INSTITUT FÜR REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK
Reinisch–Westfälische Technische Hochschule Aachen
Prof. V. Enß, Dr. G. Teschl

Aachen, den 16.4.97

1. Übung zu Dynamische Systeme SS97

Aufgabe 1. Wandeln Sie das System

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

in eine einstufige Rekursion um (in Analogie zu einem System erster Ordnung für gewöhnliche Differentialgleichungen). Bestimmen Sie die Matrix Φ_n so daß die Lösung des obigen Sytems durch

$$\begin{pmatrix} x_{1+n} \\ x_{2+n} \end{pmatrix} = \Phi_n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

gegeben ist. Beweisen Sie $\Phi_{n+m} = \Phi_n \Phi_m$.

Aufgabe 2. Untersuchen Sie die logistische Abbildung $F_\mu(x) = \mu\, x(1-x)$ für $0 \le \mu \le 2$ (Fixpunkte, periodische Punkte, Stabilität).

Aufgabe 3. Sei F eine stetige Selbstabbildung eines metrischen Raums (X, d) und sei $\overline{x} \in \mathrm{Per}_p(F)$ ein anziehender periodischer Punkt. Beweisen Sie daß der Orbit $P = \{\overline{x}, F(\overline{x}), \dots, F^{p-1}(\overline{x})\}$ von $\overline{x}$ ein Attraktor ist.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die Anzahl der p periodischen Punkte der Zeltabbildung

$$F(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2-2x, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}.$$

Ist die Menge der periodischen Punkte dicht in $[0, 1]$?

Sei $F : [0, 1] \to [0, 1]$ eine Abbildung mit $F(0) = F(1) = 0$ und $F(1/2) = 1$. Weiters sei F monoton steigend in $[0, 1/2]$ und monoton fallend in $[1/2, 1]$. In wie weit lassen sich die Resultate der Zeltabbildung auf diesen Fall verallgemeinern?

INSTITUT FÜR REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK
Reinisch–Westfälische Technische Hochschule Aachen
Prof. V. Enß, Dr. G. Teschl

Aachen, den 23.4.97

2. Übung zu Dynamische Systeme SS97

Aufgabe 5. Die *klassische Cantormenge* C wird wie folgt definiert: Setze $C_0 = [0,1]$ und C_{n+1} wird durch Entfernen des offenen mittleren Drittels der Teilintervalle von C_n erhalten. Das heißt, $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$, etc. Dann ist $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

Beweisen Sie daß C abgeschlossen, perfekt und vollständig unzusammenhängend ist. Zeigen Sie weiters, daß C selbstähnlich ist: Die Abbildung $x \mapsto 3^n x - k$, $k3^{-n} \in C$, $n \in \mathbb{N}$ ist eine Bijektion von $C \cap [k3^{-n}, (k+1)3^{-n}]$ nach C.

Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung von $x \in [0,1]$ im tertiären Zahlensytem ($x = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i 3^{-i}$, $x_i \in \{0,1,2\}$), und überlegen Sie wann $x \in C_n$ gilt.

Aufgabe 6. Sei $T : S^1 \to S^1$, $\theta \mapsto 2\theta$ die Abbildung der Winkelverdoppelung auf dem Einheitskreis. Zeigen Sie (auf möglichst elementare Weise) die Dichtheit von $\mathrm{Per}(T)$ in S^1, die empfindliche Abhängigkeit vom Startwert und die Existenz eines dichten Orbits.

Aufgabe 7. Sei $\Sigma_{\mathbf{A}}$ die Menge aller Folgen $s = (s_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ über dem Alphabet $\mathbf{A} = \{0, 1, \dots, N-1\}$.

Bestimmen Sie $|\mathrm{Per}_n(\sigma)|$ für die Shiftabbildung σ des $\Sigma_{\mathbf{A}}$ und zeigen Sie, daß σ einen dichten Orbit in $\Sigma_{\mathbf{A}}$ besitzt.

Sei $s \in \Sigma_{\mathbf{A}}$ fest. Finden Sie ein einfaches Kriterium dafür, wann ein $t \in \Sigma_{\mathbf{A}}$ in der stabilen Menge $W^s(s) = \{t \in \Sigma_{\mathbf{A}} \mid \lim_{i\to\infty} d(\sigma^i(s), \sigma^i(t)) = 0\}$ von s ist.

