

Seite 12

Die Ableitung der Funktion: $\left(\frac{1}{1-2z}\right)' = \frac{2}{(1-2z)^2}$

Die Ableitung der Potenzreihe:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1-2z}\right)' &= \left(\sum_{n \geq 0} 2^n z^n\right)' = (1 + 2z + 2^2 z^2 + 2^3 z^3 + 2^4 z^4 + \dots)' = \\ &= 2 + 2^2 \cdot z + 3 \cdot 2^3 \cdot z^2 + 4 \cdot 2^4 \cdot z^3 + \dots = 2(1 + 2z + 3 \cdot 2^2 z^2 + 4 \cdot 2^3 z^3 + \dots) = \\ &= 2 \left(\sum_{n \geq 0} (n+1) \cdot 2^n z^n\right), \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{2}{(1-2z)^2} = 2 \cdot \sum_{n \geq 0} (n+1) \cdot 2^n z^n \Rightarrow \frac{1}{(1-2z)^2} = \sum_{n \geq 0} (n+1) \cdot 2^n z^n$$

Im Allgemeinen gilt, $\left(\frac{\beta}{1+\alpha z}\right)^{(m)} = \frac{(-1)^m m! \alpha^m \beta}{(1+\alpha z)^{m+1}}, (\star)$
└ m-te Ableitung

$$\frac{\beta}{1+\alpha z} = \beta \sum_{n \geq 0} (-\alpha)^n z^n$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\beta}{1+\alpha z}\right)^{(m)} &= \left(\beta \sum_{n \geq 0} (-\alpha)^n z^n\right)^{(m)} = m! \beta (-\alpha)^m + \dots + \frac{h!}{(h-m)!} \beta (-\alpha)^n z^{n-m} + \\ &\quad + \dots + \frac{(n+m)!}{n!} \beta (-\alpha)^{n+m} z^n + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\star) \Rightarrow \frac{(-1)^m m! \alpha^m \beta}{(1+\alpha z)^{m+1}} &= \sum_{n \geq 0} \frac{(n+m)!}{n!} \beta (-\alpha)^{n+m} z^n \Rightarrow \\ \frac{\beta}{(1+\alpha z)^{m+1}} &= \beta \sum_{n \geq 0} \frac{(n+m)!}{n! m!} (-\alpha)^n z^n \end{aligned}$$

Wir wissen, dass

$$a(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n = R(z) + \frac{C_{1,1}}{(1-\alpha_1 z)} + \frac{C_{1,2}}{(1-\alpha_1 z)^2} + \dots + \frac{C_{1,e_1}}{(1-\alpha_1 z)^{e_1}} + \dots + \frac{C_{e,1}}{(1-\alpha_e z)} + \frac{C_{e,2}}{(1-\alpha_e z)^2} + \dots + \frac{C_{e,e_e}}{(1-\alpha_e z)^{e_e}}.$$

Außerdem:

$$\frac{\beta}{(1+\alpha z)^{m+1}} = \beta \sum_{n \geq 0} \frac{(n+m)!}{n! m!} (-\alpha)^n z^n.$$

Dann

$$\frac{C_{i,j}}{(1-\alpha_i z)^j} = C_{i,j} \sum_{n \geq 0} \frac{(n+j-1)!}{n! (j-1)!} (\alpha_i)^n z^n$$

$$i = 1, 2, \dots, l$$

$$j = 1, 2, \dots, e_i$$

Konstante
von $R(z)$

Für ein festes n :

$$a_n = r_n + C_{1,1} \frac{(n+1-1)!}{n! (1-1)!} \alpha_1^n + C_{1,2} \frac{(n+2-1)!}{n! (2-1)!} \alpha_1^n + \dots + C_{1,e_1} \frac{(n+e_1-1)!}{n! (e_1-1)!} \alpha_1^n + \dots + C_{e,e_e} \frac{(n+e_e-1)!}{n! (e_e-1)!} \alpha_e^n \quad (**)$$

Maximaler Grad, wenn $i=1$

Maximaler Grad, wenn $i=l$.

Außerdem:

$$\binom{n+e-1}{n} = \frac{(n+e-1)!}{n! (e-1)!} = (-1)^n \binom{-e}{n}$$

Seite 16, Kapitel 2

Seite 14 (Forts.)

$$(-1)^n \binom{-e}{n} = \frac{(n+e-1)(n+e-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n! (e-1)!} =$$

$$= \frac{\overbrace{(n+e-1)(n+e-2) \cdots (n+e-e+1)}^{(e-1) \text{ Faktoren}} \overbrace{(n+e-e)(n+e-e-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}^{n!}}{\underbrace{(e-1)!}_{\text{eine Konstante}} n!}$$

$\Rightarrow (-1)^n \binom{-e}{n}$ ist ein Polynom in n vom Grad $e-1$.

Die umgekehrte Behauptung ergibt sich aus der Form von a_n in (**).