Diskrete Mathematik

Univ.-Prof. Dr. Goulnara ARZHANTSEVA

SS 2018

Organisatorisches

Vorlesung

- **Di 09:45-11:15 Hörsaal 13** 3.00 ECTS (2.00 SWS)

Organisatorisches

Vorlesung

- **Di 09:45-11:15 Hörsaal 13** 3.00 ECTS (2.00 SWS)
- http://www.mat.univie.ac.at/∼gagt/DM2018/index.html

Organisatorisches

Vorlesung

- **Di 09:45-11:15 Hörsaal 13** 3.00 ECTS (2.00 SWS)
- http://www.mat.univie.ac.at/∼gagt/DM2018/index.html
- **Schriftliche Prüfung** – Dauer 90 Minuten:
  (1) **28.06.2018** (2) **28.09.2018** (3) _.01.2019
  Anmeldung über U:SPACE bis spätestens **3 Tage** vor dem jeweiligen Termin!
  Musterprüfung ist über die Web-Seite.

Organisatorisches

Vorlesung

- **Di 09:45-11:15 Hörsaal 13** 3.00 ECTS (2.00 SWS)
- http://www.mat.univie.ac.at/∼gagt/DM2018/index.html
- **Schriftliche Prüfung** – Dauer 90 Minuten:
  (1) **28.06.2018** (2) **28.09.2018** (3) _.01.2019
  Anmeldung über U:SPACE bis spätestens **3 Tage** vor dem jeweiligen Termin!
  Musterprüfung ist über die Web-Seite.

Für die Prüfung müssen Sie den gesamten Kurs kennen (Definitionen, Beispiele, technische Konstruktionen, Sätze, Beweise, Motivationen, Kontexte usw.).

Organisatorisches

Vorlesung

- **Di 09:45-11:15 Hörsaal 13** 3.00 ECTS (2.00 SWS)
- http://www.mat.univie.ac.at/~gagt/DM2018/index.html
- **Schriftliche Prüfung** – Dauer 90 Minuten:
  (1) **28.06.2018** (2) **28.09.2018** (3) _.01.2019
  Anmeldung über U:SPACE bis spätestens **3 Tage** vor dem jeweiligen Termin!
  Musterprüfung ist über die Web-Seite.

Die Prüfungsproblemen nicht mit den in der Vorlesung oder in den begleitenden Übungen gerechneten Beispielen ident sein oder diesen ähneln, sondern können durchaus "neu" sein. Taschenrechner werden nicht zugelaßen.

Organisatorisches

Vorlesung

- **Di 09:45-11:15 Hörsaal 13** 3.00 ECTS (2.00 SWS)
- http://www.mat.univie.ac.at/∼gagt/DM2018/index.html
- **Schriftliche Prüfung** – Dauer 90 Minuten:
  (1) **28.06.2018** (2) **28.09.2018** (3) _.01.2019
  Anmeldung über U:SPACE bis spätestens **3 Tage** vor dem jeweiligen Termin!
  Musterprüfung ist über die Web-Seite.

Eine genaue Präsentation der Antworten und Lösungen während der schriftlichen Prüfung ist erforderlich.

Organisatorisches

Übungen

- **Mi 07.03. 16:45-17:30 Hörsaal 13**
- **Fr 02.03. 11:15-12:00 SR 10**
- **Fr 02.03. 12:15-13:00 SR 10**
- **Di 06.03. 14:00-14:45 SR 9**

Organisatorisches

Übungen

- **Mi 07.03. 16:45-17:30 Hörsaal 13**
- **Fr 02.03. 11:15-12:00 SR 10**
- **Fr 02.03. 12:15-13:00 SR 10**
- **Di 06.03. 14:00-14:45 SR 9**
- http://www.mat.univie.ac.at/∼gagt/DM2018/index.html

Organisatorisches

Übungen

- **Mi 07.03. 16:45-17:30 Hörsaal 13**
- **Fr 02.03. 11:15-12:00 SR 10**
- **Fr 02.03. 12:15-13:00 SR 10**
- **Di 06.03. 14:00-14:45 SR 9**
- http://www.mat.univie.ac.at/∼gagt/DM2018/index.html

Zwei positiv beurteilte Tafelpräsentationen und 60% angekreuzte Beispiele ergeben eine positive Note.

Organisatorisches

Übungen

- **Mi 07.03. 16:45-17:30 Hörsaal 13**
- **Fr 02.03. 11:15-12:00 SR 10**
- **Fr 02.03. 12:15-13:00 SR 10**
- **Di 06.03. 14:00-14:45 SR 9**
- http://www.mat.univie.ac.at/∼gagt/DM2018/index.html

Die Note wird bestimmt durch die Anzahl der vorbereiteten Beispiele sowie die Anzahl und Qualität der Tafelmeldungen und sonstigen Beiträge.

Überblick: Vorlesung

Einführung in die Grundbegriffe der Diskreten Mathematik

1. Einfache und abzählende Kombinatorik:
   Stichproben, Permutationen, Partitionen
2. Erzeugende Funktionen, Lösen von Rekursionen
3. Das Prinzip der Inklusion und Exklusion, Suchen und Sortieren
4. Graphen und Netzwerke

Überblick: Vorlesung

Literatur

Christian Krattenthaler and Markus Fulmek, Skriptum "Diskrete Mathematik", SS2017.

