Diskrete Mathematik

Univ.-Prof. Dr. Goulnara ARZHANTSEVA

SS 2020

Überblick: Vorlesung

Einführung in die Grundbegriffe der Diskreten Mathematik

1. Einfache und abzählende Kombinatorik: Stichproben, Permutationen, Partitionen
2. Erzeugende Funktionen, Lösen von Rekursionen
3. Das Prinzip der Inklusion und Exklusion, Suchen und Sortieren
4. Graphen und Netzwerke

Algorithmus

Ein Algorithmus ist ein standardisierter Ablauf. Mit ihm werden verschiedene Anweisungen in einer bestimmten, festgelegten Reihenfolge nacheinander durchgeführt.

Beispiel: PageRank

Suchmaschinen benutzen Algorithmen also, um aus vielen Parametern eine Rangierung einer Website zu berechnen. Zum Beispiel ist der PageRank von Google ein Algorithmus.

Algorithmus: Effizienzkriterium

Wir werden uns im folgenden nur mit dem “Effizienzkriterium Geschwindigkeit” befassen. Dabei kann man untersuchen,

- wie lange der Algorithmus im schlechtest möglichen Fall dauert (englisch: Worst case analysis),
- oder wie lange der Algorithmus im Durchschnitt dauert (englisch: Average case analysis).

