Diskrete Mathematik

Univ.-Prof. Dr. Goulnara ARZHANTSEVA

SS 2018

Permutationen

Definition: Permutation

Sei X eine endliche Menge: Eine Permutation von X ist eine beliebige Anordnung der Elemente dieser Menge.

Unsere frühere Definition: Eine Permutation ist eine Bijektion $X \to X$.

Permutationen

Definition: Permutation

Sei X eine endliche Menge: Eine Permutation von X ist eine beliebige Anordnung der Elemente dieser Menge.

Unsere frühere Definition: Eine Permutation ist eine Bijektion $X \to X$.

Für Permutationen von $X = [n]$ wir benutzen einzeilige Notation

$$a_1\, a_2 \ldots a_n$$

oder zweizeilige Notation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}.$$

Permutationen: Beispiele

Zweizeiliger Notation: Alle Permutationen von [3]

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Einzeiliger Notation: Alle Permutationen von [3]

$$1\,2\,3,\quad 1\,3\,2,\quad 2\,1\,3,\quad 2\,3\,1,\quad 3\,1\,2,\quad 3\,2\,1.$$

Die Ordnung ist lexikographische = ‘alphabetische’ Ordnung der Zahlen

Symmetrische Gruppe

Definition: Multiplikation der Permutationen

Die Verknüpfung zweier Permutationen π_1, π_2 von $[n]$ ist definiert durch:

$$(\pi_1 \circ \pi_2)(i) := \pi_1(\pi_2(i)) .$$

Wir werden "$\circ$" oft weglassen und einfach $\pi_1\pi_2$ schreiben.

Multiplikation der Permutationen: $n = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Symmetrische Gruppe

Die Permutationen von $[n]$ bezüglich dieser Verknüpfung eine (nichtkommutative) Gruppe bilden, die sogenannten symmetrische Gruppe; wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{S}_n$.

Ihr Einheitselement ist die identische Permutation ϵ, die alle Elemente i auf sich selbst abbildet: $\epsilon(i) = i$ für $i = 1, \dots, n$
$\epsilon \in \mathfrak{S}_n$ hat also n Fixpunkte.

Wir wissen bereits:

$$|\mathfrak{S}_n| = n!$$

Zyklenzerlegung von Permutationen

Definition: Zyklus

Eine zyklische Permutation (kurz: ein Zyklus) der Länge k ist eine Permutation der Gestalt

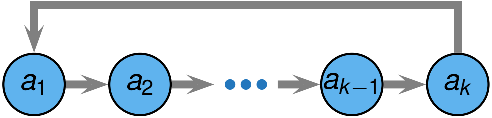
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_k \\ a_2 & a_3 & \dots & a_k & a_1 \end{pmatrix}.$$

Die kürzere Notation: $(a_1\ a_2\ \dots\ a_k)$.
Ein Zyklus der Länge 1 heißt ein Fixpunkt.

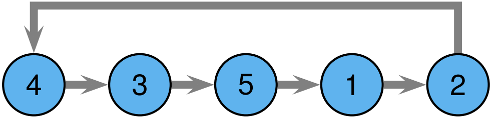
Zyklen: $n = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123), \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(23) = (32), \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3) = \epsilon$$

Beispiel: Zyklische Permutation (aus Skriptum)



$$n = 6, k = 5, \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} = (12435) = (43512)$$



Zyklenzerlegung von Permutationen

Für jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ gehört jedes $i \in [n]$ zu einem eindeutig bestimmten Zyklus. Denn die Folge

$$i, \pi(i), \pi^2(i) := \pi(\pi(i)), \pi^3(i), \pi^4(i), \ldots$$

muß sich einmal wiederholen — es gibt also ein minimales k mit $\pi^k(i) = i$. Wenn wir π auf die Menge

$$S := \left\{ i, \pi(i), \pi^2(i), \ldots, \pi^{k-1}(i) \right\}$$

einschränken, so haben wir sichtlich eine zyklische Permutation von S.

Zyklenzerlegung von Permutationen

Für jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ gehört jedes $i \in [n]$ zu einem eindeutig bestimmten Zyklus. Denn die Folge

$$i, \pi(i), \pi^2(i) := \pi(\pi(i)), \pi^3(i), \pi^4(i), \ldots$$

muß sich einmal wiederholen — es gibt also ein minimales k mit $\pi^k(i) = i$. Wenn wir π auf die Menge

$$S := \left\{i, \pi(i), \pi^2(i), \ldots, \pi^{k-1}(i)\right\}$$

einschränken, so haben wir sichtlich eine zyklische Permutation von S.