Martin Aigner, "Diskrete Mathematik", Vieweg, 1993.

Peter Cameron, "Combinatorics", Cambridge Unviersity Press, 1994.

Ziel = Besser berechnen und modellieren

Der professionelle Umgang mit abstrakten, diskreten Strukturen. Dazu gehört die Fähigkeit, konkrete Problemstellungen mit solchen Strukturen zu modellieren und scharfsinnige Schlussfolgerungen aus gegebenen Informationen zu ziehen.

Um gut zu lernen:

Vorlesung

+

Übungen

+

Christian Krattenthaler and Markus Fulmek, Skriptum "Diskrete Mathematik", SS2017.

Was ist Diskrete Mathematik ?

Die Diskrete Mathematik beschäftigt sich mit endlichen oder abzählbaren unendlichen Strukturen

diskrete = nicht zusammenhängend
diskrete $\neq$ kontinuierlich = stetig

Was ist Diskrete Mathematik?

Diskrete Mathematik beschäftigt sich nicht mit Differentialrechnung, Integralrechnung, Differentialgleichungen, Integralgleichungen, Kurven, Flächen, kontinuierlichen Bewegungen und Prozessen, ...

Was ist Diskrete Mathematik?

Diskrete Mathematik beschäftigt sich nicht mit Differentialrechnung, Integralrechnung, Differentialgleichungen, Integralgleichungen, Kurven, Flächen, kontinuierlichen Bewegungen und Prozessen, ...

Hauptefrage I: Wieviele?

Wieviele?

Beispiel 1: Wieviele Lottotipps gibt es 6 aus 45?

[_] [_] [_] [_] [_] [_]

Wieviele?

Beispiel 1: Wieviele Lottotipps gibt es 6 aus 45?

$$[\_] \quad [\_] \quad [\_] \quad [\_] \quad [\_] \quad [\_]$$

$\uparrow$

45 Möglichkeiten

Also insgesamt:

$$\frac{45\cdot}{}$$

Wieviele?

Beispiel 1: Wieviele Lottotipps gibt es 6 aus 45?

$$[11] \quad [\_] \quad [\_] \quad [\_] \quad [\_] \quad [\_]$$

$\uparrow$

44 Möglichkeiten

Also insgesamt:

$$\frac{45 \cdot 44 \cdot}{}$$

Wieviele?

Beispiel 1: Wieviele Lottotipps gibt es 6 aus 45?

[11] [31] [_] [_] [_] [_]

↑

43 Möglichkeiten

Also insgesamt:

$$\frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot}{}$$

Wieviele?

Beispiel 1: Wieviele Lottotipps gibt es 6 aus 45?

$$[11] \qquad [31] \qquad [45] \qquad [\_] \qquad [\_] \qquad [\_]$$

$$\underset{\text{42 Möglichkeiten}}{\uparrow}$$

Also insgesamt:

$$\underline{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot}$$

Wieviele?

Beispiel 1: Wieviele Lottotipps gibt es 6 aus 45?

[11] [31] [45] [1] [_] [_]

$\uparrow$

41 Möglichkeiten

Also insgesamt:

$$\frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot}{}$$

Wieviele?

Beispiel 1: Wieviele Lottotipps gibt es 6 aus 45?

$$[11] \quad [31] \quad [45] \quad [1] \quad [4] \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{40 Möglichkeiten}}}{[\_]}$$

Also insgesamt:

$$\frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{}$$

Wieviele?

Beispiel 1: Wieviele Lottotipps gibt es 6 aus 45?

[11] [31] [45] [1] [4] [36]

Also insgesamt:

$$\frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{}$$

Wieviele?

Beispiel 1: Wieviele Lottotipps gibt es 6 aus 45?

[31] [45] [11] [1] [4] [36]

Also insgesamt:

$$\frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8145060$$

Beispiel 1: Wieviele Lottotipps gibt es 6 aus 45?

Also insgesamt:

$$\frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8145060$$

Die Wahrscheinlichkeit, den richtigen Tipp zu landen, ist also

$$\frac{1}{8145060} = 0.0000001227738$$

Beispiel 1: Wieviele Lottotipps gibt es 6 aus 45?

Also insgesamt:

$$\frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8145060$$

Die Wahrscheinlichkeit, den richtigen Tipp zu landen, ist also

$$\frac{1}{8145060} = 0.0000001227738$$

Die Wahrscheinlichkeit, das nicht zu tun, ist

$$1 - \frac{1}{8145060} = 0.9999998772262$$

Beispiel 1: Wieviele Teilnehmer ?

Wieviele Teilnehmer an einer Ziehung braucht es, dass wenigstens einer (mit 50% Wahrscheinlichkeit) den richtigen Tipp errät?

Die Wahrscheinlichkeit, das nicht zu tun, ist

$$1 - \frac{1}{8145060} = 0.9999998772262$$

Beispiel 1: Wieviele Teilnehmer ?

Wieviele Teilnehmer an einer Ziehung braucht es, dass wenigstens einer (mit 50% Wahrscheinlichkeit) den richtigen Tipp errät?

