Diskrete Mathematik

Univ.-Prof. Dr. Goulnara ARZHANTSEVA

SS 2020

Beispiel aus der Zahlentheorie

Wir wollen in der Menge $[60] = \{1, 2, \ldots, 59, 60\}$ jene Zahlen bestimmen, die relativ prim zu 60 sind.

Dazu betrachten wir die Primfaktoren von 60 (das sind die Zahlen 2, 3 und 5) und bilden die Mengen der entsprechenden Vielfachen zwischen 1 und 60, also

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_2 &= \{2, 4, 6, \ldots, 58, 60\}\,, \\ \mathbf{M}_3 &= \{3, 6, 9 \ldots, 57, 60\}\,, \\ \mathbf{M}_5 &= \{5, 10, 15, \ldots, 55, 60\}\,. \end{aligned}$$

Die Menge S der gesuchten Zahlen ergibt sich dann als

$$\begin{aligned} S = [60] \setminus (\mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_3 \cup \mathbf{M}_5) = \\ \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59\}\,. \end{aligned}$$

Beispiel aus der Zahlentheorie

Wenn wir nur an der Kardinalität $|S| = 16$ von S interessiert sind, könnten wir wie folgt beginnen:

$$|S| = |[60] \setminus (\mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_3 \cup \mathbf{M}_5)| \stackrel{?}{=} 60 - |\mathbf{M}_2| - |\mathbf{M}_3| - |\mathbf{M}_5| .$$

Das Fragezeichen über dem zweiten Gleichheitszeichen deutet an, daß das so nicht stimmt: Denn für jeden Teiler d von 60 gilt

$$|\mathbf{M}_d| = 60/d,$$

und

$$60 - 60/2 - 60/3 - 60/5 = -2.$$

Der Fehler rührt daher, daß ja z.B. die Zahl 6 in $\mathbf{M}_2$ und $\mathbf{M}_3$ enthalten ist: Alle Zahlen in $\mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}_3 = \mathbf{M}_6$ (und ebenso alle Zahlen in $\mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}_5 = \mathbf{M}_{10}$ und in $\mathbf{M}_3 \cap \mathbf{M}_5 = \mathbf{M}_{15}$) sind also zweimal weggezählt worden.

Beispiel aus der Zahlentheorie

Wir müßten obiges daher wie folgt korrigieren:

$$
\begin{aligned}
|S| &\stackrel{?}{=} 60 - |\mathbf{M}_2| - |\mathbf{M}_3| - |\mathbf{M}_5| + |\mathbf{M}_6| + |\mathbf{M}_{10}| + |\mathbf{M}_{15}| \\
&= 60 - 60/2 - 60/3 - 60/5 + 60/6 + 60/10 + 60/15 = 18.
\end{aligned}
$$

Das ist noch immer falsch: Denn die Zahlen 30 und 60 sind ja ursprünglich dreimal weggezählt worden, nun aber dreimal wieder dazugezählt worden! Richtig lautet die Rechnung also:

$$
\begin{aligned}
|S| &= 60 - |\mathbf{M}_2| - |\mathbf{M}_3| - |\mathbf{M}_5| + |\mathbf{M}_6| + |\mathbf{M}_{10}| + |\mathbf{M}_{15}| - |\mathbf{M}_{30}| \\
&= 60 - 60/2 - 60/3 - 60/5 + 60/6 + 60/10 + 60/15 - 60/30 \\
&= 16.
\end{aligned}
$$

Die Anzahl der surjektiven Funktionen $|\mathrm{surj}\,(k, n)|$

$|\mathrm{surj}\,(k, n)|$ = die Anzahl aller Funktionen $|\mathrm{abb}\,(k, n)| = n^k$ minus die Anzahl der “nicht–surjektiven” Funktionen.

Die Anzahl der surjektiven Funktionen $|\mathrm{surj}(k, n)|$

$|\mathrm{surj}(k, n)|$ = die Anzahl aller Funktionen $|\mathrm{abb}(k, n)| = n^k$ minus die Anzahl der "nicht–surjektiven" Funktionen.

Eine "nicht–surjektive" Funktion nimmt (mindestens) ein Element $i \in [n]$ nicht als Wert an, und jede solche Funktion können wir als Element in $\mathrm{abb}([k], [n] \setminus \{i\})$ deuten.

Die Anzahl der surjektiven Funktionen $|\mathrm{surj}\,(k,n)|$

$|\mathrm{surj}\,(k,n)|$ = die Anzahl aller Funktionen $|\mathrm{abb}\,(k,n)| = n^k$ minus die Anzahl der "nicht–surjektiven" Funktionen.

