A stehen aufeinander senkrecht.
81. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Ankreismittelpunkten I_a und I_b. Sei Q der Schnittpunkt $\neq C$ der äußeren Winkelsymmetrale durch den Eckpunkt C mit dem Umkreis. Dann hat Q gleichen Abstand zu den vier Punkten A, B, I_a und I_b. (Nordpolsatz) Hinweis: Vorgangsweise analog zum Beweis des Südpolsatzes.
82. Es sei I der Inkreismittelpunkt eines Dreiecks $\triangle ABC$ und k ein Kreis durch die Punkte A und B. Dieser Kreis schneide die Gerade $\ell(A,I)$ in den Punkten A und P, die Gerade $\ell(B,I)$ in den Punkten B und Q, die Gerade $\ell(A,C)$ in den Punkten A und R und die Gerade $\ell(B,C)$ in den Punkten B und S, wobei die Punkte A, B, P, Q, R und S paarweise verschieden sind und R beziehungsweise S auf den Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ liegen. Man zeige, dass die Geraden $\ell(P,S)$, $\ell(Q,R)$ und $\ell(C,I)$ einander in einem Punkt schneiden. (ÖMO 2015) Hinweis: Winkel bei den Punkten R und S berechnen.

Kreise

83. Seien A, B, C und D vier Punkte und P der Schnittpunkt der Geraden $\ell(A,B)$ und $\ell(C,D)$, wobei diese fünf Punkte alle voneinader verschieden seien. Wenn $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ gilt, dann liegen die vier Punkte A, B, C und D auf einem Kreis. (Umkehrung des Sehen-Sekantensatzes)

Hinweis: Die Dreiecke $\triangle PAC$ und $\triangle PDB$ sind ähnlich, Peripheriewinkelsatz. Oder: Vorgangsweise wie bei der Umkehrung des Strahlensatzes.

84. Sei $\overline{AB}$ eine Strecke und C ein Punkt auf $\overline{AB}$. Sei k_1 der Kreis mit Durchmesser $\overline{AC}$ und k_2 der Kreis mit Durchmesser $\overline{CB}$ (sie berühren einander in C). Sei g eine gemeinsame Tangente der beiden Kreise, jedoch nicht die durch C. Sie berührt k_1 im Punkt P und k_2 im Punkt Q. Man zeige, dass die Punkte A, P, Q und B auf einem Kreis liegen. Hinweis: Wir bezeichnen $\measuredangle BAP$ mit α. Man drücke die Winkel des Vierecks $APQB$ durch α aus.
85. Der Kreis k_1 mit Mittelpunkt M und der Kreis k_2 mit Mittelpunkt N schneiden einander in den Punkten P und Q. Die Gerade g durch M und P schneide k_2 im Punkt U und die Gerade h durch N und P schneide k_1 im Punkt V, wobei U und V ungleich P sind. Man zeige, dass die Punkte M, V, U, N und Q auf einem Kreis liegen. Hinweis: Die Dreiecke $\triangle MNP$ und $\triangle MNQ$ sind sind zueinander kongruent. Die Dreiecke $\triangle UNP$ und $\triangle VMP$ sind gleichschenkelig.
86. Seien k_1 und k_2 zwei Kreise, die einander in den Punkten A und B schneiden. Sei g eine Gerade durch A und h eine durch B, jedoch sei keine der Geraden eine Tangente an einen der Kreise. Seien G_1 und G_2 die Schnittpunkte $\neq A$ der Gerade g mit k_1 und k_2. Seien H_1 und H_2 die Schnittpunkte $\neq B$ der Gerade h mit k_1 und k_2. Man zeige, dass die Strecke $\overline{G_1H_1}$ parallel zur Strecke $\overline{G_2H_2}$ liegt.
87. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Seitenlängen a, b und c. Auf den Verlängerungen der Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ tragen wir von C aus nach außen die Strecke der Länge c ab und erhalten so die Punkte C_a und C_b. Auf den Verlängerungen der Seiten $\overline{BA}$ und $\overline{CA}$ tragen wir von A aus nach außen die Strecke der Länge a ab und erhalten so die Punkte A_b und A_c. Auf den Verlängerungen der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CB}$ tragen wir von B aus nach außen die Strecke der Länge b ab und erhalten so die Punkte B_a und B_c. Man zeige, dass die Punkte A_b, A_c, B_a, B_c, C_a und C_b auf einem Kreis liegen. (Satz von Conway) Hinweis: Gleichschenkelige Dreiecke helfen beim Bestimmen der Winkel.
88. Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck mit Umkreis k. Seien k_{AB}, k_{BC}, k_{CD} und k_{DA} die Bögen, in die k durch die Punkte A, B, C und D geteilt wird. Sei P der Mittelpunkt von k_{AB}, Q der von k_{BC}, R der von k_{CD} und S der von k_{DA}. Man zeige, dass $\ell(P,R)$ senkrecht auf $\ell(Q,S)$ steht.
89. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit $|AC| = |BC|$. Wir wählen zwei Punkte U und V auf der Seite $\overline{AB}$. Seien P und Q die Schnittpunkte der Geraden $\ell(C,U)$ und $\ell(C,V)$ mit dem Umkreis. Man zeige, dass die vier Punkte P, Q, U und V auf einem Kreis liegen.
90. Der Kreis k_1 mit Mittelpunkt M und der Kreis k_2 mit Mittelpunkt N schneiden einander in den Punkten P und Q. Eine Gerade g durch P schneidet k_1 im Punkt A und k_2 im Punkt B, wobei A und B ungleich P sind. Sei R der Schnittpunkt der Geraden $\ell(A,M)$ und $\ell(B,N)$. Man zeige, dass M, R, Q und N auf einem Kreis liegen und ebenso A, R, Q und B. Hinweis: Sei $\measuredangle PMQ = 2\alpha$, $\measuredangle PNQ = 2\beta$ und $\measuredangle APQ = \gamma$. Damit berechne man die anderen Winkel. Man erhält $\measuredangle MQN = \measuredangle MRN = \measuredangle ARB = \measuredangle AQB = 180^0 - \alpha - \beta$.

Lote

91. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H. Sei F der Fußpunkt der Höhe durch C und M der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$. Sei K der Mittelpunkt der Höhe durch A und L der Mittelpunkt der Höhe durch B. Dann liegen die fünf Punkte F, M, K, H und L auf einem Kreis.
92. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und F der Fußpunkt der Höhe durch C. Seien P und Q die Fußpunkte der Lote von F auf die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$. Sei g eine Parallele zur Seite $\overline{AB}$ und U und V ihre Schnittpunkte mit $\ell(B,C)$ und $\ell(A,C)$. Dann liegen die vier Punkte P, Q, U und V auf einem Kreis.
93. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck, H der Fußpunkt der Höhe durch C und M der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$. Seien F und G die Fußpunkte der Lote von A und von B auf die Winkelsymmetrale w_γ. Dann liegen die vier Punkte H, F, M und G auf einem Kreis. Hinweis: Bestimme $\measuredangle GFH$

(Peripheriewinkelsatz) und $\measuredangle GMH$ (ist D der Schnittpunkt von $\ell(B,G)$ und $\ell(A,C)$, dann gilt $|BG| = |DG|$ und $\overline{MG} \parallel \overline{AC}$).

94. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und F der Fußpunkt der Höhe durch C. Seien P und Q die Fußpunkte der Lote von F auf die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$. Seien U und V die Fußpunkte der Lote von F auf die Höhen durch A und durch B. Dann liegen die vier Punkte P, Q, U und V auf einer Gerade. Hinweis: Zeige $\measuredangle FPQ = \measuredangle FPV$.
95. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und M_b und M_c die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{AB}$. Sei P der Fußpunkt des Lots von A auf die Symmetrale des Innenwinkels bei B. Sei Q der Fußpunkt des Lots von A auf die Symmetrale des Innenwinkels bei C. Dann liegen die vier Punkte M_b, M_c, P und Q auf einer Gerade. Hinweis: Zeige $\measuredangle AM_cM_b = \beta$ und $\measuredangle AM_cP = \beta$.
96. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und F und G die Punkte, in denen der Inkreis die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ berührt. Sei P der Fußpunkt des Lots von A auf die Symmetrale des Innenwinkels bei B. Sei Q der Fußpunkt des Lots von B auf die Symmetrale des Innenwinkels bei A. Dann liegen die vier Punkte F, G, P und Q auf einer Gerade. Hinweis: Zeige $\measuredangle AFP = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ und $\measuredangle GFC = 90^0 - \frac{1}{2}\gamma$.
97. Sei $\triangle ABC$ ein spitzwinkeliges Dreieck und W_c der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale durch C mit der Seite $\overline{AB}$. Seien P_a und P_b die Fußpunkte der Lote von W_c auf $\ell(B,C)$ und $\ell(A,C)$. Weiters sei F der Fußpunkt der Höhe durch C. Dann gilt $\measuredangle P_aFC = \measuredangle P_bFC$.
98. Sei $ABCD$ ein Viereck, dessen Diagonalen senkrecht aufeinander stehen. Sei U der Schnittpunkt der Diagonalen und P, Q, R und S die Fußpunkte der Lote von U auf $\ell(A,B)$, $\ell(B,C)$, $\ell(C,D)$ und $\ell(D,A)$. Man zeige, dass die Punkte P, Q, R und S auf einem Kreis liegen.
99. Sei $ABCD$ ein Viereck. Seien A^* und B^* die Fußpunkte der Lote von den Eckpunkten A und B auf die Gerade $\ell(C,D)$. Seien C^* und D^* die Fußpunkte der Lote von den Eckpunkten C und D auf die Gerade $\ell(A,B)$. Dann hat das Viereck $A^*B^*C^*D^*$ dieselben Winkel wie das Viereck $ABCD$.
100. Sei $ABCD$ ein Viereck. Seien A^* und C^* die Fußpunkte der Lote von den Eckpunkten A und C auf die Gerade $\ell(B,D)$. Seien B^* und D^* die Fußpunkte der Lote von den Eckpunkten B und D auf die Gerade $\ell(A,C)$. Dann hat das Viereck $A^*B^*C^*D^*$ dieselben Winkel wie das Viereck $ABCD$.

F. Inkreis, Ankreise, Fläche

Gleichungen und Ungleichungen

101. Für jedes Dreieck gilt $F^2 = \varrho\varrho_a\varrho_b\varrho_c$, wobei ϱ der Inkreisradius und ϱ_a, ϱ_b und ϱ_c die Ankreisradien sind.
102. Für jedes Dreieck gilt $\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} = \frac{1}{\varrho}$.
103. Für jedes Dreieck gilt $\varrho_a\varrho_b + \varrho_a\varrho_c + \varrho_b\varrho_c = s^2$, wobei s der halbe Umfang ist.
104. Für jedes Dreieck gilt $\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = 4r$, wobei r der Umkreisradius ist.
105. Seien a, b und c die Längen der Seiten eines Dreiecks. Dann gilt $abc \geq 8(s-a)(s-b)(s-c)$, wobei $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ist (Schur-Ungleichung). Hinweis: Sei $x = s-a$, $y = s-b$ und $z = s-c$. Daraus werden a, b und c berechnet. Es gilt $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, ...
106. Sei r der Umkreisradius und ϱ der Inkreisradius eines Dreiecks. Dann gilt $r \geq 2\varrho$ (Ungleichung von Euler). Hinweis: $r = \frac{abc}{4F}$, $\varrho = \frac{F}{s}$, $F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, Beispiel 105.
107. Sei r der Umkreisradius und ϱ_c ein Ankreisradius. Man zeige $\varrho_c < 4r$. Hinweis: $r = \frac{abc}{4F}$, $\varrho_c = \frac{F}{s-c}$, Heronformel, $c = 2s - a - b$. Es gilt $s - a - b < 0$ und $s^2 - ab > 0$ wegen $s > a$ und $s > b$.
108. Sei F die Fläche und s der halbe Umfang eines Dreiecks. Dann gilt $F \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}s^2$. Gleichheit gilt nur, wenn das Dreieck gleichseitig ist. Hinweis: geometrisch-arithmetische Ungleichung: $(xyz)^{1/3} \leq \frac{1}{3}(x+y+z)$ mit $x = s-a$, $y = s-b$ und $z = s-c$.
109. Für die Ankreisradien und die Höhen eines Dreiecks gilt $\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$.

