Diskrete Mathematik

Univ.-Prof. Dr. Goulnara ARZHANTSEVA

SS 2018

Rekursionen

Definition: Rekursion

Sei c_n eine Zahlenfolge. Eine Rekursion ist eine Formel der Art

$$c_n = \text{“Formel”}\,(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1})$$

(z.B.: $c_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i$), zusammen mit Anfangsbedingungen der Art

$$c_1 = a, c_2 = b, \ldots, c_m = m$$

(z.B.: $c_1 = 1$).

Rekursionen: Beispiele

F_n =die Anzahl verschiedener Zerlegungen des Rechtecks in 2×1 Dominos.

Fibonacci–Zahlen F_n

Rekursion:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Anfangsbedingung: $F_0 = F_1 = 1$

Catalan–Zahlen C_n

Rekursion:

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

Anfangsbedingung: $C_0 = 1$

C_n =die Anzahl verschiedener Triangulierungen des $(n+2)$-Ecks, $n \geqslant 1$.

Lineare Rekursionen mit konstanten Koeffizienten

Lineare Rekursion

Eine Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ komplexer Zahlen wird durch eine lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten beschrieben, wenn für ein festes $k \in \mathbb{N}$ und feste komplexe Zahlen $c_1, \ldots c_k$ gilt:

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \cdots + c_k \cdot a_{n-k} \text{ für } n \geq k.$$

Der Parameter k heißt in diesem Zusammenhang die Ordnung der Rekursion.

$(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ist aber nicht die einzige Lösung dieser Rekursionsgleichung: Die "allgemeine Lösung" $(d_n)_{n=0}^{\infty}$ hängt von k frei wählbaren Parametern ab und wird erst eindeutig durch die Vorgabe der Anfangsbedingungen

$$d_0 = a_0,\ d_1 = a_1, \ldots, d_{k-1} = a_{k-1}.$$

Lineare Rekursionen: Beispiele

Lineare Rekursion: Fibonacci–Zahlen F_n

Rekursionsgleichung:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Anfangsbedingung: $F_0 = F_1 = 1$

Nichtlineare Rekursion: Catalan–Zahlen C_n

Rekursionsgleichung:

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

Anfangsbedingung: $C_0 = 1$

Lineare Rekursionen: Beispiele

Betrachten wir die Rekursionsgleichung

$$a_n = 5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 4a_{n-3}, \quad n \geq 3,$$

mit den Anfangsbedingungen

$$a_0 = -1, a_1 = 1, a_2 = 7.$$

Lineare Rekursionen: Beispiele

Betrachten wir die Rekursionsgleichung

$$a_n = 5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 4a_{n-3}, \quad n \geq 3,$$

mit den Anfangsbedingungen

$$a_0 = -1, a_1 = 1, a_2 = 7.$$

Wir multiplizieren beide Seiten der Rekursion mit z^n und summieren über alle $n \geq 3$ (im allgemeinen Fall summiert man über $n \geq k$, wenn k die Ordnung der Rekursion ist).

Lineare Rekursionen: Beispiele

Betrachten wir die Rekursionsgleichung

$$a_n = 5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 4a_{n-3}, \quad n \geq 3,$$

mit den Anfangsbedingungen

$$a_0 = -1, a_1 = 1, a_2 = 7.$$

Wir multiplizieren beide Seiten der Rekursion mit z^n und summieren über alle $n \geq 3$ (im allgemeinen Fall summiert man über $n \geq k$, wenn k die Ordnung der Rekursion ist).
Die erzeugende Funktion $a(z)$ der $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ist

$$a(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n,$$

dann kann man das so schreiben:

$$a(z) - 7z^2 - z + 1 = 5z(a(z) - z + 1) - 8z^2(a(z) + 1) + 4z^3 a(z).$$

Rekursionen: Beispiele

Daraus rechnet man $a(z)$ aus:

$$a(z) = \frac{-6z^2 + 6z - 1}{1 - 5z + 8z^2 - 4z^3}.$$

Es ist klar, daß das auch im allgemeinen funktioniert — als Ergebnis wird man die erzeugende Funktion immer als rationale Funktion erhalten, also als Quotienten von Polynomen:

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Wir können der Taylorschen Lehrsatz oder Fundamentalsatz der Algebra benutzen.