Eine "nicht–surjektive" Funktion nimmt (mindestens) ein Element $i \in [n]$ nicht als Wert an, und jede solche Funktion können wir als Element in $\mathrm{abb}\,([k]\,,[n] \setminus \{i\})$ deuten.

Für die Anzahl solcher Funktionen gilt natürlich (unabhängig von i)

$$|\mathrm{abb}\,([k]\,,[n] \setminus \{i\})| = |\mathrm{abb}\,(k, n-1)| = (n-1)^k\,.$$

Dann gilt (?):

$$|\mathrm{surj}\,(k,n)| = n^k - \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{abb}\,([k]\,,[n] \setminus \{i\})| = n^k - n \cdot (n-1)^k\,.$$

Die Anzahl der surjektiven Funktionen $|\mathrm{surj}\,(k, n)|$

Aber wir haben Funktionen, die zwei verschiedene Elemente $\{i, j\} \subseteq [n]$ nicht als Wert annehmen, doppelt weggezählt. Dann gilt (?):

$$|\mathrm{surj}\,(k, n)| = n^k - \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{abb}\,([k]\,, [n] \setminus \{i\})| + \sum_{\{i,j\} \in [n]} |\mathrm{abb}\,([k]\,, [n] \setminus \{i, j\})|\,,$$

wobei

$$\sum_{\{i,j\} \in [n]} |\mathrm{abb}\,([k]\,, [n] \setminus \{i, j\})| = \binom{n}{2} \cdot (n-2)^k\,.$$

Aber wir haben Funktionen, die drei verschiedene Elemente $\{i, j, l\}$ nicht als Wert annehmen, dreimal dazuzählen (je einmal für $\{i, j\}$, $\{i, l\}$ und $\{j, l\}$) — diese wurden aber schon im ersten Schritt dreimal weggezählt (je einmal für i, j und l);

Die Anzahl der surjektiven Funktionen $|\mathrm{surj}\,(k, n)|$

Dann gilt (?):

$$|\mathrm{surj}\,(k, n)| = n^k - \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{abb}\,([k]\,, [n] \setminus \{i\})| + \sum_{\{i,j\} \in [n]} |\mathrm{abb}\,([k]\,, [n] \setminus \{i, j\})| -$$

$$\sum_{\{i,j,l\} \in [n]} |\mathrm{abb}\,([k]\,, [n] \setminus \{i, j, l\})|\,,$$

wobei

$$\sum_{\{i,j\} \in [n]} |\mathrm{abb}\,([k]\,, [n] \setminus \{i, j, l\})| = \binom{n}{3} \cdot (n-3)^k\,.$$

Die Anzahl der surjektiven Funktionen $|\mathrm{surj}\,(k, n)|$

sie sind also “netto” in

$$n^k - n \cdot (n-1)^k + \binom{n}{2} \cdot (n-2)^k$$

wieder vorhanden und müßten im dritten Schritt nach derselben Logik neuerlich weggezählt werden:

$$\binom{n}{0} n^k - \binom{n}{1} \cdot (n-1)^k + \binom{n}{2} \cdot (n-2)^k - \binom{n}{3} \cdot (n-3)^k\,, \text{ etc.}$$

Die Anzahl der surjektiven Funktionen $|\mathrm{surj}\,(k,n)|$

Vermutung: Die Anzahl der surjektiven Funktionen von $[k]$ nach $[n]$ ist für $k \geq n$

$$|\mathrm{surj}\,(k,n)| = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^k. \tag{1}$$

(Für $k < n$ ist die Anzahl natürlich 0.)
Wir wissen schon, daß

$$|\mathrm{surj}\,(k,n)| = n! \cdot S_{k,n}.$$

Die Anzahl der surjektiven Funktionen $|\mathrm{surj}\,(k,n)|$

Vermutung: Die Anzahl der surjektiven Funktionen von $[k]$ nach $[n]$ ist für $k \geq n$

$$|\mathrm{surj}\,(k,n)| = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^k. \tag{1}$$

(Für $k < n$ ist die Anzahl natürlich 0.)
Wir wissen schon, daß

$$|\mathrm{surj}\,(k,n)| = n! \cdot S_{k,n}.$$

Wenn wir k und n vertauschen, so folgt daraus eine Formel für die Stirling–Zahlen zweiter Art:

$$S_{n,k} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n. \tag{2}$$

Die Vermutung ist ein Sonderfall eines allgemeinen Prinzips.