110. Seien M_a, M_b und M_c die Seitenmitten eines Dreiecks $\triangle ABC$. Sei ϱ der Inkreisradius, U der Umkreismittelpunkt und r der Umkreisradius. Ist $\triangle ABC$ spitzwinkelig, dann gilt $|UM_a| + |UM_b| + |UM_c| = r + \varrho$. Für ein stumpfwinkeliges Dreieck ist einer der links stehenden Summanden mit einem Minuszeichen zu versehen. (Satz von Carnot) Hinweis: Wir multiplizieren die zu beweisende Gleichung mit $a + b + c$. Es gilt $\varrho(a + b + c) = 2F = |UM_a|a + |UM_b|b + |UM_c|c$. Jetzt Beispiel 73.
111. Sei I der Mittelpunkt und ϱ der Radius des Inkreises eines Dreiecks. Weiters sei I_a der Mittelpunkt und ϱ_a der Radius des Ankreises an die Seite $\overline{BC}$. Die Punkte, in denen diese beiden Kreise die (Verlängerung der) Seite $\overline{AB}$ berühren, bezeichnen wir mit P und P_a. Man zeige, dass die Dreiecke $\triangle IPB$ und $\triangle BP_aI_a$ zueinander ähnlich sind. Man schließe, dass $\frac{\varrho}{s-b} = \frac{s-c}{\varrho_a}$ gilt. Hinweis: Bei den Berührpunkten haben die Dreiecke rechte Winkel. Die innere und äußere Winkelsymmetrale im Punkt B stehen senkrecht aufeinander.
112. Es gilt $\varrho = \frac{F}{s}$ und $\varrho_a = \frac{F}{s-a}$. Nach Beispiel 111 gilt $\frac{\varrho}{s-b} = \frac{s-c}{\varrho_a}$. Man eliminiere ϱ und ϱ_a aus diesen Gleichungen und berechne dadurch F. Das gibt einen anderen Beweis der Heronschen Flächenformel.

Weitere besondere Punkte

113. Sei k der Inkreis und k_a, k_b und k_c die drei Ankreise eines Dreiecks $\triangle ABC$. Sei T_a der Punkt, in dem k_b die Verlängerung der Seite $\overline{BC}$ berührt, und T_b der Punkt, in dem k_a die Verlängerung der Seite $\overline{AC}$ berührt. Weiters sei T_c der Punkt, in dem k die Seite $\overline{AB}$ berührt. Mit Hilfe von der Umkehrung des Satzes von Ceva zeige man, dass die die drei Geraden $\ell(A, T_a)$, $\ell(B, T_b)$ und $\ell(C, T_c)$ einander in einem Punkt schneiden.
114. Seien I_a, I_b und I_c die Ankreismittelpunkte. Mit Hilfe der Umkehrung des Satzes von Carnot zeige man, dass die Senkrechte durch I_a auf $\ell(B, C)$, die Senkrechte durch I_b auf $\ell(A, C)$ und die Senkrechte durch I_c auf $\ell(A, B)$ einander in einem Punkt V (Bevanpunkt) schneiden.
115. Sei V wie in Beispiel 114. Durch Berechnen geeigneter Winkel zeige man, dass I_a, I_b und I_c den gleichen Abstand von V haben.
116. Seien I der Inkreismittelpunkt und I_a, I_b und I_c die Ankreismittelpunkte. Mit Hilfe der Umkehrung des Satzes von Carnot zeige man, dass die Senkrechte durch I auf $\ell(A, B)$, die Senkrechte durch I_b auf $\ell(B, C)$ und die Senkrechte durch I_a auf $\ell(A, C)$ einander in einem Punkt W schneiden.
117. Sei W wie in Beispiel 116. Durch Berechnen geeigneter Winkel zeige man, dass I, I_a und I_b den gleichen Abstand von W haben.

II. Trigonometrie

G. Dreieck

Gleichungen und Ungleichungen

118. Für die Winkel α, β und γ eines Dreiecks gilt $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$ und $\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2} = \cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}$. Hinweis: $\tan(180^0 - \varphi) = -\tan\varphi$, $\cot(90^0 - \varphi) = \tan\varphi$ und $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$.
119. Für die Winkel eines Dreiecks gilt $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}$. Hinweis: Cosinussatz, Beispiel 105.
120. Für ein beliebiges Dreieck zeige man $F = 2r^2 \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.
121. Man zeige $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ und $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$. Hinweis: Sei $\varphi = \frac{\alpha+\beta}{2}$ und $\psi = \frac{\alpha-\beta}{2}$. Dann gilt $\alpha = \varphi + \psi$ und $\beta = \varphi - \psi$. Summensatz.
122. Für ein beliebiges Dreieck gilt $\tan\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b}\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$ (Tangenssatz). Weitere Formeln erhält man durch zyklisches Vertauschen. Hinweis: Aus dem Sinussatz ergibt sich $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$. Dann Beispiel 121.

123. Für ein beliebiges Dreieck gilt $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ und $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$. Weitere Formeln erhält man durch zyklisches Vertauschen. Hinweis: $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$ und $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$. Jetzt Cosinussatz.
124. Für ein beliebiges Dreieck gilt $(b+c)\sin\frac{\alpha}{2} = a\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$ und $(b-c)\cos\frac{\alpha}{2} = a\sin\frac{\beta-\gamma}{2}$ (Mollweidsche Formeln). Weitere Formeln erhält man durch zyklisches Vertauschen. Hinweis: Summensatz für $\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$ und $\sin\frac{\beta-\gamma}{2}$. Dann Beispiel 123.
125. In jedem Dreieck gilt $s = 4r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ und $s-a = 4r\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$. Hinweis: $r = \frac{abc}{4F}$, Beispiel 123, Heronsche Flächenformel.
126. Für ein beliebiges Dreieck zeige man $\varrho = 4r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

Sätze über das Dreieck

127. Für zwei Winkel α und β mit $\alpha+\beta < 180^0$ gilt $\sin\alpha = \sin\beta \iff \alpha = \beta$. Damit zeige man
(a) Für jedes Dreieck $\triangle ABC$ gilt: $|CA| = |CB| \iff \measuredangle BAC = \measuredangle ABC$ (Sinussatz).
(b) Ein Punkt liegt auf der Symmetrale eines Winkels ($< 180^0$) genau dann, wenn er von den beiden Schenkeln des Winkels gleichen Normalabstand hat.
128. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und D der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale durch C mit der Seite $\overline{AB}$. Mit Hilfe des Sinussatzes zeige man $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|BC|}$. Hinweis: Es gilt $\sin\varphi = \sin(180^0 - \varphi)$.
129. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und M und N Punkte auf der Seite $\overline{AB}$, sodass die Winkel $\measuredangle ACM$ und $\measuredangle BCN$ gleich sind. Mit Hilfe des Sinussatzes zeige man $\frac{AM\cdot AN}{BM\cdot BN} = \frac{|AC|^2}{|BC|^2}$.
130. Auf den Seiten eines Dreiecks $\triangle ABC$ werden außen Dreiecke $\triangle BCA_1$, $\triangle CAB_1$ und $\triangle ABC_1$ aufgesetzt, sodass der Winkel bei A gleich φ, der bei B gleich ψ und der bei C gleich χ ist. Wir nehmen an, dass diese Winkel zwischen 0^0 und 90^0 liegen. Man zeige, dass die drei Geraden $\ell(A,A_1)$, $\ell(B,B_1)$ und $\ell(C,C_1)$ einander in einem Punkt schneiden. Hinweis: Sei A_2 der Schnittpunkt von $\ell(B,C)$ und $\ell(A,A_1)$. Analog seien B_2 und C_2 definiert. Es genügt $\frac{AC_2}{C_2B}\frac{BA_2}{A_2C}\frac{CB_2}{B_2A} = 1$ zu zeigen. Durch mehrmaliges Anwenden des Sinussatzes zeige man $\frac{BA_2}{A_2C} = \frac{|AB|\sin\chi\sin(\beta+\psi)}{|AC|\sin\psi\sin(\gamma+\chi)}$.

Dreidimensionale Körper

131. Man bestimme den Winkel zwischen der Diagonale und einer Kante eines Würfels.
132. Man bestimme den Winkel zwischen zwei Seitenflächen eines regelmäßigen Tetraeders.

Ebene Figuren

133. Sei $ABCD$ ein Quadrat mit Seitenlänge 1. Über der Seite $\overline{AB}$ wird im Innern des Quadrats ein gleichschenkeliges Dreieck mit Basiswinkel 15^0 errichtet. Seine Spitze sei P. Man zeige, dass das Dreieck $\triangle CDP$ gleichseitig ist. Hinweis: Man berechne $|CP|$ mit Hilfe des Cosinussatzes.
134. Es seien $a = 4$, $b = 5$ und $c = 6$ die Längen der Seiten eines Dreiecks. Dann gilt $\gamma = 2\alpha$.
135. In einem Dreieck gelte $\alpha = 2\beta$. Man zeige, dass dann auch $a^2 = b^2 + bc$ gilt. Hinweis: Alle drei Winkel lassen sich durch β ausdrücken. Der Sinussatz liefert zwei Gleichungen, aus denen man β eliminiert. ($\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$, $\sin 3\beta = 3\sin\beta\cos^2\beta - \sin^3\beta$)
136. In einem Dreieck gelte $\alpha = \beta + 90^0$. Man zeige, dass dann auch $c^2(a^2+b^2) = (a^2-b^2)^2$ gilt. Hinweis: Alle drei Winkel lassen sich durch β ausdrücken. Der Sinussatz liefert zwei Gleichungen, aus denen man β eliminiert. ($\sin(90^0 \pm \beta) = \cos\beta$, $\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta$)
137. Seien A, B, C und D aufeinanderfolgende Eckpunkte eines regelmäßigen Siebenecks. Sei P der Schnittpunkt der Geraden $\ell(A,C)$ und $\ell(B,D)$. Dann gilt $|AB| + |AP| = |AD|$. Hinweis: Sei $\varphi = \frac{180^0}{7}$. Die in den Dreiecken mit Eckpunkten P, A, B, C und D auftretenden Winkel sind Vielfache von φ.
138. Sei k ein Halbkreis mit Durchmesser $\overline{PQ}$ und g die Tangente im Punkt Q. Seien A und B Punkte auf k und C der Schnittpunkt der Tangenten in den Punkten A und B. Sei U der Schnittpunkt von $\ell(P,A)$ mit g, sei V der Schnittpunkt von $\ell(P,B)$ mit g und sei W der Schnittpunkt von $\ell(P,C)$ mit g. Man zeige $|UW| = |VW|$. Hinweis: Wir können als

Halbkreis den Einheitskreis im Koordinatensystem oberhalb der x-Achse wählen. Dann gilt $A = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ und $B = (\cos\beta, \sin\beta)$ mit $0^0 < \alpha < \beta < 180^0$.

139. Satz von Napoleon: Auf die Seiten eines Dreiecks $\triangle ABC$ mit Seitenlängen a, b und c werden außen gleichschenkelige Dreiecke mit Basiswinkel 30^0 aufgesetzt. Die Spitzen D, E und F dieser Dreiecke bilden ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $\sqrt{\frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{bc}{3}\cos\alpha + \frac{bc}{\sqrt{3}}\sin\alpha}$. Setzt man die gleichschenkeligen Dreiecke innen auf, so bilden deren Spitzen U, V und W ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $\sqrt{\frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{bc}{3}\cos\alpha - \frac{bc}{\sqrt{3}}\sin\alpha}$. Man zeige, dass $\#ABC = \#DEF - \#UVW$ gilt.
140. Sei $\triangle ABC$ ein gleichseitiges Dreieck. Sei P ein Punkt auf dem Bogen des Umkreises zwischen A und B. Dann gilt $|PC| = |PA| + |PB|$. (Satz von Pompeiu) Hinweis: Sei U der Umkreismittelpunkt und r der Umkreisradius: $|UP| = |UA| = |UB| = |UC| = r$.

