Diskrete Mathematik

Univ.-Prof. Dr. Goulnara ARZHANTSEVA

SS 2018

Erzeugende Funktionen

Sei $\mathcal{O}$ eine Familie von “kombinatorischen Objekten” (z.B. Permutationen von $[n]$) wobei jedes einzelne Objekt eine “Kennzahl” (z.B. die Anzahl der Zyklen) besitzt. Wir fragten nach der Anzahl aller derartigen Objekte mit fester “Kennzahl”.

Definition: Gewichtsfunktion ω auf $\mathcal{O}$

Jeder Objekt $o \in \mathcal{O}$ ordnen wir das Gewicht

$$\omega(o) := z^{\text{“Kennzahl” von } o}$$

Definition: Erzeugende Funktion von $\mathcal{O}$ (in bezug auf das Gewicht ω)

$$\mathcal{GF}(\mathcal{O}) := \sum_{o \in \mathcal{O}} \omega(o)$$

Formale Potenzreihen

Wir rechnen aller Objekte mit fester “Kennzahl” n.

Seien c_n diese Anzahlen.

Definition: Erzeugende Funktion als Potenzreihe

$$\mathcal{GF}(\mathcal{O}) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Wir sagen ebenfalls erzeugende Funktion von $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ und schreiben:

$$c(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Die Zahlen c_n erscheinen als die Koeffizienten von z^n in $\mathcal{GF}(\mathcal{O})$.

Beispiel: Fibonacci–Zahlen

Gegeben sei ein $2 \times n$ Rechteck. Wieviele verschiedene Zerlegungen dieses Rechtecks gibt es in 2×1 Dominos?

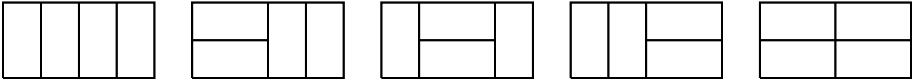
Bezeichne $f(n)$ die gesuchte Anzahl.

Zerlegungen für $n = 2$ und $n = 3$ (aus Skriptum)

Gegeben sei ein $2 \times n$ Rechteck. Wieviele verschiedene Zerlegungen dieses Rechtecks gibt es in 2×1 Dominos?

$n = 3$, $f(3) = 3$ Zerlegungen:

$n = 4$, $f(4) = 5$ Zerlegungen:



Beispiel: Fibonacci–Zahlen

Gegeben sei ein $2 \times n$ Rechteck. Wieviele verschiedene Zerlegungen dieses Rechtecks gibt es in 2×1 Dominos?

Bezeichne $f(n)$ die gesuchte Anzahl. Die Menge aller Zerlegungen des Rechtecks zerfällt in 2 disjunkte Teilmengen:

1. Am rechten Ende finden wir entweder ein vertikales Domino,
2. oder zwei übereinander liegende horizontale Dominos.

Beispiel: Fibonacci–Zahlen

Gegeben sei ein $2 \times n$ Rechteck. Wieviele verschiedene Zerlegungen dieses Rechtecks gibt es in 2×1 Dominos?
Bezeichne $f(n)$ die gesuchte Anzahl. Die Menge aller Zerlegungen des Rechtecks zerfällt in 2 disjunkte Teilmengen:

1. Am rechten Ende finden wir entweder ein vertikales Domino,
2. oder zwei übereinander liegende horizontale Dominos.

Entfernt man diese Dominos, dann bleibt im ersten Fall eine Zerlegung des $2 \times (n-1)$ Rechtecks in Dominos übrig, wofür es $f(n-1)$ Möglichkeiten gibt, und im zweiten Fall eine Zerlegung des $2 \times (n-2)$ Rechtecks in Dominos, wofür es $f(n-2)$ Möglichkeiten gibt.
Insgesamt erhalten wir also die Rekursion

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2) \tag{1}$$

mit der Anfangsbedingung $f(0) = f(1) = 1$.
$f(n)$ heißen Fibonacci–Zahlen und werden mit F_n bezeichnet.