Rekursionen: Partialbruchzerlegung

Partialbruchzerlegung

Sei $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ eine rationale Funktion, sei d_p der Grad von p und d_q der Grad von q, und sei die Zerlegung in Linearfaktoren für q bekannt:

$$q(z) = (1 - \alpha_1 z)^{e_1} (1 - \alpha_2 z)^{e_2} \cdots (1 - \alpha_\ell z)^{e_\ell}.$$

Dann kann man f in der Form

$$\begin{aligned} f(z) = R(z) &+ \frac{C_{1,1}}{(1 - \alpha_1 z)} + \frac{C_{1,2}}{(1 - \alpha_1 z)^2} + \cdots + \frac{C_{1,e_1}}{(1 - \alpha_1 z)^{e_1}} \\ &+ \cdots + \frac{C_{\ell,1}}{(1 - \alpha_\ell z)} + \frac{C_{\ell,2}}{(1 - \alpha_\ell z)^2} + \cdots + \frac{C_{\ell,e_\ell}}{(1 - \alpha_\ell z)^{e_\ell}} \end{aligned} \tag{1}$$

schreiben, mit gewissen eindeutig bestimmten Koeffizienten $C_{i,j} \in \mathbb{C}$ und einem eindeutig bestimmten Polynom R vom Grad $d_p - d_q$; falls $d_q > d_p$, ist $R \equiv 0$.

Partialbruchzerlegung

1. Wir finden die Zerlegung in Linearfaktoren für $q(z)$ (nach Fundamentalsatz der Algebra).

2. Falls $d_p \geq d_q$, bestimmen wir das Polynom R durch Division mit Rest.

3. Wir lesen (1) als "unbestimmten Ansatz" für die gesuchten Koeffizienten $C_{i,j}$.

Wenn wir dann die rechte Seite von (1) auf gleichen Nenner bringen, erhalten wir durch Koeffizientenvergleich ein lineares Gleichungssystem, das wir mit den bekannten Methoden der Linearen Algebra lösen können.

Lineare Rekursionen: Beispiele $a(z) = \frac{-6z^2+6z-1}{1-5z+8z^2-4z^3}$

1. Wir finden die Zerlegung in Linearfaktoren für $q(z)$:
$1 - 5z + 8z^2 - 4z^3 = (1-2z)^2(1-z)$.

2. Das Polynom R ist hier 0, da der Grad des Zählerpolynoms (2) kleiner ist als der Grad des Nennerpolynoms (3).

3. “unbestimmten Ansatz’:

$$\frac{-6z^2+6z-1}{(1-2z)^2(1-z)} = \frac{A}{1-2z} + \frac{B}{(1-2z)^2} + \frac{C}{1-z}.$$

Lineare Rekursionen: Beispiele $a(z) = \frac{-6z^2+6z-1}{1-5z+8z^2-4z^3}$

3. "unbestimmten Ansatz':

$$\frac{-6z^2+6z-1}{(1-2z)^2(1-z)} = \frac{A}{1-2z} + \frac{B}{(1-2z)^2} + \frac{C}{1-z}.$$

Wir bringen die rechte Seite auf gleichen Nenner und kürzen:

$$-6z^2+6z-1 = A(1-2z)(1-z) + B(1-z) + C(1-2z)^2.$$

Wir multiplizieren die rechte Seite aus und erhalten

$$-6z^2+6z-1 = (2A+4C)\,z^2 - (3A+B+4C)\,z + (A+B+C)\,.$$

Koeffizientenvergleich für z^0, z^1 und z^2 liefert drei Gleichungen in den drei Unbekannten A, B, C:

$$\begin{aligned} -6 &= 2A+4C \\ 6 &= -3A-B-4C \\ -1 &= A+B+C \end{aligned}$$

Beispiele $a(z) = \frac{-6z^2+6z-1}{1-5z+8z^2-4z^3}$

Als Lösung erhalten wir $A = -1$, $B = 1$ und $C = -1$. Somit lässt sich unsere erzeugende Funktion als

$$a(z) = -\frac{1}{1-2z} + \frac{1}{(1-2z)^2} - \frac{1}{1-z}$$

schreiben.