H. Viereck

Sehnenviereck

141. Seien a, b, c und d die Längen der Seiten eines Sehnenvierecks und α der von den Seiten a und b eingeschlossene Winkel. Man zeige, dass $\cos\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2ab+2cd}$ gilt. Hinweis: Der von den Seiten c und d eingeschlossene Winkel beträgt $180^0 - \alpha$. Es gilt $\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$. Sei e die Längen der Diagonale, die das Viereck in zwei Dreiecke teilt, eines mit Seitenlängen a, b und e, das andere mit Seitenlängen c, d und e. Man wende den Cosinussatz auf diese beiden Dreiecke an.
142. Seien a, b, c und d die Längen der Seiten eines Sehnenvierecks und e die Länge der Diagonale, die das Viereck so teilt, dass auf einer Seite a und b, auf der anderen Seite c und d liegen. Man zeige $e^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$. Hinweis: Cosinussatz und Beispiel 141.
143. Seien a, b, c und d die Längen der Seiten eines Sehnenvierecks und e und f die der Diagonalen. Mit Hilfe von Beispiel 142 zeige man $ef = ac + bd$. (Satz von Ptolemäus)
144. Seien a, b, c und d die Längen der Seiten eines Sehnenvierecks und F seine Fläche. Man zeige, dass dann $16F^2 = (2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$ gilt. Hinweis: Sei β der von den Seiten a und b eingeschlossene Winkel. Dann ist $180^0 - \beta$ der von den Seiten c und d eingeschlossene Winkel. Es gilt $\sin\beta = \sin(180^0 - \beta)$. Man erhält F als Summe zweier Dreiecksflächen. Dann Beispiel 141.
145. Seien a, b, c und d die Längen der Seiten eines Sehnenvierecks mit Umkreisradius r und Fläche F. Sei e die Länge der Diagonale, die das Viereck so teilt, dass auf einer Seite a und b, auf der anderen Seite c und d liegen. Man zeige $r = \frac{(ab+cd)e}{4F}$. Hinweis: Man zeige $\sin\beta = \frac{e}{2r}$ mit Hilfe des Peripheriewinkelsatzes. Dann berechne man F als Summe zweier Dreiecksflächen wie in Beispiel 144.
146. Mit Hilfe von Beispiel 144 zeige man, dass $F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ für die Fläche F eines Sehnenvierecks mit Seitenlängen a, b, c und d gilt, wobei $s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$ der halbe Umfang ist. (Formel von Brahmagupta)

Andere Vierecke

147. Seien a und b die Längen der Seiten und e und f die Längen der Diagonalen eines Parallelogramms. Man zeige $2a^2 + 2b^2 = e^2 + f^2$. Hinweis: Man berechne e und f mit Hilfe des Cosinussatzes. Es gilt $\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$.
148. Sei $ABCD$ ein Viereck. Man zeige, dass die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ genau dann senkrecht aufeinander stehen, wenn $|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |DA|^2$ gilt. Hinweis: Durch viermaliges Anwenden des Cosinussatzes zeige man $|AB|^2 + |CD|^2 - |BC|^2 - |DA|^2 = \pm 2|AC| \cdot |BD| \cos\varphi$, wobei φ ein Winkel ist, den die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ einschließen ($\cos(180^0 - \varphi) = -\cos\varphi$).

Stewarts Formel

149. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Seitenlängen a, b und c. Sei s die Länge der Schwerlinie durch den Eckpunkt C. Man zeige mit Hilfe von Stewarts Formel, dass $s^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$ gilt.
150. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Seitenlängen a, b und c, mit Umkreismittelpunkt U, Umkreisradius r und Schwerpunkt S. Man zeige $|US|^2 = r^2 - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$. Hinweis: Sei M der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ und $s = |CM|$ die Länge der Schwerlinie durch C. Man drücke $|US|^2$ durch s, $r = |UC|$ und $|UM|$ aus (S teilt die Schwerlinie im Verhältnis 1:2). Pythagoras: $|UM|^2 = r^2 - \frac{c^2}{4}$.
151. Sei $ABCD$ ein Viereck mit Seitenlängen a, b, c und d und Diagonallängen e und f. Sei M der Mittelpunkt der Diagonale $\overline{AC}$ und N der der Diagonale $\overline{BD}$. Sei p der Abstand dieser Mittelpunkte. Man zeige $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4p^2$. Hinweis: Beispiel 149 für $\triangle ABD$ mit Schwerlinie $\overline{AN}$, für $\triangle CBD$ mit Schwerlinie $\overline{CN}$ und für $\triangle ACN$ mit Schwerlinie $\overline{MN}$.
152. Man beweise den Sehnensatz mit Stewarts Formel.

I. Komplexen Zahlen

Rechenübungen

153. Man berechne $(1-i)^3$, $(1+i)(1-i)(2+i)$, i^{71}, $(3+4i)^{-1}$, $\frac{1-2i}{2+i}$
154. Man berechne $\sqrt{2+i2\sqrt{3}}$
155. Man berechne die vierten Wurzeln aus $-8+i8\sqrt{3}$
156. Man löse in $\mathbb{C}$: $z^2 - (6-2i)z + 8 + 2i = 0$

Eulerformel

157. Man schreibe als Summe: $\cos^2\alpha\sin\alpha$, $\sin^3\alpha\cos 2\alpha$
158. Man schreibe $\sin^4\alpha$ als Summe.
159. Für die Winkel eines Dreiecks gilt $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.
160. Für die Winkel eines Dreiecks gilt $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$
161. Für die Winkel eines Dreiecks gilt $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1$
162. Für die Winkel eines Dreiecks gilt $\cot\alpha\cot\beta + \cot\beta\cot\gamma + \cot\gamma\cot\alpha = 1$
163. Gilt $\alpha+\beta+\gamma = 360^0$, dann auch $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1$.
164. Gilt $\alpha+\beta+\gamma = 90^0$, dann auch $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma + 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 1$

Betrag

165. Für eine komplexe Zahl z bezeichne $\Re(z)$ den Realteil von z (ist $z = p + iq$, dann $\Re(z) = p$). Für komplexe Zahlen w und z zeige man $\Re(w+z) = \Re(w) + \Re(z)$ und $\Re(z) \le |z|$.
166. Seien w und z komplexe Zahlen und $u = \frac{1}{w+z}|w+z|$. Mit Hilfe der Formel $|z_1z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$ zeige man $|u| = 1$. Es gilt $|w+z| = (w+z)u = wu + zu = \Re(wu+zu)$, da $wu+zu$ eine reelle Zahl ist. Mit Hilfe von Beispiel 165 zeige man $|w+z| \le |w| + |z|$. (Für $w+z=0$ ist die Ungleichung $|w+z| \le |w|+|z|$ trivial.)

J. Geometrie mit komplexen Zahlen – Drehstreckungen

Quadrate - Drehung um 90 Grad

167. Über den Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ eines Dreiecks $\triangle ABC$ errichten wir nach außen die Quadrate ACC_1A_1 und BB_2C_2C. (Die über C liegenden Punkte sind C_1 und C_2.) Die Mittelpunkte dieser Quadrate seien M_1 und M_2. Sei D der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ und E der der Strecke $\overline{C_1C_2}$. Man zeige, dass das Viereck DM_2EM_1 ein Quadrat ist.
168. Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck. Über den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ errichten wir nach außen Quadrate $ABKL$ und $CDMN$. Die Mittelpunkte der Strecken $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{KM}$ und $\overline{NL}$ bilden ein Quadrat (wenn sie nicht zusammenfallen).
169. Sei $A_1A_2A_3A_4$ ein Quadrat. An jeder Ecke dieses Quadrats wird ein beliebiges Quadrat angehängt. Das sind die vier Quadrate $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, $A_3B_3C_3D_3$ und $A_4B_4C_4D_4$. Die Ecken werden jeweils im Gegenuhrzeigersinn beschriftet. Sei M_1 der Mittelpunkt der Strecke $\overline{D_1B_2}$, M_2 der der Strecke $\overline{D_2B_3}$, M_3 der der Strecke $\overline{D_3B_4}$ und M_4 der der Strecke

$\overline{D_4B_1}$. Man zeige, dass die Strecken $\overline{M_1M_3}$ und $\overline{M_2M_4}$ gleich lang sind und senkrecht aufeinander stehen.

170. Über den Seiten eines Dreiecks $\triangle ABC$ errichten wir nach außen die Quadrate ABB_1A_1, BCC_2B_2 und CAA_3C_3. (Die über B liegenden Punkte sind B_1 und B_2. Die über C liegenden Punkte sind C_2 und C_3.) Weiters bilden wir die Parallelogramme BB_1UB_2 und CC_2VC_3. Man zeige, dass das Dreieck $\triangle UAV$ gleichschenkelig und rechtwinkelig ist.

Gleichseitige Dreiecke

171. Über den Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ eines Dreiecks $\triangle ABC$ werden gleichseitige Dreiecke errichtet (beide innen oder beide außen). Seien S_a und S_b ihre Spitzen und M_a und M_b die Mittelpunkte der Strecken $\overline{S_aC}$ und $\overline{S_bC}$. Weiters sei M_c der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$. Das Dreieck $\triangle M_aM_bM_c$ ist dann gleichseitig.
172. Über jeder Seite eines Dreiecks $\triangle ABC$ wird nach außen und nach innen ein gleichseitiges Dreieck errichtet. Die Spitzen der Dreiecke außen seien A_1, B_1 und C_1. Die Spitzen der Dreiecke innen seien A_2, B_2 und C_2. Man zeige, dass der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AA_1}$ gleich dem Mittelpunkt der Strecke $\overline{B_2C_2}$ ist, und dass der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AA_2}$ gleich dem Mittelpunkt der Strecke $\overline{B_1C_1}$ ist.
    Sei M_a der Mittelpunkt der Strecke $\overline{B_1C_1}$, M_b der Mittelpunkt der Strecke $\overline{A_1C_1}$ und M_c der Mittelpunkt der Strecke $\overline{A_1B_1}$. Dann sind die Dreiecke $\triangle M_aM_bC$, $\triangle M_aM_cB$ und $\triangle M_bM_cA$ gleichseitig. Die Mittelpunkte dieser drei Dreiecke bilden ebenfalls ein gleichseitiges Dreieck.
173. Über der Seite $\overline{AB}$ eines Quadrats $ABCD$ wird im Innern des Quadrats ein gleichseitiges Dreieck errichtet. Sei S seine Spitze. Seien M_c und M_d die Mittelpunkte der Strecken $\overline{SC}$ und $\overline{SD}$. Weiters sei M der Mittelpunkt des Quadrats. Das Dreieck $\triangle M_cM_dM$ ist dann gleichseitig.
174. Sei $\triangle A_1A_2A_3$ ein gleichseitiges Dreieck. An jeder Ecke dieses Dreiecks wird ein beliebiges gleichseitiges Dreieck angehängt. Das sind die drei Dreiecke $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ und $A_3B_3C_3$. Die Ecken werden jeweils im Gegenuhrzeigersinn beschriftet. Sei M_1 der Mittelpunkt der Strecke $\overline{C_1B_2}$, M_2 der der Strecke $\overline{C_2B_3}$ und M_3 der der Strecke $\overline{C_3B_1}$. Man zeige, dass das Dreieck $\triangle M_1M_2M_3$ gleichseitig ist.

