Numerische Mathematik für LAK

F. Hofbauer

Rundungsfehler

1. Man berechne $a + (b + c)$ und $(a + b) + c$ für $a = 0.98765$, $b = 0.012424$ und $c = -0.0065432$. Man berechne $(a + b)c$ und $ac + bc$ für $a = 4.2832$, $b = -4.2821$ und $c = 5.7632$. (fünfstellige Rechnung)
2. Für $a = 16.24$ und $b = 15.71$ soll bei 4-stelliger Rechnung $(a - b)^2$ bestimmt werden. Ist es besser, die Formel $a^2 - 2ab + b^2$ auszuwerten?
3. Für $a = 14.425$, $b = 14.672$ und $\gamma = 10^o$ soll $a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma$ bei 5-stelliger Rechnung bestimmt werden. Ist es besser, die äquivalente Formel $(a - b)^2 + 4ab \sin^2 \frac{\gamma}{2}$ zu verwenden?
4. Für betragskleines a ungleich 0 soll $\frac{1-\cos a}{a}$ ausgewertet werden. Ergibt die direkte Berechnung ein gutes Ergebnis oder ist es besser die äquivalente Formel $\frac{\sin^2 a}{(1+\cos a)a}$ auszuwerten? Zum Beispiel: $a = 0.15$ bei vierstelliger Rechnung.
5. Mittelwert und Varianz werden definiert durch $M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ und $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - M)^2$. Für beliebiges a gilt dann $M = a + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)$ und $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 - (M - a)^2$. Wie soll man a bei der Berechnung von M und S^2 wählen? Ist es besser $a = 0$ zu setzen – dann sehen die Formeln einfacher aus – oder soll man a nahe M wählen? Hier sind Daten zum Ausprobieren mit $n = 6$: 46.85, 46.79, 46.82, 46.78, 46.81, 46.82 (4-stellige Rechnung).

Polynome

6. Man berechne den Funktionswert des Polynoms $2x^3 + 2x^2 - 5x + 4$ für $x = -2$ mit Hilfe des Horneralgorithmus, sowie Ergebnis und Rest bei Division durch $x + 2$.
7. Man berechne den Funktionswert des Polynoms $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x - 7$ für $x = 2$ mit Hilfe des Horneralgorithmus, sowie Ergebnis und Rest bei Division durch $x - 2$.
8. Man berechne alle Ableitungen des Polynoms $2x^3 + 2x^2 - 5x + 4$ im Punkt $u = -2$ mit Hilfe des Horneralgorithmus.
9. Man berechne alle Ableitungen des Polynoms $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x - 7$ im Punkt $u = 2$ mit Hilfe des Horneralgorithmus.
10. Man dividiere das Polynom $2x^5 + 5x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 6$ mit dem Horneralgorithmus durch das Polynom $x^2 + 3x + 2$.
11. Wie wird wohl die Division durch ein Polynom dritten Grades mit Hilfe des Horneralgorithmus funktionieren? Man dividiere $x^6 + x^5 + x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 8x - 6$ durch $x^3 - x^2 + 2x - 2$.
12. Horneralgorithmus für komplexe Zahlen: Man berechne den Funktionswert des Polynoms $(1 + i)x^3 - (1 + 2i)x^2 + (1 + 4i)x - i$ für $x = 1 - i$.

Fixpunkte und Nullstellen

13. Sei $a > 0$. Man zeige, dass $g(x) = \frac{n-1}{n}x + \frac{a}{n}x^{-(n-1)}$ auf dem Intervall $[\sqrt[n]{a}, \infty)$ kontrahierend ist mit $q = \frac{n-1}{n}$. Der Fixpunkt ist $\sqrt[n]{a}$. Ist $x_0 = \max(1, a)$ und $x_i = g(x_{i-1})$ für $i \geq 1$, dann konvergiert die Folge $(x_i)_{i\geq 0}$ gegen $\sqrt[n]{a}$.
14. Für $I = [\frac{3}{2}, \infty)$ und für $g(x) = \frac{2x^2+1}{3x-1}$ zeige man mit $q = \frac{2}{3}$ die Voraussetzungen des Kontraktionssatzes. Dazu genügt es, $0 \leq g'(x) \leq \frac{2}{3}$ für $x \in I$ und $g(\frac{3}{2}) \geq \frac{3}{2}$ zu zeigen.
15. Man zeige, dass die Abbildung $x \mapsto \frac{2x^3}{3x^2+1} + 1$ das Intervall $I = [1, \infty)$ in sich abbildet und auf

I kontrahierend ist. Man bestimme eine möglichst kleine Kontraktionskonstante.