Erzeugenden Funktion der Fibonacci–Zahlen

Wir multiplizieren beide Seiten in (1) mit z^n und summieren (formal) über alle $n \geq 2$. Das ergibt

$$\sum_{n=2}^{\infty} F_n z^n = \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} z^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} z^n .$$

Mit der erzeugenden Funktion $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n$ der Fibonacci–Zahlen können wir das nun so schreiben:

$$F(z) - F_1 z - F_0 = z\,(F(z) - F_0) + z^2 F(z) .$$

Da $F_0 = F_1 = 1$, können wir die erzeugende Funktion $F(z)$ "ausrechnen":

$$F(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}$$

Erzeugenden Funktion der Fibonacci–Zahlen

Um aus dieser Darstellung eine Formel für die Koeffizienten F_n zu extrahieren, bestimmen wir die Partialbruchzerlegung

$$F(z) = \frac{1}{z_1 - z_0}\left(\frac{z_1}{1 - z_1 z} - \frac{z_0}{1 - z_0 z}\right),$$

wobei $z_0 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ und $z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ die Lösungen der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$ sind. Auf der rechten Seite stehen geometrische Reihen, die man entwickelt:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{z_1 - z_0}\left(\sum_{n\geq 0} z_1^{n+1} z^n - \sum_{n\geq 0} z_0^{n+1} z^n\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n\geq 0} z^n \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right). \end{aligned}$$

Erzeugenden Funktion der Fibonacci–Zahlen

Durch Koeffizientenvergleich (d.h.: Gleichsetzen der Koeffizienten von z^n auf beiden Seiten der Gleichung) erhält man:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) \tag{2}$$

Erzeugenden Funktion der Fibonacci–Zahlen

Durch Koeffizientenvergleich (d.h.: Gleichsetzen der Koeffizienten von z^n auf beiden Seiten der Gleichung) erhält man:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) \tag{2}$$

Die Folge der Fibonacci–Zahlen $(F_n)_{n \geq 0}$ beginnt so:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots)$$

Aus (2) erkennt man, daß sich die Fibonaccizahlen asymptotisch wie

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$$

verhalten, denn $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \simeq -0.618034$ ist dem Betrag nach kleiner als 1.

Erinnerung (von Kapitel 02): Binomialkoeffizienten

Zur Erinnerung: Die Anzahl k–elementigen Teilmengen von $[n]$ ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Für jedes feste k, der Binomialkoeffizient als Polynom angesehen werden:

$$\binom{x}{k} := \frac{x^{\underline{k}}}{k!},$$

wobei $x \in \mathbb{C}$ und k ist eine nichtnegative ganze Zahl.

Formale Potenzreihen

Definition: formale Potenzreihe

Eine formale Potenzreihe über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist eine Folge $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ mit $a_i \in \mathbb{C}$ für alle i. Wir bezeichnen die Menge aller solchen formalen Potenzreihen mit $\mathbb{C}[[z]]$.

Beispiel: Binomialreihe

Die Binomialreihe ist für eine beliebige komplexe Zahl $x \in \mathbb{C}$ definiert als die Folge

$$\left(\binom{x}{0}, \binom{x}{1}, \binom{x}{2}, \dots\right)$$

Formale Potenzreihen

Definition: formale Potenzreihe

Eine formale Potenzreihe über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist eine Folge $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ mit $a_i \in \mathbb{C}$ für alle i. Wir bezeichnen die Menge aller solchen formalen Potenzreihen mit $\mathbb{C}[[z]]$.

Auf $\mathbb{C}[[z]]$ definieren wir eine komponentenweise Addition "+" durch

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) + (b_0, b_1, b_2, \dots) := (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots).$$

Für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ definieren wir eine komponentenweise Skalarmultiplikation "$\cdot$" durch

$$\lambda \cdot (a_0, a_1, a_2, \dots) := (\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2, \dots).$$

Formale Potenzreihen

Weiters definieren wir eine Multiplikation (die wir ebenfalls mit $\cdot$ notieren) zweier formalen Potenzreihen durch

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) \cdot (b_0, b_1, b_2, \ldots) := (c_0, c_1, c_2, \ldots),$$

wobei

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

ist. (Dieses Produkt heißt auch Konvolutionsprodukt.)