Aufgabe 8. Sei $\Sigma' := \{s \in \Sigma_{\{0,1\}} \mid \forall i \geq 0 : s_i = 0 \Longrightarrow s_{i+1} = 1 \} \subset \Sigma_{\{0,1\}}$. Zeigen Sie, die folgenden Eigenschaften:
i). Die Shiftabbildung σ läßt die Menge Σ' invariant und Σ' ist abgeschlossen in Σ.
ii). $\mathrm{Per}(\sigma')$ ist dicht in Σ', wobei σ' die Einschränkung von σ auf Σ' ist.
iii). Σ' enthält einen dichten Orbit (bzgl. σ').
iv). Finden Sie eine Rekursionsformel $p_n = F(p_{n-2}, p_{n-1})$ für $p_n := |\mathrm{Per}_n(\sigma')|$.

INSTITUT FÜR REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK
Reinisch–Westfälische Technische Hochschule Aachen
Prof. V. Enß, Dr. G. Teschl

Aachen, den 30.4.97

3. Übung zu Dynamische Systeme SS97

Aufgabe 9. Welche der folgenden Eigenschaften bleiben unter topologischer Äquivalenz erhalten?

- Anzahl der p periodisch Punkte.
- Stabilität, asymptotische Stabilität von periodischen Punkten.
- Dichtheit der periodischen Orbits.
- Existenz eines dichten Orbits.

Aufgabe 10. Seien (F_j, X_j), $j = 1, 2$ zwei (diskrete) dynamische Systeme und sei $\phi : X_1 \to X_2$ eine stetige surjektive Abbildung die $\phi F_1 = F_2 \phi$ erfüllt. Welche der Eigenschaften aus Aufgabe 9 gelten für (F_2, X_2) wenn sie für (F_1, X_1) gelten?

Aufgabe 11. Für eine stetige Abbildung $F : X \to X$ eines metrischen Raumes X in sich selbst definiert man die Mengen:
$\mathrm{Per}(F)$ der periodischen Punkte,
$\mathrm{Rec}(F) := \{x \in X \mid \text{für jede Umgebung } U(x) \text{ existiert } n > 0 \text{ mit } F^n(x) \in U(x)\}$ der *rekurrenten* Punkte und
$\mathrm{Nwa}(F) := \{x \in X \mid \text{für jede Umgebung } U(x) \text{ existieren } n > 0 \text{ und } \tilde{x} \in U(x) \text{ mit } F^n(\tilde{x}) \in U(x)\}$ der *nichtwandernden* Punkte. Zeigen Sie:
i). $\mathrm{Per}(F) \subseteq \mathrm{Rec}(F) \subseteq \mathrm{Nwa}(F)$.
ii). $\mathrm{Per}(F)$, $\mathrm{Rec}(F)$ und $\mathrm{Nwa}(F)$ sind invariant unter F. (Eine Menge $M \subseteq X$ ist invariant unter F wenn $F(M) \subseteq M$ gilt.)
iii). $\mathrm{Rec}(F) = \{x \in X \mid \text{es existiert eine Folge } n_k \text{ mit } F^{n_k}(x) \to x\}$.
iv). $\mathrm{Nwa}(F)$ ist abgeschlossen.
v). Für die logistische Abbildung F_μ mit $\mu > 2 + \sqrt{5}$ gilt: $\mathrm{Nwa}(F_\mu) = \Lambda$, $\mathrm{Rec}(F_\mu) \setminus \mathrm{Per}(F_\mu) \neq \emptyset$ und $\mathrm{Nwa}(F_\mu) \setminus \mathrm{Rec}(F_\mu) \neq \emptyset$.

INSTITUT FÜR REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK
Reinisch–Westfälische Technische Hochschule Aachen
Prof. V. Enß, Dr. G. Teschl

Aachen, den 7.5.97

4. Übung zu Dynamische Systeme SS97

Aufgabe 12. Sei $F_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein hyperbolischer Fixpunkt von F_{λ_0} (d.h., kein Eigenwert der Ableitung $\partial_x F_{\lambda_0}(x_0)$ hat Absolutbetrag 1). Dann existiert eine Umgebung $U(x_0)$ und ein offenes Intervall I um λ_0 so daß F_λ^m, $m \in \mathbb{N}$ für $\lambda \in I$ genau einen Fixpunkt $x \in U(x_0)$ besitzt.

Aufgabe 13. Untersuchen Sie die Fixpunkte (Anzahl, Stabilität) der Abbildung $F_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lambda + x + x^2$ in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$. Stellen Sie Ihre Ergebnisse in einem Bifurkationsdiagramm dar.

