Übung Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Cashen/Lis/Teschl/Troscheit

SS2019

1. Ein Marktforschungsinstitut hat für Sie folgende Daten erhoben: 80% ihrer potentiellen Kunden besitzen einen Computer, 70% haben einen DVD-Player und 40% besitzen beides. Bezahlen Sie die Rechnung des Marktforschungsinstituts?

2. Drücke die folgenden Ereignisse in Mengenschreibweise mit Hilfe der Ereignisse A, B und C aus:

   D_1 = „Mindestens eines der Ereignisse A, B oder C tritt ein."
   D_2 = „Höchstens eines der Ereignisse A, B oder C tritt ein."
   D_3 = „Weder A noch B noch C tritt ein."
   D_4 = „Mindestens eines der Ereignisse A, B oder C tritt nicht ein."
   D_5 = „Genau eines der drei Ereignisse A, B oder C tritt ein."

3. Ein Würfel wird zweimal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,
   a) beidemal 5 b) wenigstens einmal 1 c) Augensumme 4 zu werfen.

4. In einer Schublade sind 6 rote und 8 blaue Socken. Wenn Sie in der Dunkelheit (also zufällig) zwei Socken aus der Schublade ziehen, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit
   a) zwei rote b) zwei blaue c) zwei verschiedene d) zwei zueinander passende Socken zu treffen?

5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 90 Studierenden (mindestens) zwei am selben Tag Geburtstag haben?

6. Ein Multiple-Choice Test besteht aus 4 Fragen, bei jeder stehen drei Antworten zur Auswahl. Nur eine davon ist jeweils richtig. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, durch zufälliges Raten
   a) alle vier Fragen b) nur eine Frage c) mindestens zwei Fragen richtig zu beantworten?

7. In einer Warenpackung befinden sich 50 Stück, davon sind 5 fehlerhaft. Man entnimmt eine Stichprobe vom Umfang 2 (ohne Zurücklegen). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,
   a) kein fehlerhaftes Stück b) (genau) ein fehlerhaftes Stück
   c) (genau) zwei fehlerhafte Stücke zu ziehen?

8. **Ziege oder Mercedes?**: In einer Quizsendung wird folgendes Spiel gespielt: Ein Kandidat steht vor drei geschlossenen Türen. Es ist bekannt, dass sich hinter einer ein Mercedes, hinter den anderen beiden aber jeweils eine Ziege befindet. Der Kandidat wählt eine Tür, die aber geschlossen bleibt. Daraufhin öffnet der Quizmaster eine der beiden verbleibenden Türen, hinter denen sich eine Ziege befindet. Nun hat der Kandidat die Möglichkeit, bei seiner gewählten Tür zu bleiben, oder die andere noch

verschlossene Tür zu wählen. Bestimmen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeiten für folgende Strategieen:
a) Der Kandidat entscheidet nach Zufall, welche der beiden noch verschlossenen Türen er wählt.
b) Der Kandidat bleibt bei der Tür, die er zu Beginn gewählt hat.
c) Der Kandidat wechselt zur anderen verschlossenen Tür.

9. **HIV Test**: Ein Test gibt mit 99.9%-iger Wahrscheinlichkeit bei einer mit HIV infizierten Person ein positives Testresultat. Mit 99.8%-iger Wahrscheinlichkeit gibt der Test bei einer nicht mit HIV infizierten Person ein negatives Testresultat. Man weiß weiters, dass insgesamt 0.05% der Menschen in Österreich infiziert sind.

   a) Wie viele von 1000 getesteten HIV-positiven Personen erhalten fälschlicherweise ein negatives Testresultat (*falsch negativ*)?
   b) Wie viele von 1000 getesteten nicht HIV-positiven Personen erhalten fälschlicherweise ein positives Testresultat (*falsch positiv*)?
   c) Eine zufällig ausgewählte Person (nicht aus einer Risikogruppe) lässt sich testen und der Test fällt positiv aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie trotzdem nicht mit HIV infiziert ist?

10. **DNA-Test**: Am Tatort wird eine DNA-Probe sichergestellt. Von 1 Million Menschen hat statistisch gesehen nur einer ein DNA-Profil, das mit dieser Probe übereinstimmt. Nun wird ein DNA-Test an n Verdächtigen durchgeführt. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Test irrt, ist 0.001%.
    a) Bei wie vielen von 10 Millionen Menschen würden Sie ein positives Testergebnis erwarten?
    b) Der Test bei Mr. X ist positiv, und er ist einer von $n = 20$ möglichen Tätern. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Mr. X unschuldig ist? Es darf angenommen werden, dass alle Personen verschiedene DNA-Profile haben.