Formale Potenzreihen

Weiters definieren wir eine Multiplikation (die wir ebenfalls mit $\cdot$ notieren) zweier formalen Potenzreihen durch

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) \cdot (b_0, b_1, b_2, \ldots) := (c_0, c_1, c_2, \ldots),$$

wobei

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

ist. (Dieses Produkt heißt auch Konvolutionsprodukt.)
Die folgenden speziellen Potenzreihen werden sehr oft vorkommen und erhalten deshalb abkürzende Symbole:

$$\begin{aligned} 0 &:= (0, 0, 0, \ldots), \\ 1 &:= (1, 0, 0, \ldots), \\ -a &:= (-1) \cdot a. \end{aligned}$$

Formale Potenzreihen

Wir schreiben formale Potenzreihen $(a_0, a_1, \ldots)$ in der Form

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

Algebraische Struktur der formalen Potenzreihen

Die folgenden Gesetze sind erfüllt für (formale) Potenzreihen $a = (a_0, a_1, \ldots)$, $b = (b_0, b_1, \ldots)$, $c = (c_0, c_1, \ldots)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad (\textit{Assoziativität der Addition}) \tag{3}$$

$$a + 0 = 0 + a = a \quad (\textit{neutrales Element der Addition}) \tag{4}$$

$$a + (-a) = 0 \quad (\textit{inverses Element der Addition}) \tag{5}$$

$$a + b = b + a \quad (\textit{Kommutativität der Addition}) \tag{6}$$

$$1 \cdot a = a \tag{7}$$

$$\lambda(\mu a) = (\lambda\mu) \cdot a \tag{8}$$

$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b \tag{9}$$

$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a \tag{10}$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad (\textit{Assoziativität der Multiplikation}) \tag{11}$$

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a \quad (\textit{neutrales Element der Multiplikation}) \tag{12}$$

$$a \cdot b = b \cdot a \quad (\textit{Kommutativität der Multiplikation}) \tag{13}$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (\textit{Distributivität}) \tag{14}$$

Algebraische Struktur der formalen Potenzreihen

In der Sprache der Algebra besagen die Gesetze (3)–(10), daß $\mathbb{C}[[z]]$ mit Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ ist.

Alle Gesetze (3)–(14) zusammen besagen, daß $\mathbb{C}[[z]]$ mit der Addition, Multiplikation und Skalarmultiplikation eine kommutative Algebra mit Einselement über $\mathbb{C}$ ist.

Algebraische Struktur der formalen Potenzreihen

Satz: inverse Potenzreihe

Die Potenzreihe $a(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ besitzt genau dann eine bezüglich der Multiplikation inverse Potenzreihe, wenn $a_0 \neq 0$. Die inverse Reihe ist in diesem Fall eindeutig bestimmt.

Inverse Potenzreihe

Beweis: "$\Rightarrow$"Angenommen $a(z)$ besitzt eine inverse Reihe $b(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$. Per Definition gilt dann $a(z)\,b(z) = 1$. Insbesondere gilt $a_0 b_0 = 1$: Das ist nur möglich, wenn $a_0 \neq 0$.

Inverse Potenzreihe

Beweis: "⇒"Angenommen $a(z)$ besitzt eine inverse Reihe $b(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$. Per Definition gilt dann $a(z)\,b(z) = 1$. Insbesondere gilt $a_0 b_0 = 1$: Das ist nur möglich, wenn $a_0 \neq 0$.
"⇐"Sei $a_0 \neq 0$. Wir geben die Koeffizienten einer inversen Reihe $b(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$ durch direkte Rechnung an. Es gilt ja

$$a_0 b_0 = 1$$

und für $n \geq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} = 0.$$

Daraus lassen sich die Koeffizienten b_n in eindeutiger Weise rekursiv berechnen, denn aus der ersten Gleichung erhalten wir $b_0 = \frac{1}{a_0}$, und aus der zweiten Gleichung erhalten wir rekursiv

$$b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Beispiele: inverse Potenzreihe

(1) Sei $a(z) = 1 - z = 1 - z + 0 \cdot z^2 + 0 \cdot z^3 + \cdots$. Der konstante Koeffizient von $a(z)$ ist $1 \neq 0$, daher existiert die inverse Reihe $(1 - z)^{-1}$. Wie leicht nachzurechnen ist, ist dies die geometrische Reihe $1 + z + z^2 + \cdots = \sum_{n \geq 0} z^n$.