Die Wahrscheinlichkeit, das nicht zu tun, ist

$$1 - \frac{1}{8145060} = 0.9999998772262$$

$$0.9999998772262^{5500000} = 0.509026123$$

Mehr als 5.5 Millionen!

Beispiel 1: Wieviele Teilnehmer ?

Wieviele Teilnehmer an einer Ziehung braucht es, dass wenigstens einer (mit 50% Wahrscheinlichkeit) den richtigen Tipp errät?

Die Wahrscheinlichkeit, das nicht zu tun, ist

$$1 - \frac{1}{8145060} = 0.9999998772262$$

$$0.9999998772262^{5500000} = 0.509026123$$

Mehr als 5.5 Millionen!

Testfrage 1

EuroMillions (5 aus 50, 2 Sternzahlen aus 12) oder Lotto (6 aus 45, 1 Zusatzzahl aus 45) oder Swisslotto (6 aus 42, 1 Glückszahl aus 6) ?

Diskrete Mathematik!

Wir lernen Diskrete Mathematik.

Wir speilen nicht Lottos!

Regel von der doppelten Abzhlung

Definition: Relation

Eine Relation ist eine Teilmenge des cartesischen Produkts.

Grundregel: Regel von der doppelten Abzahlung

Seien zwei endliche Mengen S, T gegeben, und sei $\sim$ eine Relation zwischen S und T. Für jedes $s \in S$ bezeichne $r(s)$ die Anzahl der Elemente $t \in T$, für die $s \sim t$ gilt; und ebenso bezeichne $\bar{r}(t)$ für jedes $t \in T$ die Anzahl der Elemente $s \in S$, für die $s \sim t$ gilt. Dann gilt (natürlich):

$$\sum_{s \in S} r(s) = \sum_{t \in T} \bar{r}(t).$$

Regel von der doppelten Abzhlung in Beispiel 1

Sei $S = \{$ alle 6–elementigen Teilmengen von $[45]\}$,
sei $T = \{$ alle geordneten 6–Tupeln von $[45]\}$.

Wir betrachten die Relation
"$\sim$": $s \sim t$, wenn s und t dieselben Zahlen (abgesehen von der Ordnung) enthalten; für $s \in S$ und $t \in T$.

"Zu jeder 6–elementigen Teilmenge gibt es 720 Arten, sie zu einem geordneten 6–Tupel zu machen", dann $r(s) \equiv 720 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ für alle Teilmengen $s \in S$

"Jedes 6–Tupel bestimmt — durch "Vergessen der Ordnung" — eine eindeutige 6–elementige Teilmenge", dann $\bar{r}(t) \equiv 1$.

Daher haben wir hier

$$|S| \cdot 720 = |T| \cdot 1 = 5864443200 = 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40.$$

Diskrete Mathematik: Anwendungen

- Netzwerktheorie
- Datenverarbeitung
- Kodierungstheorie
- Kombinatorischen Optimierung
- Statistische Physik
- Kryptographie
- Spieltheorie
- Ablaufplanung
- Transport- und Reihenfolgeproblemen (etwa in Logistik oder Produktionsplanung)
- Chemie, Genetik, Linguistik und sogar in der Archäologie
- Ingenieurwissenschaften
- etc. . . .

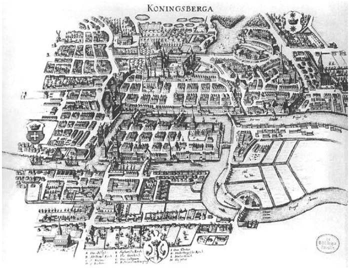
Wozu hat die Diskrete Mathematik ein?

Hauptefrage II: Wie man modelliert?

Wie man modelliert?

Beispiel 2: Die Brücken von Königsberg

Gibt es einen Weg, der jede Brücke genau einmal benutzt und schlussendlich zum Ausgangspunkt zurückkehrt?

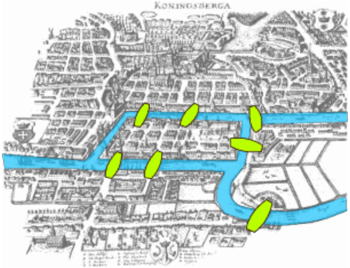


Stadtkarte von Königsberg (Merian Erben, 1652) mit dem Fluss Pregel

Wie man modelliert?

Beispiel 2: Die Brücken von Königsberg

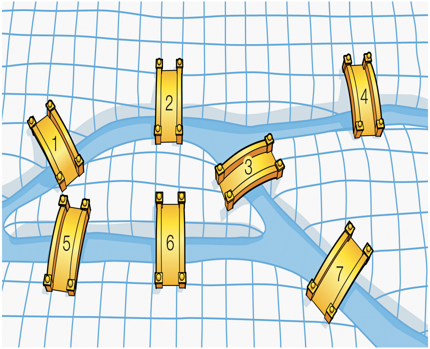
Gibt es einen Weg, der jede Brücke genau einmal benutzt und schlussendlich zum Ausgangspunkt zurückkehrt?