16. Die Gleichung $x^3 - ax - b = 0$ für $a > 0$ und $b > 0$ hat genau eine positive Lösung z. Für die Funktion $g(x) = \frac{2x^3+ax+b}{3x^2}$ ist diese Lösung ein Fixpunkt. Sei $I = [z, \infty)$. Für $x \in I$ zeige man, dass $0 \le g'(x) \le \frac{2}{3}$ gilt (man beachte $ax + b \le x^3$ für $x \in I$). Also ist diese Funktion zum Berechnen von z geeignet. Ein möglicher Startwert ist $x_0 = \max(a, b, 2)$.

17 – 21. Man löse folgende Gleichungen mit dem Newtonverfahren. Indem man die vorkommenden Funktionen aufzeichnet, kann man einen Näherungswert für die Lösung erraten, den man als Startwert verwendet: $\log x = x^{-2}$, $xe^x = 1$, $x^2 = \cos \pi x$, $x^2 = e^{-x}$, $\log x + x = 0$

22. Man berechne die größte Nullstelle des Polynoms $x^3 + 2x^2 + 5x - 7$ mit Hilfe des Newtonverfahrens.

23. Man versuche eine Lösung von $x^4 + 2x + 2 = 0$ mit Hilfe des Newtonverfahrens zu berechnen. Was erkennt man dabei?

24. Man bestimme eine Nullstelle des Polynoms $x^3 + 2x^2 + 5x - 7$ mit dem Bisektionsverfahren.

Numerische Integration

25. Sei $w(y) = \frac{1}{24}y(y+3)^3$ für $y \in [-3, -1]$, $w(y) = \frac{1}{24}(y^4-9)$ für $y \in [-1, 1]$ und $w(y) = \frac{1}{24}y(y-3)^3$ für $y \in [1, 3]$. Man zeige $w(3) = w'(3) = w''(3) = 0$ und $w(-3) = w'(-3) = w''(-3) = 0$. Weiters zeige man $w(1) = w(-1) = -\frac{1}{3}$, $w'(1) = -w'(-1) = \frac{1}{6}$ und $w''(1) = w''(-1) = \frac{1}{2}$.

26. Sei w wie in Beispiel 25. Man berechne $\int_{-3}^{3} w(y)\, dy$.

27. Sei w wie in Beispiel 25 und h viermal stetig differenzierbar mit $h(-3) = h(-1) = h(1) = h(3) = 0$. Man zeige dass $\int_{-3}^{3} h(y)\, dy = -\frac{6}{5}h^{(4)}(\eta)$ für ein $\eta \in (-3, 3)$ gilt und leite damit den Fehlerterm für die 3/8-Regel her.

28. Rechteckregel: Das Integral $\int_{-1}^{1} g(y)\, dy$ wird durch $2g(0)$ approximiert. Sei g zweimal stetig differenzierbar und $h(y) = g(y) - g(0)$. Dann gilt $h'' = g''$ und $h(0) = 0$. Sei $w(y) = \frac{1}{2}(y-1)^2$ für $y \in [0, 1]$ und $w(y) = \frac{1}{2}(y+1)^2$ für $y \in [-1, 0]$. Man zeige dass $\int_{-1}^{1} h(y)\, dy = g^{(2)}(\eta) \int_{-1}^{1} w(y)\, dy = \frac{1}{3}g^{(2)}(\eta)$ für ein $\eta \in (-1, 1)$ gilt. Für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion f und $u < v$ gilt dann $\int_u^v f(x)\, dx = (v-u)f(\frac{u+v}{2}) + \frac{1}{24}(v-u)^3 f''(\xi)$ für ein $\xi \in (u, v)$.

29. Zusammengesetzte 3/8-Regel: Das Integrationsintervall $[a, b]$ wird in n gleich lange Teilintervalle zerlegt, auf die die 3/8-Regel angewendet wird. Welche Approximationsformel erhält man für das Integral $\int_a^b f(x)\, dx$? Wie kann man den Fehler abschätzen?

30. Wir bezeichnen die Approximationsformel für das Integral $\int_a^b f(x)\, dx$ aus Beispiel 29 mit D_n. Sei T_n die zusammengesetzte Trapezregel für n Teilintervalle. Man zeige $D_n = \frac{9}{8}T_{3n} - \frac{1}{8}T_n$.

31. Man berechne $\int_0^{\pi/2} e^x \cos x\, dx$ näherungsweise durch die Trapezregel. Man unterteile $[0, \frac{\pi}{2}]$ in 4 und in 8 Intervalle und schätze den Fehler ab.