Basiswinkel 30 Grad und 45 Grad

175. Über jeder Seite eines konvexen Vierecks wird nach außen ein gleichschenkeliges Dreieck mit Basiswinkel 45^0 errichtet. Je zwei gegenüberliegende Spitzen dieser Dreiecke verbinden wir durch eine Strecke. Diese beiden Strecken sind gleich lang und stehen senkrecht aufeinander (Satz von Aubel). Weiters gilt: Die vier Mittelpunkte benachbarter Spitzen sind die Eckpunkte eines Quadrats.
176. Setzt man auf die vier Seiten eines Parallelogramms gleichschenkelige Dreiecke mit Basiswinkel 45^0, dann bilden die Spitzen dieser vier Dreiecke ein Quadrat. (Satz von Thebault)
177. Sei $ABCD$ ein Parallelogramm. Zu beiden Seiten beider Diagonalen werden gleichschenkelige Dreiecke mit Basiswinkel 45^0 errichtet. Man zeige, dass die Spitzen dieser Dreiecke ein Parallelogramm bilden, das kongruent zum ursprünglichen ist und zu diesem um 90^0 verdreht liegt.
178. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Über der Seite $\overline{BC}$ als Basis errichten wir nach innen ein gleichschenkeliges Dreieck mit Basiswinkel 30^0. Über den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ errichten wir nach außen Dreiecke, die bei A einen rechten und bei B bzw. C einen Winkel von 30^0 haben. Man zeige, dass die Spitzen der aufgesetzten Dreiecke ein gleichseitiges Dreieck bilden.
179. Sei $ABCD$ ein Parallelogramm. Über den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ als Basis werden nach außen gleichschenkelige Dreiecke mit Basiswinkel 30^0 errichtet. Über der Seite $\overline{AD}$ wird nach außen ein gleichseitiges Dreieck errichtet. Man zeige, dass die Spitzen der aufgesetzten Dreiecke ein gleichseitiges Dreieck bilden.
180. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Auf den Seiten dieses Dreiecks als Basis werden außen gleichschenkelige

Dreiecke mit Basiswinkel 45^0 aufgesetzt. Seien P, Q und R die Spitzen dieser Dreiecke. Auf den Seiten des Dreiecks $\triangle PQR$ als Basis werden innen gleichschenkelige Dreiecke mit Basiswinkel 45^0 aufgesetzt. Man zeige, dass ihre Spitzen die Seitenmitten des Dreiecks $\triangle ABC$ sind. (Satz von Neuberg)

Ähnliche Dreiecke

181. Über den Seiten eines Dreiecks $\triangle ABC$ errichten wir nach außen ähnliche Dreiecke $\triangle BCD$, $\triangle CAE$ und $\triangle ABF$ (die Winkel bei den erstgenannten Eckpunkten sind gleich, die bei den zweitgenannten und die bei den drittgenannten). Man zeige, dass die Schwerpunkte der Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle DEF$ gleich sind. Ist M der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ und N der der Strecke $\overline{DF}$, dann liegt $\overline{EC}$ parallel zu $\overline{MN}$ und ist doppelt so lang wie $\overline{MN}$.
182. Über den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ eines Parallelogramms $ABCD$ errichten wir nach außen ähnliche Dreiecke $\triangle PAB$ und $\triangle BCQ$ (die Winkel bei den erstgenannten Eckpunkten sind gleich, die bei den zweitgenannten und die bei den drittgenannten). Man zeige, dass das Dreieck $\triangle PDQ$ ähnlich zu den beiden aufgesetzten ist.
183. Über den vier Seiten eines beliebigen Vierecks $ABCD$ errichten wir ähnliche Dreiecke $\triangle ABE$, $\triangle CBF$, $\triangle CDG$ und $\triangle ADH$ (die Winkel bei den erstgenannten Eckpunkten sind gleich, die bei den zweitgenannten und die bei den drittgenannten), wobei das erste und das dritte Dreieck innen und das zweite und das vierte außen sitzen. Man zeige, dass das Viereck $\triangle EFGH$ ein Parallelogramm ist.

Anderes

184. Sei $\triangle ABC$ ein gleichseitiges Dreieck. Eine Gerade g parallel zu $\ell(B,C)$ schneidet $\overline{AB}$ im Punkt P und $\overline{AC}$ im Punkt Q. Sei D der Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks $\triangle APQ$ und E der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CP}$. Man zeige, dass 30^0, 60^0 und 90^0 die Winkel im Dreieck $\triangle BDE$ sind.
185. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Auf der Seite $\overline{BC}$ dieses Dreiecks als Basis wird außen ein gleichschenkeliges Dreiecke mit Basiswinkel 30^0 aufgesetzt, dessen Spitze wir P nennen. Auf der Seite $\overline{AC}$ wird außen ein gleichseitiges Dreieck aufgesetzt, dessen Spitze wir Q nennen. Weiters sei M der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$. Man zeige, dass 30^0, 60^0 und 90^0 die Winkel im Dreieck $\triangle QPM$ sind.
186. Sei $ABCDEF$ ein reguläres Sechseck. Sei M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$ und K der Mittelpunkt der Seite $\overline{EF}$. Man zeige, dass das Dreieck $\triangle MDK$ gleichseitig ist.

K. Geometrie mit komplexen Zahlen – Betrag und Dreiecksungleichung

187. Es gilt $|BC|\cdot|PB|\cdot|PC|+|AC|\cdot|PA|\cdot|PC|+|AB|\cdot|PA|\cdot|PB| \geq |BC|\cdot|AC|\cdot|AB|$ für ein Dreieck $\triangle ABC$ und einen beliebigen Punkt P. (Gleichheit gilt, wenn $\triangle ABC$ nicht stumpfwinkelig und P der Höhenschnittpunkt ist.) Hinweis: $(v-w)(v-p)(w-p)+(w-u)(u-p)(w-p)+(u-v)(u-p)(v-p)=(v-u)(w-v)(u-w)$.

III. Koordinaten

L. Vektoren

188. Man zeige, dass die Fläche des Dreiecks mit den Ecken (a_1,a_2), (b_1,b_2) und (c_1,c_2) gleich dem Betrag von $\frac{1}{2}\big(a_1(b_2-c_2)+b_1(c_2-a_2)+c_1(a_2-b_2)\big)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}$ ist.
189. Man berechne die Fläche des Dreiecks mit den Ecken $(-1,2,0)$, $(0,3,3)$ und $(2,2,1)$.
190. Man berechne den Winkel beim Eckpunkt $(-1,2,0)$ des Dreiecks in Beispiel 189.
191. Man berechne den Abstand des Punktes $(1,-2)$ von der Geraden $2x-y=4$.
192. Man berechne den Schnittpunkt der Geraden $2x+y=4$ und $5x-2y=1$.

193. Welche Lage haben die Geraden $-21x + 28y = 16$ und $15x - 20y = 9$ zueinander? Welche die Geraden $6x - 9y = \frac{12}{7}$ und $14x - 21y = 4$?
194. Gesucht ist die Gleichung der Ebene durch die drei Punkte $(-1, 2, 0)$, $(0, 3, 3)$ und $(2, 2, 1)$.
195. Die Ecken der Grundfläche eines Parallelepipeds bezeichnen wir der Reihe nach mit A, B, C und D, die darüberliegenden Ecken der Deckfläche mit E, F, G und H, wobei E über A liegt. Es sei $A = (4, 1, 0)$, $B = (3, 5, -1)$, $D = (6, 0, 1)$ und $E = (5, 0, 6)$. Man berechne die anderen Ecken des Parallelepipeds.
196. Die Ecken eines Parallelepipeds bezeichnen wir wie in Beispiel 195. Es sei $B = (4, 1, 2)$, $D = (2, 5, 3)$, $E = (3, 2, 6)$ und $G = (7, 6, 9)$. Man berechne die anderen Ecken des Parallelepipeds.
197. Wir setzen die Volumsformel für einen Quader als bekannt voraus. Sei V das Volumen eines Quaders $ABCDEFGH$, dessen Grundfläche ein Parallelogramm ist, das heißt $ABCD$ und $EFGH$ sind kongruente Parallelogramme, wobei das zweite durch Parallelverschieben aus dem ersten hervorgeht, wobei senkrecht zu diesem verschoben wird. Sei G die Fläche des Parallelogramms $ABCD$ (Grundfläche) und $h = |AE|$ (Höhe). Man zeige $V = G \cdot h$. Hinweis: Seien $\tilde{C}$ und $\tilde{D}$ auf $\ell(C, D)$ so gewählt, dass $AB\tilde{C}\tilde{D}$ ein Rechteck ist, und $\tilde{G}$ und $\tilde{H}$ auf $\ell(G, H)$ so, dass $EF\tilde{G}\tilde{H}$ ein Rechteck ist. Die Körper (Quader mit dreieckiger Grundfläche) $AD\tilde{D}EH\tilde{H}$ und $BC\tilde{C}FG\tilde{G}$ sind kongruent.
198. Sei V das Volumen eines Parallelepipeds $ABCDEFGH$. Sei G die Fläche des Parallelogramms $ABCD$ (Grundfläche) und h der Normalabstand des Punktes E von der Ebene, in der das Parallelogramm $ABCD$ liegt (Höhe). Man zeige $V = G \cdot h$. Hinweis: Ausgangspunkt ist Beispiel 197. Man kann so beginnen: E^* und H^* auf $\ell(E, H)$ und F^* und G^* auf $\ell(F, G)$ mit $\overrightarrow{EE^*} = \overrightarrow{HH^*} = \overrightarrow{FF^*} = \overrightarrow{GG^*}$ geeignet wählen.
199. Man berechne das Volumen des Parallelepipeds aus Beispiel 195.
200. Man zeige, dass die Seitenmitten eines beliebigen Vierecks die Eckpunkte eines Parallelogramms sind. Seien M_1 und M_2 die Mittelpunkte der beiden Diagonalen dieses Parallelogramms. Seien D_1 und D_2 die Mittelpunkte der beiden Diagonalen des gegebenen Vierecks. Sei M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{D_1 D_2}$. Man zeige $M = M_1 = M_2$. Hinweis: Seien $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ und $\mathbf{d}$ die Ortsvektoren zu den Eckpunkten des Vierecks. Man kann dann der Reihe nach die gefragten Mittelpunkte berechnen: Sind $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ die Ortsvektoren zu zwei Punkten, dann ist $\frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ der Ortsvektor zum Mittelpunkt.
201. Welchen Punkt erhält man, wenn man den Punkt $(3, 2)$ auf die Gerade $x - 2y = 4$ projiziert? Welchen Punkt erhält man, wenn man den Punkt $(3, 2)$ an der Geraden $x - 2y = 4$ spiegelt?

M. Standardlage

202. Für ein Dreieck in Standardlage berechne man die Höhenfußpunkte H_a, H_b und H_c.
203. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und g die Trägergerade der Höhe durch C. Sei P ein beliebiger Punkt auf g und K und L die Mittelpunkte der Strecken $\overline{PA}$ und $\overline{PB}$. Sei h_K die Gerade durch K senkrecht auf $\ell(B, C)$ und h_L die Gerade durch L senkrecht auf $\ell(A, C)$. Dann schneiden die Geraden h_K, h_L und g einander in einem Punkt.
204. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck, D ein Punkt auf $\overline{AB}$ und E ein Punkt auf $\overline{BC}$. Sei H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$ und H^* der des Dreiecks $\triangle DBE$. Seien K und L die Mittelpunkte der Strecken $\overline{AE}$ und $\overline{CD}$. Dann steht $\overline{HH^*}$ senkrecht auf $\overline{KL}$.
205. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und D der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale durch C mit der Seite $\overline{AB}$. Seien U, V und W die Umkreismittelpunkte der Dreiecke $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ und $\triangle BCD$. Dann gilt $|UV| = |UW|$.
206. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und w_α, w_β und w_γ die Winkelsymmetralen. Seien R und S die Schnittpunkte von w_α und w_β mit dem Umkreis. Dann steht $\ell(R, S)$ senkrecht auf w_γ. Hinweis: Der Südpolsatz vereinfacht die Berechnung von R und S.
207. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und F der Fußpunkt der Höhe durch C. Sei g die Gerade durch F senkrecht auf $\ell(B, C)$ und P der Schnittpunkt von g mit $\ell(B, C)$. Sei h die Gerade durch C

senkrecht auf $\ell(A,P)$ und Q ihr Schnittpunkt mit g. Dann gilt $\frac{|FQ|}{|FP|} = \frac{|FB|}{|AB|}$.

