Diskrete Mathematik

Univ.-Prof. Dr. Goulnara ARZHANTSEVA

SS 2020

universität wien

Der Satz von Menger: s–t–trennende Kantenmenge

Definition: s–t–trennende Kantenmenge

Sei $\mathbf{D}(V, E)$ ein Digraph, und seien s, t zwei verschiedene Knoten in $\mathbf{D}$. Dann heißt eine Teilmenge $C \subseteq E$ von Kanten mit der Eigenschaft, daß jeder Weg von s nach t (mindestens) eine Kante aus C enthält, eine s–t–trennende Kantenmenge.

Satz von Menger

Satz von Menger

Sei **D** ein Digraph und seien s, t zwei verschiedene Knoten in **D**.

Dann ist die maximale Anzahl von paarweise kantendisjunkten Wegen (d.h., keine zwei Wege haben eine Kante gemeinsam) von s nach t gleich der minimalen Kardinalität einer s–t–trennenden Kantenmenge.

Satz von Menger: Beweis

Beweis: Wir machen aus dem Digraphen ein Netzwerk, indem wir s und t als Quelle und Senke auffassen und für die Kanten die ganzzahlige Kapazitätsfunktion $\mathbf{c} \equiv 1$ wählen.

Eine s–t–trennende Kantenmenge ist dann ein Schnitt in diesem Netzwerk, und die Kapazität eines solchen Schnittes ist gleich seiner Kardinalität. Sei m also die Kapazität eines minimalen Schnittes = die minimale Anzahl einer s–t–trennenden Kantenmenge.

Es gibt also einen maximalen Fluß f der Stärke m in diesem Netzwerk. Der Fluß f ist ganzzahlig (nach ‘ganzzahliger Fluß’-Lemma), er nimmt also nur die Werte 0 oder 1 an[1].

---

[1] Wenn wir f als charakteristische Funktion deuten, dann entspricht er einfach einer Teilmenge von Kanten (nämlich jenen mit $f(e) = 1$).

Satz von Menger: Beweis

Wenn es aber einen Fluß der Stärke m gibt, dann gibt es auch m kantendisjunkte Wege von s nach t, die nur Kanten e mit $f(e) = 1$ benutzen: Dies zeigen wir mit Induktion nach m.

Für $m = 0$ ist die Behauptung klar.

Für den Schritt $m - 1$ auf m konstruieren wir mithilfe von f zunächst einen Weg von s nach t:

Satz von Menger: Beweis

Wenn es aber einen Fluß der Stärke m gibt, dann gibt es auch m kantendisjunkte Wege von s nach t, die nur Kanten e mit $f(e) = 1$ benutzen: Dies zeigen wir mit Induktion nach m.

Für $m = 0$ ist die Behauptung klar.

Für den Schritt $m - 1$ auf m konstruieren wir mithilfe von f zunächst einen Weg von s nach t:

Dazu starten wir in s, verwenden nur Kanten e mit $f(e) = 1$, ohne jemals eine Kante zweimal zu benutzen, und gelangen so schließlich nach t. Damit haben wir zunächst eine Wanderung erhalten, in der Knoten wiederholt auftreten könnten: Zwischen je zwei wiederholten Knoten schneiden wir die dazwischenliegende geschlossene Wanderung heraus und erhalten so schließlich einen Weg p.

Satz von Menger: Beweis

Für alle Kanten von p reduzieren wir den Fluß um 1, damit reduziert sich die Stärke des verbleibenden Flusses auf $m - 1$. Nach Induktion finden wir nun $m - 1$ kantendisjunkte Wege, und der Weg p hat nach Konstruktion keine Kante mit diesen Wegen gemeinsam. ■

Matching, Edge–Cover, bipartiter Graph

Definition: Matching, Edge–Cover, bipartiter Graph

Sei **G** (V, E) ein Graph. Ein Matching in **G** ist eine Familie von paarweise disjunkten Kanten (d.h., keine zwei Kanten im Matching haben einen Knoten gemeinsam).

Ein Edge–Cover (eine Kantenüberdeckung) in **G** ist eine Menge von Knoten mit der Eigenschaft, daß jede Kante in **G** einen Knoten aus dem Edge–Cover enthält.

Ein Graph **G** (V, E) heißt bipartiter Graph, wenn seine Knotenmenge in zwei disjunkte Teilmengen A und B zerfällt (eine sogenannte Bipartition: $V = A \dot\cup B$, also $V = A \cup B$ und $A \cap B = \emptyset$), sodaß jede Kante einen Knoten aus A und einen Knoten aus B enthält.

Satz von König

Satz von König

Sei **G** $(A \dot{\cup} B, E)$ ein bipartiter Graph. Die maximale Kardinalität eines Matchings in **G** ist gleich der minimalen Kardinalität eines Edge–Cover in **G**.

