

Diskrete Mathematik

Univ.-Prof. Dr. Goulmara ARZHANTSEVA

SS 2020



universität
wien

Permutationen

Definition: Permutation

Sei X eine endliche Menge: Eine **Permutation** von X ist eine beliebige **Anordnung** der Elemente dieser Menge.

Unsere frühere Definition: Eine Permutation ist eine **Bijektion** $X \rightarrow X$.

Permutationen

Definition: Permutation

Sei X eine endliche Menge: Eine **Permutation** von X ist eine beliebige **Anordnung** der Elemente dieser Menge.

Unsere frühere Definition: Eine Permutation ist eine **Bijektion** $X \rightarrow X$.

Für Permutationen von $X = [n]$ wir benutzen einzeilige Notation

$$a_1 a_2 \dots a_n$$

oder zweizeilige Notation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Permutationen: Beispiele

Zweizeiliger Notation: Alle Permutationen von [3]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Einzeiliger Notation: Alle Permutationen von [3]

$$1\ 2\ 3, 1\ 3\ 2, 2\ 1\ 3, 2\ 3\ 1, 3\ 1\ 2, 3\ 2\ 1.$$

Die Ordnung ist **lexikographische** = 'alphabetische' Ordnung der Zahlen

Symmetrische Gruppe

Definition: Multiplikation der Permutationen

Die Verknüpfung zweier Permutationen π_1, π_2 von $[n]$ ist definiert durch:

$$(\pi_1 \circ \pi_2)(i) := \pi_1(\pi_2(i)).$$

Wir werden “ \circ ” oft weglassen und einfach $\pi_1\pi_2$ schreiben.

Multiplikation der Permutationen: $n = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Symmetrische Gruppe

Die Permutationen von $[n]$ bezüglich dieser Verknüpfung eine (nichtkommutative) Gruppe bilden, die sogenannten **symmetrische Gruppe**; wir bezeichnen sie mit \mathfrak{S}_n .

Ihr Einheitselement ist die **identische Permutation** ϵ , die alle Elemente i auf sich selbst abbildet: $\epsilon(i) = i$ für $i = 1, \dots, n$
 $\epsilon \in \mathfrak{S}_n$ hat also n **Fixpunkte**.

Wir wissen bereits:

$$|\mathfrak{S}_n| = n!$$

Zyklenerlegung von Permutationen

Definition: Zyklus

Eine **zyklische Permutation** (kurz: ein **Zyklus**) der Länge k ist eine Permutation der Gestalt

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_k \\ a_2 & a_3 & \dots & a_k & a_1 \end{pmatrix}.$$

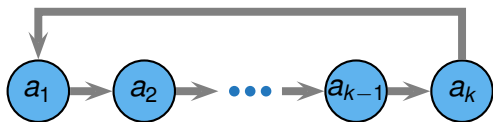
Die kürzere Notation: $(a_1 a_2 \dots a_k)$.

Ein Zyklus der Länge 1 heißt ein **Fixpunkt**.

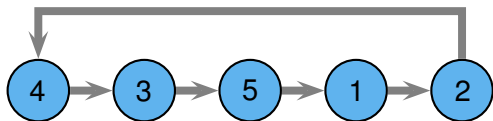
Zyklen: $n = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(23) = (32), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3) = \epsilon$$

Beispiel: Zyklische Permutation (aus Skriptum)



$$n = 6, k = 5, \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} = (12435) = (43512)$$



Zyklenerlegung von Permutationen

Für **jede** Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ gehört **jedes** $i \in [n]$ zu einem **eindeutig bestimmten** Zyklus. Denn die Folge

$$i, \pi(i), \pi^2(i) := \pi(\pi(i)), \pi^3(i), \pi^4(i), \dots$$

muß sich einmal wiederholen — es gibt also ein minimales k mit $\pi^k(i) = i$. Wenn wir π auf die Menge

$$S := \{i, \pi(i), \pi^2(i), \dots, \pi^{k-1}(i)\}$$

einschränken, so haben wir sichtlich eine zyklische Permutation von S .

Zyklenerlegung von Permutationen

Für **jede** Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ gehört **jedes** $i \in [n]$ zu einem **eindeutig bestimmten** Zyklus. Denn die Folge

$$i, \pi(i), \pi^2(i) := \pi(\pi(i)), \pi^3(i), \pi^4(i), \dots$$

muß sich einmal wiederholen — es gibt also ein minimales k mit $\pi^k(i) = i$. Wenn wir π auf die Menge

$$S := \{i, \pi(i), \pi^2(i), \dots, \pi^{k-1}(i)\}$$

einschränken, so haben wir sichtlich eine zyklische Permutation von S .

