

| $\mathcal{O}$           | Kennzahl                         | Erzeugende Funktion                                                                                  |
|-------------------------|----------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Teilmengen von $[n]$    | die Kardinalität einer Teilmenge | $\mathcal{GF}(2^{[n]}) = \sum_{A \in 2^{[n]}} x^{ A }$                                               |
| Permutationen von $[n]$ | die Anzahl der Zyklen            | $\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} x^{\text{Anzahl der Zyklen von } \pi}$ |
| Permutationen von $[n]$ | die Anzahl aller Inversionen     | $\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} q^{\text{inv } \pi}$                   |

$$\mathcal{GF}(2^{[n]}) = \sum_{k=0}^n c_{n,k} x^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

$$\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) = \sum_{k=0}^n c(n,k) x^k = x(x+1) \dots (x+n-1)$$

$$\mathcal{GF}(\mathfrak{S}_n) = \sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} d(n,k) q^k = (1+q)(1+q+q^2) \dots (1+q+\dots+q^{n-1})$$

$$1) \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} z^n = z \cdot \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} z^{n-1} = z \cdot \sum_{n-1=1}^{\infty} F_{n-1} \cdot z^{n-1} = z \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} F_k \cdot z^k}_{F(z) - F_0}$$

$k := n-1$

$$= z(F(z) - F_0)$$

$$2) \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} z^n = z^2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} z^{n-2} = z^2 \cdot \sum_{n-2=0}^{\infty} F_{n-2} \cdot z^{n-2} = z^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} F_k \cdot z^k = z^2 \cdot F(z)$$

$k := n-2$

die Variablentransformation

Zur Erinnerung:  $aX^2 + bX + c = 0$ ,  $a \neq 0$

$$x_0 := \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_1 := \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{sind die Lösungen.}$$

Außerdem,  $x_0 + x_1 = -\frac{b}{a}$ ,  $x_0 \cdot x_1 = \frac{c}{a}$

Für ein Polynom  $1 - \beta z + \alpha z^2$ , betrachten wir ein Hilfspolynom  $x^2 - \beta x + \alpha$  mit den Nullstellen  $x_0$  und  $x_1$

so dass  $x_0 + x_1 = \beta$ ,  $x_0 \cdot x_1 = \alpha$ .

$$\begin{aligned} \text{Dann } (1 - x_0 z)(1 - x_1 z) &= 1 - x_1 z - x_0 z + x_1 x_0 z^2 = \\ &= 1 - z \underbrace{(x_0 + x_1)}_{\beta} + \underbrace{x_1 x_0}_{\alpha} z^2 = 1 - \beta z + \alpha z^2 \end{aligned}$$

z.B. für  $1 - z - z^2$ , betrachten wir  $x^2 - x - 1$  mit den Nullstellen  $x_0 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ ,  $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  so dass

$x_0 + x_1 = 1$ ,  $x_0 \cdot x_1 = -1$  und

$$(1 - x_0 z)(1 - x_1 z) = 1 - z \underbrace{(x_0 + x_1)}_1 + \underbrace{x_0 x_1}_{-1} z^2 = 1 - z - z^2$$

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{z_1 - z_0} \left( \frac{z_1}{1 - z_1 z} - \frac{z_0}{1 - z_0 z} \right) = \frac{1}{z_1 - z_0} \cdot \frac{z_1(1 - z_0 z) - z_0(1 - z_1 z)}{(1 - z_1 z)(1 - z_0 z)} \\ &= \frac{1}{z_1 - z_0} \cdot \frac{\cancel{z_1} - \cancel{z_0} - \cancel{z_1 z_0 z} + \cancel{z_0 z_1 z}}{(1 - z_1 z)(1 - z_0 z)} = \frac{1}{(1 - z_1 z)(1 - z_0 z)} \\ &= \frac{1}{1 - z - z^2} \end{aligned}$$



Seite 8 (Forts.)

Sei  $a_0, a_1, a_2, \dots$ ,  $a_n = a_0 \cdot q^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$   
 eine geometrische Folge. Dann  $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n = \frac{a_0}{1-q}$ .

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (z_1 z)^n = \frac{1}{1-z_1 z} \quad \text{und}$$

$$z_1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (z_1 z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} z_1^{n+1} z^n = \frac{z_1}{1-z_1 z}.$$

Seite 23

$$\sum_{i \geq 0} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} z^{i+k} = \sum_{n \geq 0} z^n \sum_{k \geq 0} \binom{n-k}{k}$$

$n := i+k$   
 die Variablentransformation

$$i \geq 0 \Rightarrow n-k \geq 0 \Rightarrow k \leq n \Rightarrow \sum_{k \geq 0} \binom{n-k}{k} \quad \text{nur für } k \leq n$$

$$k \leq i \Rightarrow k \leq n-k \Rightarrow \sum_{k \geq 0} \binom{n-k}{k} \quad \text{nur für } k \leq n-k \Rightarrow \boxed{k \leq \frac{n}{2}}$$

$\Rightarrow$  in der Formel  $F_n = \sum_{k \geq 0} \binom{n-k}{k}$  haben wir

$$\binom{n-k}{k} \neq 0 \quad \text{nur wenn } k \leq \frac{n}{2},$$

[ wie für die natürlichen Zahlen  $p, q \in \mathbb{N}$   
 $\binom{p}{q} \neq 0$  nur wenn  $q \leq p$  ]