Stadtkarte von Königsberg (Wikimedia commons: Bogdan Giuşcă)

Beispiel 2: Die Brücken von Königsberg

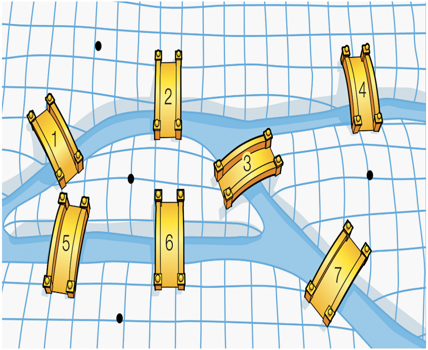
Das Ziel ist, die Aufgabe damit einfach und präzise beschreiben zu können.



Schematisch (Encyclopaedia Britannica/UIG/Getty Images)

Beispiel 2: Die Brücken von Königsberg

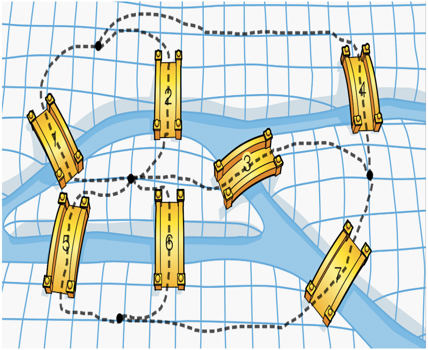
Setzen wir in jedes der vier Landstücke einen dicken Punkt, und verbinden wir Punkte, falls die entsprechenden Landstücke durch Brücken verbunden sind.



Abstrakt

Beispiel 2: Die Brücken von Königsberg

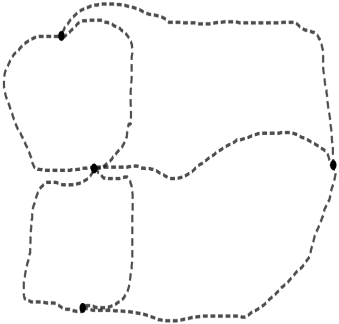
Setzen wir in jedes der vier Landstücke einen dicken Punkt, und verbinden wir Punkte, falls die entsprechenden Landstücke durch Brücken verbunden sind.



Abstrakt

Beispiel 2: Die Brücken von Königsberg

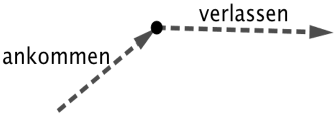
Gibt es einen Weg, entlang der strichlierten Linien, die jede strichlierte Linie genau einmal passiert?



Abstrakt

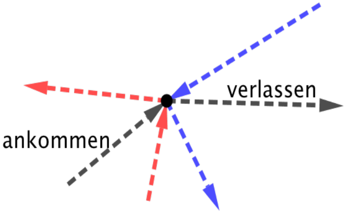
Beispiel 2: Die Brücken von Königsberg

Leonhard Eulers (1707-1783) Beobachtung (1736):
Immer wenn wir im Punkt über eine Linie ankommen, sollte es möglich sein, den Punkt wieder über eine andere Linie zu verlassen.



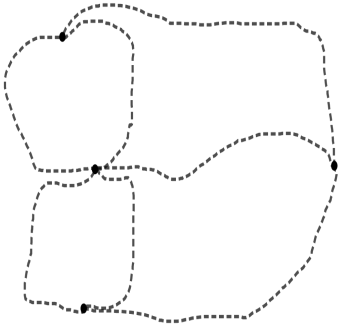
Beispiel 2: Die Brücken von Königsberg

Leonhard Eulers (1707-1783) Beobachtung (1736):
Immer wenn wir im Punkt über eine Linie ankommen, sollte es möglich sein, den Punkt wieder über eine andere Linie zu verlassen $\Longrightarrow$
Jeder Punkt muss mit einer geraden Anzahl von strichlierten Linien verbunden sein!



Beispiel 2: Die Brücken von Königsberg

Leonhard Eulers (1707-1783) Beobachtung (1736):
Sogar jeder Punkten ist mit einer ungeraden Anzahl von strichlierten Linien verbunden. Es kann also so einen Spaziergang nicht geben!



Beispiel 2: Die Brücken von Königsberg

Leonhard Eulers Satz (1736):

In einer zusammenhängenden Figur, die aus dicken Punkten und strichlierten Linien besteht, welche dicke Punkte verbinden, gibt es genau dann einen geschlossenen Weg, der jede Linie genau einmal passiert, wenn jeder dicke Punkt mit einer geraden Anzahl von strichlierten Linien verbunden ist.

Beispiel 2: Die Brücken von Königsberg

Leonhard Eulers Satz (1736):

In einer zusammenhängenden Figur, die aus dicken Punkten und strichlierten Linien besteht, welche dicke Punkte verbinden, gibt es genau dann einen geschlossenen Weg, der jede Linie genau einmal passiert, wenn jeder dicke Punkt mit einer geraden Anzahl von strichlierten Linien verbunden ist.

In Mathematik (wie wir in Graphentheorie sehen werden):

“Ein zusammenhängender Graph enthält genau dann einen Eulerkreis (bzw. Eulerweg), wenn er genau null (bzw. zwei) Knoten mit ungeradem Grad enthält.”

