Diskrete Mathematik

Univ.-Prof. Dr. Goulnara ARZHANTSEVA

SS 2020

Funktionen zwischen endlichen Mengen

$[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$. Wir betrachten Funktionen $f : [k] \to [n]$

Wieviele Funktionen $f : [k] \to [n]$ gibt es?

Wieviele injektive Funktionen $f : [k] \to [n]$ gibt es?

Wieviele bijektive Funktionen $f : [n] \to [n]$ gibt es?

Wieviele surjektive Funktionen $f : [k] \to [n]$ gibt es?

Wieviele Funktionen $f : [k] \to [n]$ gibt es?

Notation: $\mathrm{abb}\,(k, n)$

$\mathrm{abb}\,(k, n)$ bezeichne die Menge aller Funktionen $f : [k] \to [n]$

Jede solche Funktion f kann eindeutig als (geordnetes) k–Tupel

$$(f(1), f(2), \ldots, f(k))$$

"codiert" werden, wobei jede Eintragung beliebige Werte aus $[n]$ annehmen kann.

Wieviele Funktionen $f : [k] \to [n]$ gibt es?

Notation: $\mathrm{abb}(k, n)$

$\mathrm{abb}(k, n)$ bezeichne die Menge aller Funktionen $f : [k] \to [n]$

Jede solche Funktion f kann eindeutig als (geordnetes) k–Tupel

$$(f(1), f(2), \ldots, f(k))$$

“codiert” werden, wobei jede Eintragung beliebige Werte aus $[n]$ annehmen kann.Dann, gibt es eine Bijektion:

$$\mathrm{abb}(k, n) \overset{\text{Bijektion}}{\longleftrightarrow} [n]^k$$

Gemäß Bijektionsregel und Produktregel:

$$|\mathrm{abb}(k, n)| = n^k. \tag{1}$$

Wieviele injektive Funktionen $f : [k] \to [n]$ gibt es?

Notation: inj (k, n)

inj (k, n) bezeichne die Menge aller injektiven Funktionen $f : [k] \to [n]$

Für $f(1)$ haben wir n Möglichkeiten,
für $f(2)$ bleiben dann nur mehr $n - 1$ Moglichkeiten, und so fort —
für $f(k)$ haben wir noch $n - k + 1$ Möglichkeiten zur Auswahl.

Wieviele injektive Funktionen $f : [k] \to [n]$ gibt es?

Notation: $\operatorname{inj}(k, n)$

$\operatorname{inj}(k, n)$ bezeichne die Menge aller injektiven Funktionen $f : [k] \to [n]$

Für $f(1)$ haben wir n Möglichkeiten,
für $f(2)$ bleiben dann nur mehr $n - 1$ Moglichkeiten, und so fort —
für $f(k)$ haben wir noch $n - k + 1$ Möglichkeiten zur Auswahl.

Insgesamt entspricht die gesuchte Anzahl also den fallenden Faktoriellen

$$|\operatorname{inj}(k, n)| = n^{\underline{k}} = n \cdot (n - 1) \cdots (n - k + 1) = \prod_{i=1}^{k} (n - i + 1) . \qquad (2)$$

Wieviele injektive Funktionen $f : [k] \to [n]$ gibt es?

Notation: $\operatorname{inj}(k, n)$

$\operatorname{inj}(k, n)$ bezeichne die Menge aller injektiven Funktionen $f : [k] \to [n]$

Für $f(1)$ haben wir n Möglichkeiten,
für $f(2)$ bleiben dann nur mehr $n - 1$ Moglichkeiten, und so fort —
für $f(k)$ haben wir noch $n - k + 1$ Möglichkeiten zur Auswahl.

Insgesamt entspricht die gesuchte Anzahl also den fallenden Faktoriellen

$$|\operatorname{inj}(k, n)| = n^{\underline{k}} = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \prod_{i=1}^{k} (n-i+1) \,. \tag{2}$$

Der Spezialfall $k = n$ dieser Formel beantwortet die nächste Frage:

Wieviele bijektive Funktionen $f : [n] \to [n]$ gibt es?

Solche Funktionen heißen auch Permutationen (von n Elementen), ihre Anzahl ist also

$$n^{\underline{n}} = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

Wieviele bijektive Funktionen $f : [n] \to [n]$ gibt es?

Solche Funktionen heißen auch Permutationen (von n Elementen), ihre Anzahl ist also

$$n^{\underline{n}} = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

Noch einmal:

$$|\text{inj}\,(k,n)| = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$$

Es ist auch richtig (nämlich gleich 0) für $k > n$ — denn dann gibt es natürlich keine injektiven Funktionen.

Wieviele bijektive Funktionen $f : [n] \to [n]$ gibt es?