Zyklenzerlegung: $n = 6, k = 5$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} = (12435)(6) = (43512),$$

$$S = \left\{4, \pi(4) = 3, \pi^2(4) = 5, \pi^3(4) = 1, \pi^4(4) = 2\right\}$$

Zyklenzerlegung von Permutationen

Zwei verschiedene Zyklen π_i und π_j können wir als Permutationen von disjunkten Teilmengen X_1 und X_2 von $[n]$ auffassen. Daher kommutieren π_1 und π_2, wenn wir sie als Permutationen in $\mathfrak{S}_n$ auffassen, die alle Elemente in $[n] \setminus X_1$ bzw. in $[n] \setminus X_2$ fixieren (d.h., $\pi_1(x) = x$ für alle $x \notin X_1$ bzw. $\pi_2(x) = x$ für alle $x \notin X_2$):

$$\pi_1 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1.$$

$n = 6$, $X_1 = \{3, 5, 6\}$, $\pi_1 = (356)$, $X_2 = \{1, 2\}$, $\pi_2 = (12)$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} = (356)(12) = \pi_1 \circ \pi_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Zyklenzerlegung von Permutationen

Korollar 1 — Zyklenzerlegung

Sei $n \in \mathbb{N}$. Jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ läßt sich eindeutig (bis auf die Reihenfolge) in paarweise disjunkte (und daher paarweise kommutierende) Zyklen $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$ zerlegen, d.h.:

- Jede Zahl $i \in [n]$ gehört genau einem Zyklus an,
- Jeder Zyklus π_i hat Länge ≥ 1,
- Zwei verschiedene Zyklen π_i, π_j haben kein Element gemeinsam,
- $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \cdots \circ \pi_m$.

Zyklenzerlegung von Permutationen

Korollar 1 — **Zyklenzerlegung**

Sei $n \in \mathbb{N}$. Jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ läßt sich eindeutig (bis auf die Reihenfolge) in paarweise disjunkte (und daher paarweise kommutierende) Zyklen $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$ zerlegen, d.h.:

- Jede Zahl $i \in [n]$ gehört genau einem Zyklus an,
- Jeder Zyklus π_i hat Länge ≥ 1,
- Zwei verschiedene Zyklen π_i, π_j haben kein Element gemeinsam,
- $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \cdots \circ \pi_m$.

$n = 6$, $X_1 = \{3, 5, 6\}$, $\pi_1 = (356)$, $X_2 = \{1, 2\}$, $\pi_2 = (12)$, $\pi_3 = (4)$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} = (356)(12)(4) = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Zyklenzerlegung von Permutationen

Korollar 1 — Zyklenzerlegung

Sei $n \in \mathbb{N}$. Jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ läßt sich eindeutig (bis auf die Reihenfolge) in paarweise disjunkte (und daher paarweise kommutierende) Zyklen $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$ zerlegen, d.h.:

- Jede Zahl $i \in [n]$ gehört genau einem Zyklus an,
- Jeder Zyklus π_i hat Länge ≥ 1,
- Zwei verschiedene Zyklen π_i, π_j haben kein Element gemeinsam,
- $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \cdots \circ \pi_m$.

Definition: Zyklenzerlegung

Die Zerlegung einer Permutation π in ihre Zyklen entsprechend Korollar nennen wir die Zyklenzerlegung von π.

Wieviele Permutationen in $\mathfrak{S}_n$ mit k Zyklen gibt es?

Notation: $c(n,k)$

$c(n,k)$ bezeichne die Anzahl aller Permutationen von $[n]$ mit k Zyklen.

$$
\begin{aligned}
c(n,k) &= 0 \quad \text{für } k > n, \\
c(n,0) &= [n=0], \ \text{(Iversons Notation: 1 wenn } n=0 \text{ und 0 andernfalls)} \\
c(n,n) &= 1, \\
c(n,1) &= (n-1)!
\end{aligned}
$$

$c(n, k)$: Rekursion

$$c(n, k) = c(n - 1, k - 1) + (n - 1)c(n - 1, k). \tag{1}$$

Beweis:

Die Menge aller Zyklenzerlegungen von $[n]$ mit k Zyklen zerfällt in zwei disjunkte Teilmengen:

1. Jene Zyklenzerlegungen, bei denen (n) einen eigenen Zyklus bildet (also einen Fixpunkt darstellt),
2. und jene Zyklenzerlegungen, bei denen (n) keinen eigenen Zyklus bildet.

1\. Wir können den Zyklus (n) weglassen und erhalten eine Zyklenzerlegung von $[n - 1]$ in $(k - 1)$ Zyklen — die Anzahl ist $c(n - 1, k - 1)$.