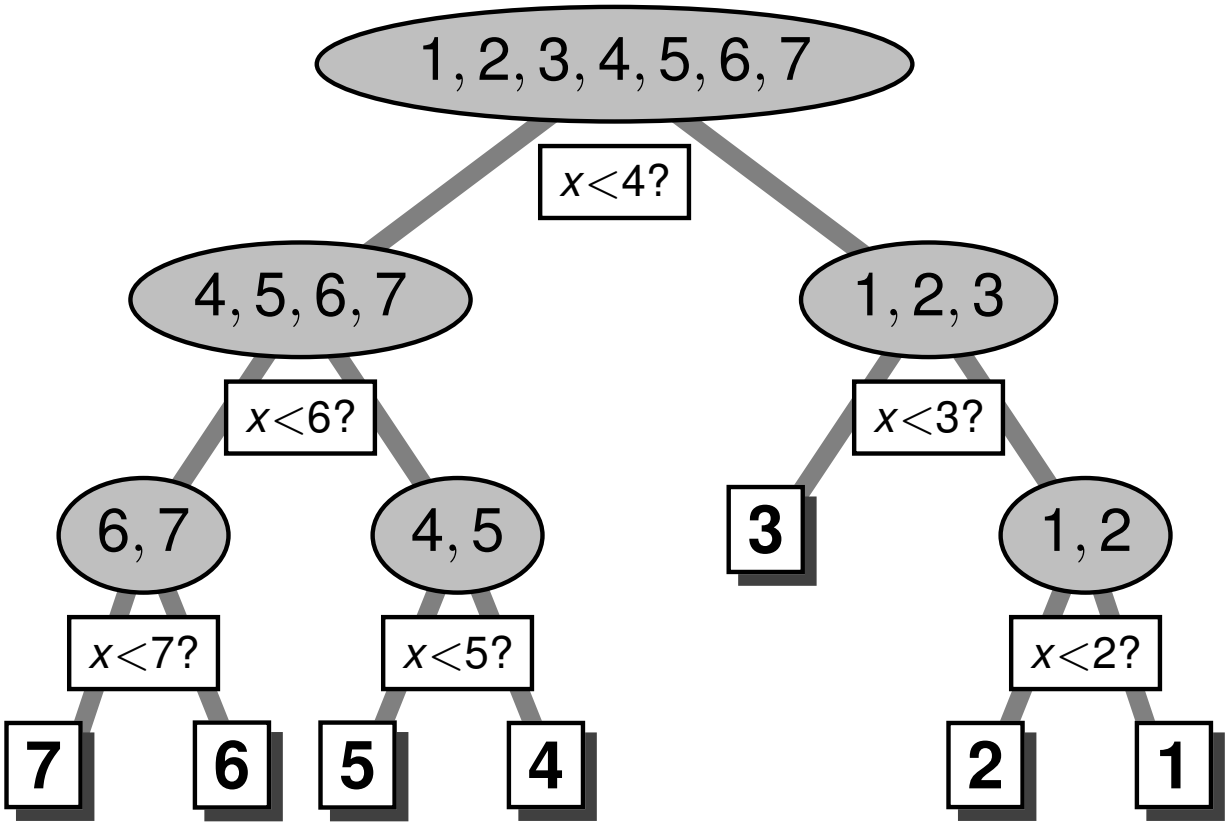
Algorithmus: Beispiel

Sei der Suchbereich $S = [7]$ gegeben.

Die Aufgabe lautet, eine unbekannte Zahl $x \in S$ durch (möglichst wenige) Fragen des Typs "$x < i$?" für irgendein $i \in [7]$ zu erraten.

Einen Algorithmus zur Bestimmung der gesuchten Zahl x kann man sehr einfach durch einen Entscheidungsbaum beschreiben:

Beispiel: Entscheidungsbaum (aus Skriptum)



Im schlechtesten Fall (Worst case) führt dieser Algorithmus in 3 Schritten zum Ziel (im besten Fall braucht man 2 Schritte), und im Durchschnitt (Average case) braucht man $\frac{1 \cdot 2 + 6 \cdot 3}{7} = \frac{20}{7}$ Schritte.

Beispiel: Entscheidungsbaum

Unser Beispiel zeigt zweierlei:

- Ein (Such–)Algorithmus läßt sich zweckmäßig durch einen (Entscheidungs–)Baum beschreiben,
- Die Effizienz eines (Such–)Algorithmus kann man durch Analyse des entsprechenden (Entscheidungs–)Baumes ermitteln.

Wurzelbaum

Definition: Wurzelbaum

Ein Wurzelbaum ist ein Baum mit einem ausgezeichneten Knoten, der sogenannten Wurzel.

In einem Wurzelbaum gibt es eine implizite Orientierung der Kanten "von der Wurzel weg", in folgendem Sinn:

Sei w die Wurzel und sei $e = \{v_1, v_2\}$ eine Kante. Wenn die Länge des Weges von w nach v_1 k ist, dann ist die Länge des Weges von w nach v_2 $k \pm 1$ — o.B.d.A. nehmen wir $k + 1$ an und orientieren die Kante dann: $\vec{e} := (v_1, v_2)$.

Wurzelbaum

Definition: Wurzelbaum

Ein Wurzelbaum ist ein Baum mit einem ausgezeichneten Knoten, der sogenannten Wurzel.

In einem Wurzelbaum gibt es eine implizite Orientierung der Kanten "von der Wurzel weg", in folgendem Sinn:

Sei w die Wurzel und sei $e = \{v_1, v_2\}$ eine Kante. Wenn die Länge des Weges von w nach v_1 k ist, dann ist die Länge des Weges von w nach v_2 $k \pm 1$ — o.B.d.A. nehmen wir $k + 1$ an und orientieren die Kante dann: $\vec{e} := (v_1, v_2)$.

In einem Entscheidungsbaum ist die Wurzel der Knoten "ganz oben", von dem aus sich alles verzweigt.

Wurzelbaum

Definition: inneren Knoten und Blätter

In einem Wurzelbaum (mit der impliziten Orientierung) unterscheiden wir dann die sogenannten

- inneren Knoten, die Ausgangsgrad > 0 haben,
- und die Blätter (manchmal auch Endknoten oder äußere Knoten genannt), die Ausgangsgrad = 0 haben.