Zyklenerlegung: $n = 6, k = 5$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} = (12435)(6) = (43512),$$

$$S = \{4, \pi(4) = 3, \pi^2(4) = 5, \pi^3(4) = 1, \pi^4(4) = 2\}$$

Zyklenerlegung von Permutationen

Zwei **verschiedene** Zyklen π_i und π_j können wir als Permutationen von **disjunkten** Teilmengen X_1 und X_2 von $[n]$ auffassen. **Daher** kommutieren π_1 und π_2 , wenn wir sie als Permutationen in \mathfrak{S}_n auffassen, die alle Elemente in $[n] \setminus X_1$ bzw. in $[n] \setminus X_2$ **fixieren** (d.h., $\pi_1(x) = x$ für alle $x \notin X_1$ bzw. $\pi_2(x) = x$ für alle $x \notin X_2$):

$$\pi_1 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1.$$

$$n = 6, X_1 = \{3, 5, 6\}, \pi_1 = (356), X_2 = \{1, 2\}, \pi_2 = (12)$$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} = (356)(12) = \pi_1 \circ \pi_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Zyklenerlegung von Permutationen

Korollar 1

Zyklenerlegung

Sei $n \in \mathbb{N}$. Jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ läßt sich **eindeutig** (bis auf die Reihenfolge) in **paarweise disjunkte** (und daher **paarweise kommutierende**) Zyklen $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$ zerlegen, d.h.:

- Jede Zahl $i \in [n]$ gehört genau einem Zyklus an,
- Jeder Zyklus π_i hat Länge ≥ 1 ,
- Zwei verschiedene Zyklen π_i, π_j haben kein Element gemeinsam,
- $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_m$.

Zyklenerlegung von Permutationen

Korollar 1

Zyklenerlegung

Sei $n \in \mathbb{N}$. Jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ läßt sich **eindeutig** (bis auf die Reihenfolge) in **paarweise disjunkte** (und daher **paarweise kommutierende**) Zyklen $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$ zerlegen, d.h.:

- Jede Zahl $i \in [n]$ gehört genau einem Zyklus an,
- Jeder Zyklus π_i hat Länge ≥ 1 ,
- Zwei verschiedene Zyklen π_i, π_j haben kein Element gemeinsam,
- $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_m$.

$$n = 6, X_1 = \{3, 5, 6\}, \pi_1 = (356), X_2 = \{1, 2\}, \pi_2 = (12), \pi_3 = (4)$$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} = (356)(12)(4) = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Zyklenerlegung von Permutationen

Korollar 1

Zyklenerlegung

Sei $n \in \mathbb{N}$. Jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ lässt sich **eindeutig** (bis auf die Reihenfolge) in **paarweise disjunkte** (und daher **paarweise kommutierende**) Zyklen $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$ zerlegen, d.h.:

- Jede Zahl $i \in [n]$ gehört genau einem Zyklus an,
- Jeder Zyklus π_i hat Länge ≥ 1 ,
- Zwei verschiedene Zyklen π_i, π_j haben kein Element gemeinsam,
- $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_m$.

Definition: Zyklenerlegung

Die Zerlegung einer Permutation π in ihre Zyklen entsprechend Korollar nennen wir die **Zyklenerlegung** von π .

Wieviele Permutationen in \mathfrak{S}_n mit k Zyklen gibt es?

Notation: $c(n, k)$

$c(n, k)$ bezeichne die Anzahl aller Permutationen von $[n]$ mit k Zyklen.

$$c(n, k) = 0 \quad \text{für } k > n,$$

$$c(n, 0) = [n = 0], \quad (\text{Iversons Notation: } 1 \text{ wenn } n = 0 \text{ und } 0 \text{ andernfalls})$$

$$c(n, n) = 1,$$

$$c(n, 1) = (n - 1)!$$

$c(n, k)$: Rekursion

$$c(n, k) = c(n - 1, k - 1) + (n - 1)c(n - 1, k). \quad (1)$$

Beweis:

Die Menge **aller** Zyklenzerlegungen von $[n]$ mit k Zyklen zerfällt in zwei **disjunkte** Teilmengen:

- 1 Jene Zyklenzerlegungen, bei denen (n) einen eigenen Zyklus bildet (also einen Fixpunkt darstellt),
- 2 und jene Zyklenzerlegungen, bei denen (n) keinen eigenen Zyklus bildet.

1. Wir können den Zyklus (n) weglassen und erhalten eine Zyklenzerlegung von $[n - 1]$ in $(k - 1)$ Zyklen — die Anzahl ist $c(n - 1, k - 1)$.