208. Sei $ABCD$ ein Quadrat und E ein Punkt auf $\ell(A,B)$. Sei F der Schnittpunkt der Geraden $\ell(B,C)$ und $\ell(D,E)$. Sei G der Schnittpunkt der Geraden $\ell(A,F)$ und $\ell(C,E)$. Man zeige, dass die Geraden $\ell(B,G)$ und $\ell(D,E)$ aufeinander senkrecht stehen. Hinweis: Wie legt man ein Quadrat am einfachsten in ein Koordinatensystem?
209. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit $|AC| = |BC|$. Die Punkte P auf $\overline{AB}$, Q auf $\overline{BC}$ und R auf $\overline{AC}$ werden so gewählt, dass $PQCR$ ein Parallelogramm ist. Sei S der Schnittpunkt der Gerade $\ell(A,B)$ mit der Symmetrale der Strecke $\overline{QR}$. Man zeige, dass die Dreiecke $\triangle QRS$ und $\triangle ABC$ ähnlich sind.
210. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H. Sei M der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ und g die Gerade durch H senkrecht auf $\overline{HM}$. Seien P und Q die Schnittpunkte der Gerade g mit $\ell(A,C)$ und $\ell(B,C)$. Dann haben P und Q gleichen Abstand von H.
211. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und F der Fußpunkt der Höhe durch C. Seien P auf $\ell(B,C)$ und Q auf $\ell(A,C)$ so gewählt, dass die drei Geraden $\ell(F,C)$, $\ell(A,P)$ und $\ell(B,Q)$ einander in einem Punkt schneiden. Man zeige, dass $\measuredangle PFC = \measuredangle QFC$ gilt. (Satz von Blanchet)
212. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H und Umkreismittelpunkt U. Sei F der Fußpunkt der Höhe durch C und g die Gerade durch F senkrecht auf $\overline{UF}$. Sei P der Schnittpunkt der Geraden g und $\ell(A,C)$ (existiert nicht, wenn $\alpha = 45^0$ oder $\alpha = 135^0$). Dann ist ein Winkel zwischen den Geraden $\ell(P,H)$ und $\ell(F,H)$ gleich α.
213. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und H_b und H_c die Fußpunkte der Höhen durch B und C. Sei K der Mittelpunkt der Strecke $\overline{H_bH_c}$. Weiters seien P_a und P_b die Fußpunkte der Lote von H_c auf $\ell(B,C)$ und $\ell(A,C)$. Dann liegen die Punkte K, P_a und P_b auf einer Gerade.
214. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und N der Schnittpunkt des Umkreises mit der Symmetrale der Seite $\overline{AB}$, der auf derselben Seite von $\overline{AB}$ liegt wie C (Nordpol). Sei h die Halbgerade, die von A ausgeht und durch C läuft. Sei P der Punkt auf h, für den $|AP| = \frac{1}{2}(|AC| + |BC|)$ gilt. Dann steht $\ell(N,P)$ senkrecht auf h. (Archimedes, Broken Chord Theorem)
215. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Umkreismittelpunkt U und Höhenschnittpunkt H. Seien H_a und H_b die Fußpunkte der Höhen durch A und durch B und sei M der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$. Sei R der Schnittpunkt der Höhe durch C mit der Geraden $\ell(H_a,H_b)$ und T der Schnittpunkt der Geraden $\ell(U,C)$ und $\ell(A,B)$. Man zeige, dass $\ell(H,M)$ und $\ell(R,T)$ parallel liegen.

IV. Lineare Abbildungen, Kegelschnitte, lineare Gleichungssysteme

N . Lineare Abbildungen und Isometrien

Matrizen

216. Sei $\mathbf{x} = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Man berechne $A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^tA$, AB und BA.
217. Für die Matrizen aus Beispiel 216 berechne man $\det A$, $\det B$ und $\det AB$.

218 – 221. Man berechne Eigenwerte und Eigenvektoren für folgende Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

222. Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ eine Matrix und λ_1 und λ_2 ihre Eigenwerte, das sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(\lambda I_2 - A) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2$. Man zeige: Ist $\det A > 0$, dann haben λ_1 und λ_2 gleiches Vorzeichen. Ist $\det A < 0$, dann haben λ_1 und λ_2 verschiedenes Vorzeichen. Ist $\det A = 0$, dann gilt $\lambda_1 = 0$ oder $\lambda_2 = 0$.

Isometrien

223. Die Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sind Matrizen von Drehungen um den Nullpunkt. Um welchen Winkel wird gedreht?
224. Man bestimme die Drehung um den Punkt $(1,2)$ mit Winkel 60^0.

225. Steht der Vektor $\mathbf{u}$ senkrecht auf $\binom{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, dann ist $S_{\alpha,\mathbf{u}}$ eine Spiegelung um die Gerade durch den Punkt $\frac{1}{2}\mathbf{u}$ mit Richtungsvektor $\binom{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

226. Die Abbildung $\mathbf{x} \mapsto \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \binom{6}{2}$ ist eine Drehung. Man berechne den Punkt, um den gedreht wird.

227. Die Abbildung $\mathbf{x} \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \binom{4}{8}$ ist eine Schubspiegelung. Man berechne die Spiegelungsgerade und den Schubvektor.

228. Seien A, B, C und D Punkte in der Ebene. Es gelte $|AB| = |CD|$ und $A \neq B$. Dann existeiert genau eine Drehung oder eine Translation, die C in A und D in B überführt. Hinweis: Man unterscheide drei Fälle: Die Symmetralen der Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ fallen zusammen, sind parallel oder haben genau einen Schnittpunkt M. Im dritten Fall sind die Dreiecke $\triangle MAB$ und MCD kongruent.

229. Seien A, B, C und D Punkte in der Ebene. Es gelte $|AB| = |CD|$ und $A \neq B$. Dann existeiert genau eine Schubspiegelung, die C in A und D in B überführt. Hinweis: Die Spiegelungsgerade liegt parallel zu einer Winkelsymmetrale der Geraden $\ell(A,B)$ und $\ell(C,D)$.

O. Kegelschnitte

Gleichungen von Kegelschnitten und von Tangenten bestimmen

230. Man bestimme die Gleichung der Ellipse in Hauptlage durch die Punkte $(2,2)$ und $(1,4)$.

231. Man bestimme die Gleichung der Parabel in Hauptlage, die durch den Punkt $(4,16)$ geht.

232. Man bestimme die Gleichung der Hyperbel in Hauptlage, die Brennweite 3 hat und durch den Punkt $(4,1)$ geht.

233. Man bestimme die Gleichung der Parabel in Hauptlage, die die Gerade $x-2y=2$ als Tangente hat.

234. Man bestimme die Gleichung der Hyperbel in Hauptlage, die die beiden Geraden $2x+y=1$ und $4x-3y=1$ als Tangenten hat.

235. Man bestimme die Gleichung der Hyperbel in Hauptlage, die durch den Punkt $(\sqrt{10},4)$ geht und die Gerade $x-\frac{1}{2}y=1$ als Tangente hat.

236 – 241. Gesucht sind die Gleichungen der Tangenten vom Punkt P aus an den Kegelschnitt.

$\frac{x^2}{7}+\frac{3y^2}{7}=1 \qquad P=(5,1)$
$\frac{x^2}{7}+\frac{3y^2}{7}=1 \qquad P=(-1,3)$
$\frac{3x^2}{11}-\frac{16y^2}{11}=1 \qquad P=(1,\frac{1}{8})$
$3x^2-2y^2=1 \qquad P=(-1,-2)$
$y^2=x \qquad P=(-3,1)$
$y^2=2x \qquad P=(1,\frac{3}{2})$

Sätze über Kegelschnitte

242. Seien G_1 und G_2 zwei Punkte (die man auf die x-Achse legen kann). Man bestimme die Menge aller Punkte (x,y), deren Abstände zu den Punkten G_1 und G_2 Verhältnis v haben.

243. Seien k_1 und k_2 zwei Kreise mit Mittelpunkten M_1 und M_2, sodass k_2 innerhalb von k_1 liegt. Man zeige, dass die Mittelpunkte aller Kreise, die k_1 von innen und k_2 von außen berühren, auf einer Ellipse liegen, deren Brennpunkte M_1 und M_2 sind. Ebenso liegen die Mittelpunkte aller Kreise, die k_1 von innen berühren und von k_2 von innen berührt werden, auf einer Ellipse, deren Brennpunkte M_1 und M_2 sind, die aber eine andere Hauptachse hat.

244. Was passiert, wenn im letzten Beispiel die Kreise k_1 und k_2 einander schneiden? Wo liegen dann die Mittelpunkte der Kreise, die sowohl k_1 als auch k_2 berühren? Und was passiert, wenn k_2 ganz außerhalb von k_1 liegt?

245. Sei g eine Gerade und k ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r. Seien g_1 und g_2 die Geraden, die parallel zur Geraden g liegen und von dieser Abstand r haben. Sei p_1 die Parabel mit Brennpunkt M und Leitlinie g_1. Sei p_2 die Parabel mit Brennpunkt M und Leitlinie g_2.

Man zeige, dass der Mittelpunkt eines Kreises, der k und g berührt, auf p_1 oder p_2 liegt. (Es gibt zwei Fälle: g schneidet k und g schneidet k nicht.)

246. Seien F_1 und F_2 zwei Punkte. Sei e eine Ellipse und h eine Hyperbel mit Brennpunkten F_1 und F_2. Sei P einer der vier Schnittpunkte von e und h. Man zeige, dass der Schnittwinkel von e und h im Punkt P ein rechter ist. Hinweis: Tangentenkonstruktion
247. Sei p die Polare eines Punktes P bezüglich eines Kegelschnitts. Ein Punkt Q liegt genau dann auf p, wenn die Polare von Q durch P geht.
248. Sei P ein Punkt außerhalb einer Ellipse mit Brennpunkten F_1 und F_2. Seien B_1 und B_2 die Berührpunkte der Tangenten von P an die Ellipse. Man zeige $\measuredangle B_1PF_1 = \measuredangle B_2PF_2$. (Satz von Poncelet) Es gilt auch $\measuredangle B_1F_2P = \measuredangle PF_2B_2$. Hinweis: Die Spiegelpunkte U und V von F_1 an den Tangenten haben gleichen Abstand von F_2, das heißt F_2 liegt auf der Symmetrale der Srecke $\overline{UV}$. Die Verbindungslinien von F_2 zu den Spiegelpunkten gehen durch die Berührpunkte.
249. Sei P ein Punkt auf der Leitlinie einer Parabel mit Brennpunkt F. Man zeige, dass die Symmetrale der Strecke $\overline{PF}$ eine Tangente an die Parabel ist.
250. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und p die Parabel mit Brennpunkt C und Leitlinie $\ell(A,B)$. Man zeige, dass die Symmetralen der Dreiecksseiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ Tangenten an die Parabel p sind.
251. Sei P ein Punkt auf der Leitlinie l einer Parabel mit Brennpunkt F. Man zeige, dass die Tangenten von P aus an die Parabel senkrecht aufeinander stehen. Man zeige, dass die Verbindungslinie der beiden Berührpunkte dieser Tangenten durch F geht. Hinweis: Wie konstruiert man die Tangente von einem Punkt aus an die Parabel?
252. Seien t_1, t_2 und t_3 Tangenten an eine Parabel. Sie bilden ein Dreieck. Man zeige, dass der Brennpunkt der Parabel auf dem Umkreis des Dreiecks liegt. Hinweis: Tangentenkonstruktion, zweite Steinergerade (ein Punkt liegt genau dann auf dem Umkreis eines Dreiecks, wenn ...)
253. Auf der Parabel $y^2 = 2px$ mit Scheitel $S = (0,0)$ seien die Punkte A und B so gewählt, dass $\overline{AS}$ senkrecht auf $\overline{BS}$ steht. Man zeige, dass die Gerade $\ell(A,B)$ durch den Punkt $(2p,0)$ geht. Hinweis: Rechnung im Koordinatensystem.
254. Wir legen die Tangenten von einem Punkt P aus an eine Parabel. Seien B_1 und B_2 die Berührpunkte der Tangenten und M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{B_1B_2}$. Sei K der Mittelpunkt der Strecke $\overline{MP}$. Man zeige, dass K auf der Parabel liegt. Hinweis: Rechnung mit Hilfe der Polare.
255. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Seitenlängen a, b, c und halbem Umfang s. Sei w_γ die Winkelsymmetrale durch C. Für die Normalabstände d_A und d_B der Eckpunkte A und B von w_γ gilt dann $d_A^2 = \frac{b}{a}(s-a)(s-b) = \frac{b}{a}\frac{c^2-(a-b)^2}{4}$ und $d_B^2 = \frac{a}{b}(s-a)(s-b) = \frac{a}{b}\frac{c^2-(a-b)^2}{4}$. Für die Normalabstände $\tilde{d}_A$ und $\tilde{d}_B$ der Eckpunkte A und B von der Winkelsymmetrale $\tilde{w}_\gamma$ der Außenwinkel bei C gilt $\tilde{d}_A^2 = \frac{b}{a}s(s-c) = \frac{b}{a}\frac{(a+b)^2-c^2}{4}$ und $\tilde{d}_B^2 = \frac{a}{b}s(s-c) = \frac{a}{b}\frac{(a+b)^2-c^2}{4}$. Hinweis: Beispiel 123.
256. Seien F_1 und F_2 die Brennpunkte einer Ellipse (Hyperbel) und t die Tangente in einem Punkt P. Seien d_1 und d_2 die Normalabstände der Brennpunkte F_1 und F_2 von der Tangente t. Indem man Beispiel 255 auf das Dreieck $\triangle F_1F_2P$ anwendet, berechne man d_1 und d_2 für Ellipse und Hyperbel. In beiden Fällen gilt $d_1d_2 = b^2$, wobei b die Länge der kleinen Halbachse ist.