(2) Allgemeiner, sei $a(z) = 1 - \alpha z$ für ein $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$(1 - \alpha z)^{-1} = 1 + \alpha z + \alpha^2 z^2 + \cdots = \sum_{n \geq 0} \alpha^n z^n.$$

(3) Die erzeugende Funktion der Fibonaccizahlen erfüllte die Gleichung $F(z)(1 - z - z^2) = 1$. Sie ist daher die multiplikativ inverse Reihe zu $(1 - z - z^2)$, und diese ist wohl definiert, da $1 \neq 0$.

Beispiel: Exponentialreihe

Die Exponentialreihe: $\exp(\alpha z) := \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^n}{n!} z^n$ für ein $\alpha \in \mathbb{C}$.
Wir haben, z. B.:

$$\exp(\alpha z)\exp(\beta z) = \exp((\alpha+\beta)z)$$

Denn zwei (formale) Potenzreihen sind genau dann gleich, wenn ihre Koeffizienten übereinstimmen. Wenn wir also die Koeffizienten von z^n auf beiden Seiten vergleichen, erhalten wir:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}\frac{\beta^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(\alpha+\beta)^n}{n!},$$

oder äquivalent

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} = (\alpha+\beta)^n.$$

Das ist aber genau der Binomische Lehrsatz!
Insbesondere gilt: $(\exp(\alpha z))^{-1} = \exp(-\alpha z)$.

Zusammensetzung von Potenzreihen

Definition: Zusammensetzung oder Komposition von Potenzreihen

Gegeben seien zwei Potenzreihen $a(z)$ und $b(z)$, wobei $b(z)$ verschwindenden konstanten Koeffizienten hat (also $b_0 = 0$: $b(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$).

Die Zusammensetzung $(a \circ b)(z)$ von a und b ist definiert durch

$$(a \circ b)(z) := \sum_{i \geq 0} a_i \, (b(z))^i \, .$$

Zusammensetzung von Potenzreihen

$b_0 = 0 \Rightarrow$ alle Koeffizienten von z^k mit $k < i$ in $(b(z))^i$ sind 0.

Daher benötigen wir für den Koeffizienten von z^n in $(a \circ b)(z)$ nur die endlich vielen Potenzen $(b(z))^i$, $i = 0, \ldots, n$.

Zusammensetzung von Potenzreihen

$b_0 = 0 \Rightarrow$ alle Koeffizienten von z^k mit $k < i$ in $(b(z))^i$ sind 0.

Daher benötigen wir für den Koeffizienten von z^n in $(a \circ b)(z)$ nur die endlich vielen Potenzen $(b(z))^i$, $i = 0, \ldots, n$.

Dann die Koeffizienten der Zusammensetzung

$$(a \circ b)(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n \quad \text{sind wie folgt:}$$

$$c_0 = a_0, \text{ und für } n \geq 1 : c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_i = n} b_{\nu_1} b_{\nu_2} \cdots b_{\nu_i}, \tag{15}$$

die c_n sind also sichtlich durch endliche Summen gegeben.

Zusammensetzung von Potenzreihen

$b_0 = 0 \Rightarrow$ alle Koeffizienten von z^k mit $k < i$ in $(b(z))^i$ sind 0.

Daher benötigen wir für den Koeffizienten von z^n in $(a \circ b)(z)$ nur die endlich vielen Potenzen $(b(z))^i$, $i = 0, \ldots, n$.

Dann die Koeffizienten der Zusammensetzung

$$(a \circ b)(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n \quad \text{sind wie folgt:}$$

$$c_0 = a_0, \text{ und für } n \geq 1: c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_i = n} b_{\nu_1} b_{\nu_2} \cdots b_{\nu_i}, \tag{15}$$

die c_n sind also sichtlich durch endliche Summen gegeben.

Für die Summationsindices ν_i können wir $\nu_i \geq 1$ annehmen, da ja $b_0 = 0$ ist: Der Summationsbereich der inneren Summe entspricht dann der Menge aller Kompositionen von n mit i Teilen.