11. Ein Kunde bezieht von einem Lieferanten Bauteile in Lieferungen zu je 1000 Einheiten. Bevor er eine Lieferung annimmt, macht er eine Stichprobenprüfung im Umfang von 100 Einheiten. Er nimmt die Lieferung an, wenn er in der Stichprobe höchstens 3 fehlerhafte Stück findet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine Annahme, wenn in der Lieferung
    a) 10 b) 20 c) 100 Einheiten fehlerhaft sind?

12. Bitfolgen der Länge 3 werden über einen Nachrichtenkanal gesendet, der Störungen ausgesetzt ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bit falsch übertragen wird (d.h., dass eine gesendete Null als eine Eins ankommt oder umgekehrt), ist $p = 0.001$ („Bitfehlerwahrscheinlichkeit"). Man interessiert sich für $X =$ *Anzahl der Bitfehler in einer zufällig gesendeten Bitfolge der Länge* 3.
    a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an.
    b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass (mindestens) ein Bitfehler auftritt?
    c) Wie viele Fehler sind im Mittel pro gesendeter Bitfolge zu erwarten?

13. Eine Fluggesellschaft weiß aus empirischen Untersuchungen, dass im Durchschnitt 10% der gebuchten Flugplätze storniert werden. Daher verkauft sie

für eine Maschine mit 100 Sitzplätzen von vornherein 5% mehr Flugtickets. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Maschine überbucht ist?

14. Ein Unternehmen produziert mit einem konstanten Ausschussanteil von 3%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, unter 50 hintereinander entnommenen Einheiten genau eine fehlerhafte Einheit vorzufinden?

15. Kater Karlo zahlt in einer Bank 60 Hundert-Euro-Scheine ein, von denen 10 seiner eigenen Produktion entstammen. Der Bankangestellte prüft 3 der eingezahlten Scheine auf Echtheit. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fliegt Kater Karlo auf?

16. Gegeben sei eine Menge M mit n Elementen. Aus M werden zwei Teilmengen A und B ausgewählt indem für jedes Element aus M per Münzwurf entschieden wird ob es in der Menge ist oder nicht. Berechne die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $A \subseteq B$.

17. Sei X eine Zufallsvariable, die die Werte $i \in \{0, \dots, n\}$ mit den Wahrscheinlichkeiten p_i annimmt. Dann heißt
$$\hat{p}(z) = \sum_{i=0}^{n} p_i z^i$$
die **erzeugende Funktion** der Verteilung. Zeigen Sie:
a) $\hat{p}(1) = 1$
b) $\mathrm{E}(X) = \hat{p}'(1)$
c) $\mathrm{Var}(X) = \hat{p}''(1) + \hat{p}'(1)(1 - \hat{p}'(1))$
Berechnen Sie damit den Erwartungswert und die Varianz der Binomialverteilung.

18. **Geometrische Verteilung**: Ein Experiment, bei dem ein Ereignis A mit der Wahrscheinlichkeit $P(A) = p$ eintritt, wird wiederholt. Die Zufallsvariable $X =$ *Anzahl der Wiederholungen, bis zum ersten Mal A eintritt* heißt geometrisch verteilt:
$$P(X = x) = p(1-p)^{x-1}, \qquad x \in \mathbb{N}.$$
Zeigen Sie
$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{p}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$
(Z.B. indem Sie die erzeugende Funktion berechnen.)

19. Ein fairer Würfel wird geworfen, $X =$ *Anzahl der Würfe, bis zum ersten Mal die Augenzahl 1 geworfen wird.*
a) Geben Sie die möglichen Werte von X an.
b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an.
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, höchstens 3 Würfe zu brauchen,

20. Bei einem Glücksspiel können Sie eines von drei Losen ziehen (jedes mit der gleichen Wahrscheinlichkeit).
a) Die zugehörigen Gewinne sind $0, 1, 99$ Euro. Wie groß ist der (bei vielen Spielen) erwartete durchschnittliche Gewinn?

b) Angenommen, die zu den Losen gehörenden Gewinne sind $25, 30, 45$ Euro. Wie groß ist nun der erwartete durchschnittliche Gewinn?
c) Berechnen Sie für beide Spiele die Varianz.
d) Ist es sinnvoll, bei Spiel a) oder b) mitzuspielen, wenn der Einsatz (Teilnahmegebühr) 35 Euro ist?

21. Beim Roulette gibt es 18 schwarze Felder, 18 rote Felder und die Null. Sie setzen jede Runde auf „schwarz". Rollt die Kugel in einer Runde auf „schwarz", so erhalten Sie den doppelten Einsatz, ansonsten verlieren Sie den Einsatz. Wie hoch ist der erwartete Gewinn bzw. die Standardabweichung (das Risiko), wenn Sie
a) in einer Runde 100 € setzen? b) in hundert Runden 1 € setzen?