Beispiel 2: Die Brücken von Königsberg

Leonhard Eulers Satz (1736):

In einer zusammenhängenden Figur, die aus dicken Punkten und strichlierten Linien besteht, welche dicke Punkte verbinden, gibt es genau dann einen geschlossenen Weg, der jede Linie genau einmal passiert, wenn jeder dicke Punkt mit einer geraden Anzahl von strichlierten Linien verbunden ist.

In Mathematik (wie wir in Graphentheorie sehen werden):

"Ein zusammenhängender Graph enthält genau dann einen Eulerkreis (bzw. Eulerweg), wenn er genau null (bzw. zwei) Knoten mit ungeradem Grad enthält."

Testfrage 2

Was ist mit nicht geschlossenen Weg (nicht notwendig zum Ausgangspunkt zurückkehrt)?

Graphen

Definition: Graph $\mathbf{G} = \mathbf{G}(V, E) = (V(\mathbf{G}), E(\mathbf{G})) = (V, E)$

Ein Graph $\mathbf{G}$ besteht aus einer (endlichen) Menge V von Knoten (Vertices) und einer Teilmenge $E \subseteq \binom{V}{2}$ von Kanten (Edges).

Notation: $\binom{V}{2} := \{A \subseteq V : |A| = 2\}$ 2–elementigen Teilmengen von V.

Graphen

Definition: Graph $\mathbf{G} = \mathbf{G}(V, E) = (V(\mathbf{G}), E(\mathbf{G})) = (V, E)$

Ein Graph $\mathbf{G}$ besteht aus einer (endlichen) Menge V von Knoten (Vertices) und einer Teilmenge $E \subseteq \binom{V}{2}$ von Kanten (Edges).

Notation: $\binom{V}{2} := \{A \subseteq V : |A| = 2\}$ 2–elementigen Teilmengen von V.

In Beispiel 2: Knoten=dicken Punkten und Kanten=strichlierten Linien, $|V| = 4, |E| = 7$.

Graphen

Definition: Wanderung

Eine Wanderung der Länge n in $\mathbf{G}$, die von einem Knoten $p \in V(\mathbf{G})$ zu einem Knoten $q \in V(\mathbf{G})$ führt, ist eine Folge von Knoten

$$(p = v_0, v_1, \ldots, v_n = q),$$

sodaß $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(\mathbf{G})$ für $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Wir sagen: Die Wanderung enthält die Kanten $\{v_i, v_{i+1}\}$. Wir schreiben $p \rightsquigarrow q$.
Im Spezialfall $p = q$ sprechen wir von einer geschlossenen Wanderung.

Klarerweise definiert "$\rightsquigarrow$" eine Relation auf $V(\mathbf{G})$; es ist leicht zu sehen, daß es sich um eine Äquivalenzrelation (siehe unten) handelt.

Graphen

Definition: Eulerweg (bzw. Eulerkreis)

Eine Wanderung (bzw. geschlossene Wanderung) in einem Graphen **G**, die jede Kante aus $E(\mathbf{G})$ genau einmal enthält, heißt Eulerweg (bzw. Eulerkreis).

Definition: Zusammenhängend Graph

Ein Graph **G** heißt zusammenhängend, wenn je zwei Knoten von **G** durch eine Wanderung verbunden sind.

Definition: Grad

Der Grad $\deg(v)$ eines Knoten $v \in V$ in einem Graphen ist die Anzahl der Kanten, die den Knoten v mit anderen Knoten verbinden.

Satz von Euler

Satz: Satz von Euler

Ein zusammenhängender Graph $\mathbf{G}$ besitzt genau dann ein Eulerkreis, wenn $\deg(v)$ gerade ist für alle $v \in V(\mathbf{G})$.

Beweis:

($\Rightarrow$) Eulers Beobachtung: Man geht in jeden Knoten genauso oft hinein wie man aus ihm hinausgeht.

($\Leftarrow$) Annahme: zusammenhängender Graph, alle Knoten haben geraden Grad.

Zu zeigen: Existenz eines Eulerkreises.

Beweis durch Induktion über $|E|$.

Satz von Euler

Basis: $|E| = 0$. Dann $|V| = \{v\}$ und die Folge ($p = q = v_0 = v_n = v$) ist eine Eulerkreis.

Satz von Euler

Basis: $|E| = 0$. Dann $|V| = \{v\}$ und die Folge ($p = q = v_0 = v_n = v$) ist eine Eulerkreis.

Schritt: $|E| > 0$. Ausgehend von einen beliebigen Knoten v, wähle eine maximale Wanderung W von Kanten, der jede Kante höchstens einmal besucht. W endet wieder in v (sonst gibt es immer eine unbesuchte Kante, mit der die Wanderung verlängert werden kann).

Satz von Euler

Basis: $|E| = 0$. Dann $|V| = \{v\}$ und die Folge ($p = q = v_0 = v_n = v$) ist eine Eulerkreis.

Schritt: $|E| > 0$. Ausgehend von einen beliebigen Knoten v, wähle eine maximale Wanderung W von Kanten, der jede Kante höchstens einmal besucht. W endet wieder in v (sonst gibt es immer eine unbesuchte Kante, mit der die Wanderung verlängert werden kann).