Alle Brüche auf der rechten Seite haben die Gestalt $\frac{\beta}{(1+\alpha \cdot z)^m}$ (es ist klar, daß das auch im allgemeinen gilt!) und sind somit Binomialreihen, die wir explizit hinschreiben können:

$$a(z) = -\sum_{n \geq 0} 2^n z^n + \sum_{n \geq 0} (n+1) 2^n z^n - \sum_{n \geq 0} z^n.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir die Formel

$$a_n = n2^n - 1.$$

Methode zur Lösung linearer Rekursionen

1. Gewinne aus der Rekursion eine Gleichung für die erzeugende Funktion: Multipliziere beide Seiten mit z^n, summiere über alle n.
2. Löse die Gleichung für die erzeugende Funktion: Man erhält in jedem Fall eine rationale Funktion.
3. Führe die Partialbruchzerlegung durch.
4. Entwickle die entstandenen Brüche in Binomialreihen.
5. Lies die Koeffizienten ab.

Lineare Rekursionen

Korollar

Gegeben sei die Rekursion

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}, \quad n \geq k.$$

Wir nehmen weiters an, daß das zugehörige charakteristische Polynom die Faktorisierung

$$1 - c_1 x - c_2 x^2 - \cdots - c_k x^k = (1 - \alpha_1 x)^{e_1} (1 - \alpha_2 x)^{e_2} \cdots (1 - \alpha_\ell x)^{e_\ell}$$

besitzt. Dann hat jede Lösung der Rekursion die Gestalt

$$a_n = P_1(n)\alpha_1^n + P_2(n)\alpha_2^n + \cdots + P_\ell(n)\alpha_\ell^n,$$

wo $P_i(n)$ ein Polynom in n vom Grad $e_i - 1$ (denn $\binom{-e}{n}$ ist ein Polynom in n vom Grad $e - 1$) ist. Umgekehrt ist jede derart gegebene Folge (a_n) eine Lösung der Rekursion.

Stirling–Zahlen der zweiten Art: Erzeugende Funktion

$S_{n,k}$ = die Anzahl aller Partitionen von $[n]$ mit k Blöcken.
Rekursion:

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}. \tag{2}$$

Beweis:
Die Menge aller Partitionen von $[n]$ mit k Blöcken zerfällt in zwei disjunkte Teilmengen:

1. Jene Partitionen, bei denen $\{n\}$ einen eigenen Block bildet,
2. und jene Partitionen, bei denen $\{n\}$ keinen eigenen Block bildet.

1. Wir können den Singleton–Block $\{n\}$ weglassen und erhalten eine Partition von $[n-1]$ in $(k-1)$ Blöcke — die Anzahl ist $S_{n-1,k-1}$.

2. Wir können das Element n aus seinem Block entfernen: Übrig bleibt eine Partition von $[n-1]$ in k Blöcke — die Anzahl dieser Partitionen ist $S_{n-1,k}$; und aus jeder solchen Partition können wir k verschiedene Partitionen von $[n]$ machen, indem wir das Element n in einen der k Blöcke "dazustecken". Insgesamt: Die Anzahl im zweiten Fall ist $k \cdot S_{n-1,k}$. Daraus folgt (2), mit der Summenregel. ■

Methode zur Lösung linearer Rekursionen

1. Gewinne aus der Rekursion eine Gleichung für die erzeugende Funktion: Multipliziere beide Seiten mit z^n, summiere über alle n.
2. Löse die Gleichung für die erzeugende Funktion: Man erhält in jedem Fall eine rationale Funktion.
3. Führe die Partialbruchzerlegung durch.
4. Entwickle die entstandenen Brüche in Binomialreihen.
5. Lies die Koeffizienten ab.

Stirling–Zahlen der zweiten Art: Erzeugende Funktion

Rekursion:

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}.$$

Nun multiplizieren wir beide Seiten der Rekursion mit $\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$ (diese Modifikation stellt sich als bequem heraus) und summieren über alle $n \geq 1$. Betrachten wir die “modifizierte erzeugende Funktion”

$$S_k(z) := \sum_{n \geq 0} S_{n,k} \frac{z^n}{n!}$$

(man nennt diese Form auch die exponentiell erzeugende Funktion).