Hauptachsentransformation

257 – 264. Für folgende Kurven zweiter Ordnung führe man die Hauptachsentransformation durch und bestimme, um welchen Kegelschnitt es sich handelt.
$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x - 95y - 25 = 0$
$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 22x - 14y + 17 = 0$
$8x^2 - 4xy + 5y^2 + 4\sqrt{5}x - 10\sqrt{5}y - 11 = 0$
$4xy - 3y^2 + \frac{32}{\sqrt{5}}x - \frac{44}{\sqrt{5}}y - 28 = 0$
$4x^2 + 24xy + 11y^2 - 50y - 5 = 0$
$xy + x - 5y - 3 = 0$

$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$
$x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x - 12y + 3 = 0$

Flächen zweiter Ordnung

265. Sei A der Punkt $(1,0,0)$ und ε die y-z-Ebene. Sei $v \in (0,\infty)$. Man bestimme die Menge aller Punkte $P = (x,y,z)$, für die $\frac{|PA|}{d(P,\varepsilon)} = v$ gilt.
266. Es seien $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ a \end{pmatrix}$ mit $a^2 + b^2 = 1$ Parameterdarstellungen der Geraden g und h. Man bestimme die Menge aller Punkte $P = (x,y,z)$, für die $d(P,g) = d(P,h)$ gilt.
267. Es sei $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Parameterdarstellungen der Geraden g und ε die Ebene mit Gleichung $x = -1$. Sei $v \in (0,\infty)$. Man bestimme die Menge aller Punkte $P = (x,y,z)$, für die $\frac{d(P,g)}{d(P,\varepsilon)} = v$ gilt.
268. Die Gerade g sei die x-Achse und ε sei die y-z-Ebene. Sei $v \in (0,\infty)$. Man bestimme die Menge aller Punkte $P = (x,y,z)$, für die $\frac{d(P,g)}{d(P,\varepsilon)} = v$ gilt.

P. Lineare Gleichungssysteme

269. Man berechne den Schnittpunkt der drei Ebenen $x + 2y + z = 2$, $3x + 5y + z = 9$ und $7x + 12y + 2z = 22$.

270 – 272. Man löse

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ -3x_1 - 5x_2 - x_3 &= -1 \\ -7x_1 - 12x_2 - 2x_3 &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 9x_1 + 3x_2 - 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 17x_2 + 2x_3 &= -12 \\ -6x_1 + 2x_2 + 30x_3 &= 22 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} +2x_2 - 4x_3 + x_4 &= -2 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 &= 3 \\ -2x_1 + 4x_2 - 8x_3 - x_4 &= -4 \end{aligned}$$

273 – 275. Man löse

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 3 \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 &= 9 \\ 6x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 15 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 6x_1 - 9x_2 - x_3 + 6x_4 &= 7 \\ 8x_1 - 9x_2 - 2x_3 + 7x_4 &= 6 \\ 4x_1 - 2x_3 + 2x_4 &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 5x_4 &= 3 \\ 9x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 7x_4 &= 1 \\ -3x_1 + 4x_3 - x_4 &= 5 \\ 6x_1 + 6x_2 + x_3 + 8x_4 &= 8 \end{aligned}$$

276 – 279. Gesucht sind Eigenwerte und Eigenvektoren $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

280. Man bestimme die Gleichung des Kegelschnitts durch die fünf Punkte $(1,3)$, $(1,-1)$, $(-2,4)$, $(-2,2)$, $(2,2)$.
281. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck in Standardlage, das weder gleichschenkelig noch rechtwinkelig ist. Sei H der Höhenschnittpunkt und S der Schwerpunkt dieses Dreiecks. Man berechne die Hyperbel durch die fünf Punkte A, B, C, H und S. Diese Hyperbel heißt Kieperthyperbel. Hinweis: Ansatz $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$. Man kann mit einer beliebigen Konstanten multiplizieren. Man versuche es mit $f = 1$.

V. Anhang

A. Strahlensatz und Satz von Pythagoras

282. Sei $\overline{AB}$ der Durchmesser eines Halbkreises. Sei t die Tangente im Punkt B an den Halbkreis und s die in einem anderen Punkt D. Sei T der Schnittpunkt von s und t. Sei g die Gerade durch D senkrecht auf $\overline{AB}$, E ihr Schnittpunkt mit $\overline{AB}$ und F ihr Schnittpunkt mit $\ell(A,T)$. Dann gilt $|DF| = |FE|$. (Archimedes)

283. Sei k ein Kreis mit Durchmesser $\overline{AB}$ und C ein weiterer Punkt auf k. Seien t_A, t_B und t_C die Tangenten in den Punkten A, B und C an den Kreis. Den Schnittpunkt von t_A und t_C bezeichnen wir mit P, den von t_B und t_C mit Q, den von $\ell(A,Q)$ und $\ell(B,P)$ mit R und den von $\ell(C,R)$ und $\ell(A,B)$ mit S. Man zeige, dass $\ell(C,R)$ senkrecht auf $\ell(A,B)$ steht und dass $|CR| = |RS|$ gilt. Hinweis: Legt man von einem Punkt die beiden Tangenten an einen Kreis, dann sind die Abschnitte bis zu den Berührpunkten gleich lang. Strahlensatz und dessen Umkehrung.
284. In Beispiel 283 sei M der Mittelpunkt und r der Radius des Kreises k. Dann gilt $\measuredangle PMQ = 90^0$ und $r^2 = |AP| \cdot |BQ|$. Hinweis: $\measuredangle AMP = \measuredangle CMP$, $\measuredangle BMQ = \measuredangle CMQ$, Höhensatz im rechtwinkeligen Dreieck.
285. Sei k ein Kreis mit Durchmesser $\overline{AB}$ und C ein weiterer Punkt auf k. Seien t_A, t_B und t_C die Tangenten in den Punkten A, B und C an den Kreis. Den Schnittpunkt von t_A und $\ell(B,C)$ bezeichnen wir mit U, den von t_B und $\ell(A,C)$ mit V. Man zeige, dass die Geraden $\ell(A,B)$, t_C und $\ell(U,V)$ parallel liegen oder einander in einem Punkt schneiden. (Kann man auch analytisch lösen.)
286. Sei $\overline{AB}$ eine Sehne in einem Kreis k. In dem kleineren Teil, den $\overline{AB}$ von k abschneidet, wird ein Kreis l eingeschrieben (es gibt viele solche Kreise), der $\overline{AB}$ im Punkt P und k im Punkt Q berührt. Sei g die Senkrechte auf $\overline{AB}$ durch den Mittelpunkt M des Kreises k. Sei R der Schnittpunkt von g mit dem Kreisbogen von A nach B, der nicht durch Q geht. Dann liegen die Punkte Q, P und R auf einer Gerade. Hinweis: Sei N der Mittelpunkt des Kreises l. Es gilt $|MQ| = |MR|$, $|NQ| = |NP|$ und $\measuredangle RMQ = \measuredangle PNQ$. Daher auch $\measuredangle NQP = \measuredangle MQR$.
287. Sei $\overline{AB}$ eine Sehne im Kreis k. Sei L ein Punkt auf der Sehne $\overline{AB}$. Seien k_1 und k_2 zwei Kreise, die beide den Kreis k von innen die Sehne $\overline{AB}$ im Punkt L berühren, jedoch auf verschiedenen Seiten der Sehne $\overline{AB}$ liegen. Seien r_1 und r_2 die Radien der Kreise k_1 und k_2. Man zeige, dass $\frac{r_1}{r_2}$ unabhängig von der Position des Punktes L auf der Sehne $\overline{AB}$ ist.
288. Sei k ein Kreis mit Mittelpunkt M. Die Tangenten von einem Punkt P außerhalb des Kreises berühren den Kreis k in den Punkten A und B. Sei $\overline{BC}$ der Durchmesser des Kreises k, der durch B geht, und F der Fußpunkt des Lotes von A auf $\overline{BC}$. Die Gerade $\ell(P,C)$ geht dann durch den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AF}$. Hinweis: Sei Q der Schnittpunkt von $\ell(B,P)$ und $\ell(A,C)$. Nun sind $\overline{MP}$ und $\ell(A,C)$ parallel (beide senkrecht auf $\overline{AB}$ oder Umkehrung des Strahlensatzes). Aus dem Strahlensatz folgt $\frac{BP}{BQ} = \frac{BM}{BC} = \frac{1}{2}$. Somit ist $\overline{CP}$ Schwerlinie im Dreieck $\triangle CBQ$. Sie halbiert $\overline{AF}$, da $\overline{AF}$ parallel zu $\overline{BQ}$ liegt (beide senkrecht zu $\overline{BC}$).

B. Peripheriewinkelsatz

289. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Sei N der Schnittpunkt der Symmetrale der Seite $\overline{AB}$ mit dem Umkreis, der auf derselben Seite von $\overline{AB}$ liegt wie C. Sei F der Fußpunkt des Lots von N auf $\ell(A,C)$. Dann gilt $|AF| = \frac{1}{2}(|AC| + |BC|)$. (Archimedes) Hinweis: Wir verlängern die Seite $\overline{AC}$ über C hinaus um die Länge der Seite $\overline{BC}$ und erhalten so den Punkt D. Es gilt dann $\measuredangle ADB = \frac{\gamma}{2}$. Es gilt auch $\measuredangle ANB = \gamma$. Somit ist N der Mittelpunkt des Kreises durch A, B und D und $\overline{AD}$ ist eine Sehne in diesem Kreis, also ist F der Mittelpunkt von $\overline{AD}$.
290. Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, dessen Diagonalen senkrecht aufeinander stehen. Sei M der Schnittpunkt der Diagonalen und g die Gerade durch M senkrecht auf $\overline{AB}$. Sei S der Schnittpunkt der Geraden g und $\ell(C,D)$. Dann gilt $|SD| = |SM| = |SC|$. (Brahmagupta) Hinweis: Sei $\varphi = \measuredangle CAB$ und $\psi = \measuredangle DBA = 90^0 - \varphi$. Daraus kann man die Winkel in den Dreiecken $\triangle CMS$ und $\triangle DMS$ berechnen.
291. Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck. Seien M_a, M_b, M_c und M_d die Inkreismittelpunkte der Dreiecke $\triangle ABD$, $\triangle ABC$, $\triangle CDB$ und $\triangle CDA$. Das Viereck $M_aM_bM_cM_d$ ist dann ein Rechteck. Hinweis: Sei $\varphi = \measuredangle ADB = \measuredangle ACB$. Es gilt $\measuredangle AM_aB = \measuredangle AM_bB = 90^0 + \frac{\varphi}{2}$ (Beispiel 60). Somit liegen A, M_a, M_b und B auf einem Kreis. Berechne $\measuredangle AM_aM_b$ und $\measuredangle M_aM_bB$. Ebenso erhält man $\measuredangle BM_bM_c$ und $\measuredangle M_bM_cC$ und so weiter.

292. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Umkreis k. Sei g die Gerade $\ell(A, B)$ und h die Tangente an k im Punkt C. Wir nehmen an, dass g und h einander im Punkt P schneiden. Sei w die Symmetrale des Winkels $\measuredangle APC$. Sie schneidet die Seite $\overline{AC}$ des Dreiecks in einem Punkt U und die Seite $\overline{BC}$ in einem Punkt V. Man zeige, dass $|CU| = |CV|$ gilt. Hinweis: Wir nehmen an, dass A näher bei P liegt als B. Aus dem Tangentenwinkelsatz folgt $\measuredangle PCA = \measuredangle ABC$. Die Dreiecke $\triangle PVB$ und $\triangle PUC$ sind ähnlich. Es folgt $\measuredangle PVB = \measuredangle PUC$ und daraus $\measuredangle UVC = \measuredangle VUC$.
293. Sei $\triangle ABC$ ein (spitzwinkeliges) Dreieck mit Umkreismittelpunkt U. Seien H_a, H_b und H_c die Höhenfußpunkte. Man zeige, dass $\ell(U, C)$ senkrecht auf $\ell(H_a, H_b)$ steht (natürlich auch $\ell(U, A)$ senkrecht auf $\ell(H_b, H_c)$ und $\ell(U, B)$ senkrecht auf $\ell(H_a, H_c)$). Hinweis: Berechne $\measuredangle UCA$ und $\measuredangle H_aH_bC$.
294. Sei $\triangle ABC$ ein (spitzwinkeliges) Dreieck mit Höhenschnittpunkt H. Sei g eine Gerade durch H und g_a, g_b und g_c die Bilder von g bei Spiegelung an $\ell(B, C)$, an $\ell(A, C)$ und an $\ell(A, B)$. Man zeige, dass der Schnittpunkt P von g_a und g_b existiert und auf dem Umkreis liegt. Hinweis: Die Bilder H_a und H_b von H bei Spiegelung an $\ell(B, C)$ und $\ell(A, C)$ liegen auf dem Umkreis und auf g_a beziehungsweise g_b. Man berechne $\measuredangle H_aCH_b$ und $\measuredangle DPE$, wobei D der Schnittpunkt von g mit $\ell(B, C)$ und E der von g mit $\ell(A, C)$ ist. Daraus ergibt sich $\measuredangle H_aPH_b$.
295. Aus Beispiel 294 ergibt sich ein Satz von Carnot: Unter den Voraussetzungen von Beispiel 294 schneiden die drei Geraden g_a, g_b und g_c einander in einem Punkt, der auf dem Umkreis liegt.
296. Das Dreieck $\triangle ABC$ habe bei C einen rechten Winkel. Die Punkte D auf $\overline{AC}$, E auf $\overline{AB}$ und F auf $\overline{BC}$ seien so gewählt, dass das Viereck $CDEF$ ein Quadrat ist. Sei H der Fußpunkt der Höhe durch C. Man zeige, dass $\overline{HD}$ den Winkel $\measuredangle AHC$ halbiert und $\overline{HF}$ den Winkel $\measuredangle BHC$. Hinweis: Die Punkte C, D, E, F und H liegen auf einem Kreis.
297. Sei $ABCD$ ein Parallelogramm. Sei U ein Punkt auf $\overline{AB}$ und V einer auf $\overline{CD}$. Weiters sei P ein Punkt auf $\overline{UV}$. Die Umkreise der Dreiecke $\triangle AUP$ und $\triangle CVP$ schneiden einander in einem Punkt Q ungleich P (wenn sie nicht zufällig einander berühren). Man zeige, dass Q auf der Diagonale $\overline{AC}$ liegt. Hinweis: Man zeige $\measuredangle AQP + \measuredangle PQC = 180^0$.
298. Sei $ABCD$ ein Parallelogramm. Seien P und R die Fußpunkte der Lote vom Eckpunkt B auf die Geraden $\ell(A, D)$ und $\ell(C, D)$. Sei Q der Fußpunkt des Lots vom Eckpunkt B auf die Diagonale $\overline{AC}$ und sei M der Mittelpunkt dieser Diagonale. Dann liegen die vier Punkte P, M, Q und R auf einem Kreis. Hinweis: Im Fall $\alpha < 90^0$ zeige man $\measuredangle RMP = 2\alpha$ mit Hilfe von Symmetrieüberlegungen (Spiegelung an den Parallelen zu den Seiten durch M) und $\measuredangle RQP = 2\alpha$ mit Hilfe des Peripheriewinkelsatzes.
299. Zwei Kreise k_1 und k_2 schneiden einander in den Punkten A und B. Auf dem Bogen des Kreises k_1, der innerhalb von k_2 liegt, wählen wir einen Punkt C und zeichnen dort die Tangente g an den Kreis k_1. Seien P und Q die Schnittpunkte der Tangente g mit dem Kreis k_2. Dann gilt $\measuredangle PAC = \measuredangle QBC$ und $\measuredangle PBC = \measuredangle QAC$. Hinweis: Sei $\measuredangle ACP = \varphi$ und $\measuredangle PAC = \alpha$. Andere Winkel lassen sich dann durch φ und α ausdrücken. Tangentenwinkelsatz, um $\measuredangle ABC$ zu berechnen. Das Viereck $ABQP$ ist ein Sehnenviereck.
300. Zwei Kreise k_1 und k_2 schneiden einander in den Punkten A und B. Sei g eine Gerade, die den Kreis k_2 in den Punkten P und Q schneidet und den Bogen des Kreises k_1, der innerhalb von k_2 liegt, in den Punkten C und D. Dann gilt $\measuredangle PAC = \measuredangle QBD$ und $\measuredangle PBC = \measuredangle QAD$. (Verallgemeinerung von Beispiel 299) Hinweis: Die Vierecke $ABQP$ und $ABDC$ sind Sehnenvierecke.
301. Zwei Kreise k_1 und k_2 schneiden einander in den Punkten P und Q. Seien g und h zwei Gerade durch P, sodass $\ell(P, Q)$ den Winkel zwischen g und h halbiert. Seien G_1 und G_2 die Schnittpunkte $\neq P$ von g mit k_1 und k_2. Seien H_1 und H_2 die Schnittpunkte $\neq P$ von h mit k_1 und k_2. Dann sind die beiden Dreiecke $\triangle QG_1G_2$ und $\triangle QH_1H_2$ kongruent. Hinweis: Haben zwei Sehnen in einem Kreis gleiche Peripheriewinkel, dann sind sie gleich lang.
302. Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck und S der Schnittpunkt seiner Diagonalen. Seien E, F, G und H die Fußpunkte der Lote von S auf $\ell(A, B)$, $\ell(B, C)$, $\ell(C, D)$ und $\ell(D, A)$. Dann hat das Viereck $EFGH$, falls es konvex ist, einen Inkreis mit Mittelpunkt S. (Ist es nicht konvex,

dann gibt es einen Kreis, der die Trägergeraden der vier Seiten berührt.) Hinweis: Es gilt $\measuredangle CAD = \measuredangle DBC$ (Sehnenviereck). Die Vierecke $SEAH$ und $SEBF$ haben einen Umkreis. Es folgt $\measuredangle SEH = \measuredangle SAH = \measuredangle CAD$ und $\measuredangle SEF = \measuredangle SBF = \measuredangle DBC$, also $\measuredangle SEH = \measuredangle SEF$.

303. Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck. Seien g_A, g_B, g_C und g_D die Symmetralen der Außenwinkel. Seien E, F, G und H der Reihe nach die Schnittpunkte von g_A mit g_B, von g_B mit g_C, g_C mit g_D und von g_D mit g_A. Dann ist das Viereck $EFGH$ ein Sehnenviereck (Beispiel 3). Sei h_E die Senkrechte auf $\ell(A,B)$ durch E, h_F die Senkrechte auf $\ell(B,C)$ durch F, h_G die Senkrechte auf $\ell(C,D)$ durch G und h_H die Senkrechte auf $\ell(D,A)$ durch H. Seien P, Q, R und S der Reihe nach die Schnittpunkte von h_H mit h_E, von h_E mit h_F, h_F mit h_G und von h_G mit h_H. Dann hat das Viereck $PQRS$ einen Inkreis. Hinweis: Durch Berechnen geeigneter Winkel zeige man $|HP| = |EP|$, $|EQ| = |QF|$, $|FR| = |RG|$ und $|GS| = |SH|$. Es folgt, dass die Seitensymmetralen des Vierecks $EFGH$ die Winkelsymmetralen des Vierecks $PQRS$ sind. Da $EFGH$ ein Sehnenviereck ist, schneiden sie einander in einem Punkt.

C. Inkreis, Ankreise

304. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und P der Punkt, in dem der Inkreis die Seite $\overline{AB}$ berührt. Dann liegen der Mittelpunkt K der Strecke $\overline{CP}$, der Inkreismittelpunkt I und der Mittelpunkt M der Seite $\overline{AB}$ auf einer Gerade. Hinweis: Sei Q der an M gespiegelte Punkt P und F der Fußpunkt der Höhe durch C. Man rechne nach, dass $\frac{|CF|}{|FQ|} = \frac{|IP|}{|PM|}$ gilt (mit entsprechenden Formeln für den Inkreisradius, für den Abstand des Berührpunkts P von einem Eckpunkt, ...). Es folgt, dass $\overline{MI}$ und $\overline{QC}$ parallel liegen (Umkehrung Strahlensatz). Der Strahlensatz ergibt jetzt, dass $\ell(M,I)$ die Strecke $\overline{CP}$ in deren Mittelpunkt trifft.

305. Für ein Dreieck gilt $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}F + (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2$ (Hadwiger-Finsler-Ungleichung). Hinweis: Heronsche Flächenformel, $a = y + z$, $b = x + z$, $c = x + y$ einsetzen. Es gilt $x = s - a > 0$, $y = s - b > 0$, $z = s - c > 0$.

D. Trigonometrie

306. Seien φ und ψ Winkel zwischen 0^0 und 180^0 und δ beliebig. Wenn $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\sin(\delta-\varphi)}{\sin(\delta-\psi)}$ gilt, dann folgt $\varphi = \psi$. Hinweis: Summensatz.

307. Seien α, β und γ die Winkel eines Dreiecks, das heißt $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$. Auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks $\triangle UVW$ werden außen Dreiecke aufgesetzt: Das Dreieck $\triangle VWA$ hat Winkel $60^0 + \frac{\gamma}{3}$ bei V und $60^0 + \frac{\beta}{3}$ bei W. Das Dreieck $\triangle WUB$ hat Winkel $60^0 + \frac{\alpha}{3}$ bei W und $60^0 + \frac{\gamma}{3}$ bei U. Das Dreieck $\triangle UVC$ hat Winkel $60^0 + \frac{\beta}{3}$ bei U und $60^0 + \frac{\alpha}{3}$ bei V. Man zeige, dass $\triangle ABC$ die Winkel α, β und γ hat und dass die Seiten der aufgesetzeten Dreiecke diese Winkel dritteln. (Das ergibt einen Beweis für den Satz von Morley.) Hinweis: Winkel berechnen. Zuerst in den aufgesetzten Dreiecken, dann in $\triangle UBC$ (dazu Sinussatz für $\triangle UVC$ und $\triangle UWB$, dann Sinussatz für $\triangle UBC$ und schließlich Beispiel 306 mit $\varphi = \measuredangle UBW$, $\psi = \measuredangle UBC$ und $\delta = \frac{\beta}{3} + \frac{\gamma}{3}$). Ebenso in $\triangle VAC$ und $\triangle WAB$.