Entferne von E alle Kanten von W. Die Knoten des entstehenden Graphen $\mathbf{G}' = (V, E')$ haben immer noch geraden Grad (man geht in jeden Knoten genauso oft hinein wie man aus ihm hinausgeht).

Satz von Euler

Basis: $|E| = 0$. Dann $|V| = \{v\}$ und die Folge ($p = q = v_0 = v_n = v$) ist eine Eulerkreis.

Schritt: $|E| > 0$. Ausgehend von einen beliebigen Knoten v, wähle eine maximale Wanderung W von Kanten, der jede Kante höchstens einmal besucht. W endet wieder in v (sonst gibt es immer eine unbesuchte Kante, mit der die Wanderung verlängert werden kann).

Entferne von E alle Kanten von W. Die Knoten des entstehenden Graphen $\mathbf{G}' = (V, E')$ haben immer noch geraden Grad (man geht in jeden Knoten genauso oft hinein wie man aus ihm hinausgeht).

Aus der Induktionsannahme folgt: jede zusammenhängende Komponente von $\mathbf{G}'$ hat eine Eulerkreis. Wir bilden eine Eulerkreis von $\mathbf{G}$ wie folgt: wenn W zum ersten Mal eine Komponente besucht, dann fügen wir W eine Eulerkreis der Komponente hinzu. ■

Überblick: Vorlesung

Einführung in die Grundbegriffe der Diskreten Mathematik

1. Einfache und abzählende Kombinatorik:
   Stichproben, Permutationen, Partitionen — Beispiel 1
2. Erzeugende Funktionen, Lösen von Rekursionen — Beispiel 3
3. Das Prinzip der Inklusion und Exklusion, Suchen und Sortieren
4. Graphen und Netzwerke — Beispiel 2

Beispiel 3: Erzeugende Funktion von $2^{[n]}$

Wir beginnen mit Definitionen und Notationen.

Definition: Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$

$\binom{n}{k}$ bezeichnet die Anzahl aller k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge

$[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis n

Notation: Potenzmenge von $[n]$

$2^{[n]}$ bezeichnet die Familie aller Teilmengen von $[n]$

Erzeugende Funktion (englisch: generating function)

Definition: Gewichtsfunktion ω auf $2^{[n]}$

Jeder Teilmenge $A \in 2^{[n]}$ ordnen wir das Gewicht

$$\omega(A) := x^{|A|}$$

zu (d.h., eine k-elementige Teilmenge erhält das Gewicht x^k)

Definition: Erzeugende Funktion $\mathcal{GF}$ von $2^{[n]}$ (in bezug auf das Gewicht ω)

$$\mathcal{GF}(2^{[n]}) := \sum_{A \in 2^{[n]}} \omega(A)$$

Es ist klar, daß $\mathcal{GF}(2^{[n]})$ ein Polynom in x vom Grad n ist.

Erzeugende Funktion (englisch: generating function)

Für den Koeffizienten von x^k in $\mathcal{GF}\left(2^{[n]}\right)$ führen wir die Bezeichnung $c_{n,k}$ ein, sodaß wir also (definitionsgemäß) schreiben können:

$$\mathcal{GF}\left(2^{[n]}\right) = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} x^k.$$

Kombinatorische Überlegung: Jede Teilmenge von $[n]$

- enthält entweder das Element n nicht — dann kann man sie als Teilmenge $A \in 2^{[n-1]}$ auffassen,
- oder sie enthält das Element n — dann kann man sie auffassen als Vereinigung einer Teilmenge $B \in 2^{[n-1]}$ mit dem Singleton (einelementige Teilmenge) $\{n\}$.

Natürlich gilt im letzteren Fall $\omega(B \cup \{n\}) = x \cdot \omega(B)$, sodaß wir also folgende Rekursion für die erzeugenden Funktionen erhalten:

$$\mathcal{GF}\left(2^{[n]}\right) = \mathcal{GF}\left(2^{[n-1]}\right) + x \cdot \mathcal{GF}\left(2^{[n-1]}\right) = (1+x)\,\mathcal{GF}\left(2^{[n-1]}\right).$$

Beispiel 3: Erzeugende Funktion von $2^{[3]}$ (aus Skriptum)

$\mathcal{GF}\left(2^{[2]}\right)$:

$\emptyset \mapsto 1$

$\{1\} \mapsto x$

$\{2\} \mapsto x$

$\{1,2\} \mapsto x^2$

$\boxed{= (1+x)^2}$

$\mathcal{GF}\left(2^{[3]}\right)$:

$\mathcal{GF}\left(2^{[2]}\right)$:

$\emptyset \mapsto 1$

$\{1\} \mapsto x$

$\{2\} \mapsto x$

$\{1,2\} \mapsto x^2$

$= (1+x)^2$

$\mathcal{GF}\left(2^{[2]}\right) \cdot x$:

$\emptyset \cup \{3\} = \{3\} \mapsto 1 \cdot x$

$\{1\} \cup \{3\} = \{1,3\} \mapsto x \cdot x$

$\{2\} \cup \{3\} = \{2,3\} \mapsto x \cdot x$

$\{1,2\} \cup \{3\} = \{1,2,3\} \mapsto x^2 \cdot x$

$= (1+x)^2 \cdot x$

$\boxed{= (1+x)^3}$

Erzeugende Funktion $\mathcal{GF}$ von $2^{[n]}$

Noch einmal:

$$\mathcal{GF}\left(2^{[n]}\right) = \mathcal{GF}\left(2^{[n-1]}\right) + x \cdot \mathcal{GF}\left(2^{[n-1]}\right) = (1+x)\,\mathcal{GF}\left(2^{[n-1]}\right).$$

Zusammen mit der offensichtlichen Anfangsbedingung $\mathcal{GF}\left(2^{[0]}\right) = 1$ (die Potenzmenge der leeren Menge $\emptyset$ hat als einziges Element die leere Menge $\emptyset$ selbst, und $\omega(\emptyset) = x^{|\emptyset|} = x^0 = 1$) erhalten wir also:

$$\mathcal{GF}\left(2^{[n]}\right) = (1+x)^n \qquad (1)$$

Gleichzeitig, $\mathcal{GF}\left(2^{[n]}\right) = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} x^k$. Was ist der Koeffizient $c_{n,k}$?

Erzeugende Funktion $\mathcal{GF}$ von $2^{[n]}$

Die Koeffizienten eines Polynoms $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ kann man bekanntlich durch Differenzieren und Auswerten bei 0 ermitteln, genauer gesagt:

$$c_k = \frac{1}{k!} \frac{\mathbf{d}^k}{\mathbf{d}x^k} p(x)\Big|_{x=0},$$

wobei $k!$ (gesprochen: k Faktorielle oder k Fakultät) gleich dem Produkt $1 \cdot 2 \cdots k$ ist.

Angewandt auf die Polynome $\mathcal{GF}\left(2^{[n]}\right)$ bedeutet dies gemäß (1):

$$c_{n,k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \underbrace{(1+x)^{n-k}\Big|_{x=0}}_{\equiv 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Erzeugende Funktion $\mathcal{GF}$ von $2^{[n]}$

Dann,

$$\mathcal{GF}(2^{[n]}) = \sum_{A \in 2^{[n]}} x^{|A|} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k$$

erhalten wir also die (wohlbekannte) Formel für die sogenannten Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

bzw. die wohlbekannte Entwicklung

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k. \tag{2}$$

Kombinatorische Überlegung $\rightsquigarrow$ Partition

Partitionen: Definition

Partition

Sei S eine Menge. Unter einer Partition π von S in m Blöcke S_i verstehen wir eine Familie $\pi = \{S_1, \ldots, S_m\}$ von Teilmengen von S mit den Eigenschaften

$$S_i \neq \emptyset \quad \forall i,$$
$$S_i \cap S_j = \emptyset \quad \forall i \neq j,$$
$$\bigcup_{i=1}^{m} S_i = S.$$

Für die disjunkte Vereinigung von Mengen führen wir die Notation $\dot\cup$ ein: $A \,\dot\cup\, B$ meint “$A \cup B$, wobei $A \cap B = \emptyset$”. Die letzten zwei der obigen Eigenschaften können wir damit auch so schreiben: $S = \dot\bigcup_{i \in [m]} S_i$.

Partition: Beispiele

Partition

- Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ in die Restklassen $\mod m$
- Für [5]: $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5\}\}$ oder $\{\{1,2,3,4\},\{5\}\}$

Keine Partition

- Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ in die Restklassen $\mod m$ und $\emptyset$.
- Für [5]: $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$ oder $\{\{1,2,3,4\},\{4,5\}\}$

Partition: Summenregel

Grundregel: Summenregel

Sei S eine Menge, und $S_1, \ldots, S_m$ eine Partition von S in m Blöcke. Dann gilt (natürlich):

$$|S| = \sum_{i=1}^{m} |S_i| .$$

Partition $\longleftrightarrow$ Äquivalenzrelation

Definition: Äquivalenzrelation

Eine Äquivalenzrelation ist eine Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

1) Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf S. Dann gibt es eine zugehörige Partition $\pi_\sim$ von S:

$$\sim \ \mapsto \ \pi_\sim$$

2) Umgekehrt, sei π eine Partition von S. Dann gibt es eine zugehörige Äquivalenzrelation $\sim_\pi$ auf S:

$$\pi \ \mapsto \ \sim_\pi$$

Satz: Partitionen und Aquivalenzrelationen sind eigentlich gleichwertig

Es gilt: $\pi_{\sim_\pi} = \pi$ und $\sim_{\pi_\sim} = \sim$.

Partition $\longleftrightarrow$ Äquivalenzrelation

1) Sei $S \neq \emptyset$ eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf S. Wir definieren eine zugehörige Partition $\pi_\sim$ von S:

$$\pi_\sim = \{S_x \mid x \in S\}$$

mit

$$S_x := \{y \in S \mid y \in S \text{ und } y \sim x\} \text{ für } x \in S \text{ beliebig.}$$

2) Umgekehrt, sei π eine Partition von S. Wir definieren eine zugehörige Äquivalenzrelation $\sim_\pi$ auf S:

$$x \sim_\pi y \Leftrightarrow x, y \text{ liegen in derselben Teilmenge von } \pi.$$

Satz: Partitionen und Aquivalenzrelationen sind eigentlich gleichwertig

Es gilt: $\pi_{\sim_\pi} = \pi$ und $\sim_{\pi_\sim} = \sim$.