32. Man berechne $\int_0^{\pi/2} e^x \cos x\, dx$ näherungsweise durch die Simpsonregel. Man unterteile $[0, \frac{\pi}{2}]$ in 2 und in 4 Intervalle und schätze den Fehler ab. Man vergleiche mit dem letzten Beispiel.

33. Sei $f(x) = (1+x^3)^{1/3}$. Es soll $\int_0^1 f(x)\, dx$ mit Hilfe der zusammengesetzten Trapezregel berechnet werden. In wie viele Teilintervalle muss man das Integrationsintervall $[0, 1]$ unterteilen, damit der Fehler $\le 10^{-3}$ ist? Hinweis: $|f''(x)| \le 0.9$ für $x \in [0, 1]$.

34. Sei $f(x) = (1 + x^3)^{1/3}$. Es soll $\int_0^1 f(x)\, dx$ mit Hilfe der zusammengesetzten Simpsonregel berechnet werden. In wie viele Teilintervalle muss man das Integrationsintervall $[0, 1]$ unterteilen, damit der Fehler $\le 10^{-3}$ ist? Hinweis: $|f^{(4)}(x)| \le 20$ für $x \in [0, 1]$.

35 – 38. Man berechne T_4, T_8, T_{16}, ... bis das Integral auf 4 Dezimalstellen genau bestimmt ist. Ebenso S_4, S_8, S_{16}, ...
$\int_0^1 \frac{1}{1+x^4}\, dx$, $\int_0^1 \sin(\pi x^2)\, dx$, $\int_1^3 \frac{e^x}{x}\, dx$, $\int_1^4 \sqrt{\log x}\, dx$,

Lineare Gleichungssysteme

39 – 41. Man löse

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ -3x_1 - 5x_2 - x_3 &= -1 \\ -7x_1 - 12x_2 - 2x_3 &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 9x_1 + 3x_2 - 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 17x_2 + 2x_3 &= -12 \\ -6x_1 + 2x_2 + 30x_3 &= 22 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} +2x_2 - 4x_3 + x_4 &= -2 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 &= 3 \\ -2x_1 + 4x_2 - 8x_3 - x_4 &= -4 \end{aligned}$$

42 – 44. Man löse

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 3 \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 &= 9 \\ 6x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 15 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 6x_1 - 9x_2 - x_3 + 6x_4 &= 7 \\ 8x_1 - 9x_2 - 2x_3 + 7x_4 &= 6 \\ 4x_1 - 2x_3 + 2x_4 &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 5x_4 &= 3 \\ 9x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 7x_4 &= 1 \\ -3x_1 + 4x_3 - x_4 &= 5 \\ 6x_1 + 6x_2 + x_3 + 8x_4 &= 8 \end{aligned}$$

45 – 46. Man berechne die Determinante

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & -5 \\ 2 & 7 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 5 \\ -2 & 6 & 8 & -8 \\ 2 & -2 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

47 – 49. Man berechne die inverse Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -5 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Lineare Optimierung

50. Man löse folgende Optimierungsaufgabe:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ x_1 - x_2 &\leq 7 \\ x_2 &\leq 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned} \qquad x_1 + 3x_2 \to \text{Max}$$

51. Ein landwirtschaftlicher Betrieb will 45ha Ackerland mit Weizen und Zuckerrüben bebauen, keinesfalls aber mehr als 15ha für den Rübenanbau verwenden. Arbeitskräfte stehen für insgesamt 1200 Arbeitsstunden zur Verfügung. Die erforderliche Arbeitszeit bei Weizen beträgt 20h/ha, bei Rüben 60h/ha. Der Reingewinn beträgt bei Weizen 300 Euro pro ha, bei Rüben 600 Euro pro ha. Wieviel Ackerland muss mit Rüben und wieviel mit Weizen bebaut werden damit der Ertrag maximal ist?

52. Eine Speditionsfirma transportiert Container zweier Fabriken A und B. Jeder Container der Fabrik A wiegt 40 kg und hat ein Volumen von 0.2 m^3. Jeder Container der Fabrik B wiegt 50 kg und hat ein Volumen von 0.3 m^3. Die Transportkosten pro Container der Fabrik A werden von der Spedition mit 22 Euro, für die Fabrik B mit 30 Euro verrechnet. Ein Transporter kann höchstens 37.000 kg laden und hat nicht mehr als 200 m^3 Laderaum. Wieviele Container der Fabriken A und B muss ein Transporter laden, damit der Gewinn aus den Transportkosten möglichst groß wird?