$c(n, k)$: Rekursion

$$c(n, k) = c(n - 1, k - 1) + (n - 1)c(n - 1, k). \quad (1)$$

Beweis:

Die Menge **aller** Zyklenzerlegungen von $[n]$ mit k Zyklen zerfällt in zwei **disjunkte** Teilmengen:

- 1 Jene Zyklenzerlegungen, bei denen (n) einen eigenen Zyklus bildet (also einen Fixpunkt darstellt),
- 2 und jene Zyklenzerlegungen, bei denen (n) keinen eigenen Zyklus bildet.

1. Wir können den Zyklus (n) weglassen und erhalten eine Zyklenzerlegung von $[n - 1]$ in $(k - 1)$ Zyklen — die Anzahl ist $c(n - 1, k - 1)$.

2. Wir können das Element n aus seinem Zyklus entfernen: Übrig bleibt eine Zerlegung von $[n - 1]$ in k Zyklen — die Anzahl ist $c(n - 1, k)$; und aus **jeder** solchen Zyklenzerlegung können wir $(n - 1)$ verschiedene Zyklenzerlegungen von $[n]$ machen, indem wir das Element n hinter eines der vorhandenen $(n - 1)$ Elemente “dazustecken”. Insgesamt: Die Anzahl im zweiten Fall ist $(n - 1) \cdot c(n - 1, k)$. Daraus folgt (1), mit der Summenregel. ■

Erzeugende Funktion von \mathfrak{S}_n

Definition: Gewichtsfunktion ω auf \mathfrak{S}_n

Jeder Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ ordnen wir das Gewicht

$$\omega(\pi) := x^{\text{Anzahl der Zyklen von } \pi}$$

zu (d.h., eine Permutation mit k Zyklen erhält das Gewicht x^k)

Definition: Erzeugende Funktion \mathcal{GF} von \mathfrak{S}_n (in bezug auf das Gewicht ω)

$$\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) := \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \omega(\pi) \tag{2}$$

Es ist klar, daß $\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) = \sum_{k=0}^n c(n, k) x^k$

Erzeugende Funktion von \mathfrak{S}_n

Wenn wir beide Seiten der Rekursion (1),

$$c(n, k) = c(n-1, k-1) + (n-1)c(n-1, k),$$

mit x^k multiplizieren und über alle k von 0 bis n summieren, erhalten wir die Gleichung

$$\sum_{k=0}^n c(n, k) x^k = \mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) = (x + n - 1) \mathcal{GF}(\mathfrak{S}_{n-1}) = (x + n - 1) \sum_{k=0}^{n-1} c(n-1, k) x^k$$

Erzeugende Funktion von \mathfrak{S}_n

$$\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) = (x + n - 1) \mathcal{GF}(\mathfrak{S}_{n-1})$$

Wir lösen diese Rekursion durch **Iteration**: Mit der offensichtlichen **Anfangsbedingung** $\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_1) = x$ (oder $\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_0) = 1$) erhalten wir

$$\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) = (x + n - 1)(x + n - 2) \cdots x. \quad (3)$$

Notation: $x^{\bar{k}}$ und $x^{\underline{k}}$

$x \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$

$x^{\bar{k}} := x(x+1) \cdots (x+k-1) = \prod_{i=1}^k (x+i-1)$ **steigende Faktorielle**

$x^{\underline{k}} := x(x-1) \cdots (x-k+1) = \prod_{i=1}^k (x-i+1)$ **fallende Faktorielle**

Es gilt $x^{\bar{k}} = (-1)^k (-x)^{\underline{k}}$. Sei $x^{\bar{0}} = (-x)^{\underline{0}} = 1$.

Erzeugende Funktion von \mathfrak{S}_n

In der Basis $(x^n)_{n=0}^{\infty}$:

$$x(x+1)\cdots(x+n-1) = \sum_{k=0}^n c(n, k) x^k.$$

Wenn wir hier x durch $-x$ ersetzen und beide Seiten mit $(-1)^n$ multiplizieren, erhalten wir

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} c(n, k) x^k = x(x-1)\cdots(x-n+1) = x^n. \quad (4)$$

Definition: Stirling-Zahlen der ersten Art

Die Koeffizienten $(-1)^{n-k} c(n, k)$ werden **Stirling-Zahlen der ersten Art** genannt und meist mit $s_{n,k}$ bezeichnet.