Prinzip der Inklusion–Exklusion

Satz: Inklusion–Exklusion

Sei S eine Menge, sei $T_1, \ldots, T_m$ eine Familie von Teilmengen (nicht notwendig disjunkt!) von S. Dann gilt:

$$\left| S \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{m} T_i \right) \right| = |S| + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \sum_{\substack{A \subseteq [m] \\ |A| = k}} \left| \bigcap_{i \in A} T_i \right| . \tag{3}$$

Prinzip der Inklusion–Exklusion

Satz: Inklusion–Exklusion

Sei S eine Menge, sei $T_1, \ldots, T_m$ eine Familie von Teilmengen (nicht notwendig disjunkt!) von S. Dann gilt:

$$\left| S \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{m} T_i \right) \right| = |S| + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \sum_{\substack{A \subseteq [m] \\ |A|=k}} \left| \bigcap_{i \in A} T_i \right|. \tag{3}$$

Oder (die rechte Seite):

$$\begin{aligned}
&|S| \\
&- |T_1| - |T_2| - \cdots - |T_m| \quad \leftarrow k{=}1 \\
&+ |T_1 \cap T_2| + |T_1 \cap T_3| + \cdots + |T_1 \cap T_m| + |T_2 \cap T_3| + \cdots \quad \leftarrow k{=}2 \\
&- |T_1 \cap T_2 \cap T_3| - |T_1 \cap T_2 \cap T_4| - \cdots \quad \leftarrow k{=}3 \\
&+ |T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_4| + |T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_5| + \cdots \quad \leftarrow k{=}4 \qquad \cdots
\end{aligned}$$

Prinzip der Inklusion–Exklusion

Satz: Inklusion–Exklusion

Sei S eine Menge, sei $T_1, \ldots, T_m$ eine Familie von Teilmengen (nicht notwendig disjunkt!) von S. Dann gilt:

$$\left| S \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{m} T_i \right) \right| = |S| + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \sum_{\substack{A \subseteq [m] \\ |A| = k}} \left| \bigcap_{i \in A} T_i \right| . \tag{4}$$

Oder unter Verwendung der Summennotation:

$$|S| - \underbrace{\sum_{1 \leq i_1 \leq m} |T_{i_1}|}_{k=1} + \underbrace{\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} |T_{i_1} \cap T_{i_2}|}_{k=2} - \underbrace{\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq m} |T_{i_1} \cap T_{i_2} \cap T_{i_3}|}_{k=3} + \cdots - \cdots$$

Oder in Worten: Von der Kardinalität von S werden die Kardinalitäten der k–fachen Durchschnitte der Mengen T_i alternierend subtrahiert/addiert.

Prinzip der Inklusion–Exklusion

Beweis: Überlegen wir uns, wie oft ein Element $x \in S$ in der rechten Seite von (4) gezählt wird.

Es ist klar, daß jedes Element im Komplement $S \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{m} T_i\right)$ genau einmal (nämlich durch den ersten Summanden $|S|$) gezählt wird.

Sei nun ein x genau in den $k \geq 1$ Teilmengen $T_{i_1}, T_{i_2}, \ldots, T_{i_k}$ enthalten (also in keinem anderen T_j). Dann wird x durch den ersten Term $|S|$ einmal dazugezählt, dann k–mal abgezogen (je einmal für T_{i_1}, T_{i_2}, $\ldots$, T_{i_k}), dann $\binom{k}{2}$–mal dazugezählt (je einmal für $T_{i_1} \cap T_{i_2}$, $T_{i_1} \cap T_{i_3}$, $\ldots$, $T_{i_{m-1}} \cap T_{i_m}$), und so weiter. Insgesamt wird x also genau

$$1 - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \binom{k}{3} + - \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} = 0$$

mal gezählt. ■

Die Anzahl der surjektiven Funktionen $|\mathrm{surj}\,(k, n)|$

Vermutung: Die Anzahl der surjektiven Funktionen von $[k]$ nach $[n]$ ist für $k \geq n$

$$|\mathrm{surj}\,(k, n)| = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^k.$$

Beweis: Die Richtigkeit von (1) ergibt sich also aus dem Prinzip der Inklusion–Exklusion und der Beobachtung, daß die Durchschnitte von l verschiedenen Mengen $T_{i_j} = \mathrm{abb}\left([k], [n] \setminus \{i_j\}\right)$ immer Kardinalität $(n-l)^k$ haben; unabhängig von den konkreten Indizes $i_1, \ldots, i_l$. ∎