Wurzelbaum

Definition: inneren Knoten und Blätter

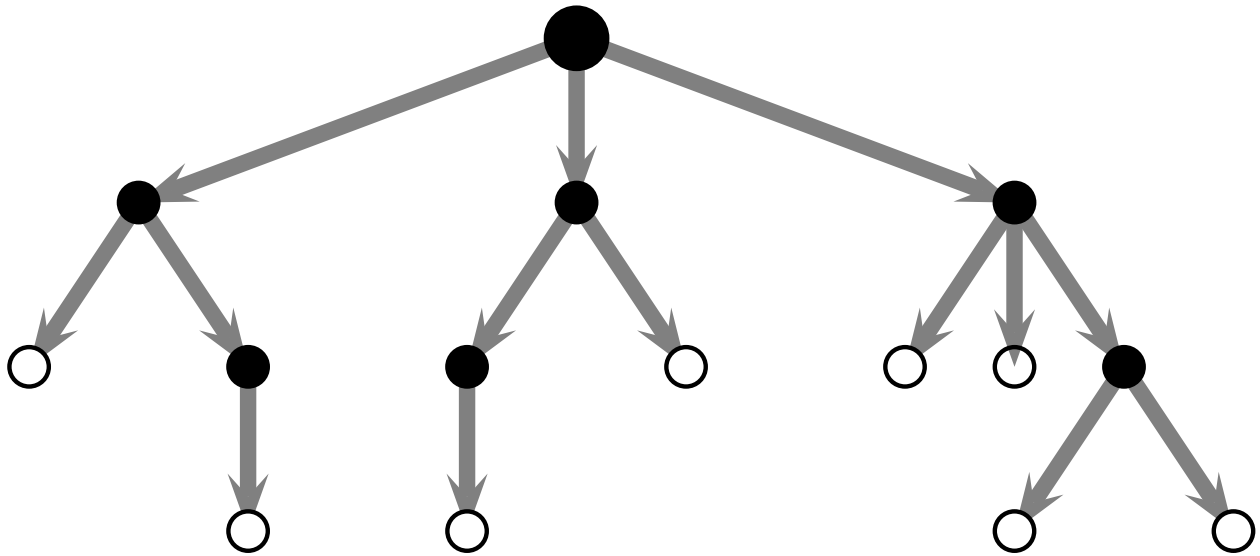
In einem Wurzelbaum (mit der impliziten Orientierung) unterscheiden wir dann die sogenannten

- inneren Knoten, die Ausgangsgrad > 0 haben,
- und die Blätter (manchmal auch Endknoten oder äußere Knoten genannt), die Ausgangsgrad = 0 haben.

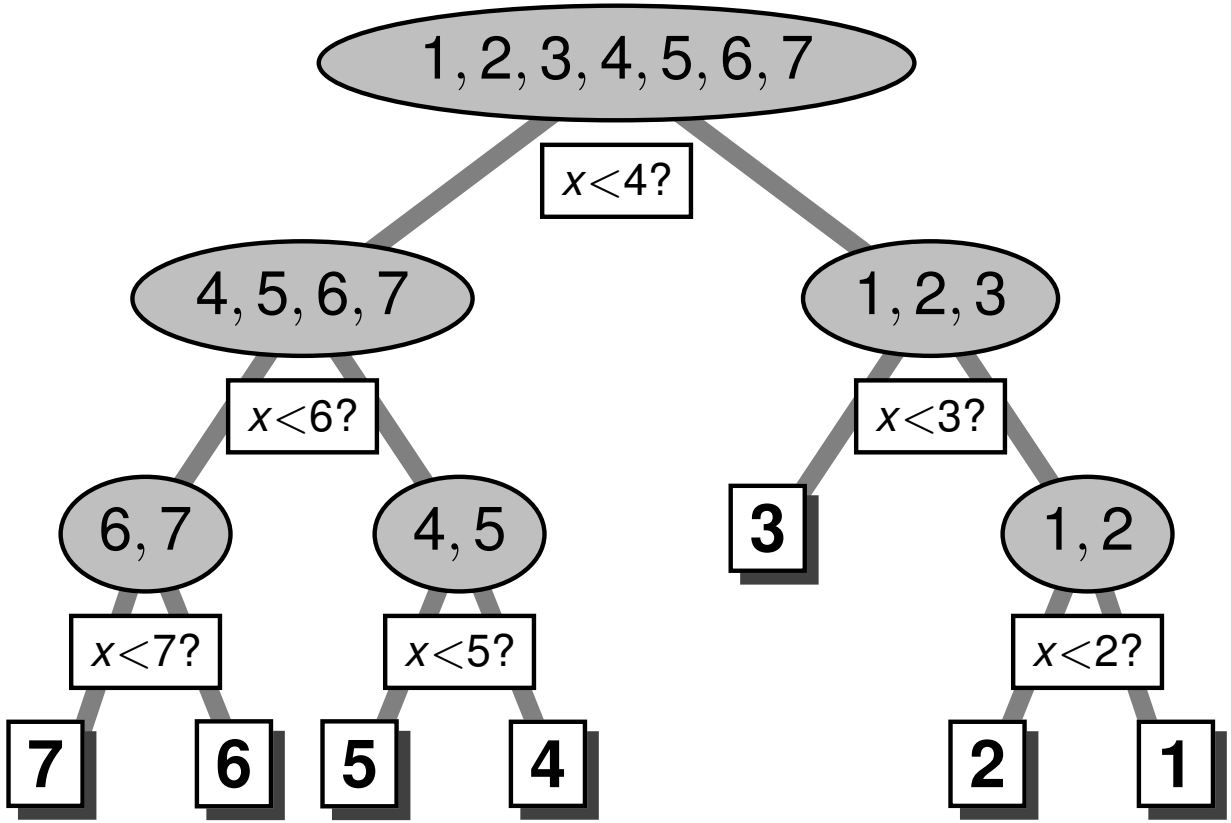
Die Wurzel kann selbst ein Blatt sein — wenn der Wurzelbaum nur aus einem einzigen Knoten besteht.