53. Eine Fabrik stellt in Säcken Tierfutter aus zwei Bestandteilen A und B zusammen. Jeder Sack soll zumindest 10 dkg des Nähstoffes N1, zumindest 8 dkg des Nährstoffes N2 und zumindest 12 dkg des Nährstoffes N3 enthalten. Jedes Kilogramm von Bestandteil A enthält 2 dkg von N1, 2 dkg von N2 und 6 dkg von N3. Jedes Kilogramm von Bestandteil B enthält 5 dkg von N1, 3 dkg von N2 und 4 dkg von N3. Die Kosten von einem Kilogramm des Bestandteiles A sind 0.8 Euro und die von einem Kilogramm des Bestandteiles B sind 0.9 Euro. Wieviele Kilogramm der Bestandteile A und B müssen pro Sack verwendet werden, damit der Preis

möglichst niedrig ist?

54. Ein Geschäft möchte 600 Hosen einkaufen und dafür höchstens 20000 Euro ausgeben. Zur Wahl stehen drei Angebote: Sorte A hat einen Einkaufspreis von 25 Euro und bringt 6 Euro Gewinn. Sorte B hat einen Einkaufspreis von 30 Euro und bringt 8 Euro Gewinn. Sorte C hat einen Einkaufspreis von 50 Euro und bringt 10 Euro Gewinn. Welche Wahl muss getroffen werden? Gib den größtmöglichen Gewinn an!

55. Man löse folgende Optimierungsaufgabe:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 + x_2 + x_3 &\leq& 19 & \quad x_1 \geq 0 & \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &\leq& 46 & \quad x_2 \geq 0 & \quad 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \text{Max} \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq& 50 & \quad x_3 \geq 0 & \end{array}$$

56. Man löse die Optimierungsaufgabe aus Beispiel 55 mit der Zielfunktion $5x_1+4x_2+3x_3 \to$ Max.

57. Man löse die Optimierungsaufgabe aus Beispiel 55 mit der Zielfunktion $5x_1+4x_2+4x_3 \to$ Max. (Lösung nicht eindeutig)

58. Man löse das Minimumproblem:

$$\begin{array}{rclcl} 5x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq& 30 & \quad x_1 \geq 0 & \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 &\geq& 18 & \quad x_2 \geq 0 & \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 \to \text{Min} \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\geq& 24 & \quad x_3 \geq 0 & \end{array}$$

Ausgleichsrechnung

59. Man bestimme $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ so, dass $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ minimal wird, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

60. Man bestimme $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ so, dass $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ minimal wird, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

61. Zu den Punkten $(-1, \frac{5}{3})$, $(1, 2)$, $(2, \frac{10}{3})$ soll eine Gerade $g(x) = a + bx$ so bestimmt werden, dass $\sum_{i=1}^{3}(g(x_i) - y_i)^2$ minimal wird.

62. Zu den Punkten $(-1, \frac{5}{6})$, $(0, \frac{5}{2})$, $(1, \frac{1}{2})$, $(2, \frac{-11}{6})$ soll eine Parabel $h(x) = a+bx+cx^2$ so bestimmt werden, dass $\sum_{i=1}^{4}(h(x_i) - y_i)^2$ minimal wird.

63. Die Länge L eines Stabes hängt linear von der Temperatur T ab. Es gilt also $L = aT + b$. Für die Temperaturen $T = -10$, 0, 10 und 20 Grad misst man die Längen $L = 199.7$, 199.9, 200.2 und 200.6 mm. Man bestimme a und b so, dass die Summe der Qudrate der Abweichungen der gemessenen Werte von L zu den aus der Formel berechneten minimal wird (Regressionsgerade). Man kann sich die Arbeit dadurch vereinfachen, dass man $\tilde{L} = aT + \tilde{b}$ mit $\tilde{L} = L - 200$ und $\tilde{b} = b - 200$ behandelt.

64. Die Länge L einer Feder hängt linear von der Zugkraft Z ab. Es gilt also $L = aZ + b$. Für die Kräfte $Z = 0$, 1, 2, 4 und 5 Newton misst man die Längen $L = 100$, 102, 105, 112 und 116 mm. Man bestimme a und b so, dass die Summe der Qudrate der Abweichungen der gemessenen Werte von L zu den aus der Formel berechneten minimal wird.

65 – 70. Man berechne die Fourierkoeffizienten für folgende Funktionen $f(x) = |x|$, $f(x) = |\sin x|$, $f(x) = x^3 - \pi^2 x$, $f(x) = x^4 - 2\pi^2 x^2$, $f(x) = \cos\frac{x}{2}$, $f(x) = \cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$,