22. Beim Roulette gibt es 18 schwarze und 18 rote Felder plus die Null. Sie setzen jede Runde auf „schwarz". Sie beginnen mit 100 € und verdoppeln Ihren Einsatz solange Sie verlieren (Martingal-Strategie).
a) Wie hoch ist Ihr Gesamtverlust, wenn nach n Runden nie „schwarz" gekommen ist?
b) Wie hoch ist Ihr Gewinn, wenn nach n Runden zum ersten Mal „schwarz" kommt?
c) Nach wie vielen Runden ist Schluss, wenn der Maximaleinsatz 10 000 € ist?
d) Wenn Sie diese Strategie bis zum Maximaleinsatz durchhalten, was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie gewinnen bzw. verlieren? Was ist der Erwartungswert für Ihren Gewinn?

23. In einem Unternehmen passieren pro Woche durchschnittlich $\mu = 0.6$ Arbeitsunfälle. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (Poisson-Verteilung),
a) dass sich innerhalb einer Woche mehr als ein Unfall ereignet?
b) dass sich in zwei aufeinanderfolgenden Wochen kein Unfall ereignet?

24. Bei einer Fertigung ist der Anteil fehlerhafter Einheiten gleichbleibend gleich 2%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man unter 50 entnommenen Einheiten a) keine b) höchstens zwei fehlerhafte Einheiten? Lösen Sie exakt und mithilfe einer Näherung durch die Poisson-Verteilung.

25. Sechs von 0 bis 5 nummerierte Karten werden gemischt und offen in einer Reihe aufgelegt. Ein Zug besteht darin, von links her so viele Karten wegzunehmen, wie die erste Karte anzeigt.

Beispiel: $[2][0][4][3][5][1] \longmapsto [4][3][5][1]$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man zwei Züge durchführen kann?

26. Die Zufallsvariable X sei binomialverteilt mit Parametern (n, p). Zeigen Sie, dass dann auch $Y = n - X$ binomialverteilt ist.

27. Wir betrachten zwei Zufallsvariablen X und Y, welche je die Werte 0 oder 1 annehmen können. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von (X, Y) sei durch folgende Randverteilungen gegeben:

$$P(X = 0) = 1/2, \quad P(Y = 0) = 1/2, \quad P(X = 0, Y = 0) = p.$$

Bestimme
a) die Wahrscheinlichkeiten der fehlenden drei Ereignisse ($\{X = 1, Y = 0\}$, $\{X = 0, Y = 1\}$, $\{X = 1, Y = 1\}$). In welchem Bereich darf p liegen?
b) die Verteilung von $X + Y$.
c) $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$.

28. **Ballot-Problem.** Bei einem Wahlgang mit insgesamt n Stimmen erhält der Sieger von zwei Kandidaten k Stimmen mehr als sein Gegner ($k > 0$). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Sieger während der ganzen Auszählung in Führung liegt, wenn die Stimmen in zufälliger Reihenfolge ausgezählt werden?

    Anleitung: Betrachte dazu die Irrfahrt $(S_j)_{0\le j\le n}$. Wie viele Pfade gibt es mit $S_n = k$ und wie viele davon erfüllen $S_j > 0$ für $1 \le j \le n$? Um die zweite Anzahl zu berechnen kann man die Pfade von $(1, 1)$ nach (n, k) betrachten und jene die irgendwann 0 treffen abziehen. Unter einer geeigneten Reflexion ist ein jeder solcher Pfad äquivalent zu einem von $(1, 1)$ nach $(n, -k)$.

29. **Ruin des Spielers.** Arno und Benno spielen folgendes Spiel: In jeder Runde wird eine faire Münze geworfen. Erscheint Kopf, so zahlt Benno einen Euro an Arno. Bei Zahl erhält Benno von Arno einen Euro. Arnos bzw. Bennos Vermögen vor der ersten Runde beläuft sich auf a bzw. b Euro (a, $b \in \mathbb{N}$). Das Spiel geht zu Ende, wenn einer der beiden kein Geld mehr hat, spätestens aber nach n Runden. p_n bzw. q_n bezeichne die Wahrscheinlichkeit, dass Arno bzw. Benno nach diesem Spiel ruiniert ist. Betrachte die Irrfahrt $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, wobei

$$X_k = \begin{cases} +1 & \text{falls Arno die } k\text{-te Runde gewinnt,} \\ -1 & \text{falls Benno die } k\text{-te Runde gewinnt.} \end{cases}$$

    a) Beschreibe das Ereignis $C = \{\text{keiner der beiden ist am Ende ruiniert}\}$ durch S_k.
    b) Zeige: $\lim_{n\to\infty}(p_n + q_n) = 1$.
    Hinweis: Benutze (a) arbeite mit der Stoppzeit $T_b = \inf\{n > 0 : \ S_n = b\}$ und verwende was in der VO über T_b gezeigt wurde. ($P(T_p) = P(S)$