Beispiel: Wurzelbaum und implizite Orientierung (aus Skriptum)

inneren Knoten = schwarze Punkte
die Blätter = weiße Kreis
die Wurzel = dick Punkt



Beispiel: Entscheidungsbaum (aus Skriptum)



Im Entscheidungsbaum eines Suchalgorithmus bedeutet

- ein Blatt, da der Algorithmus zu einem Ergebnis gekommen ist,
- und der maximale Ausgangsgrad eines inneren Knotens die größte Anzahl der Teile, in die der Suchraum nach einer Frage zerfallen kann.

Wurzelbaum: Länge, Niveau, q-Baum

Definition: Länge, Niveau, q-Baum

Sei **W** ein Wurzelbaum mit Wurzel w, und sei v ein Knoten in **W**.

Die Länge des (eindeutigen!) Weges von der Wurzel w zum Knoten v heißt Länge des Knotens und wird mit $\ell(v)$ bezeichnet. Die Menge der Knoten der Länge k nennen wir das Niveau k in **W**.

Wenn der maximale Ausgangsgrad eines inneren Knotens von **W** kleinergleich q ist, dann nennen wir **W** einen q–Baum. **W** heißt ein vollständiger q–Baum, wenn jeder innere Knoten von **W** Ausgangsgrad q hat.

Ein innerer Knoten in einem q–Baum **W** heißt gesättigt, wenn sein Ausgangsgrad gleich q ist.

Wurzelbaum: Länge, Niveau, q-Baum

Definition: Länge, Niveau, q-Baum

Sei **W** ein Wurzelbaum mit Wurzel w, und sei v ein Knoten in **W**.

Die Länge des (eindeutigen!) Weges von der Wurzel w zum Knoten v heißt Länge des Knotens und wird mit $\ell(v)$ bezeichnet. Die Menge der Knoten der Länge k nennen wir das Niveau k in **W**.

Wenn der maximale Ausgangsgrad eines inneren Knotens von **W** kleinergleich q ist, dann nennen wir **W** einen q–Baum. **W** heißt ein vollständiger q–Baum, wenn jeder innere Knoten von **W** Ausgangsgrad q hat.

Ein innerer Knoten in einem q–Baum **W** heißt gesättigt, wenn sein Ausgangsgrad gleich q ist.

Ein vollständiger q–Baum hat also nur gesättigte innere Knoten.