Stirling–Zahlen der ersten bzw. der zweiten Art

$$x^n = \sum_{k=0}^n s_{n,k} x^k, \quad (5)$$

$$x^n = \sum_{k=0}^n S_{n,k} x^{\underline{k}}. \quad (6)$$

Die Stirling–Zahlen **zweiter Art** treten auf, wenn wir die Basis $(x^n)_{n=0}^{\infty}$ des Vektorraums aller Polynome in der Basis $(x^{\underline{n}})_{n=0}^{\infty}$ entwickeln, und die Stirling–Zahlen **erster Art** treten auf, wenn wir das Umgekehrte tun!

Basistransformation: die Koeffizientenmatrizen $(S_{n,k})_{n,k \geq 0}$ und $(s_{k,l})_{k,l \geq 0}$ sind invers.

Stirling-Zahlen der ersten bzw. der zweiten Art

Noch einmal: $x^n = \sum_{k=0}^n s_{n,k} x^k$, $x^n = \sum_{k=0}^n S_{n,k} x^{\underline{k}}$.

Dann gilt

$$x^n = \sum_{k=0}^n S_{n,k} \sum_{l=0}^k s_{k,l} x^l$$

und den Koeffizienten von x^l vergleichen:

$$\sum_{k=0}^n S_{n,k} s_{k,l} = [n = l].$$

Iversons Notation: $[n = l]$ ist gleich 1 wenn $n = l$ und 0 andernfalls.

Dann die Koeffizientenmatrizen $(S_{n,k})_{n,k \geq 0}$ und $(s_{k,l})_{k,l \geq 0}$ invers sind.

Inversionen von Permutationen

Definition: Inversion

Eine **Inversion einer Permutation** $\pi \in \mathfrak{S}_n$ ist ein Paar (i, j) mit $i < j$ und $\pi(i) > \pi(j)$.

Die Anzahl aller Inversionen von π wird mit **inv** π bezeichnet.

Die Inversionen von π sind die "Paare von Positionen, wo Zahlen in der falschen Reihenfolge erscheinen".

$$n = 5, \pi \in \mathfrak{S}_5$$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{"Positionen" } i \\ \text{"Zahlen" } \pi(i) \end{array} \quad \text{Inversionen: } (1, 2), (1, 3), (4, 5)$$

Erzeugende Funktion von \mathfrak{S}_n in bezug auf Inversionen

Definition: Gewichtsfunktion ω auf \mathfrak{S}_n (in bezug auf Inversionen)

Jeder Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ ordnen wir das Gewicht

$$\omega(\pi) := q^{\text{inv } \pi}$$

zu (d.h., eine Permutation mit k Inversionen erhält das Gewicht q^k)

Definition: Erzeugende Funktion \mathcal{GF} von \mathfrak{S}_n (in bezug auf das Gewicht ω)

$$\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) := \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} q^{\text{inv } \pi} \quad (7)$$

Erzeugende Funktion von \mathfrak{S}_n in bezug auf Inversionen

Definition: Gewichtsfunktion ω auf \mathfrak{S}_n (in bezug auf Inversionen)

Jeder Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ ordnen wir das Gewicht

$$\omega(\pi) := q^{\text{inv } \pi}$$

zu (d.h., eine Permutation mit k Inversionen erhält das Gewicht q^k)

Definition: Erzeugende Funktion \mathcal{GF} von \mathfrak{S}_n (in bezug auf das Gewicht ω)

$$\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) := \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} q^{\text{inv } \pi} \quad (7)$$

Es ist klar, daß $\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) = \sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} d(n, k) q^k$, un Polynom in q vom Grad $\binom{n}{2}$ ist, denn $\max_{\pi \in \mathfrak{S}_n} (\text{inv } \pi) = 1 + 2 + \dots + (n-1) = \binom{n}{2}$.

Erzeugende Funktion von \mathfrak{S}_n in bezug auf Inversionen

$\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n)$ in bezug auf Inversionen für $n = 2$ und $n = 3$

$$n = 2 : \quad \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_2} q^{\text{inv } \pi} = q^{\text{inv}(12)} + q^{\text{inv}(21)} = q^0 + q^1 = 1 + q$$

π	$\text{inv } \pi$	π	$\text{inv } \pi$
123	0	231	2
132	1	312	2
213	1	321	3

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_3} q^{\text{inv } \pi} = 1 + 2q + 2q^2 + q^3 = (1 + q)(1 + q + q^2)$$

Erzeugende Funktion von \mathfrak{S}_n in bezug auf Inversionen

Wir erraten:

$$\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} q^{\text{inv } \pi} = (1+q)(1+q+q^2) \cdots (1+q+\cdots+q^{n-1}) \quad (8)$$

Beweis: Induktion nach n . Es genügt die folgende **Rekursion** zu zeigen:

$$\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) = (q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1) \cdot \mathcal{GF}(\mathfrak{S}_{n-1}).$$

Dazu überlegen wir, daß das Element n in einer Permutation π genau dann $n - i$ zur Anzahl der Inversionen beiträgt, wenn es in π an Position i steht.