$c(n,k)$: Rekursion

$$c(n,k) = c(n-1,k-1) + (n-1)c(n-1,k). \qquad (1)$$

Beweis:

Die Menge aller Zyklenzerlegungen von $[n]$ mit k Zyklen zerfällt in zwei disjunkte Teilmengen:

1. Jene Zyklenzerlegungen, bei denen (n) einen eigenen Zyklus bildet (also einen Fixpunkt darstellt),
2. und jene Zyklenzerlegungen, bei denen (n) keinen eigenen Zyklus bildet.

1. Wir können den Zyklus (n) weglassen und erhalten eine Zyklenzerlegung von $[n-1]$ in $(k-1)$ Zyklen — die Anzahl ist $c(n-1,k-1)$.

2. Wir können das Element n aus seinem Zyklus entfernen: Übrig bleibt eine Zerlegung von $[n-1]$ in k Zyklen — die Anzahl ist $c(n-1,k)$; und aus jeder solchen Zyklenzerlegung können wir $(n-1)$ verschiedene Zyklenzerlegungen von $[n]$ machen, indem wir das Element n hinter eines der vorhandenen $(n-1)$ Elemente "dazustecken". Insgesamt: Die Anzahl im zweiten Fall ist $(n-1)\cdot c(n-1,k)$. Daraus folgt (1), mit der Summenregel. ∎

Erzeugende Funktion von $\mathfrak{S}_n$

Definition: Gewichtsfunktion ω auf $\mathfrak{S}_n$

Jeder Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ ordnen wir das Gewicht

$$\omega(\pi) := x^{\text{Anzahl der Zyklen von } \pi}$$

zu (d.h., eine Permutation mit k Zyklen erhält das Gewicht x^k)

Definition: Erzeugende Funktion $\mathcal{GF}$ von $\mathfrak{S}_n$ (in bezug auf das Gewicht ω)

$$\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) := \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \omega(\pi) \tag{2}$$

Es ist klar, daß $\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) = \sum_{k=0}^{n} c(n,k)\, x^k$

Erzeugende Funktion von $\mathfrak{S}_n$

Wenn wir beide Seiten der Rekursion (1),

$$c(n,k) = c(n-1,k-1) + (n-1)c(n-1,k),$$

mit x^k multiplizieren und über alle k von 0 bis n summieren, erhalten wir die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n} c(n,k)\,x^k = \mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) = (x+n-1)\,\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_{n-1}) = (x+n-1)\sum_{k=0}^{n-1} c(n-1,k)\,x^k$$

Erzeugende Funktion von $\mathfrak{S}_n$

$$\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) = (x + n - 1)\,\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_{n-1})$$

Wir lösen diese Rekursion durch Iteration: Mit der offensichtlichen Anfangsbedingung $\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_1) = x$ (oder $\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_0) = 1$) erhalten wir

$$\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) = (x + n - 1)(x + n - 2) \cdots x. \tag{3}$$

Notation: $x^{\overline{k}}$ und $x^{\underline{k}}$ $\quad x \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$

$x^{\overline{k}} := x(x+1)\cdots(x+k-1) = \prod_{i=1}^{k}(x+i-1)$ steigende Faktorielle

$x^{\underline{k}} := x(x-1)\cdots(x-k+1) = \prod_{i=1}^{k}(x-i+1)$ fallende Faktorielle

Es gilt $x^{\overline{k}} = (-1)^k(-x)^{\underline{k}}$. Sei $x^{\overline{0}} = (-x)^{\underline{0}} = 1$.

Erzeugende Funktion von $\mathfrak{S}_n$

In der Basis $(x^n)_{n=0}^{\infty}$:

$$x\,(x+1)\cdots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} c\,(n,k)\,x^k.$$

Wenn wir hier x durch $-x$ ersetzen und beide Seiten mit $(-1)^n$ multiplizieren, erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}c(n,k)x^k = x\,(x-1)\cdots(x-n+1) = x^{\underline{n}}. \tag{4}$$

Definition: Stirling–Zahlen der ersten Art

Die Koeffizienten $(-1)^{n-k}c(n,k)$ werden Stirling–Zahlen der ersten Art genannt und meist mit $s_{n,k}$ bezeichnet.

Stirling–Zahlen der ersten bzw. der zweiten Art

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s_{n,k} x^k, \tag{5}$$

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}\, x^{\underline{k}}. \tag{6}$$

Die Stirling–Zahlen zweiter Art treten auf, wenn wir die Basis $(x^n)_{n=0}^{\infty}$ des Vektorraums aller Polynome in der Basis $(x^{\underline{n}})_{n=0}^{\infty}$ entwickeln, und die Stirling–Zahlen erster Art treten auf, wenn wir das Umgekehrte tun!