Beispiel: Fibonacci–Zahlen

Die erzeugende Funktion der Fibonaccizahlen, $F(z) = \left(1 - z - z^2\right)^{-1}$ kann auch als Zusammensetzung

$$F(z) = \left((1-z)^{-1}\right) \circ \left(z + z^2\right)$$

geschrieben werden. Daher können wir wie folgt rechnen:

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{i \geq 0} (z + z^2)^i = \sum_{i \geq 0} z^i (1+z)^i \\ &= \sum_{i \geq 0} z^i \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} z^k = \sum_{0 \leq k \leq i} \binom{i}{k} z^{i+k} = \sum_{n \geq 0} z^n \sum_{k \geq 0} \binom{n-k}{k}. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert somit folgende Darstellung der Fibonaccizahlen als Summe:

$$F_n = \sum_{k \geq 0} \binom{n-k}{k}.$$

Zusammensetzung von Potenzreihen

Satz: Die Zusammensetzung ist assoziativ.

Für Potenzreihen $a(z)$, $b(z)$ und $c(z)$, wobei $b(z)$ und $c(z)$ verschwindenden konstanten Term haben, gilt

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c.$$

Zusammensetzung von Potenzreihen

Beweis: Wir müssen zeigen, daß die Koeffizienten von z^n auf beiden Seiten gleich sind.

Gemäß (15) ist der konstante Term (also der Koeffizient von z^0) auf beiden Seiten a_0.

Nun vergleichen wir die Koeffizienten von z^n, $n \geq 1$; wieder gemäß (15).

Notation: Koeffizienten von z^n

$[[z^n]]f(z)$ bezeichnet der Koeffizient von z^n in einer Potenzreihe $f(z)$.

Zusammensetzung von Potenzreihen

Für die linke Seite berechnen wir $[[z^n]]\,(a \circ (b \circ c))$ (beachte, daß der Koeffizient $(b \circ c)_0 := [[z^0]]\,(b \circ c) = b_0 = 0$ ist):

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_i=n} (b \circ c)_{\nu_1} (b \circ c)_{\nu_2} \cdots (b \circ c)_{\nu_i} \quad \text{(gemäß (15))}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{\nu_1+\cdots+\nu_i=n} \prod_{k=1}^{i} \left(\sum_{j_k=1}^{\nu_k} b_{j_k} \sum_{\mu_1+\cdots+\mu_{j_k}=\nu_k} c_{\mu_1} \cdots c_{\mu_{j_k}} \right) \quad \text{(gemäß (15))}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j_1+\cdots+j_i \le n} b_{j_1} \cdots b_{j_i} \sum_{\substack{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_i=n \\ \nu_1 \ge j_1, \ldots, \nu_i \ge j_i}} \prod_{k=1}^{i} \left(\sum_{\mu_1+\cdots+\mu_{j_k}=\nu_k} c_{\mu_1} \cdots c_{\mu_{j_k}} \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j_1+\cdots+j_i \le n} b_{j_1} \cdots b_{j_i} \sum_{\substack{\mu_1+\cdots+\mu_s=n \\ s=j_1+\cdots+j_i}} c_{\mu_1} \cdots c_{\mu_s}.$$

Zusammensetzung von Potenzreihen

Von der zweiten auf die dritte Zeile haben wir einfach ausmultipliziert und die Summation vertauscht.

Von der dritten auf die vierte Zeile haben wir benutzt, daß wegen $\mu_1 + \cdots + \mu_{j_k} = \nu_k$ (und $\mu_\ell \geq 1$ für alle ℓ) die Bedingung $\nu_k \geq j_k$ automatisch gilt und somit weggelassen werden kann.

Zusammensetzung von Potenzreihen

Für die rechte Seite berechnen wir $[[z^n]]\,((a \circ b) \circ c)$:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n} (a \circ b)_i \sum_{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_i=n} c_{\nu_1} c_{\nu_2} \cdots c_{\nu_i} \quad \text{(gemäß (15))} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} a_j \sum_{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_j=i} b_{\mu_1} \cdots b_{\mu_j} \sum_{\nu_1+\cdots+\nu_i=n} c_{\nu_1} \cdots c_{\nu_i} \quad \text{(gemäß (15))} \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{i=j}^{n} \sum_{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_j=i} b_{\mu_1} \cdots b_{\mu_j} \sum_{\nu_1+\cdots+\nu_i=n} c_{\nu_1} \cdots c_{\nu_i} \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{\mu_1+\cdots+\mu_j \le n} b_{\mu_1} \cdots b_{\mu_j} \sum_{\substack{\nu_1+\cdots+\nu_i=n \\ i=\mu_1+\cdots+\mu_j}} c_{\nu_1} \cdots c_{\nu_i},
\end{aligned}
$$