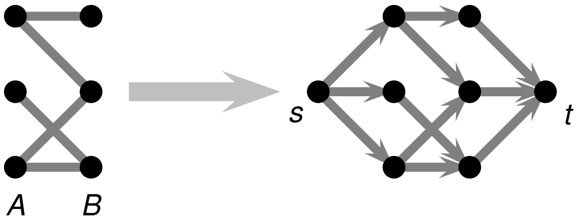
Satz von König: Beweis

Beweis: Wir konstruieren aus **G** einen Digraphen **D**: Die Knoten von **D** seien $A \cup B \cup \{s, t\}$, und die gerichteten Kanten von **D** seien

- alle Paare (s, a) für $a \in A$,
- alle Paare (a, b) mit $\{a, b\} \in E$, $a \in A$ und $b \in B$,
- alle Paare (b, t) für $b \in B$.

Jeder Weg in **D** von s nach t ist von der Form (s, a, b, t), wobei $a \in A$, $b \in B$ und $\{a, b\} \in E$. Daher entspricht eine Familie von kantendisjunkten Wegen (s, a_i, b_i, t) in **D** eindeutig einem Matching in **G**, das aus den Kanten $\{a_i, b_i\}$ besteht.

Satz von König: Beweis (aus Skriptum)



Satz von König: Beweis

Jedem Edge–Cover S in **G** entspricht eine s–t–trennende Kantenmenge in **D**, die aus den Kanten (s, a) für $a \in A \cap S$ und aus den Kanten (b, t) für $b \in B \cap S$ besteht, und umgekehrt entspricht jeder s–t–trennenden Kantenmenge, die nur Kanten enthält, die entweder mit s oder mit t inzident sind, ein Edge–Cover.

Es kann zwar klarerweise noch andere s–t–trennende Kantenmenge in **D** geben, aber keine davon kann weniger Kanten enthalten als eine minimale s–t–trennende Kantenmenge von obigem Typ (denn wenn eine s–t–trennende Kantenmenge die Kante (a, b) enthält, können wir sie durch (s, a) ersetzen).

Die Behauptung folgt also aus dem Satz von Menger. ■

Repräsentantensystem

Definition: Repräsentantensystem

Seien $A_1, \ldots, A_n$ Mengen. Ein Repräsentantensystem von $A_1, \ldots, A_n$ ist ein n–Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ mit den Eigenschaften

- $x_i \in A_i$ für $i = 1, \ldots, n$,
- $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$.

Satz von Hall

Satz von Hall — **Heiratssatz**

Seien $A_1, \ldots, A_n$ endliche Mengen. Es existiert genau dann ein Repräsentantensystem von $A_1, \ldots, A_n$, wenn für alle Indexmengen $J \subseteq [n]$ gilt:

$$\left| \bigcup_{j \in J} A_j \right| \geq |J| .$$

Satz von Hall: Beweis

Beweis: Die Notwendigkeit der Bedingung ist klar — in der anschaulichen Interpretation: Jede Menge J von Frauen muß insgesamt zumindest $|J|$ Männer als heiratsfähig erachten, sonst kann es keine n–fache Heirat geben.

Wir konstruieren einen bipartiten Graphen **G**, dessen Knotenmenge V in A und B zerfällt, wobei $B = [n]$ und $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, und dessen Kanten Knoten $i \in A$ und $j \in B$ genau dann verbinden, wenn $i \in A_j$.

Ein Matching in **G** ist eine Menge paarweise disjunkter Kanten $\{i, j\}$, d.h., jeder Knoten i liegt in A_j, und die Knoten i sind alle verschieden. Ein Repräsentantensystem entspricht also einem Matching der Größe n in **G**.

Satz von Hall: Beweis

Die Menge B ist (natürlich) ein Edge–Cover mit $|B| = n$. Wir wollen zeigen: Jedes Edge–Cover S hat mindestens n Elemente.

Satz von Hall: Beweis

Die Menge B ist (natürlich) ein Edge–Cover mit $|B| = n$. Wir wollen zeigen: Jedes Edge–Cover S hat mindestens n Elemente.

Sei also S irgendein Edge–Cover; und sei $J := B \setminus S$. Jeder Knoten in $A(J) := \bigcup_{j \in J} A_j$ ist mit einem Knoten von J durch eine Kante verbunden, daher muß $A(J) \subseteq S$ gelten (sonst wäre S ja kein Edge–Cover). Daher gilt nach Voraussetzung:

$$|S| \geq |B| - |J| + \underbrace{|A(J)|}_{\geq |J|} \geq n.$$

Die Behauptung folgt also aus dem Satz von König. ∎

Einbettung von Graphen

Definition: Einbettung von G in M

Sei M eine Mannigfaltigkeit[2] und **G** ein Graph. Eine Abbildung μ, die jedem Knoten v injektiv einen Punkt $\mu(v)$ in M zurordnet, und jeder Kante $e = \{v, w\}$ eine Kurve $\gamma : [0, 1] \to M$ mit $\gamma(0) = \mu(v)$, $\gamma(1) = \mu(w)$, sodaß die zwei verschiedenen Kanten e_1, e_2 zugeordneten Kurven γ_1, γ_2 höchstens Anfangs– oder Endpunkte gemeinsam haben, heißt eine Einbettung von **G** in M.