Basistransformation: die Koeffizientenmatrizen $\left(S_{n,k}\right)_{n,k\geq 0}$ und $\left(s_{k,l}\right)_{k,l\geq 0}$ sind invers.

Stirling–Zahlen der ersten bzw. der zweiten Art

Noch einmal: $x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s_{n,k} x^k$, $x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}\, x^{\underline{k}}$.

Dann gilt

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \sum_{l=0}^{k} s_{k,l} x^l$$

und den Koeffizienten von x^l vergleichen:

$$\sum_{k=0}^{n} S_{n,k} s_{k,l} = [n = l].$$

Iversons Notation: $[n = l]$ ist gleich 1 wenn $n = l$ und 0 andernfalls.

Dann die Koeffizientenmatrizen $\left(S_{n,k}\right)_{n,k \geq 0}$ und $\left(s_{k,l}\right)_{k,l \geq 0}$ invers sind.

Inversionen von Permutationen

Definition: Inversion

Eine Inversion einer Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ ist ein Paar (i, j) mit $i < j$ und $\pi(i) > \pi(j)$.
Die Anzahl aller Inversionen von π wird mit $\operatorname{inv} \pi$ bezeichnet.

Die Inversionen von π sind die "Paare von Positionen, wo Zahlen in der falschen Reihenfolge erscheinen".

$n = 5, \pi \in \mathfrak{S}_5$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{"Positionen" } i \\ \text{"Zahlen" } \pi(i) \end{array}$$

Inversionen: $(1, 2), (1, 3), (4, 5)$

Erzeugende Funktion von $\mathfrak{S}_n$ in bezug auf Inversionen

Definition: Gewichtsfunktion ω auf $\mathfrak{S}_n$ (in bezug auf Inversionen)

Jeder Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ ordnen wir das Gewicht

$$\omega(\pi) := q^{\operatorname{inv}\pi}$$

zu (d.h., eine Permutation mit k Inversionen erhält das Gewicht q^k)

Definition: Erzeugende Funktion $\mathcal{GF}$ von $\mathfrak{S}_n$ (in bezug auf das Gewicht ω)

$$\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) := \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} q^{\operatorname{inv}\pi} \tag{7}$$

Erzeugende Funktion von $\mathfrak{S}_n$ in bezug auf Inversionen

Definition: Gewichtsfunktion ω auf $\mathfrak{S}_n$ (in bezug auf Inversionen)

Jeder Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ ordnen wir das Gewicht

$$\omega(\pi) := q^{\operatorname{inv} \pi}$$

zu (d.h., eine Permutation mit k Inversionen erhält das Gewicht q^k)

Definition: Erzeugende Funktion $\mathcal{GF}$ von $\mathfrak{S}_n$ (in bezug auf das Gewicht ω)

$$\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) := \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} q^{\operatorname{inv} \pi} \tag{7}$$

Es ist klar, daß $\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) = \sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} d(n,k)\, q^k$, un Polynom in q vom Grad $\binom{n}{2}$ ist, denn $\max_{\pi \in \mathfrak{S}_n} (\operatorname{inv} \pi) = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \binom{n}{2}$.

Erzeugende Funktion von $\mathfrak{S}_n$ in bezug auf Inversionen

$\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n)$ in bezug auf Inversionen für $n = 2$ und $n = 3$

$n = 2$:
$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_2} q^{\operatorname{inv} \pi} = q^{\operatorname{inv}(12)} + q^{\operatorname{inv}(21)} = q^0 + q^1 = 1 + q$$

$n = 3$:

π	$\operatorname{inv} \pi$	π	$\operatorname{inv} \pi$
123	0	231	2
132	1	312	2
213	1	321	3

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_3} q^{\operatorname{inv} \pi} = 1 + 2q + 2q^2 + q^3 = (1 + q)(1 + q + q^2)$$

Erzeugende Funktion von $\mathfrak{S}_n$ in bezug auf Inversionen

Wir erraten:

$$\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} q^{\operatorname{inv} \pi} = (1+q)(1+q+q^2)\cdots(1+q+\cdots+q^{n-1}) \tag{8}$$

Beweis: Induktion nach n. Es genügt die folgende Rekursion zu zeigen:

$$\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) = (q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1) \cdot \mathcal{GF}(\mathfrak{S}_{n-1}) .$$

Dazu überlegen wir, daß das Element n in einer Permutation π genau dann $n - i$ zur Anzahl der Inversionen beiträgt, wenn es in π an Position i steht.