was (abgesehen von Umbenennungen) genau dasselbe ist. ■

Invertieren von Potenzreihen

Satz: Zusammensetzungsinverse Potenzreihe

Sei $a(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ eine Potenzreihe mit verschwindendem konstanten Term. Dann gibt es genau dann eine zusammensetzungsinverse Potenzreihe $b(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$, das heißt eine Reihe mit

$$(a \circ b)(z) = (b \circ a)(z) = z,$$

wenn $a_1 \neq 0$.

Zusammensetzungsinverse Potenzreihe

Beweis: Es ist klar, daß $a_1 \neq 0$ sein muß, wenn eine zusammensetzungsinverse Potenzreihe zu $a(z)$ existiert, denn sonst wäre $[[z]]\,(a \circ b) = 0 \neq 1$ für jede Potenzreihe b mit $b_0 = 0$.

Zusammensetzungsinverse Potenzreihe

Beweis: Es ist klar, daß $a_1 \neq 0$ sein muß, wenn eine zusammensetzungsinverse Potenzreihe zu $a(z)$ existiert, denn sonst wäre $[[z]](a \circ b) = 0 \neq 1$ für jede Potenzreihe b mit $b_0 = 0$.
Wenn aber $a_1 \neq 0$ gilt, dann kann man aus der Gleichung

$$(b \circ a)(z) = z$$

die b_n durch Koeffizientenvergleich gemäß (15) rekursiv berechnen. Denn zunächst erhält man $b_1 a_1 = 1$, also $b_1 = 1/a_1$.

Zusammensetzungsinverse Potenzreihe

Beweis: Es ist klar, daß $a_1 \neq 0$ sein muß, wenn eine zusammensetzungsinverse Potenzreihe zu $a(z)$ existiert, denn sonst wäre $[[z]]\,(a \circ b) = 0 \neq 1$ für jede Potenzreihe b mit $b_0 = 0$.
Wenn aber $a_1 \neq 0$ gilt, dann kann man aus der Gleichung

$$(b \circ a)(z) = z$$

die b_n durch Koeffizientenvergleich gemäß (15) rekursiv berechnen.
Denn zunächst erhält man $b_1 a_1 = 1$, also $b_1 = 1/a_1$.
Für $n > 1$ gilt

$$[[z^n]]\,(b \circ a) = \sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_i=n} a_{\nu_1} a_{\nu_2} \cdots a_{\nu_i} = 0,$$

also lautet die Rekursion für b_n:

$$b_n = -\frac{1}{a_1^n} \sum_{i=1}^{n-1} b_i \sum_{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_i=n} a_{\nu_1} a_{\nu_2} \cdots a_{\nu_i}.$$

Zusammensetzungsinverse Potenzreihe

Somit ist gezeigt, daß es eine eindeutig bestimmte Reihe $b(z)$ mit $(b \circ a)(z)$ gibt.

Es ist nun eine einfache algebraische Tatsache, daß daraus auch umgekehrt $(a \circ b)(z) = z$ folgt. Denn für $b(z)$ gibt es ja dann ebenfalls eine eindeutig bestimmte Reihe $c(z)$, sodaß $(c \circ b)(z) = z$ ist. Dann folgt:

$$c(z) = (c \circ (b \circ a))(z) = ((c \circ b) \circ a)(z) = a(z)\,.$$

■

Beispiel: Exponentialreihe

Die Exponentialreihe:

$$\mathbf{e}^{\alpha z} = \exp(\alpha z) := \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^n}{n!} z^n$$

für ein $\alpha \in \mathbb{C}$ besitzt kein Zusammensetzungsinverses, weil der konstante Term $1 = 0! = 1$ nicht verschwindet.

Dann betrachten wir $\mathbf{e}^z - 1$.

Beispiel: $\mathbf{e}^z - 1$

$$\mathbf{e}^z - 1 = z + \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

Gemäß dem Satz müsste eine zusammensetzungsinverse Reihe existieren.