Erzeugende Funktion von \mathfrak{S}_n in bezug auf Inversionen

Wir erraten:

$$\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} q^{\text{inv } \pi} = (1+q)(1+q+q^2) \cdots (1+q+\cdots+q^{n-1}) \quad (8)$$

Beweis: Induktion nach n . Es genügt die folgende **Rekursion** zu zeigen:

$$\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) = (q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1) \cdot \mathcal{GF}(\mathfrak{S}_{n-1}).$$

Dazu überlegen wir, daß das Element n in einer Permutation π genau dann $n-i$ zur Anzahl der Inversionen beiträgt, wenn es in π an Position i steht.

Umgekehrt: Wenn wir in eine Permutation $\tau \in \mathfrak{S}_{n-1}$ das Element n an Stelle i ($i = 1, \dots, n$) einfügen, dann erhalten wir eine Permutation in \mathfrak{S}_n mit $\text{inv } \tau + n - i$ Inversionen, also mit dem Gewicht $q^{\text{inv } \tau} q^{n-i}$. Damit ist die Behauptung gezeigt. ■

Erzeugende Funktion von \mathfrak{S}_n in bezug auf Inversionen

Wir erraten:

$$\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} q^{\text{inv } \pi} = (1+q)(1+q+q^2) \cdots (1+q+\cdots+q^{n-1}) \quad (8)$$

Beweis: Induktion nach n . Es genügt die folgende **Rekursion** zu zeigen:

$$\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) = (q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1) \cdot \mathcal{GF}(\mathfrak{S}_{n-1}).$$

Dazu überlegen wir, daß das Element n in einer Permutation π genau dann $n-i$ zur Anzahl der Inversionen beiträgt, wenn es in π an Position i steht.

Umgekehrt: Wenn wir in eine Permutation $\tau \in \mathfrak{S}_{n-1}$ das Element n an Stelle i ($i = 1, \dots, n$) einfügen, dann erhalten wir eine Permutation in \mathfrak{S}_n mit $\text{inv } \tau + n - i$ Inversionen, also mit dem Gewicht $q^{\text{inv } \tau} q^{n-i}$. Damit ist die Behauptung gezeigt. ■

$$\text{Für } q = 1: \mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) = n!$$

Transpositionen in \mathfrak{S}_n

Definition: Transposition

Ein Zyklus einer Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ der Länge 2 heißt **Transposition**:
Eine Transposition **vertauscht** also genau zwei Elemente.

Jede Transposition $\tau = (i, j) \in \mathfrak{S}_n$ ist eine **Involution** (also eine selbstinverse Permutation) in \mathfrak{S}_n , d.h., $\tau^{-1} = \tau$.

Eine Transposition heißt **kanonisch**, wenn es eine Transposition der Form $(i, i + 1)$ ist, $i = 1, \dots, n - 1$, also wenn zwei **aufeinanderfolgende** Elemente vertauscht werden.

Transpositionen in \mathfrak{S}_n

Definition: Transposition

Ein Zyklus einer Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ der Länge 2 heißt **Transposition**: Eine Transposition **vertauscht** also genau zwei Elemente.

Jede Transposition $\tau = (i, j) \in \mathfrak{S}_n$ ist eine **Involution** (also eine selbstinverse Permutation) in \mathfrak{S}_n , d.h., $\tau^{-1} = \tau$.

Eine Transposition heißt **kanonisch**, wenn es eine Transposition der Form $(i, i + 1)$ ist, $i = 1, \dots, n - 1$, also wenn zwei **aufeinanderfolgende** Elemente vertauscht werden.

$n = 5$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

τ ist kanonisch, σ ist nicht kanonisch, π ist nicht eine Transposition.