Aufgabe 14. Untersuchen Sie alle periodischen Punkte (Anzahl, Stabilität) der Abbildung $F_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lambda \arctan(x)$ in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$. Stellen Sie Ihre Ergebnisse in einem Bifurkationsdiagramm dar.

Hinweise: (i). Beachten Sie $F_\lambda(-x) = F_{-\lambda}(x) = -F_\lambda(x)$, insbesondere $F_{-\lambda}^n(x) = (-1)^n F_\lambda^n(x)$.
(ii). Beweisen Sie zunächst: Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ strikt konvex und beschränkt auf $(0,\infty)$ mit $f(0) = 0$. Wenn $f'(0) \le 1$ (bzw. $f'(0) > 1$) gilt, dann hat die Gleichung $f(x) = x$ keine (bzw. genau eine) Lösungen in $(0,\infty)$.

INSTITUT FÜR REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK
Reinisch–Westfälische Technische Hochschule Aachen
Prof. V. Enß, Dr. G. Teschl

Aachen, den 14.5.97

5. Übung zu Dynamische Systeme SS97

Aufgabe 15. Sei $F_\lambda(x) \in C^2(U(\lambda_0) \times V(x_0))$ mit

$$F_\lambda(x_0) = x_0 \text{ für } \lambda \in U(\lambda_0).$$

Zeigen Sie daß

$$G(\lambda, x) = \frac{F_\lambda(x) - x}{x - x_0}$$

stetig ergänzbar bei x_0 ist und daß die Ergänzung in $C^1(U(\lambda_0) \times V(x_0))$ liegt.

Aufgabe 16. Sei $F_\mu(x) = \mu\, x(1-x)$, $0 \le \mu \le 4$ die logistische Abbildung. Untersuchen Sie die lokalen Verzweigungen der eins- und zwei-periodischen Punkte.

Welche Arten von Bifurkationen treten auf? Skizzieren Sie die auftretenden Bahnen.

Aufgabe 17. Klassifizieren Sie das lokale Bifurkationsverhalten folgender Abbildungen in der Nähe der angegebenen Parameterwerte:

- $Q_\lambda(x) = \lambda + x^2$, $\lambda_0 = -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}$
- $F_\lambda(x) = \lambda \sinh(x)$, $\lambda_0 = -1, 1$
- $F_\lambda(x) = x^2 + \sin(\lambda x)$, $\lambda_0 = 1$

Diskutieren Sie die Stabilität der Fixpunkte und der zwei-periodischen Punkte.

INSTITUT FÜR REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK
Reinisch–Westfälische Technische Hochschule Aachen
Prof. V. Enß, Dr. G. Teschl

Aachen, den 28.5.97

6. Übung zu Dynamische Systeme SS97

Aufgabe 18. Zwei differenzierbare Intervallabbildungen $F_j : I_j \to I_j$, $j = 1, 2$ heißen C^1-konjugiert wenn es einen C^1-Diffeomorphismus ϕ (d.h. $\phi \in C^1(I_1, I_2)$ und $\phi^{-1} \in C^1(I_2, I_1)$) gibt, so daß $\phi F_1 = F_2 \phi$ gilt. Zeigen Sie, daß folgende Dinge unter C^1-Äquivalenz erhalten bleiben:

i). Hyperbolische Fixpunkte.
ii). Homokline Punkte/Bahnen; entartete bzw. nicht entartete homokline Punkte/Bahnen.

Aufgabe 19. Beweisen Sie für eine differenzierbare Intervallabbildung $F : I \to I$, daß nicht entartete homokline Punkte zwar nichtwandernd aber nicht rekurrent sind (siehe Aufgabe 11). Was kann bei entarteten homoklinen Punkten passieren?

Zeigen Sie, daß die logistische Abbildung $F_\mu(x) = \mu\, x(1-x)$ für $\mu > 4$ (bzw. $\mu > 2 + \sqrt{5}$) unendlich viele homokline Orbits besitzt. Gibt es für $\mu > 4$ auch entartete homokline Orbits? Gibt es (entartete, nicht entartete) homokline Orbits für $\mu \le 4$?

Aufgabe 20. Untersuchen Sie die lineare Differentialgleichung

$$\dot{x} = A\, x, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

für folgende Matritzen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}, \quad A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die allgemeine Lösung und skizzieren Sie den Fluß.