Stirling–Zahlen der zweiten Art: Erzeugende Funktion

Dann erhalten wir für alle k

$$\mathbf{D}\, S_k(z) = S_{k-1}(z) + k \cdot S_k(z)\,,$$

also ein unendliches System von Differentialgleichungen.
Als Anfangsbedingung haben wir $S_0(z) = 1$, also haben wir für $k = 1$ die Differentialgleichung:

$$\mathbf{D}\, S_1(z) = S_0(z) + S_1(z) = 1 + S_1(z)\,.$$

Stirling–Zahlen der zweiten Art: Erzeugende Funktion

Diese lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten läßt sich (mit Methoden aus der Vorlesung "Differentialgleichungen"...) leicht lösen:

$$S_1(z) = \mathbf{e}^z - 1.$$

Für $k = 2$ haben wir dann die Differentialgleichung:

$$\mathbf{D}\, S_2(z) = S_1(z) + 2S_2(z) = \mathbf{e}^z - 1 + 2S_2(z)\,.$$

Stirling–Zahlen der zweiten Art: Erzeugende Funktion

Wieder borgen wir uns die Lösung von der Theorie der Differentialgleichungen (die Richtigkeit ist sofort leicht nachprüfbar):

$$S_2(z) = \frac{(\mathbf{e}^z - 1)^2}{2}.$$

Etwas kühn vermuten wir schon an dieser Stelle die allgemeine Lösung

$$S_k(z) = \frac{(\mathbf{e}^z - 1)^k}{k!}, \tag{3}$$

deren Richtigkeit wir ohne Schwierigkeiten durch Induktion nach k nachrechnen können.

Stirling–Zahlen der zweiten Art: Erzeugende Funktion

Aus dem Binomischen Lehrsatz folgt nun

$$S_k(z) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \mathbf{e}^{iz},$$

und durch Koeffizientenvergleich von

$$S_k(z) := \sum_{n \geq 0} S_{n,k} \frac{z^n}{n!}$$

erhalten wir

$$S_{n,k} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} i^n, \tag{4}$$

dasselbe Ergebnis wie in Kapitel 04, Gleichung (2).

Stirling–Zahlen der ersten Art: Erzeugende Funktion

Nun wollen wir auch noch die exponentiell erzeugende Funktionen

$$s_k(z) := \sum_{n \geq 0} s_{n,k} \frac{z^n}{n!}$$

für die Stirling–Zahlen der ersten Art ausrechnen; analog zu (3).

Erinnerung:

$c(n, k)$ bezeichne die Anzahl aller Permutationen von $[n]$ mit k Zyklen.

$$c(n, k) = c(n-1, k-1) + (n-1)c(n-1, k).$$

$$s_{n,k} = (-1)^{n-k} c(n, k).$$

Stirling–Zahlen der ersten Art: Erzeugende Funktion

Wir ersetzen zuerst in der Rekursion für $c(n,k)$ durch $(-1)^{n-k}\, s_{n,k}$:

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} - (n-1)s_{n-1,k}.$$

Dann multiplizieren wir wieder beide Seiten mit $\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$ und summieren über alle n. Dadurch erhalten wir für alle k die Differentialgleichung

$$\mathbf{D}s_k(z) = s_{k-1}(z) - z\cdot\mathbf{D}s_k(z),$$

oder äquivalent

$$(1+z)\,\mathbf{D}s_k(z) = s_{k-1}(z).$$

Die Anfangsbedingung lautet $s_0(z) = 1$. Es ist wieder nicht schwer, die allgemeine Lösung zu erraten:

$$s_k(z) = \frac{(\log(1+z))^k}{k!}. \tag{5}$$

Die Richtigkeit dieser Lösung ist leicht (durch Induktion nach k) nachprüfbar.

Stirling–Zahlen: Erzeugenden Funktionen

$$S_k(z) = \frac{(\mathbf{e}^z - 1)^k}{k!}$$

$$s_k(z) = \frac{(\log(1+z))^k}{k!}$$

Diese beiden Reihen sind zueinander (bezüglich der Zusammensetzung) invers. Es ist kein Zufall, daß auch die Matrizen der Stirling–Zahlen der ersten und zweiten Art zueinander invers sind (wie wir zuvor gesehen haben).

Zahl–Partitionen

Definition: Zahl–Partition

Eine (Zahl–)Partition von $n \in \mathbb{Z}^+$ (mit k Teilen) ist eine Darstellung von n als Summe natürlicher Zahlen

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k,$$

wobei es auf die Reihenfolge der Summanden nicht ankommt — daher können wir annehmen, daß die Teile (also die Summanden) in absteigender Größe numeriert sind, also $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k$.

Die Anzahl aller (Zahl–)Partitionen von n bezeichnen wir mit $\mathbf{p}(n)$.

Speziell setzen wir $\mathbf{p}(0) = 1$ — wenn man will, kann man das so sehen, daß die einzige Partition von 0 die leere Summe $\sum_{i=1}^{0} a_i$ ist.