Binomischer Lehrsatz

Satz: Binomischer Lehrsatz

Es gilt, $\forall x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \tag{3}$$

Beweis:

Wenn wir das Produkt

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdot(x+y)\cdots(x+y)}_{n \text{ Faktoren } (x+y)}$$

formal ausmultiplizieren wollten, dann müßten wir aus jedem der n Faktoren immer entweder x oder y auswählen.

Binomischer Lehrsatz

Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, k Faktoren $(x+y)$ aus $(x+y)^n$ auszuwählen. Eine solche Auswahl ist zum Beispiel:

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdots(x+y)}_{k \text{ Faktoren } (x+y)} \cdot \underbrace{(x+y)\cdots(x+y)}_{(n-k) \text{ Faktoren } (x+y)}$$

Für jede Auswahl erhalten wir nach Ausmultiplizieren von $(x+y)^k$ je einmal als höchste Potenz von x genau x^k. Es gibt $\binom{n}{k}$ solche Auswahlmöglichkeiten, also tritt die Potenz x^k insgesamt $\binom{n}{k}$-mal auf. Jeder Faktor $(x+y)^k$ korrespondiert zu einem Faktor $(x+y)^{n-k}$. Im letzteren ist die höchste Potenz y genau y^{n-k}. Demnach tritt der Faktor $x^k y^{n-k}$ insgesamt $\binom{n}{k}$ auf. Daraus ergibt sich der Binomische Lehrsatz. ∎

Binomischer Lehrsatz: Alternativbeweis

Wenn wir das Produkt

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdot(x+y)\cdots(x+y)}_{n \text{ Faktoren } (x+y)}$$

formal ausmultiplizieren wollten, dann müßten wir aus jedem der n Faktoren immer entweder x oder y auswählen.

$$\text{Auswahl} \mapsto \text{Binärzahl mit } n \text{ Bits}$$

$$\underbrace{(x+y)\cdots(x+y)}_{k \text{ Faktoren } (x+y)} \cdot \underbrace{(x+y)\cdots(x+y)}_{(n-k) \text{ Faktoren } (x+y)} \mapsto \underbrace{1\ldots1}_{k\text{ -mal}}\ \underbrace{0\cdots0}_{(n-k)\text{ -mal}}$$

Wenn wir aus dem j–ten Faktor x auswählen, setzen wir das j–te Bit auf 1; wenn wir aus dem j–ten Faktor y auswählen, setzen wir das j–te Bit auf 0.
Diese “Codierung” ist eine Bijektion zwischen den Binärzahlen mit n Bits und den beim Ausmultiplizieren auftretenden Monomen.

Binomischer Lehrsatz: Alternativbeweis

Der Koeffizient von $x^k y^{n-k}$ = die Anzahl der n–stelligen Binärzahlen, die genau k Einser enthalten.

$\{k$–elementige Teilmenge von $[n]\}$ $\xleftrightarrow{\text{Bijektion}}$ $\{n$–stellige Binärzahl mit k Einser$\}$

Definition: Charakteristische Funktion

Sei S eine endliche Menge und $T \subseteq S$ eine Teilmenge von S. Die charakteristische Funktion $\chi_T : S \to \{0,1\}$ der Teilmenge T ist dann wie folgt definiert:

$$\chi_T(i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i \in T, \\ 0 & \text{falls } i \notin T. \end{cases}$$

Wir deuten die n–stellige Binärzahl als charakteristische Funktion $\chi_A : [n] \to \{0,1\}$ einer gewissen Teilmenge $A \subseteq [n]$.

Binomischer Lehrsatz: Alternativbeweis

Der Koeffizient von $x^k y^{n-k}$

=

die Anzahl der n–stelligen Binärzahlen, die genau k Einser enthalten

=

die Anzahl der k–elementigen Teilmengen von $[n]$

=

$\binom{n}{k}$

Wir implizit folgende Bijektionsregel benutzt:

Grundregel: Bijektionsregel

Wenn es zwischen zwei Mengen S und T eine Bijektion gibt, dann gilt (natürlich)

$$|S| = |T| .$$

Mächtigkeit der Potenzmenge

Korollar

Sei S eine endliche Menge mit $|S| = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für die Mächtigkeit der Potenzmenge 2^S

$$\left|2^S\right| = 2^n.$$

Beweis: Wir beschreiben jede Teilmenge von $[n]$ durch ihre charakteristische Funktion, interpretieren diese als n–stellige Binärzahl.

$$\{\text{Teilmenge von } [n]\} \overset{\text{Bijektion}}{\longleftrightarrow} \{n\text{–stellige Binärzahl}\} = \{0, 1\}^n$$

$$|\{0, 1\}^n| = 2^n$$

∎

Produktregel

Grundregel: Produktregel

Für das cartesische Produkt der Mengen $S_1, \ldots, S_m$ gilt (natürlich)

$$|S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m| = \prod_{i=1}^{m} |S_i| .$$