Transpositionen in \mathfrak{S}_n

Bemerkung: “Rechtsmultiplikation” mit der kanonischen Permutation

Sei $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n$. Dann sieht man sofort

$$\pi \circ (i, i+1) = (\pi_i, \pi_{i+1}) \circ \pi,$$

d.h., die “Rechtsmultiplikation” mit der kanonischen Permutation $(i, i+1)$ bewirkt eine Vertauschung der **nebeneinander stehenden** Elemente (π_i, π_{i+1}) in der Permutation π . Daraus erkennt man sofort

$$\text{inv}(\pi \circ (i, i+1)) = \text{inv}(\pi) \pm 1. \quad (9)$$

Transpositionen in \mathfrak{S}_n

Bemerkung: “Rechtsmultiplikation” mit der kanonischen Permutation

Sei $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n$. Dann sieht man sofort

$$\pi \circ (i, i+1) = (\pi_i, \pi_{i+1}) \circ \pi,$$

d.h., die “Rechtsmultiplikation” mit der kanonischen Permutation $(i, i+1)$ bewirkt eine Vertauschung der **nebeneinander stehenden** Elemente (π_i, π_{i+1}) in der Permutation π . Daraus erkennt man sofort

$$\text{inv}(\pi \circ (i, i+1)) = \text{inv}(\pi) \pm 1. \quad (9)$$

$n = 4$, $\tau = (12)$, $(\pi_1\pi_2) = (32)$, $\text{inv}(\pi) = 3$, $\text{inv}(\pi \circ (i, i+1)) = 2$

$$\pi\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (\pi_1\pi_2)\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Produkt aus kanonischen Transpositionen

Proposition 1: Zerlegung als Produkt aus kanonischen Transpositionen

Jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ kann als Produkt von $\text{inv } \pi$ **kanonischen** Transpositionen geschrieben werden.

$\text{inv } \pi$ ist dabei die **minimale** Anzahl an kanonischen Transpositionen in einer solchen Produktdarstellung.

Produkt aus kanonischen Transpositionen

Proposition 1: Zerlegung als Produkt aus kanonischen Transpositionen

Jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ kann als Produkt von $\text{inv } \pi$ **kanonischen** Transpositionen geschrieben werden.

$\text{inv } \pi$ ist dabei die **minimale** Anzahl an kanonischen Transpositionen in einer solchen Produktdarstellung.

Beweis: Wir überlegen uns (anhand eines **Beispiels**), daß man jede Permutation π durch kanonische Transpositionen in die Identität “umformen” kann:

$$\epsilon = \pi \circ (i_1, i_1 + 1) \circ (i_2, i_2 + 1) \circ \cdots \circ (i_k, i_k + 1).$$

Dann folgt “rein algebraisch” (denn Transpositionen sind Involutionen):

$$\pi = (i_k, i_k + 1) \circ \cdots \circ (i_2, i_2 + 1) \circ (i_1, i_1 + 1).$$

Produkt aus kanonischen Transpositionen

Proposition 1: Zerlegung als Produkt aus kanonischen Transpositionen

Jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ kann als Produkt von $\text{inv } \pi$ **kanonischen** Transpositionen geschrieben werden.

$\text{inv } \pi$ ist dabei die **minimale** Anzahl an kanonischen Transpositionen in einer solchen Produktdarstellung.

Beweis: Wir überlegen uns (anhand eines **Beispiels**), daß man jede Permutation π durch kanonische Transpositionen in die Identität “umformen” kann:

$$\epsilon = \pi \circ (i_1, i_1 + 1) \circ (i_2, i_2 + 1) \circ \cdots \circ (i_k, i_k + 1).$$

Dann folgt “rein algebraisch” (denn Transpositionen sind Involutionen):

$$\pi = (i_k, i_k + 1) \circ \cdots \circ (i_2, i_2 + 1) \circ (i_1, i_1 + 1).$$

Gemäß (9) verändert **jede** solche Operation die Anzahl der Inversionen um ± 1 : Um auf $\text{inv } \epsilon = 0$ zu kommen, braucht man also **zumindest** $\text{inv } \pi$ Operationen.

Produkt aus kanonischen Transpositionen: Beispiele

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir bringen zunächst den Einser (in der unteren Zeile) “sukzessive nach vorne”; dazu sollten wir ihn zuerst mit dem Dreier vertauschen. Das kann durch Aufmultiplizieren mit einer geeigneten kanonischen Transposition von rechts erreicht werden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ (2, 3).$$

Dann sollten wir ihn mit dem Vierer vertauschen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ (1, 2).$$

Jetzt steht der Einser an der “richtigen” Stelle;

Produkt aus kanonischen Transpositionen: Beispiele

Wir machen mit dem Zweier weiter:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ (3, 4),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ (2, 3).$$

Zum Schluß kommt noch der Dreier nach vorne:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ (3, 4).$$

“Rein algebraisch” erhalten wir also:

$$(3, 4) \circ (2, 3) \circ (3, 4) \circ (1, 2) \circ (2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Produkt aus kanonischen Transpositionen: Schluss

Es ist klar, daß der hier skizzierte “Algorithmus” auch im allgemeinen funktioniert: Man bewegt der Reihe nach $1, 2, \dots, n - 1$ in die richtige Position. Offensichtlich senkt jeder dieser Schritte die Anzahl der Inversionen um 1, sodaß insgesamt genau $\text{inv } \pi$ Schritte benötigt werden.