Solche Funktionen heißen auch Permutationen (von n Elementen), ihre Anzahl ist also

$$n^{\underline{n}} = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

Noch einmal:

$$|\mathrm{inj}\,(k, n)| = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$$

Es ist auch richtig (nämlich gleich 0) für $k > n$ — denn dann gibt es natürlich keine injektiven Funktionen.

Grundregel: Schubfachprinzip

Wenn man k Elemente auf n Fächer verteilt, wobei $k > n$, dann gibt es mindestens ein Fach, das zwei Elemente enthält.

Stirling–Zahl der zweiten Art

Definition: Stirling–Zahl der zweiten Art

Die Anzahl aller Partitionen von $[n]$ mit k Blöcken heißt Stirling–Zahl der zweiten Art, wir bezeichnen sie mit $S_{n,k}$.

$$
\begin{aligned}
S_{n,k} &= 0 \quad \text{für } k > n, \\
S_{0,0} &= 1, \quad S_{0,k} = 0, \quad S_{n,0} = 0 \text{ für } n, k \in \mathbb{N}, \\
S_{n,1} &= 1, \\
S_{n,2} &= 2^{n-1} - 1, \\
S_{n,n} &= 1, \\
S_{n,n-1} &= \binom{n}{2}.
\end{aligned}
$$

Wieviele surjektive Funktionen $f : [k] \to [n]$ gibt es?

Notation: $\text{surj}(k, n)$

$\text{surj}(k, n)$ = die Menge aller surjektiven Funktionen $f : [k] \to [n]$

Urbilder $f^{-1}(1), \ldots, f^{-1}(n) \subseteq [k] \longmapsto$ Partition von $[k]$ mit n Blöcken

Urbilder $f^{-1}(i_1), \ldots, f^{-1}(i_n) \subseteq [k] \longleftarrow$ Partition von $[k]$ mit n Blöcken, für jede Permutation $i_1, \ldots, i_n$ von $1, \ldots, n$

Nach der Regel von der doppelten Abzählung:

$$|\text{surj}(k, n)| = n! \cdot S_{k,n} \tag{3}$$

Funktionen und surjektive Funktionen

Jede Funktion $f \in \operatorname{abb}(k, n)$ hat ein eindeutiges Bild $Y = f([k]) \subseteq [n]$ und ist "surjektiv auf Bild Y"
Wenn wir die Menge $\operatorname{abb}(k, n)$ aller Funktionen nach den jeweiligen Bildern Y partitionieren, dann nach Summenregel gilt:

$$
\begin{aligned}
n^k = |\operatorname{abb}(k, n)| &= \sum_{Y \subseteq [n]} |\operatorname{surj}([k], Y)| \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{|Y|=i} |\operatorname{surj}([k], Y)| \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot i! \cdot S_{k,i} \\
&= \sum_{i=0}^{k} S_{k,i} \cdot n^{\underline{i}}
\end{aligned}
$$

(wegen $S_{k,i} = 0$ für $i > k$).

Polynomargument

Mit anderen Worten: für jedes festes k gilt

$$x^k = \sum_{i=0}^{k} S_{k,i} \cdot x^{\underline{i}} \tag{4}$$

für alle $x \in \mathbb{N}$, wobei $x^{\underline{i}} = \prod_{j=0}^{i-1} (x - j)$ ist die fallende Faktorielle.

Polynomargument

Mit anderen Worten: für jedes festes k gilt

$$x^k = \sum_{i=0}^{k} S_{k,i} \cdot x^{\underline{i}} \tag{4}$$

für alle $x \in \mathbb{N}$, wobei $x^{\underline{i}} = \prod_{j=0}^{i-1} (x - j)$ ist die fallende Faktorielle.

Grundregel: Polynomargument

Wenn zwei Polynome p und q über $\mathbb{C}$ vom Grad $\leqslant k$ an mehr als k verschiedenen Stellen übereinstimmen, dann sind sie überhaupt identisch; insbesondere also

$$\forall n \in \mathbb{N} : p(n) = q(n) \implies p \equiv q.$$

Gleichung (4) ist also eine Polynomidentität: $\forall x \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}^+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$

Polynomidentität: Interpretation

Noch einmal:

$$x^k = \sum_{i=0}^{k} S_{k,i} \cdot x^{\underline{i}}$$

Bekanntlich bilden die Polynome mit komplexen Koeffizienten einen (unendlichdimensionalen) Vektorraum über dem Körper $\mathbb{C}$.

In diesem Vektorraum bilden sowohl die Polynome $(x^n)_{n=0}^{\infty}$ als auch die Polynome $(x^{\underline{n}})_{n=0}^{\infty}$ eine Basis.

Die Polynomidentität besagt, daß die entsprechende Basistransformation durch die Stirling–Zahlen der zweiten Art beschrieben wird.