Wir erhalten

$$z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + - \cdots$$

Von Analysis: $\log(1+z)$ ist die inverse Funktion von $\mathbf{e}^z - 1$ — und die hat genau die obige Potenzreihenentwicklung.

Wir führen also die Schreibweise ein:

$$\log(1+z) := \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}.$$

Beispiel: $\mathbf{e}^z - 1$

Noch ist aber eigentlich nicht klar, ob diese formale Potenzreihe tatsächlich zusammensetzungsinvers zu $\mathbf{e}^z - 1$ ist, also ob

$$\mathbf{e}^{\log(1+z)} - 1 = \log(1 + (\mathbf{e}^z - 1)) = z$$

eine Identität für formale Potenzreihen ist. Es wäre ziemlich umständlich, dies direkt durch Koeffizientenvergleich zu beweisen.

Beispiel: $\mathbf{e}^z - 1$

Noch ist aber eigentlich nicht klar, ob diese formale Potenzreihe tatsächlich zusammensetzungsinvers zu $\mathbf{e}^z - 1$ ist, also ob

$$\mathbf{e}^{\log(1+z)} - 1 = \log(1 + (\mathbf{e}^z - 1)) = z$$

eine Identität für formale Potenzreihen ist. Es wäre ziemlich umständlich, dies direkt durch Koeffizientenvergleich zu beweisen.

Für einen einfachen Beweis haben wir zwei Möglichkeiten:

(1) Wir können nachweisen, daß Identitäten aus der Analysis, sofern sie auch für formale Potenzreihen sinnvoll sind (also z.B. keine unendlichen Summen für Koeffizienten implizieren), auch automatisch Identitäten für die entsprechenden formalen Potenzreihen sind.

(2) Wir können mit dem Differentiationsoperator rechnen.

Differentiationsoperator für formale Potenzreihen

Definition: Differentiationsoperator

Sei $a(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ eine formale Potenzreihe.
Der Differentiationsoperator $\mathbf{D}$ ist durch

$$\mathbf{D}\, a := a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots = \sum_{n\geq 1} n\, a_n z^{n-1}$$

definiert.

Eigenschaften vom Differentiationsoperator

Satz: Differentiationsoperator

Für Potenzreihen $a = a(z)$, $b = b(z)$, $n \in \mathbb{Z}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{D}(a+b) &= \mathbf{D}a + \mathbf{D}b \\
\mathbf{D}(\lambda a) &= \lambda\,\mathbf{D}a \\
\mathbf{D}(ab) &= (\mathbf{D}a)b + a(\mathbf{D}b) \\
\mathbf{D}(a^n) &= na^{n-1}(\mathbf{D}a) \qquad \text{(wir setzen } a_0 \neq 0 \text{ voraus, falls } n < 0\text{)} \\
\mathbf{D}\left(\frac{a}{b}\right) &= \frac{(\mathbf{D}a)b - a(\mathbf{D}b)}{b^2} \quad \text{für } b_0 \neq 0 \\
\mathbf{D}(a \circ b) &= ((\mathbf{D}a) \circ b) \cdot (\mathbf{D}b)
\end{aligned}
$$

Erinnerung: Binomialreihe

Definition: Binomialreihe

Die Binomialreihe ist für eine beliebige komplexe Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$ definiert als

$$\sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} z^n.$$

Analog zur Analysis bezeichnen wir diese Potenzreihe mit $(1+z)^\alpha$.

Beispiele: Differentiationsoperator

(1) Es gilt $\mathbf{D}\,\mathbf{e}^z = \mathbf{e}^z$.

(2) Es gilt $\mathbf{D}\,(1+z)^\alpha = \alpha(1+z)^{\alpha-1}$ (denn $n \cdot \binom{\alpha}{n} = \alpha \cdot \binom{\alpha-1}{n-1}$).

(3) Es gilt $\mathbf{D}\log(1+z) = \frac{1}{1+z}$.

(4) Es gilt $\mathbf{D}\left(\mathbf{e}^{\alpha\log(1+z)}\right) = \mathbf{e}^{\alpha\log(1+z)}\frac{\alpha}{1+z}$.

Beispiele: Differentiationsoperator

Es ist leicht zu sehen, daß die Differentialgleichung

$$\mathbf{D}\, f(z) = \frac{\alpha}{1+z} f(z)$$

für formale Potenzreihen nur eine Lösung (abgesehen von konstanten Vielfachen) haben kann.