308. Sei $ABCD$ ein Quadrat mit Seitenlänge $4r$. Seien k_1 und k_2 Kreise mit Radius r, die die Seite $\overline{AB}$ und einander berühren, sodass k_1 auch noch $\overline{AD}$ und k_2 auch $\overline{BC}$ berührt. Neben $\ell(D,A)$ gibt es eine zweite Tangente t_1 von D an den Kreis k_1. Ebenso gibt es neben $\ell(C,B)$ eine zweite Tangente t_2 von C an den Kreis k_2. Sei l der Inkreis des Dreiecks, dessen Seiten von t_1, t_2 und $\overline{CD}$ gebildet werden. Man zeige, dass l ebenfalls Radius r hat.

309. Sei $\triangle ABC$ ein gleichseitiges Dreieck und $\overline{PQ}$ eine Strecke. Seien u, v und w die Längen der Projektionen der Strecke $\overline{PQ}$ auf $\ell(A,B)$, $\ell(B,C)$ und $\ell(A,C)$. Man zeige, dass eine der drei Zahlen u, v und w die Summe der beiden anderen ist. Hinweis: Man zeichne vom Punkt P aus drei Halbgeraden, die parallel zu den Seiten des Dreiecks $\triangle ABC$ liegen und einen Winkel $\leq 90^0$ mit $\overline{PQ}$ einschließen. Sei α der Winkel zwischen $\overline{PQ}$ und der nächstgelegenen Halbgerade. Man berechne u, v und w mit Hilfe von α.

310. Sei P ein Punkt im Innern eines Kreises k. Drei Geraden, die durch P gehen und Winkel von 60^0 einschließen, schneiden k in den Punkten A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 und A_6, wobei diese Schnittpunkte entlang des Kreises nummeriert werden. Man zeige, dass $|PA_1|+|PA_3|+|PA_5| = |PA_2|+|PA_4|+|PA_6|$ gilt. Hinweis: Sei M der Mittelpunkt des Kreises k. Wir können die Bezeichnung der Punkte auf k so wählen, $\measuredangle A_1MP$ minimal ist. Sei F_1 der Fußpunkt des Lots von M auf $\overline{A_1A_4}$. Dann gilt $|A_1F_1| = |F_1A_4|$ und $|PA_1| - |PA_4| = 2|F_1P|$. Ähnliches gilt für die beiden anderen Sehnen. Ist $\alpha = \measuredangle A_1MP$, dann sind $\measuredangle A_2MP$ und $\measuredangle A_6MP$ gleich $60^0+\alpha$ und $60^0-\alpha$.

311. Sei $\overline{AB}$ ein fester Durchmesser eines Kreises k und d eine Zahl kleiner als $|AB|$. Sei $\overline{UV}$ eine bewegliche Sehne der Länge d und K ihr Mittelpunkt. Seien F und G die Fußpunkte der Lote von U und V auf $\overline{AB}$. Das Dreieck $\triangle FKG$ ist dann gleichschenkelig. Bewegt man die Sehne $\overline{UV}$, dann sind die dadurch entstehenden Dreiecke $\triangle FKG$ alle zueinander ähnlich. Hinweis: Sei M der Mittelpunkt von k, $\alpha = \measuredangle UMK = \measuredangle VMK$ und $\varphi = \measuredangle AMK$ oder $= \measuredangle BMK$. Sei H der Fußpunkt des Lots von K auf $\overline{AB}$. Dann ist H der Mittelpunkt von $\overline{FG}$. Berechne $|KH|$ und $|FG|$. Man sieht, dass $\frac{|KH|}{|FG|}$ nur von d, α und dem Radius des Kreises abhängt.

312. Sei k ein Kreis mit Mittelpunkt M und P ein Punkt, der nicht auf k liegt und ungleich M ist. Sei g die Senkrechte auf $\overline{MP}$ durch P. Sei h eine beliebige Gerade durch P, die k in den Punkten H_1 und H_2 schneidet. Weiters seien t_1 und t_2 die Tangenten in H_1 und H_2 an den Kreis k und T_1 und T_2 die Schnittpunkte von t_1 und t_2 mit g. Man zeige, dass P der Mittelpunkt der Strecke $\overline{T_1T_2}$ ist. Hinweis: Sei $\delta = \measuredangle MH_1H_2 = \measuredangle MH_2H_1$ und $\varphi = 90^0 - \delta$ der Winkel zwischen den Tangenten t_1 und t_2 und der Sehne $\overline{H_1H_2}$. Sei $\alpha = \measuredangle PMH_1$ und $\beta = \measuredangle PMH_2$. Jetzt Sinussatz, zuerst für die Dreiecke $\triangle MPH_1$ und $\triangle MPH_2$, und dann für die Dreiecke $\triangle PH_1T_1$ und $\triangle PH_2T_2$.

313. Für die Winkel eines Dreiecks gilt
$\cot^2\alpha + \cot^2\beta + \cot^2\gamma \geq 1$ (Gleichheit nur für gleichseitiges Dreieck).

314. Für die Winkel (alle $\neq 90^0$) eines konvexen Vierecks gilt
$\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma+\tan\delta}{\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma\tan\delta} = \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma + \cot\delta$.

E. Geometrie mit komplexen Zahlen

315. Seien A, B, C, D und E Punkte, die in dieser Reihenfolge auf einem Kreis mit Radius r liegen. Es gelte $|AB| = |BC| = |DE| = r$, aber $|CD|$ und $|EA|$ seien beliebig. Sei P der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CD}$ und Q der Mittelpunkt der Strecke $\overline{EA}$. Das Dreieck $\triangle BPQ$ ist dann gleichseitig.

316. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und φ ein Winkel. Sei D der Punkt, den man durch Drehung des Punktes C im Gegenuhrzeigersinn um den Punkt A um den Winkel φ erhält. Sei E der Punkt, den man durch Drehung des Punktes C im Uhrzeigersinn um den Punkt B um den Winkel $180^0 - \varphi$ erhält. Sei M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{DE}$. Man zeige, dass M unabhängig von C ist und auf dem Kreis mit Durchmesser $\overline{AB}$ liegt.

317. Über jeder Seite eines Dreiecks $\triangle ABC$ wird nach außen ein gleichseitiges Dreieck errichtet. Ihre Spitzen seien A_1, B_1 und C_1. Ebenso wird über jeder Seite ein gleichschenkeliges Dreieck mit Basiswinkel 30^0 errichtet. Ihre Spitzen seien A_2, B_2 und C_2. Seien S_a, S_b und S_c die Schwerpunkte der Dreiecke $\triangle AB_1C_1$, $\triangle BA_1C_1$ und $\triangle CA_1B_1$. Das Sechseck $A_2S_cB_2S_aC_2S_b$ ist dann regulär.

318. Sei $n \geq 3$ und $\varphi = \frac{360^0}{n}$. Sei $A_0A_1\ldots A_{n-1}$ ein n-Eck und zwar das affine Bild eines regulären n-Ecks (Bild unter einer linearen Abbildung). Auf den Seiten dieses n-Ecks werden gleichseitige Dreiecke mit Basiswinkel $90^0 - \frac{\varphi}{2}$ aufgesetzt (Winkel φ an der Dreieckspitze). Man zeige, dass die Spitzen der aufgesetzten Dreiecke ein reguläres n-Eck bilden. (Für $n = 3$: Napoleon, für $n = 4$: Thebault.) Hinweis: Die Punkte $(\cos k\varphi, \sin k\varphi)$ bilden ein reguläres n-Eck. In der komplexen Ebene sind $a_k = u\cos k\varphi + v\sin k\varphi$ mit $0 \leq k \leq n-1$ die Eckpunkte eines affinen Bildes, wobei $u, v \in \mathbb{C}$ beliebig sind. Es gilt auch $a_k = (\frac{u}{2} + \frac{v}{2i})e^{ik\varphi} + (\frac{u}{2} - \frac{v}{2i})e^{-ik\varphi}$. Vielleicht

hilft auch die Formel $\cot\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}$.

F. Standardlage

319. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und N der Schnittpunkt des Umkreises mit der Symmetrale der Seite $\overline{AB}$, der auf derselben Seite von $\overline{AB}$ liegt wie C (Nordpol). Sei $d > 0$. Die Punkte P auf $\overline{AC}$ und Q auf $\overline{BC}$ seien so gewählt, dass $|AP| = |BQ| = d$ gilt. Dann liegen die vier Punkte P, Q, C und N auf einem Kreis.
320. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H. Sei k ein Kreis durch A und C. Sei P der Schnittpunkt $\neq C$ von k mit $\ell(B,C)$ und Q der Schnittpunkt $\neq A$ von k mit $\ell(A,B)$. Sei G der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $\triangle QBP$ und M der Schnittpunkt von $\ell(A,P)$ und $\ell(C,Q)$. Dann liegen die drei Punkte H, M und G auf einer Gerade. Hinweis: $\triangle ABC$ und $\triangle PBQ$ sind ähnlich (Peripheriewinkelsatz). Es gilt $\overrightarrow{BP} = t\frac{c}{a}\binom{-v}{w}$ und $\overrightarrow{BQ} = ta\binom{-1}{0}$ für ein $t \in \mathbb{R}$.
321. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Umkreismittelpunkt U und Inkreismittelpunkt I. Sei $a = |BC|$. Vom Eckpunkt B aus wird auf $\ell(A,B)$ in Richtung A die Strecke der Länge a abgetragen. Das ergibt den Punkt P. Vom Eckpunkt C aus wird auf $\ell(A,C)$ in Richtung A die Strecke der Länge a abgetragen. Das ergibt den Punkt Q. Man zeige, dass $\ell(P,Q)$ auf $\ell(U,I)$ senkrecht steht. Weiters gilt $|PQ| = 2|UI|\sin\alpha$. Hinweis: Für jedes Dreieck in Standardlage gelten die Gleichungen $2au + 2bv - tu - tv = t(b-a)$ und $(t-2c)w + t\frac{uv}{w} = \frac{t}{w}(ab + au - bv)$, wobei $t = a + b + c$ der Umfang des Dreiecks ist.

G. Kegelschnitte

322. In einem spitzwinkeligen Dreieck $\triangle ABC$ sei D der Fußpunkt der Höhe durch C, E der Fußpunkt der Höhe durch A und F der Fußpunkt der Höhe durch B. Weiters sei p die Parabel mit Brennpunkt D und Leitlinie $\ell(E,F)$. Man zeige, dass $\ell(A,C)$, $\ell(B,C)$, $\ell(A,E)$ und $\ell(B,F)$ Tangenten an p sind. Hinweis: Tangentenkonstruktion (der Spiegelpunkt des Brennpunkts bei Spiegelung an einer Tangente liegt auf der Leitlinie) und Beispiel 76.
323. Sei h eine gleichseitige Hyperbel (beide Halbachsen haben Länge 1) und P ein Punkt auf h. Sei Q der am Mittelpunkt der Hyperbel gespiegelte Punkt P. Sei k der Kreis durch Q mit Mittelpunkt P. Dieser Kreis hat neben Q drei weitere Schnittpunkte A, B und C mit der Hyperbel. Man zeige, dass das Dreieck $\triangle ABC$ gleichseitig ist.
Hinweis: Statt in einem x-y-Koordinatensystem arbeiten wir in der komplexen Ebene mit der Variablen $z = x + iy$. Die Gleichung von h ist $z^2 + \bar{z}^2 = 2$ (hat Mittelpunkt 0). Die Gleichung von k ist $(z-p)(\bar{z}-\bar{p}) = 4p\bar{p}$, wobei $p^2 + \bar{p}^2 = 2$ gilt. Wir verschieben 0 nach p, für z ist $z + p$ einzusetzen, die Gleichung von h wird zu $z^2 + 2zp + \bar{z}^2 + 2\bar{z}\bar{p} = 0$ und die von k wird zu $z\bar{z} = 4p\bar{p}$. Elimination von $\bar{z}$ aus diesen beiden Gleichungen ergibt $(z+2p)(z^3 + 8p\bar{p}^2) = 0$. Die Nullstellen sind die vier Schnittpunkte von h und k (um p verschoben). Die Punkte A, B und C entsprechen den Nullstellen von $z^3 + 8p\bar{p}^2 = 0$. Ist a eine Nullstelle, dann sind $b = a\lambda$ und $c = a\lambda^2$ die beiden anderen, wobei $\lambda = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\varphi}$ ist mit $\varphi = 120^0$.