Erzeugende Funktion von $\mathfrak{S}_n$ in bezug auf Inversionen

Wir erraten:

$$\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} q^{\operatorname{inv} \pi} = (1+q)(1+q+q^2) \cdots (1+q+\cdots+q^{n-1}) \qquad (8)$$

Beweis: Induktion nach n. Es genügt die folgende Rekursion zu zeigen:

$$\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) = (q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1) \cdot \mathcal{GF}(\mathfrak{S}_{n-1}).$$

Dazu überlegen wir, daß das Element n in einer Permutation π genau dann $n-i$ zur Anzahl der Inversionen beiträgt, wenn es in π an Position i steht.
Umgekehrt: Wenn wir in eine Permutation $\tau \in \mathfrak{S}_{n-1}$ das Element n an Stelle i ($i = 1, \ldots, n$) einfügen, dann erhalten wir eine Permutation in $\mathfrak{S}_n$ mit $\operatorname{inv} \tau + n - i$ Inversionen, also mit dem Gewicht $q^{\operatorname{inv} \tau} q^{n-i}$. Damit ist die Behauptung gezeigt. ∎

Erzeugende Funktion von $\mathfrak{S}_n$ in bezug auf Inversionen

Wir erraten:

$$\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} q^{\operatorname{inv}\pi} = (1+q)(1+q+q^2)\cdots(1+q+\cdots+q^{n-1}) \tag{8}$$

Beweis: Induktion nach n. Es genügt die folgende Rekursion zu zeigen:

$$\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) = (q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1) \cdot \mathcal{GF}(\mathfrak{S}_{n-1}).$$

Dazu überlegen wir, daß das Element n in einer Permutation π genau dann $n - i$ zur Anzahl der Inversionen beiträgt, wenn es in π an Position i steht.

Umgekehrt: Wenn wir in eine Permutation $\tau \in \mathfrak{S}_{n-1}$ das Element n an Stelle i ($i = 1, \ldots, n$) einfügen, dann erhalten wir eine Permutation in $\mathfrak{S}_n$ mit $\operatorname{inv}\tau + n - i$ Inversionen, also mit dem Gewicht $q^{\operatorname{inv}\tau} q^{n-i}$. Damit ist die Behauptung gezeigt. ■

Für $q = 1$: $\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) = n!$

Transpositionen in $\mathfrak{S}_n$

Definition: Transposition

Ein Zyklus einer Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ der Länge 2 heißt Transposition: Eine Transposition vertauscht also genau zwei Elemente.

Jede Transposition $\tau = (i, j) \in \mathfrak{S}_n$ ist eine Involution (also eine selbstinverse Permutation) in $\mathfrak{S}_n$, d.h., $\tau^{-1} = \tau$.

Eine Transposition heißt kanonisch, wenn es eine Transposition der Form $(i, i+1)$ ist, $i = 1, \ldots, n-1$, also wenn zwei aufeinanderfolgende Elemente vertauscht werden.

Transpositionen in $\mathfrak{S}_n$

Definition: Transposition

Ein Zyklus einer Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ der Länge 2 heißt Transposition: Eine Transposition vertauscht also genau zwei Elemente.

Jede Transposition $\tau = (i, j) \in \mathfrak{S}_n$ ist eine Involution (also eine selbstinverse Permutation) in $\mathfrak{S}_n$, d.h., $\tau^{-1} = \tau$.

Eine Transposition heißt kanonisch, wenn es eine Transposition der Form $(i, i+1)$ ist, $i = 1, \ldots, n-1$, also wenn zwei aufeinanderfolgende Elemente vertauscht werden.

$n = 5$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

τ ist kanonisch, σ ist nicht kanonisch, π ist nicht eine Transposition.

Transpositionen in $\mathfrak{S}_n$

Bemerkung: "Rechtsmultiplikation" mit der kanonischen Permutation

Sei $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n$. Dann sieht man sofort

$$\pi \circ (i, i+1) = (\pi_i, \pi_{i+1}) \circ \pi,$$

d.h., die "Rechtsmultiplikation" mit der kanonischen Permutation $(i, i+1)$ bewirkt eine Vertauschung der nebeneinander stehenden Elemente (π_i, π_{i+1}) in der Permutation π. Daraus erkennt man sofort

$$\operatorname{inv}(\pi \circ (i, i+1)) = \operatorname{inv}(\pi) \pm 1. \tag{9}$$