Zahl–Partitionen

Definition: Zahl–Partition

Eine (Zahl–)Partition von $n \in \mathbb{Z}^+$ (mit k Teilen) ist eine Darstellung von n als Summe natürlicher Zahlen

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k,$$

wobei es auf die Reihenfolge der Summanden nicht ankommt — daher können wir annehmen, daß die Teile (also die Summanden) in absteigender Größe numeriert sind, also $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k$.

Die Anzahl aller (Zahl–)Partitionen von n bezeichnen wir mit $\mathbf{p}(n)$.

Speziell setzen wir $\mathbf{p}(0) = 1$ — wenn man will, kann man das so sehen, daß die einzige Partition von 0 die leere Summe $\sum_{i=1}^{0} a_i$ ist.

Erinnerung: eine Komposition ist eine geordnete (Zahl–)Partitionen.

Zahl Partitionen: Beispile

p (n)

Die ersten 5 Werte von **p** (n) lauten:

$$\mathbf{p}(0) = 1 : 0 = \sum_{i=1}^{0} a_i,$$
$$\mathbf{p}(1) = 1 : 1 = (1),$$
$$\mathbf{p}(2) = 2 : 2 = (2) = (1+1),$$
$$\mathbf{p}(3) = 3 : 3 = (3) = (2+1) = (1+1+1),$$
$$\mathbf{p}(4) = 5 : 4 = (4) = (3+1) = (2+2) = (2+1+1) = (1+1+1+1).$$

Die nächsten Werte lauten $\mathbf{p}(5) = 7$ und $\mathbf{p}(6) = 11$. Die Folge wächst sehr schnell, z.B. ist $\mathbf{p}(100) = 190569292$.

Für die Zahlenfolge $(\mathbf{p}(n))_{n=0}^{\infty}$ gibt es keine so einfache Formel wie für die Folge der Kompositionen.

Zahl Partitionen: Erzeugende Funktion

Satz: Zahl Partitionen

Sei $H \subseteq \mathbb{N}$, und sei $\mathbf{p}(H, n)$ die Anzahl aller (Zahl–)Partitionen von n, deren Teile sämtlich Elemente aus H sind. (Die “normale Funktion” $\mathbf{p}(n)$ ist also gleich $\mathbf{p}(\mathbb{N}, n)$.) Dann gilt für die erzeugende Funktion

$$F_H(z) := \sum_{n \geq 0} \mathbf{p}(H, n)\, z^n = \prod_{n \in H} \frac{1}{1 - z^n}.$$

Zahl Partitionen: Erzeugende Funktion

Beweis: Der ganze Beweis besteht lediglich in simplem Ausmultiplizieren!

$$
\begin{aligned}
\prod_{n\in H} \frac{1}{1-z^n} &= \prod_{n\in H}\left(1+z^n+z^{2n}+z^{3n}+\cdots\right) \\
&= \left(1+z^{h_1}+z^{2h_1}+z^{3h_1}+\cdots\right) \\
&\times \left(1+z^{h_2}+z^{2h_2}+z^{3h_2}+\cdots\right) \\
&\times \left(1+z^{h_3}+z^{2h_3}+z^{3h_3}+\cdots\right) \\
&\times \cdots \\
&= \sum_{i_1\geq 0}\sum_{i_2\geq 0}\sum_{i_3\geq 0}\cdots z^{i_1 h_1+i_2 h_2+i_3 h_3+\cdots},
\end{aligned}
$$

Zahl Partitionen: Erzeugende Funktion

und den Exponenten von z deuten wir als die Partition

$$\left(\underbrace{h_1 + \cdots + h_1}_{i_1\text{–mal}} + \underbrace{h_2 + \cdots + h_2}_{i_2\text{–mal}} + \underbrace{h_3 + \cdots + h_3}_{i_3\text{–mal}} + \cdots \right),$$

die natürlich nur Teile $h_i \in H$ enthält. Die Potenz z^n kommt also in der Entwicklung so oft vor, wie es Partitionen von n mit Teilen aus H gibt. ■

Überblick: Vorlesung

Einführung in die Grundbegriffe der Diskreten Mathematik

1. Einfache und abzählende Kombinatorik: Stichproben, Permutationen, Partitionen
2. Erzeugende Funktionen, Lösen von Rekursionen
3. Das Prinzip der Inklusion und Exklusion, Suchen und Sortieren
4. Graphen und Netzwerke