Eine Kurve ist eine stückweise stetig differenzierbare Abbildung von $[0, 1] \to M$.

---

[2] Ein Begriff der Differentialgeometrie: Für unsere Zwecke brauchen wir nur die Ebene $\mathbb{R}^2$, den Raum $\mathbb{R}^3$ sowie die Oberfläche einer Kugel im Raum (Sphäre) und die Oberfläche eines Fahrradschlauchs (Torus).

Einbettung in $\mathbb{R}^3$

Proposition: Einbettung in $\mathbb{R}^3$

Jeder Graph $\mathbf{G}$ kann in $\mathbb{R}^3$ eingebettet werden.

Einbettung in $\mathbb{R}^3$

Proposition: Einbettung in $\mathbb{R}^3$

Jeder Graph **G** kann in $\mathbb{R}^3$ eingebettet werden.

Beweis:

Wir betrachen eine beliebige Gerade g in $\mathbb{R}^3$ und stellen die Knoten von **G** als verschiedene Punkte auf g dar. Für jede Kante wählen wir eine Ebene e, die durch g geht (die Ebenen sollen paarweise verschieden sein), und stellen die Kante durch einen Halbkreis in der Ebene dar. ■

Planare Graphen

Definition: planarer Graph

Ein Graph **G**, der in die Ebene $\mathbb{R}^2$ eingebettet werden kann, heißt planarer Graph.

Planare Graphen

Definition: planarer Graph

Ein Graph **G**, der in die Ebene $\mathbb{R}^2$ eingebettet werden kann, heißt planarer Graph.

Einbettung in die Ebene ist übrigens äquivalent mit Einbettung in die Sphäre (Kugeloberfläche)

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\},$$

Denn die stereographische Projektion liefert eine differenzierbare Bijektion zwischen der Sphäre ohne den "Nordpol" $(0, 0, 1)$ und dem $\mathbb{R}^2$.

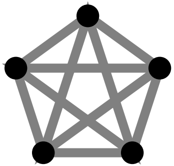
Vollständige bipartite Graph

Definition: Vollständige bipartite Graph

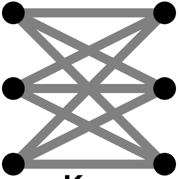
Sei $A \dot{\cup} B$ eine Bipartition von V mit $|A| = n$, $|B| = m$. Der vollständige bipartite Graph $\mathbf{K}_{n,m}$ ist der einfache bipartite Graph auf $V = A \dot{\cup} B$, der dadurch definiert ist, daß er alle Kanten besitzt, die möglich sind; es gilt also $E(\mathbf{K}_{n,m}) = \{\{a, b\} : a \in A, b \in B\}$.

Beispiel: Vollständigen Graphen (aus Skriptum)

Nach ein bißchen Herumprobieren hat man sich schnell überzeugt: Der vollständige Graph $\mathbf{K}_5$ und der vollständige bipartite Graph $\mathbf{K}_{3,3}$ sind nicht planar (siehe dazu auch Korollar unten).



$\mathbf{K}_5$



$\mathbf{K}_{3,3}$

Unterteilung

Definition: Unterteilung

Wenn man in einem Graphen **G** beliebig oft Kanten durch einen neuen Knoten unterteilt (d.h., aus der ursprünglichen Kante $\{v_1, v_2\}$ werden zwei neue $\{v_1, v_{\text{neu}}\}$, $\{v_{\text{neu}}, v_2\}$; alles andre bleibt unverändert), so nennt man das Ergebnis eine Unterteilung (englisch: Subdivision) von **G**.

Klarerweise ist jede Unterteilung eines Graphen **G** genau dann planar, wenn **G** selbst planar ist.

Satz von Kuratowski

Satz von Kuratowski

Ein Graph ist genau dann planar ist, wenn er keine Unterteilung von $\mathbf{K}_5$ oder $\mathbf{K}_{3,3}$ als Teilgraph hat.