Stirling–Zahlen und Polynomidentität: Testfragen

Testfrage 3

Warum die Polynome $(x^n)_{n=0}^{\infty}$ als auch die Polynome $(x^{\underline{n}})_{n=0}^{\infty}$ eine Basis bilden in dem Vektorraum über dem Körper $\mathbb{C}$ aller Polynome mit komplexen Koeffizienten?

Testfrage 4

Warum haben wir die Anfangsbedingung $S_{0,0} = 1$?

Binomialkoeffizienten: Verallgemeinerung

Zur Erinnerung: Die Anzahl k–elementigen Teilmengen von $[n]$ ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Für jedes feste k, der Binomialkoeffizient als Polynom angesehen werden:

$$\binom{x}{k} := \frac{x^{\underline{k}}}{k!},$$

wobei $x \in \mathbb{C}$ und k ist eine nichtnegative ganze Zahl.

Chu-Vandermonde Identität

Chu–Vandermonde Identität

$$\binom{x+y}{k} = \sum_{l=0}^{k} \binom{x}{l} \binom{y}{k-l} \tag{5}$$

Beweis: 1. Für x und y nur natürliche Zahlen m und n einsetzt:

$$\binom{m+n}{k} = \text{ die Anzahl aller } k\text{-elementigen Teilmengen von } [m+n].$$

Chu-Vandermonde Identität

Chu–Vandermonde Identität

$$\binom{x+y}{k} = \sum_{l=0}^{k} \binom{x}{l} \binom{y}{k-l} \tag{5}$$

Beweis: 1. Für x und y nur natürliche Zahlen m und n einsetzt:

$$\binom{m+n}{k} = \text{ die Anzahl aller } k\text{-elementigen Teilmengen von } [m+n].$$

Die Familie dieser Teilmengen partitionieren wir danach, wieviele ihrer k Elemente in $[m]$ (sei l diese Anzahl) und wieviele im Rest $[m+n] \setminus [m]$ enthalten sind (das müssen dann $k-l$ sein): Der entsprechende Block der Partition enthält $\binom{m}{l} \cdot \binom{n}{k-l}$ Teilmengen, und aus der Summenregel folgt die Behauptung.

Chu-Vandermonde Identität

Chu–Vandermonde Identität

$$\binom{x+y}{k} = \sum_{l=0}^{k} \binom{x}{l}\binom{y}{k-l} \tag{5}$$

Beweis: 1. Für x und y nur natürliche Zahlen m und n einsetzt:

$$\binom{m+n}{k} = \text{ die Anzahl aller } k\text{-elementigen Teilmengen von } [m+n].$$

Die Familie dieser Teilmengen partitionieren wir danach, wieviele ihrer k Elemente in $[m]$ (sei l diese Anzahl) und wieviele im Rest $[m+n] \setminus [m]$ enthalten sind (das müssen dann $k-l$ sein): Der entsprechende Block der Partition enthält $\binom{m}{l} \cdot \binom{n}{k-l}$ Teilmengen, und aus der Summenregel folgt die Behauptung.
2. Für $x, y \in \mathbb{C}$, es folgt aus Polynomargument (zweimal anwenden, für die zwei Variablen x und y). ∎

Multimengen

Definition: Multimenge

Sei X eine Menge. Eine Multimenge von X ist eine Ansammlung von Elementen aus X, wobei aber Elemente mehrfach vorkommen können:

Eine Multimenge M von X wird beschrieben durch ihre charakteristische Funktion $\chi_M : X \to \mathbb{Z}^+$,

$$\chi_M(i) := \text{ Anzahl der Vorkommnisse von Element } i \text{ in } M.$$

$\chi_M(i)$ nennt man auch die Vielfachheit von i in M.

$X = [5]$

$M = \{1, 2, 2, 5, 5, 5\}$ ist eine 6–elementige Multimenge von [5]. Die charakteristische Funktion (dargestellt als 5–Tupel) von M ist dann $(1, 2, 0, 0, 3)$.

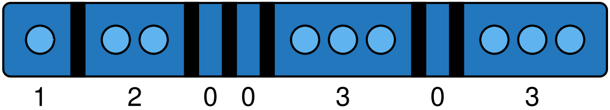
Beispiel: 9–elementige Multimenge von [7] (aus Skriptum)

$$X = [7]\,,$$

$$M = \{1, 2, 2, 5, 5, 5, 7, 7, 7\}\,,$$

$$\chi_M = (1, 2, 0, 0, 3, 0, 3)\,.$$

Die charakteristische Funktion χ_M von M könnten wir so “kodieren”:



Als ‘Konfiguration’ von 9 ‘Kugerln’ und $7 - 1 = 6$ ‘Trennstrichen’. Jede solche ‘Konfiguration’ denken wir uns wiederum so: Von $9 + 7 - 1 = 15$ ‘Positionen’ wählen wir 9 aus, die wir mit ‘Kugerln’ besetzen, die restlichen besetzen wir mit ‘Trennstrichen’.