Transpositionen in $\mathfrak{S}_n$

Bemerkung: "Rechtsmultiplikation" mit der kanonischen Permutation

Sei $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n$. Dann sieht man sofort

$$\pi \circ (i, i+1) = (\pi_i, \pi_{i+1}) \circ \pi,$$

d.h., die "Rechtsmultiplikation" mit der kanonischen Permutation $(i, i+1)$ bewirkt eine Vertauschung der nebeneinander stehenden Elemente (π_i, π_{i+1}) in der Permutation π. Daraus erkennt man sofort

$$\operatorname{inv}(\pi \circ (i, i+1)) = \operatorname{inv}(\pi) \pm 1. \tag{9}$$

$n = 4$, $\tau = (12)$, $(\pi_1\pi_2) = (32)$, $\operatorname{inv}(\pi) = 3$, $\operatorname{inv}(\pi \circ (i, i+1)) = 2$

$$\pi\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (\pi_1\pi_2)\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Produkt aus kanonischen Transpositionen

Proposition 1: Zerlegung als Produkt aus kanonischen Transpositionen

Jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ kann als Produkt von $\operatorname{inv}\pi$ kanonischen Transpositionen geschrieben werden.

$\operatorname{inv}\pi$ ist dabei die minimale Anzahl an kanonischen Transpositionen in einer solchen Produktdarstellung.

Produkt aus kanonischen Transpositionen

Proposition 1: Zerlegung als Produkt aus kanonischen Transpositionen

Jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ kann als Produkt von $\operatorname{inv} \pi$ kanonischen Transpositionen geschrieben werden.

$\operatorname{inv} \pi$ ist dabei die minimale Anzahl an kanonischen Transpositionen in einer solchen Produktdarstellung.

Beweis: Wir überlegen uns (anhand eines Beispiels), daß man jede Permutation π durch kanonische Transpositionen in die Identität "umformen" kann:

$$\epsilon = \pi \circ (i_1, i_1 + 1) \circ (i_2, i_2 + 1) \circ \cdots \circ (i_k, i_k + 1)\,.$$

Dann folgt "rein algebraisch" (denn Transpositionen sind Involutionen):

$$\pi = (i_k, i_k + 1) \circ \cdots \circ (i_2, i_2 + 1) \circ (i_1, i_1 + 1)\,.$$

Produkt aus kanonischen Transpositionen

Proposition 1: Zerlegung als Produkt aus kanonischen Transpositionen

Jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ kann als Produkt von $\operatorname{inv} \pi$ kanonischen Transpositionen geschrieben werden.

$\operatorname{inv} \pi$ ist dabei die minimale Anzahl an kanonischen Transpositionen in einer solchen Produktdarstellung.

Beweis: Wir überlegen uns (anhand eines Beispiels), daß man jede Permutation π durch kanonische Transpositionen in die Identität "umformen" kann:

$$\epsilon = \pi \circ (i_1, i_1 + 1) \circ (i_2, i_2 + 1) \circ \cdots \circ (i_k, i_k + 1) .$$

Dann folgt "rein algebraisch" (denn Transpositionen sind Involutionen):

$$\pi = (i_k, i_k + 1) \circ \cdots \circ (i_2, i_2 + 1) \circ (i_1, i_1 + 1) .$$

Gemäß (9) verändert jede solche Operation die Anzahl der Inversionen um ± 1: Um auf $\operatorname{inv} \epsilon = 0$ zu kommen, braucht man also zumindest $\operatorname{inv} \pi$ Operationen. ■

Produkt aus kanonischen Transpositionen: Beispiele

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir bringen zunächst den Einser (in der unteren Zeile) “sukzessive nach vorne”; dazu sollten wir ihn zuerst mit dem Dreier vertauschen. Das kann durch Aufmultiplizieren mit einer geeigneten kanonischen Transposition von rechts erreicht werden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ (2, 3).$$

Dann sollten wir ihn mit dem Vierer vertauschen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ (1, 2).$$

Jetzt steht der Einser an der “richtigen” Stelle;

Produkt aus kanonischen Transpositionen: Beispiele

Wir machen mit dem Zweier weiter:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 4 & 3\\ 1 & 4 & 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 3 & 2\end{pmatrix} \circ (3,4),$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 2 & 4\\ 1 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 2 & 3\end{pmatrix} \circ (2,3).$$

Zum Schluß kommt noch der Dreier nach vorne:

$$\epsilon = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 4 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix} \circ (3,4).$$

“Rein algebraisch” erhalten wir also:

$$(3,4) \circ (2,3) \circ (3,4) \circ (1,2) \circ (2,3) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Produkt aus kanonischen Transpositionen: Schluss

Es ist klar, daß der hier skizzierte "Algorithmus" auch im allgemeinen funktioniert: Man bewegt der Reihe nach $1, 2, \ldots n-1$ in die richtige Position. Offensichtlich senkt jeder dieser Schritte die Anzahl der Inversionen um 1, sodaß insgesamt genau $\operatorname{inv} \pi$ Schritte benötigt werden.