Beispiele: Differentiationsoperator

Es ist leicht zu sehen, daß die Differentialgleichung

$$\mathbf{D}\, f(z) = \frac{\alpha}{1+z} f(z)$$

für formale Potenzreihen nur eine Lösung (abgesehen von konstanten Vielfachen) haben kann.

Die beiden Lösungen, die wir eben in Beispiel (2) bzw. (4) gesehen haben, müssen also übereinstimmen:

$$\mathbf{e}^{\alpha \log(1+z)} = (1+z)^{\alpha}.$$

Beispiel: $\mathbf{e}^z - 1$

Die beiden Lösungen, die wir eben in Beispiel (2) bzw. (4) gesehen haben, müssen also übereinstimmen:

$$\mathbf{e}^{\alpha \log(1+z)} = (1+z)^{\alpha}.$$

Wenn wir $\alpha = 1$ setzen, dann folgt insbesondere

$$\mathbf{e}^{\log(1+z)} - 1 = z,$$

d.h., $\log(1+z)$ ist tatsächlich die zusammensetzungsinverse Reihe zu $\mathbf{e}^z - 1$.

Potenzreihen in der Analysis/in der Diskreten Mathem.

Es ist tatsächlich so, daß wegen der Eindeutigkeit der Reihenentwicklung (die in der Analysis bewiesen wird) eine analytische Identität für Potenzreihen “automatisch” eine Identität für formale Potenzreihen ist und umgekehrt — sofern die Identität sowohl als analytische Identität als auch als formale Identität sinnvoll ist.

Potenzreihen in der Analysis/in der Diskreten Mathem.

Die Einschränkung ist hier nicht leer: Zum Beispiel gilt als analytische Identität

$$\mathbf{e}^{\log(2+z)} = 2 + z$$

für alle z vom Betrag kleiner 2; für formale Potenzreihen ist die Zusammensetzung $\exp(\log(2+z))$ aber einfach nicht definiert.

Umgekehrt ist

$$\mathbf{D}\left(\sum_{n\geq 1}(n-1)!\, z^n\right) = \sum_{n\geq 1} n!\, z^{n-1}$$

natürlich eine Identität für formale Potenzreihen;
in der Analysis ist das aber sinnlos, da die Reihen nur für $z = 0$ konvergieren.

Übertragungsprinzip

Grundregel: Übertragungsprinzip

Wenn eine Identität für analytische Funktionen auch für die entsprechenden formalen Potenzreihen sinnvoll ist, dann ist sie automatisch auch eine Identität für formale Potenzreihen.

Umgekehrt: Wenn eine Identität für formale Potenzreihen auch für die entsprechenden analytischen Funktionen sinnvoll ist (das heißt, daß es einen nichttrivialen gemeinsamen Konvergenzradius für alle involvierten Reihen gibt), dann ist sie automatisch auch eine Identität für analytische Funktionen.

Beispiele in der Analysis/in der Diskreten Mathem.

In der Analysis gilt $\mathbf{e}^{\alpha z}\mathbf{e}^{\beta z} = \mathbf{e}^{(\alpha+\beta)z}$

Die Identität ist sinnvoll für formale Potenzreihen, daher gilt sie automatisch auch für formale Potenzreihen.

Umgekehrt haben wir für formale Potenzreihen die Identität $(1-z)^{-1} = 1 + z + z^2 + \cdots$ bewiesen. Diese Identität ist für z vom Betrag kleiner 1 (1 ist der Konvergenzradius der rechten Seite) auch für analytische Funktionen sinnvoll, daher gilt sie automatisch auch im Sinn der Analysis.

Formale Potenzreihen: Testfrage

Definition: formale Potenzreihe

Eine formale Potenzreihe über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist eine Folge $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ mit $a_i \in \mathbb{C}$ für alle i. Wir bezeichnen die Menge aller solchen formalen Potenzreihen mit $\mathbb{C}[[z]]$.

Testfrage

Können wir eine formale Potenzreihe definieren als eine Folge $(\ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots)$, d.h. mit Indizes in $\mathbb{Z}$? Welche Eigenschaften sind noch richtig?