INSTITUT FÜR REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK
Reinisch–Westfälische Technische Hochschule Aachen
Prof. V. Enß, Dr. G. Teschl

Aachen, den 4.6.97

7. Übung zu Dynamische Systeme SS97

Aufgabe 21. Seien

$$\dot{x} = A_j\, x, \quad x \in \mathbb{R}^\nu,\ j = 1, 2$$

zwei lineare hyperbolische System und seien A_j diagonalisierbar (über $\mathbb{C}$).

- Beide Systeme sind genau dann topologisch equivalent wenn die Anzahl der Eigenwerte $m_\pm(A_j)$ mit positiven/negativen Realteil gleich sind,

  $$m_+(A_1) = m_+(A_2) \quad \text{und} \quad m_-(A_1) = m_-(A_2).$$

  Hinweis: Bringen Sie A auf reelle (Jordansche) Normalform. Es reicht das Resultat für 1-Blöcke (reelle Eigenwerte) und 2-Blöcke (konjugiert komplexe Eigenwerte) zu beweisen. Für die 2-Blöcke bietet sich die Verwendung von Polarkoordinaten an.
  Bemerkung: Das Ergebnis stimmt auch ohne die Voraussetzung „diagonalisierbar“.

- Was lässt sich über den Fall mit rein imaginären Eigenwerten sagen?
  Hinweis: Wie verhalten sich periodische Bahnen (insbes. ihre Periode) unter topologischer Konjugation?

Aufgabe 22. Untersuchen Sie die Lösungsgesamtheit des harmonischen Oszillator mit (ohne) Dämpfung

$$\ddot{x} + 2k\,\dot{x} + x = 0, \quad k \geq 0.$$

Betrachten Sie insbesondere den qualitativen Wechsel des Verhaltens von Lösungen im aperiodischen Genzfall (d.h., den Wechsel von zwei konjugiert komplexen zu zwei reellen Eigenwerten).

Aufgabe 23. Geben Sie das Vektorfeld des harmonischen Oszillators

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

in Polarkoordinaten an.

INSTITUT FÜR REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK
Reinisch–Westfälische Technische Hochschule Aachen
Prof. V. Enß, Dr. G. Teschl

Aachen, den 11.6.97

8. Übung zu Dynamische Systeme SS97

Aufgabe 24. Sei

$$\dot{x} = A\,x, \quad x \in \mathbb{R}^\nu$$

ein lineares hyperbolisches System. Beweisen Sie folgende Eigenschaften:

- Die stabielen, instabilen Teilräume $E^{u,s}$ sind invariante Teilmengen, es gilt sogar

$$A\,E^{u,s} = E^{u,s}, \quad \mathrm{e}^{At} E^{u,s} = E^{u,s}.$$

- Sei $\alpha_0 = \min|\mathrm{Re}(\mathrm{spec}(A))| > 0$. Für jedes $0 \le \alpha < \alpha_0$ gibt es eine Konstante $c > 0$, so daß

$$\begin{aligned} \|\mathrm{e}^{At} x^{(s)}\| &\le c\mathrm{e}^{-\alpha t}\|x^{(s)}\|, \quad \forall x^{(s)} \in E^s, t \ge 0, \\ \|\mathrm{e}^{At} x^{(u)}\| &\le c\mathrm{e}^{\alpha t}\|x^{(u)}\|, \quad \forall x^{(u)} \in E^u, t \le 0. \end{aligned}$$

  (Wann ist $\alpha = \alpha_0$ zulässig?)

- Falls $\|\exp(tA)x\| \le M < \infty$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, so ist $x = 0$.

Aufgabe 25. Untersuchen Sie das System

$$\dot{x} = f(x), \quad f(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 + x_1^2 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

- Bestimmen Sie alle Fixpunkte.
- Berechnen Sie die Linearisierung um alle Fixpunkte.
- Transformieren Sie das System mit Hilfe der Abbildung

$$y = \Psi(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + \frac{x_1^2}{3} \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie die stabile und die instabile Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}^{s,u}$ für alle Fixpunkte.

INSTITUT FÜR REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK
Reinisch–Westfälische Technische Hochschule Aachen
Prof. V. Enß, Dr. G. Teschl

Aachen, den 18.6.97

9. Übung zu Dynamische Systeme SS97

Aufgabe 26. Untersuchen Sie das System

$$\dot{x} = f(x), \quad f(x) = \begin{pmatrix} -x_1 - x_2^2 \\ x_2 + x_1^2 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

in der Nähe des hyperbolischen Sattels $x = (0,0)$. Bestimmen Sie eine Approximation der stabilen Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}^s$ indem Sie die dritte Iteration der zugehörigen Integralgleichung berechnen.