Wieviele k–elementige Multimengen von $[n]$ gibt es?

Mit der Bijektionsregel:

Die Anzahl der k–elementigen Multimengen einer n–elementigen Menge

=

Wieviele k–elementige Multimengen von $[n]$ gibt es?

Mit der Bijektionsregel:

Die Anzahl der k–elementigen Multimengen einer n–elementigen Menge

=

Die Anzahl der k–elementigen Teilmengen einer $k + (n - 1)$–elementigen Menge

Wieviele k–elementige Multimengen von $[n]$ gibt es?

Mit der Bijektionsregel:

Die Anzahl der k–elementigen Multimengen einer n–elementigen Menge

$$=$$

Die Anzahl der k–elementigen Teilmengen einer $k + (n - 1)$–elementigen Menge

$$=$$

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Wieviele k–elementige Multimengen von $[n]$ gibt es?

Mit der Bijektionsregel:

Die Anzahl der k–elementigen Multimengen einer n–elementigen Menge

$$=$$

Die Anzahl der k–elementigen Teilmengen einer $k + (n - 1)$–elementigen Menge

$$=$$

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Wenn wir den Binomialkoeffizienten als Polynom $\frac{x^k}{k!}$ auffassen, können wir für x insbesondere auch negative Zahlen einsetzen und das Ergebnis so schreiben:

$$(-1)^k \binom{-n}{k} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Kompositionen

Definition: Komposition von n

Eine Komposition von n ist eine Darstellung von n als Summe natürlicher Zahlen

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k,$$

wobei es auf die Reihenfolge der Summanden ankommt.

$10 = 3 + 2 + 5$ und $10 = 5 + 2 + 3$ sind zwei verschiedene Kompositionen.
Mit anderen Worten: zwei geordnete (Zahl–)Partitionen.

Kompositionen

Definition: Komposition von n

Eine Komposition von n ist eine Darstellung von n als Summe natürlicher Zahlen

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k,$$

wobei es auf die Reihenfolge der Summanden ankommt.

$10 = 3 + 2 + 5$ und $10 = 5 + 2 + 3$ sind zwei verschiedene Kompositionen.
Mit anderen Worten: zwei geordnete (Zahl–)Partitionen.

4 Kompositionen von $n = 3$

3, 2+1, 1+2, 1+1+1

Wieviele Kompositionen?

Wieviele Kompositionen von n mit genau k Summanden gibt es?

Wieviele Kompositionen?

Wieviele Kompositionen von n mit genau k Summanden gibt es?

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \longmapsto \{a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}\}.$$

Wieviele Kompositionen?

Wieviele Kompositionen von n mit genau k Summanden gibt es?

$$\{\text{Kompositionen von } n \text{ mit } k \text{ Summanden}\} \overset{\text{Bijektion}}{\longleftrightarrow} \{\text{ ersten } k-1 \text{ Partialsummen}\}$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \longmapsto \{a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}\}.$$

Wieviele Kompositionen?

Wieviele Kompositionen von n mit genau k Summanden gibt es?

$\{$Kompositionen von n mit k Summanden$\}$ $\overset{\text{Bijektion}}{\longleftrightarrow}$ $\{$ ersten $k-1$ Partialsummen$\}$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \longmapsto \{a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}\}.$$

Diese Menge ist eine $(k-1)$–elementige Teilmenge von $[n-1]$, denn $a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} = n - a_k < n$. Die Bijektionsregel liefert also die Antwort auf unsere Abzählungsfrage für $(n \geq k > 0)$:

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

Für $n = k = 0$ gibt es 'definitionsgemäß' genau eine Komposition.

Wieviele Kompositionen?

Wieviele Kompositionen von n mit genau k Summanden gibt es?

$\{$Kompositionen von n mit k Summanden$\}$ $\overset{\text{Bijektion}}{\longleftrightarrow}$ $\{$ ersten $k-1$ Partialsummen$\}$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \longmapsto \{a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}\}.$$

Diese Menge ist eine $(k-1)$–elementige Teilmenge von $[n-1]$, denn $a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} = n - a_k < n$. Die Bijektionsregel liefert also die Antwort auf unsere Abzählungsfrage für $(n \geq k > 0)$:

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

Für $n = k = 0$ gibt es ‘definitionsgemäß’ genau eine Komposition.

Wieviele Kompositionen von n gibt es insgesamt?

Nach Summenregel (und Binomischer Lehrsatz für $x = y = 1$), die Antwort ist:

$$\begin{cases} 1 & \text{für } n = 0, \\ 2^{n-1} & \text{für } n > 0 \end{cases}.$$