Vollständiger q–Baum

Lemma: vollständiger q–Baum

Sei $q \geq 2$, und sei **W** ein vollständiger q–Baum mit genau n Blättern. Dann gilt die folgende Teilbarkeitsrelation:

$$(q-1) \mid (n-1) \tag{1}$$

Vollständiger q–Baum

Beweis: Induktion nach der Blattanzahl n: Für den (einzigen) q–Baum mit nur einem Blatt (das dann zugleich die Wurzel ist!) ist die Behauptung richtig.

[1] v kann als ein innerer Knoten maximaler Länge gewählt werden.

Vollständiger q–Baum

Beweis: Induktion nach der Blattanzahl n: Für den (einzigen) q–Baum mit nur einem Blatt (das dann zugleich die Wurzel ist!) ist die Behauptung richtig.

In einem beliebigen vollständigen q–Baum mit $n > 1$ Blättern gibt es also einen inneren Knoten v, an dem q Blätter $b_1, \ldots, b_q$ "hängen"[1].

[1] v kann als ein innerer Knoten maximaler Länge gewählt werden.

Vollständiger q–Baum

Beweis: Induktion nach der Blattanzahl n: Für den (einzigen) q–Baum mit nur einem Blatt (das dann zugleich die Wurzel ist!) ist die Behauptung richtig.

In einem beliebigen vollständigen q–Baum mit $n > 1$ Blättern gibt es also einen inneren Knoten v, an dem q Blätter $b_1, \ldots, b_q$ "hängen"[1].

Wenn wir diese Blätter entfernen (also den Teilgraphen betrachten, der durch $V(\mathbf{W}) \setminus \{b_1, \ldots, b_q\}$ induziert wird), dann hat der entstehende Wurzelbaum genau $n - q + 1$ Blätter (v ist ja nun zu einem Blatt geworden), und er ist wieder ein vollständiger q–Baum:

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $(q-1) \mid (n-q)$;
daraus folgt $(q-1) \mid (n-1)$. ■

[1] v kann als ein innerer Knoten maximaler Länge gewählt werden.

Allgemeine Suchproblem

Gegeben sei eine gewisser Suchraum, also eine Menge S von möglichen Ereignissen (im Beispiel oben war das [7]).

Weiters seien gewisse “Tests” gegeben, mit denen der Suchraum in Teilmengen partitioniert wird (im Beispiel waren das die Fragen “$x < i$?”): Das allgemeine Suchproblem besteht darin, ein bestimmtes (aber zunächst unbekanntes) Element in $x \in S$ durch eine Kombination der verfügbaren Tests zu identifizieren.

Unter einem Suchalgorithmus verstehen wir eine derartige “Kombination der verfügbaren Tests”, die in jedem Fall (d.h., unabhängig vom Element x) zum Ziel führt.

Allgemeine Suchproblem

Es ist klar, daß wir einen Suchalgorithmus durch einen Entscheidungsbaum beschreiben können:

Das ist ein q–Baum, wobei q die größte Anzahl von Blöcken ist, in die ein Test den Suchraum partitioniert.

Worst–Case Analyse: Informationstheoretische Schranke

Die Worst–Case Analyse eines Algorithmus stellt fest, wie lange der Algorithmus im schlechtesten Fall braucht.

Für Suchalgorithmen ist das also die maximale Länge eines Blattes im entsprechenden Entscheidungsbaum $\mathbf{W}$; wir nennen dies die Länge des Wurzelbaumes $\mathbf{W}$ und bezeichnen sie mit $L(\mathbf{W})$:

$$L(\mathbf{W}) := \max_{b \text{ Blatt in } \mathbf{W}} \ell(b).$$

Worst–Case Analyse

Satz: Die Länge des Wurzelbaumes

Sei $q \geq 2$ und $\mathbf{W}$ ein q–Baum mit n Blättern. Dann gilt

$$L(\mathbf{W}) \geq \left\lceil \log_q n \right\rceil ,$$

wo $\log_q n$ der Logarithmus von n zur Basis q ist.

Worst–Case Analyse

Satz: Die Länge des Wurzelbaumes

Sei $q \geq 2$ und $\mathbf{W}$ ein q–Baum mit n Blättern. Dann gilt

$$L(\mathbf{W}) \geq \left\lceil \log_q n \right\rceil ,$$

wo $\log_q n$ der Logarithmus von n zur Basis q ist.