Aufgabe 27. Die Bewegung eines Teilchens in einer Dimension sei durch die Differentialgleichung

$$\begin{array}{l} \dot{x} = p \\ \dot{p} = -2\kappa p - V'(x) \end{array}, \qquad V(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, \quad p, x \in \mathbb{R}$$

beschrieben. Beweisen Sie, daß im Fall ohne Reibung ($\kappa = 0$) die Energie

$$E = \frac{p^2}{2} + V(x)$$

erhalten ist (d.h., sich entlang Trajektorien nicht ändert) und im Fall mit Reibung ($\kappa > 0$) abnimmt (oder konstant bleibt).

Klassifizieren Sie alle Fixpunkte, und bestimmen Sie im Fall $\kappa = 0$ die zugehörigen stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}^{s,u}$. Wie ändern sich diese Mannigfalitgkeiten wenn $\kappa > 0$ ist. Skizzieren Sie für $\kappa = 0$ und $\kappa > 0$ das Phasendiagramm.

INSTITUT FÜR REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK
Reinisch–Westfälische Technische Hochschule Aachen
Prof. V. Enß, Dr. G. Teschl Aachen, den 25.6.97

10. Übung zu Dynamische Systeme SS97

Aufgabe 28. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\dot{y} = (a\cos(t) + b)y - y^3, \quad y, a, b \in \mathbb{R} \tag{1}$$

als autonomes System

$$\begin{aligned} \dot{y} &= (a\cos(\tau) + b)y - y^3, \\ \dot{\tau} &= 1, \end{aligned} \tag{2}$$

mit $(y, \tau) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ (d.h., wir betrachten $\tau \bmod 2\pi$). Beweisen Sie folgende Punkte:

- Periodische Lösungen von (2) entsprechen 2π-periodischen Lösungen von (1).
- Nimmt man $\tau = 0 (\bmod 2\pi)$ als Poincaré-Schnitt, dann ist die Poincaré Abbildung durch $P(y_0) = y(2\pi, y_0)$, wobei $y(t, y_0)$ die Lösung von (1) zur Anfangsbedingung $y(t, y_0) = y_0$ ist, gegeben.
- Finden Sie einen geschlossenen Ausdruck für $P(y)$. Untersuchen Sie die Fixpunkte von $P(y)$ und deren Stabilität.

Was bedeuten Ihre Ergebnisse für das Ausgangssystem (1)? Welche Bifurkatonen treten auf?

Aufgabe 29. Betrachten Sie das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= x + y(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{z} &= z \end{aligned}$$

und berechnen Sie die Poincaré Abbildung zum Poincaré-Schnitt $H = \{(x, y, z) | x > 0, y = 0\}$. Bestimmen Sie weiters stabile und instabile Mannigfaltigkeit dieser Poincaré Abbildung. (Hinweis: Zylinderkoordinaten.)

Aufgabe 30. Gegeben sei die van der Pol-Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + \mu x - x^3 \\ \dot{y} &= -x \end{aligned} , \quad 0 < \mu < 2$$

und die Kurve $C(y_0) = C_+(y_0) \cup C_-(y_0)$, $y_0 > \max\{2\mu\sqrt{\mu}, \sqrt{\mu+2}\}$, mit

$$\begin{aligned} C_\pm(y_0) \quad = \quad & \{\pm(x,y) | y = y_0 + \frac{\sqrt{\mu}}{y_0}(x + \sqrt{\mu}),\ -\sqrt{\mu} \le x \le 0\} \\ & \cup\{\pm(x,y) | y = y_1 = y_0 + \frac{\mu}{y_0},\ 0 \le x \le x_1\} \\ & \cup\{\pm(x,y) | y = \frac{y_1}{r_0 - x_1}(r_0 - x),\ x_1 \le x \le r_0 = \sqrt{y_0^2 + \mu}\} \\ & \cup\{\pm(x,y) | y = -\sqrt{r_0^2 - x^2},\ \sqrt{\mu} \le x \le r_0\} \end{aligned}$$

und x_1 der eindeutigen Lösung von $y_1 = x_1(x_1^2 - \mu)$ im Intervall $(\sqrt{\mu}, \infty)$.

Beweisen Sie, daß das Vektorfeld auf $C(y_0)$ immer nach innen weist, ausser an den vier Punkten $\pm(-\sqrt{\mu}, y_0)$ und $\pm(0, y_1)$, wo es tangential ist.