Eine Darstellung als Produkt von kanonischen Transpositionen ist keineswegs eindeutig. Es gilt beispielsweise:

$$(1, 3) = (2, 3) (1, 2) (2, 3) = (1, 2) (2, 3) (1, 2).$$

Produkt aus Transpositionen: Anzahl der Faktoren

Korollar 2:

Anzahl der Faktoren

Sei $\pi \in \mathfrak{S}_n$. Die Anzahl der Faktoren in einer (beliebigen) Produktdarstellung von π durch **kanonische** Transpositionen ist **modulo 2** eindeutig (d.h., sie ist immer **entweder gerade oder ungerade**).

Produkt aus Transpositionen: Anzahl der Faktoren

Korollar 2:

Anzahl der Faktoren

Sei $\pi \in \mathfrak{S}_n$. Die Anzahl der Faktoren in einer (beliebigen) Produktdarstellung von π durch **kanonische** Transpositionen ist **modulo 2** eindeutig (d.h., sie ist immer **entweder gerade oder ungerade**).

Beweis: Betrachten wir zwei beliebige Darstellungen von $\pi \in \mathfrak{S}_n$ als Produkt von kanonischen Transpositionen

$$\pi = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_k = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_l.$$

Dann folgt

$$\tau_1 \tau_2 \cdots \tau_k \sigma_l \sigma_{l-1} \cdots \sigma_1 = \epsilon.$$

Gemäß (9) ist die Anzahl der Inversionen auf der linken Seite **modulo 2** gleich $k + l$, auf der rechten Seite aber einfach 0 (denn ϵ hat keine Inversionen). Somit erhalten wir $k + l \equiv 0 \pmod{2} \iff k \equiv l \pmod{2}$, wie behauptet. ■

Permutationen: Signum

Definition: Signum

Das **Vorzeichen** oder **Signum** einer Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ ist durch $(-1)^{\text{inv } \pi}$ definiert und wird mit **sgn** π bezeichnet.

π mit $\text{sgn } \pi = +1$ wird **gerade** Permutation genannt,

π mit $\text{sgn } \pi = -1$ wird **ungerade** Permutation genannt.

Permutationen: Signum

Definition: Signum

Das **Vorzeichen** oder **Signum** einer Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ ist durch $(-1)^{\text{inv } \pi}$ definiert und wird mit **sgn** π bezeichnet.

π mit $\text{sgn } \pi = +1$ wird **gerade** Permutation genannt,

π mit $\text{sgn } \pi = -1$ wird **ungerade** Permutation genannt.

Bemerkung: Zyklus als Produkt aus Transpositionen

Der Zyklus

$$(a_1 a_2 \dots a_{k-2} a_{k-1} a_k),$$

ist darstellbar durch das Produkt der $k - 1$ Transpositionen

$$(a_1, a_2) \cdot (a_2, a_3) \cdots (a_{k-2}, a_{k-1}) \cdot (a_{k-1}, a_k).$$

Permutationen: Signum

Proposition 2: Signum

Seien $\pi, \rho \in \mathfrak{S}_n$. Für das Signum gelten die folgenden Tatsachen:

- (1) $\operatorname{sgn}(\pi \circ \rho) = \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \operatorname{sgn}(\rho)$.
- (2) Sei $\tau = (i, j)$ ($i \neq j$) eine **beliebige** Transposition. Dann gilt $\operatorname{sgn} \tau = -1$.
- (3) Wenn $\pi = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_m$ eine Darstellung von π durch **beliebige** Transpositionen τ_i ist, dann gilt $\operatorname{sgn} \pi = (-1)^m$.
- (4) Für einen Zyklus $(a_1 a_2 \dots a_m)$ der Länge m gilt

$$\operatorname{sgn}(a_1 a_2 \dots a_m) = (-1)^{m-1}.$$

- (5) Sei $z(\pi)$ die Anzahl der Zyklen in der disjunkten Zyklenzerlegung von π . Dann gilt $\operatorname{sgn} \pi = (-1)^{n-z(\pi)}$.

Signum:

$$\operatorname{sgn}(\pi \circ \rho) = \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \operatorname{sgn}(\rho)$$

Beweis:

Für (1) schreiben wir π und ρ als Produkte von **kanonischen** Transpositionen gemäß Proposition 1 mit $k = \operatorname{inv} \pi$ und $l = \operatorname{inv} \tau$:

$$\pi = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k, \quad \rho = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_l.$$

Aus Korollar 2: $\operatorname{sgn} \pi = (-1)^k$, $\operatorname{sgn} \rho = (-1)^l$ und $\operatorname{sgn}(\pi \circ \rho) = (-1)^{k+l} = (\operatorname{sgn} \pi) \cdot (\operatorname{sgn} \rho)$.