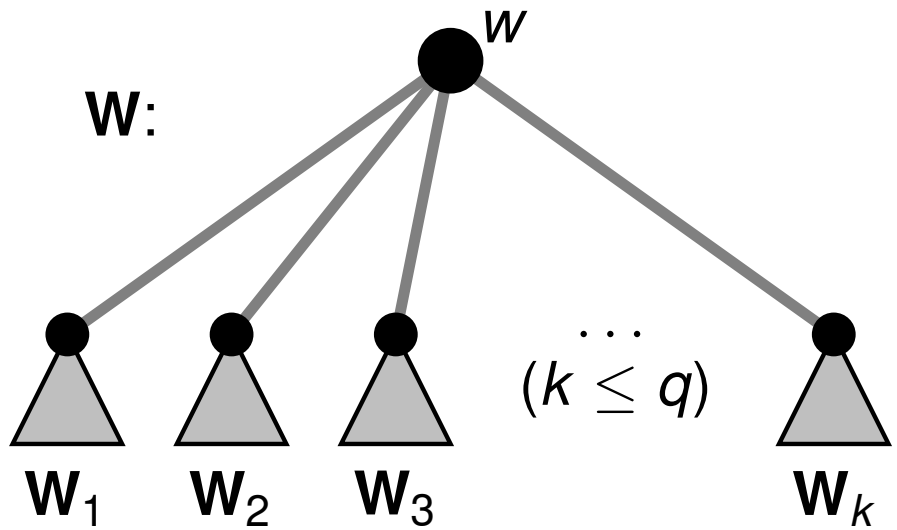
Beweis: Die Behauptung ist klarerweise äquivalent zu $L := L(\mathbf{W}) \geq \log_q n$ oder $q^L = q^{L(\mathbf{W})} \geq n$. Letzteres zeigen wir durch Induktion nach L.

Ist $L = 0$, dann besteht der Baum nur aus der Wurzel, die dann gleichzeitig das einzige Blatt ist, und wir haben in diesem Fall $q^0 \geq 1$.

Typischer q–Baum (aus Skriptum)

Für den Induktionsschritt bemerken wir, daß ein typischer q–Baum **W** folgendermaßen aussieht:

Von der Wurzel w weg führen $k \leq q$ Kanten; an den anderen Enden dieser Kanten hängt ein Teilgraph $\mathbf{W}_i$, der wieder die Struktur eines q–Baumes hat (symbolisiert durch die Dreiecke im unten Bild).



Die Länge des Wurzelbaumes: Beweis

Wegen $L > 0$ befinden sich alle n Blätter in diesen Teilbäumen, einer dieser Teilbäume muß daher mindestens $n/k \geq n/q$ Blätter enthalten.

Bezeichnen wir diesen Teilbaum mit $\mathbf{W}'$. Klarerweise gilt $L(\mathbf{W}') \leq L(\mathbf{W}) - 1$, somit können wir auf $\mathbf{W}'$ die Induktionsvoraussetzung anwenden:

$$q^{L(\mathbf{W}')} \geq \text{Anzahl der Blätter in } \mathbf{W}' \geq \frac{n}{q}.$$

Somit folgt:

$$q^{L(\mathbf{W})} \geq q^{L(\mathbf{W}')+1} = q^{L(\mathbf{W}')} \cdot q \geq \frac{n}{q} q = n.$$

Informationstheoretische Schranke

Der Wert $\lceil \log_q n \rceil$ heißt informationstheoretische Schranke.

Es ist klar, daß wir für unser zuvor beschriebenes “allgemeines Suchproblem” keinen Algorithmus angeben können, der immer (also auch im worst case) weniger Tests benötigt als $\lceil \log_q n \rceil$.

Informationstheoretische Schranke: Bemerkung

Als “Faustregel” für die Konstruktion eines Suchalgorithmus kann man offenbar ansehen: “Zerlege den Suchraum mit jedem Test in möglichst gleich große Teile”.