Eine Darstellung als Produkt von kanonischen Transpositionen ist keineswegs eindeutig. Es gilt beispielsweise:

$$(1,3) = (2,3)\,(1,2)\,(2,3) = (1,2)\,(2,3)\,(1,2).$$

Produkt aus Transpositionen: Anzahl der Faktoren

Korollar 2: Anzahl der Faktoren

Sei $\pi \in \mathfrak{S}_n$. Die Anzahl der Faktoren in einer (beliebigen) Produktdarstellung von π durch kanonische Transpositionen ist modulo 2 eindeutig (d.h., sie ist immer entweder gerade oder ungerade).

Produkt aus Transpositionen: Anzahl der Faktoren

Korollar 2: **Anzahl der Faktoren**

Sei $\pi \in \mathfrak{S}_n$. Die Anzahl der Faktoren in einer (beliebigen) Produktdarstellung von π durch kanonische Transpositionen ist modulo 2 eindeutig (d.h., sie ist immer entweder gerade oder ungerade).

Beweis: Betrachten wir zwei beliebige Darstellungen von $\pi \in \mathfrak{S}_n$ als Produkt von kanonischen Transpositionen

$$\pi = \tau_1\tau_2\cdots\tau_k = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_l.$$

Dann folgt

$$\tau_1\tau_2\cdots\tau_k\sigma_l\sigma_{l-1}\cdots\sigma_1 = \epsilon.$$

Gemäß (9) ist die Anzahl der Inversionen auf der linken Seite modulo 2 gleich $k + l$, auf der rechten Seite aber einfach 0 (denn ϵ hat keine Inversionen). Somit erhalten wir $k + l \equiv 0 \mod 2 \iff k \equiv l \mod 2$, wie behauptet. ■

Permutationen: Signum

Definition:Signum

Das Vorzeichen oder Signum einer Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ ist durch $(-1)^{\operatorname{inv} \pi}$ definiert und wird mit $\operatorname{sgn} \pi$ bezeichnet.

π mit $\operatorname{sgn} \pi = +1$ wird gerade Permutation genannt,
π mit $\operatorname{sgn} \pi = -1$ wird ungerade Permutation genannt.

Permutationen: Signum

Definition:Signum

Das Vorzeichen oder Signum einer Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ ist durch $(-1)^{\operatorname{inv}\pi}$ definiert und wird mit $\operatorname{sgn}\pi$ bezeichnet.

π mit $\operatorname{sgn}\pi = +1$ wird gerade Permutation genannt,
π mit $\operatorname{sgn}\pi = -1$ wird ungerade Permutation genannt.

Bemerkung: Zyklus als Produkt aus Transpositionen

Der Zyklus

$$(a_1 a_2 \ldots a_{k-2} a_{k-1} a_k)\,,$$

ist darstellbar durch das Produkt der $k-1$ Transpositionen

$$(a_1, a_2) \cdot (a_2, a_3) \cdots (a_{k-2}, a_{k-1}) \cdot (a_{k-1}, a_k)\,.$$

Permutationen: Signum

Proposition 2: Signum

Seien $\pi, \rho \in \mathfrak{S}_n$. Für das Signum gelten die folgenden Tatsachen:

(1) $\operatorname{sgn}(\pi \circ \rho) = \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \operatorname{sgn}(\rho)$.

(2) Sei $\tau = (i, j)$ $(i \neq j)$ eine beliebige Transposition. Dann gilt $\operatorname{sgn} \tau = -1$.

(3) Wenn $\pi = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_m$ eine Darstellung von π durch beliebige Transpositionen τ_i ist, dann gilt $\operatorname{sgn} \pi = (-1)^m$.

(4) Für einen Zyklus $(a_1 a_2 \dots a_m)$ der Länge m gilt

$$\operatorname{sgn}(a_1 a_2 \dots a_m) = (-1)^{m-1}.$$

(5) Sei $z(\pi)$ die Anzahl der Zyklen in der disjunkten Zyklenzerlegung von π. Dann gilt $\operatorname{sgn} \pi = (-1)^{n-z(\pi)}$.

Signum: $\operatorname{sgn}(\pi \circ \rho) = \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \operatorname{sgn}(\rho)$

Beweis:
Für (1) schreiben wir π und ρ als Produkte von kanonischen Transpositionen gemäß Proposition 1 mit $k = \operatorname{inv} \pi$ und $l = \operatorname{inv} \tau$:

$$\pi = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k, \ \rho = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_l.$$

Aus Korollar 2: $\operatorname{sgn} \pi = (-1)^k$, $\operatorname{sgn} \rho = (-1)^l$ und $\operatorname{sgn}(\pi \circ \rho) = (-1)^{k+l} = (\operatorname{sgn} \pi) \cdot (\operatorname{sgn} \rho)$.