Planare Graphen: Fläche

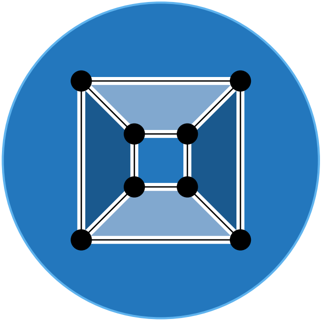
Definition: Fläche

Sei **G** ein zusammenhängender planarer Graph mit einer Einbettung μ in die Ebene $\mathbb{R}^2$:

Wenn diese Einbettung aus der Ebene entfernt wird (d.h., man betrachtet $\mathbb{R}^2 \setminus \mu(\mathbf{G})$), bleibt eine endliche Menge von zusammenhängenden "Stücken" über; eines davon ist unbeschränkt, alle anderen sind topologisch äquivalent zu einer Kreisscheibe: Diese "Stücke" werden Flächen genannt.

Beispiel: Flächen (aus Skriptum)

Die folgende Graphik zeigt die Einbettung eines Graphs mit 8 Knoten und 12 Kanten; die Einbettung hat 6 Flächen (die unbeschränkte Fläche ist “alles außerhalb des äußeren Quadrats”).



Eulerscher Polyedersatz

Eulerscher Polyedersatz

Sei **G** (V, E) ein zusammenhängender planarer Graph, und sei eine Einbettung von **G** in die Ebene mit genau F Flächen gegeben. Dann gilt:

$$|V| - |E| + F = 2. \tag{1}$$

Eulerscher Polyedersatz: Beweis

Beweis: Wir zeigen die Behauptung mit Induktion nach $n := |E|$. Ein zusammenhängender Graph mit $n = 0$ Kanten hat 1 Knoten und 1 Fläche, die Aussage ist also für $n = 0$ richtig.

Eulerscher Polyedersatz: Beweis

Beweis: Wir zeigen die Behauptung mit Induktion nach $n := |E|$. Ein zusammenhängender Graph mit $n = 0$ Kanten hat 1 Knoten und 1 Fläche, die Aussage ist also für $n = 0$ richtig.

Beim Induktionsschritt $(n - 1) \to n$ unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1: Es gibt eine Kante e, sodaß der Graph $\mathbf{G} - \mathbf{e}$ noch immer zusammenhängend ist. Dann hat $\mathbf{G} - \mathbf{e}$ noch immer $|V|$ Knoten, aber um eine Kante weniger (also $n - 1$ Kanten) und um eine Fläche weniger (weil die beiden Flächen "links und rechts" von e zu einer Fläche verschmolzen sind) als $\mathbf{G}$.

Fall 2: Wenn es keine solche Kante gibt, ist $\mathbf{G}$ ein Baum, hat also $|E| + 1$ Knoten und eine Fläche. ■

$\mathbf{K}_5$ und $\mathbf{K}_{3,3}$ sind nicht planar

Korollar: $\mathbf{K}_5$ und $\mathbf{K}_{3,3}$

Die Graphen $\mathbf{K}_5$ und $\mathbf{K}_{3,3}$ sind nicht planar.

$\mathbf{K}_5$ ist nicht planar

Beweis: $\mathbf{K}_5$ hat 5 Knoten und 10 Kanten, eine Einbettung in die Ebene müßte nach (1) also 7 Flächen haben.

Jede Fläche wird aber von mindestens 3 Kanten begrenzt (denn wenn eine Fläche nur von einer bzw. nur von zwei Kanten begrenzt würde, hätten wir ja eine Schlinge bzw. eine mehrfache Kante), während jede Kante höchstens 2 Flächen begrenzt. Doppelte Abzählung[3] liefert für die Anzahl F der Flächen daher

$$3F \leq 2\,|E| \implies F \leq \frac{10 \times 2}{3} = 6\frac{2}{3},$$

ein Widerspruch.

[3] $\sum_F |\text{Kanten, die } F \text{ begrenzen}| = \sum_E |\text{Flächen, die } E \text{ begrenzt}|$.

$\mathbf{K}_{3,3}$ ist nicht planar

$\mathbf{K}_{3,3}$ hat 6 Knoten und 9 Kanten, also müßte eine Einbettung in die Ebene nach (1) 5 Flächen haben.

Hier wird aber jede Fläche von mindestens 4 Kanten begrenzt, denn in einem bipartiten Graphen gibt es keine geschlossene Wanderung ungerader Länge. Mit doppelter Abzählung wie zuvor erhalten wir also für die Anzahl F der Flächen

$$4F \leq 2\,|E| \implies F \leq \frac{9 \times 2}{4} = 4\frac{1}{2},$$

ein Widerspruch. ■

Überblick: Vorlesung

Einführung in die Grundbegriffe der Diskreten Mathematik

1. Einfache und abzählende Kombinatorik: Stichproben, Permutationen, Partitionen
2. Erzeugende Funktionen, Lösen von Rekursionen
3. Das Prinzip der Inklusion und Exklusion, Suchen und Sortieren
4. Graphen und Netzwerke