Es ist aber keineswegs immer möglich, einen Algorithmus zu konstruieren, der mit der theoretisch möglichen unteren Schranke für die Anzahl der Tests auskommt:

Typischerweise gelingt das nicht, wenn die Tests die Suchräume nicht “hinreichend gleichförmig” partitionieren können.

Beispiel: Binary search

Der klassische Algorithmus für das Einordnen eines neuen Elements x in eine bereits geordnete Liste $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ ist Binary Search:

Der Suchraum ist hier die Menge der möglichen Stellen, wo x eingeordnet werden könnte, er umfaßt also $n+1$ Elemente.

Der Algorithmus funktioniert so:

Binary search: Algorithmus

Sei $L = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ eine der Größe nach geordnete Liste von n reellen Zahlen (entspricht einem Suchraum von $n+1$ möglichen Stellen), bei der wir möglicherweise bereits die Relation $x \leq a_n$ kennen (entspricht einem Suchraum von nur mehr n möglichen Stellen).

Wenn der der Liste L entsprechende Suchraum nur mehr ein Element enthält, sind wir fertig; d.h.: Wenn $n = 0$ oder wenn $n = 1$ ist und wir die Relation $a_2 = a_{n+1} \leq a_n = a_1$ bereits kennen, dann schreiben wir a_{n+1} an die erste Stelle.

Binary search: Algorithmus

Ansonsten vergleichen wir a_{n+1} mit jenem Element x der Liste, das den Suchraum S möglichst gleichmäßig zerteilt (für $m = |S|$ ist $x = a_{\lceil m/2 \rceil}$).

Gilt $a_{n+1} > x$, dann setzen wir $L = \left(a_{\lceil m/2 \rceil + 1}, \ldots, a_n\right)$; gilt $a_{n+1} \leq x$, dann setzen wir $L = \left(a_1, \ldots, a_{\lceil m/2 \rceil}\right)$ (hier kennen wir nun die Relation $x \leq a_{\lceil m/2 \rceil}$); in jedem Fall beginnen wir wieder von vorne.

Binary search: Informationstheoretische Schranke

Die informationstheoretische Schranke besagt, daß wir im worst case mindestens $\lceil \log_2 (n+1) \rceil$ Tests "$a_{n+1} > x$?" brauchen. Und mit Induktion sehen wir, daß der obige Algorithmus diese Schranke tatsächlich erreicht:

Für $n = 0$ brauchen wir $0 = \log_2 (1)$ Tests.

Falls $n > 0$, brauchen wir einen ersten Test und haben dann einen Liste vor uns, deren entsprechender Suchraum maximal $\lceil (n+1)/2 \rceil$ Elemente enthält (denn der ursprüngliche Suchraum ist in zwei Blöcke $n+1 = \lceil (n+1)/2 \rceil + \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ partitioniert worden).

Nach Induktion brauchen wir dafür $\lceil \log_2 (\lceil (n+1)/2 \rceil) \rceil$ Tests.

Binary search: Informationstheoretische Schranke

Die Anzahl der benötigten Tests ist also tatsächlich

$$1 + \lceil \log_2 \underbrace{\lceil (n+1)/2 \rceil}_{= \frac{n+1}{2} + \frac{[n \equiv 0\ (2)]}{2}} \rceil = \left\lceil 1 + \log_2 \frac{n+1}{2} + \log_2 \left(1 + \frac{[n \equiv 0\ (2)]}{n+1} \right) \right\rceil$$

$$= \left\lceil \log_2 (n+1) + \log_2 \left(1 + \frac{[n \equiv 0\ (2)]}{n+1} \right) \right\rceil$$

$$= \lceil \log_2 (n + 1 + [n \equiv 0\ (2)]) \rceil$$

$$= \lceil \log_2 (n+1) \rceil. \qquad (2)$$

Die letzte Gleichung folgt aus einer Betrachtung der Sprungstellen von $\lceil \log_2 (x) \rceil$ bei 2^m, $m = 0, 1, \ldots$.

$n = 2^r - 2 \mapsto r, \quad n = 2^r - 1 \mapsto r, \quad n = 2^r \mapsto r + 1.$