(2) Sei $\pi \in \mathfrak{S}_n$ beliebig: Wenn wir

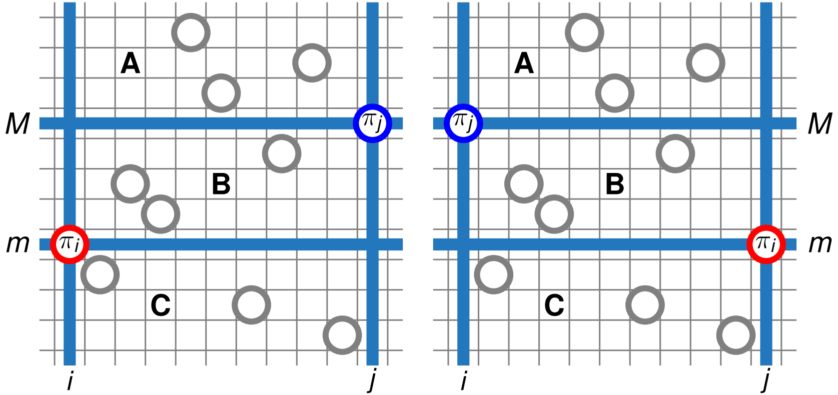
$$(-1)^{\operatorname{inv}(\pi \circ (i,j))} = -(-1)^{\operatorname{inv} \pi}$$

zeigen können, dann folgt die Behauptung aus (1).

Betrachten wir dazu den "Graphen" der Permutation π (also $\{(1, \pi_1), \ldots, (n, \pi_n)\} \subset \mathbb{N}^2$) und überlegen, welchen Effekt die Vertauschung der Elemente an den Positionen i und j auf die Anzahl der Inversionen hat.

Graphik von $\pi : \{(1, \pi_1), \ldots, (n, \pi_n)\} \subset \mathbb{N}^2$ (aus Skriptum)

Sei $i < j$, $S := \{\pi_{i+1}, \ldots, \pi_{j-1}\}$, $m := \min(\pi_i, \pi_j)$, $M := \max(\pi_i, \pi_j)$. Sei $A := |\{x \in S : x > M\}|$, $C := |\{x \in S : x < m\}|$ und $B := |S| - A - C$.



Es ist klar:

- Für $\pi_i < \pi_j$ ist $\operatorname{inv}(\pi \circ (i,j)) = \operatorname{inv}(\pi) + 1 + 2B$,
- Für $\pi_i > \pi_j$ ist $\operatorname{inv}(\pi \circ (i,j)) = \operatorname{inv}(\pi) - 1 - 2B$.

Signum: $\operatorname{sgn} \tau_1\tau_2 \cdots \tau_m = (-1)^m.$

(3) folgt sofort aus (1) und (2).

Zur Erinnerung:

(1): $\operatorname{sgn}(\pi \circ \rho) = \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \operatorname{sgn}(\rho)$

(2): $\operatorname{sgn}(i, j) = -1$

Signum: $\mathrm{sgn}(a_1 a_2 \dots a_m) = (-1)^{m-1}$.

Für (4) schreiben wir den Zyklus gemäß Bemerkung als Produkt von $m-1$ Transpositionen:

$$(a_1, a_2, \dots, a_m) = (a_1, a_2)\,(a_2, a_3) \cdots (a_{m-1}, a_m).$$

Aus (3) folgt nun $\mathrm{sgn}(a_1, a_2, \dots, a_m) = (-1)^{m-1}$.

Signum: $$\operatorname{sgn}\pi = (-1)^{n-z(\pi)}$$

$z(\pi)$ ist die Anzahl der Zyklen in der disjunkten Zyklenzerlegung von π.

Für (5) betrachten wir die eindeutige Zerlegung von π in $k = z(\pi)$ disjunkte Zyklen z_i der Länge $\ell(z_i)$:

$$\pi = z_1 z_2 \cdots z_k.$$

Aus (1) und (4) zusammen mit $\sum_{i=1}^{k} \ell(z_i) = n$ folgt die Behauptung:

$$\operatorname{sgn}\pi = (-1)^{\ell(z_1)-1}(-1)^{\ell(z_2)-1} \cdots (-1)^{\ell(z_k)-1} = (-1)^{n-z(\pi)}.$$

■