Signum:

$$\operatorname{sgn}(i, j) = -1.$$

(2) Sei $\pi \in \mathfrak{S}_n$ beliebig: Wenn wir

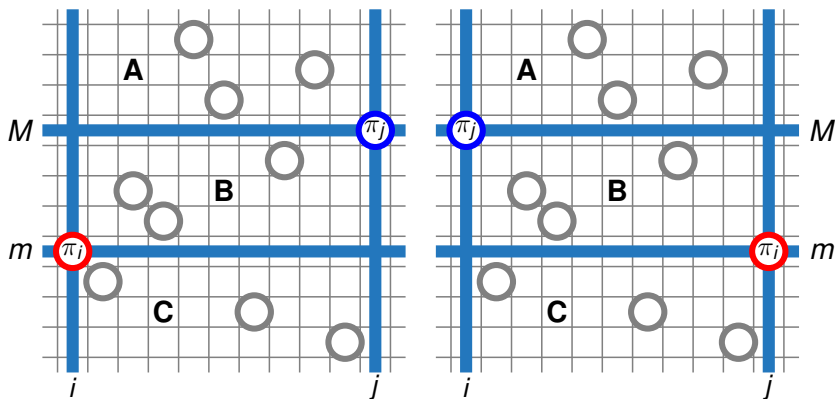
$$(-1)^{\operatorname{inv}(\pi \circ (i, j))} = -(-1)^{\operatorname{inv} \pi}$$

zeigen können, dann folgt die Behauptung aus (1).

Betrachten wir dazu den “Graphen” der Permutation π (also $\{(1, \pi_1), \dots, (n, \pi_n)\} \subset \mathbb{N}^2$) und überlegen, welchen Effekt die **Vertauschung der Elemente an den Positionen i und j** auf die Anzahl der Inversionen hat.

Graphik von $\pi : \{(1, \pi_1), \dots, (n, \pi_n)\} \subset \mathbb{N}^2$ (aus Skriptum)

Sei $i < j$, $S := \{\pi_{i+1}, \dots, \pi_{j-1}\}$, $m := \min(\pi_i, \pi_j)$, $M := \max(\pi_i, \pi_j)$. Sei $A := |\{x \in S : x > M\}|$, $C := |\{x \in S : x < m\}|$ und $B := |S| - A - C$.



Es ist klar:

- Für $\pi_i < \pi_j$ ist $\text{inv}(\pi \circ (i, j)) = \text{inv}(\pi) + 1 + 2B$,
- Für $\pi_i > \pi_j$ ist $\text{inv}(\pi \circ (i, j)) = \text{inv}(\pi) - 1 - 2B$.

Signum:

$$\operatorname{sgn} \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_m = (-1)^m.$$

(3) folgt sofort aus (1) und (2).

Zur Erinnerung:

(1): $\operatorname{sgn}(\pi \circ \rho) = \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \operatorname{sgn}(\rho)$

(2): $\operatorname{sgn}(i, j) = -1$

Signum:

$$\operatorname{sgn}(a_1 a_2 \dots a_m) = (-1)^{m-1}.$$

Für (4) schreiben wir den Zyklus gemäß Bemerkung als Produkt von $m - 1$ Transpositionen:

$$(a_1, a_2, \dots, a_m) = (a_1, a_2) (a_2, a_3) \cdots (a_{m-1}, a_m).$$

Aus (3) folgt nun $\operatorname{sgn}(a_1, a_2, \dots, a_m) = (-1)^{m-1}$.

Signum:

$$\operatorname{sgn} \pi = (-1)^{n-z(\pi)}$$

$z(\pi)$ ist die Anzahl der Zyklen in der disjunkten Zyklenzerlegung von π .

Für (5) betrachten wir die eindeutige Zerlegung von π in $k = z(\pi)$ disjunkte Zyklen z_i der Länge $\ell(z_i)$:

$$\pi = z_1 z_2 \cdots z_k.$$

Aus (1) und (4) zusammen mit $\sum_{i=1}^k \ell(z_i) = n$ folgt die Behauptung:

$$\operatorname{sgn} \pi = (-1)^{\ell(z_1)-1} (-1)^{\ell(z_2)-1} \cdots (-1)^{\ell(z_k)-1} = (-1)^{n-z(\pi)}.$$