30. Finde alle Algebren auf $\Omega = \{1, 2, 3\}$.

31. Es sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω und $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ erfülle

$$P(\Omega) = 1, \qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B), \quad A \cap B = \emptyset.$$

    a) $P(\emptyset) = 0$.
    b) $P(\overline{A}) = 1 - P(A), \quad \overline{A} = \Omega \setminus A$.
    c) $P(A) \le P(B), \quad A \subseteq B$.
    d) $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \le P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ falls $A_n \cap A_m = \emptyset$ für $n \ne m$.

32. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sei wie in der letzten Aufgabe. Zeige: P ist genau dann σ-additiv wenn es stetig von unten ist.

33. Gegeben sei eine überabzählbare Menge Ω.

a) $\mathcal{A} = \{A \subseteq \Omega | A \text{ oder } \Omega \setminus A \text{ ist abzählbar}\}$ ist eine σ-Algebra.
b) Mit

$$P(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ abzählbar ist,} \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

ist $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

34. Sei $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine (beliebige) Klasse von σ-Algebren auf einem Raum Ω. Zeige, dass $\mathcal{B} = \cap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra ist.

35. Zeige, dass die Vereinigung $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ zweier σ-Algebren $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ genau dann eine σ-Algebra ist, wenn $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ oder $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$.

36. Zeige, wenn die Ereignisse $\{A_j\}_{j \in J}$ unabhängig sind, so sind auch die Ereignisse $\{B_j\}_{j \in J}$ unabhängig, wobei $B_j \in \{A_j, \overline{A_j}\}$, $j \in J$.

37. **Gegenbeispiele zu Borel-Cantelli.**
a) Konstruiere ein Beispiel mit $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \infty$ und $P\left(\cap_n \cup_{k \geq n} A_k\right) = 0$.
Hinweis: Wähle für $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ das Einheitsintervall $[0, 1)$ mit Borel-σ-Algebra und Gleichverteilung.
b) Konstruiere ein Beispiel mit $\lim P(A_i) = 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \infty$, und $P\left(\cap_n \cup_{k \geq n} A_k\right) = 1$.

38. Seien $f : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ und $g : (\Omega_2, \mathcal{A}_2) \to (\Omega_3, \mathcal{A}_3)$ messbar. Zeige dass $g \circ f : \Omega_1 \to \Omega_3$ $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_3$-messbar ist.

39. Es sei $f : X \to Y$ und $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}(Y)$ eine σ-Algebra. Zeige dass auch $f^{-1}(\mathcal{A}) := \{f^{-1}(A) | A \in \mathcal{A}\}$ eine σ-Algebra ist.

40. Es seien $s, t : X \to \mathbb{R}$ einfache Funktionen. Zeige, dass

$$\int_A (s + t) d\mu = \int_A s \, d\mu + \int_A t \, d\mu$$

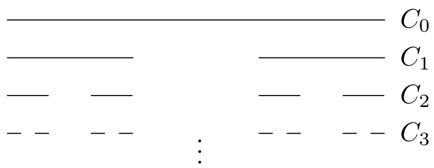
wobei das Integral wie in der Vorlesung definiert ist.

41. Zeige dass aus dem Satz über die dominierte Konvergenz (unter den gleich Voraussetzungen) auch

$$\lim_{n \to \infty} \int |f_n - f| d\mu = 0$$

folgt.

42. Die **Cantormenge** ist wie folgt definiert: Beginne mit $C_0 := [0, 1]$ und entferne das mittlere Drittel: $C_1 := [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Entferne vom Rest wiederum das mittlere Drittel: $C_2 := [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$:



Auf diese Weise erhält man eine Folge von absteigenden Mengen C_n und

der Grenzwert $C := \bigcap_n C_n$ ist die Cantormenge. Zeige, dass das Lebesgue-Mass von C gleich Null ist (Warum ist C überhaupt messbar?)
Hinweis: Was ist das Maß von C_n?

43. Die **Cantorfunktion** wird wie folgt konstruiert: Es seien C_n die Mengen aus der Konstruktion der Cantormenge C: C_n ist die Vereinigung von 2^n abgeschlossenen Intervallen mit $2^n - 1$ offenen Lücken dazwischen. Setzte $F_n(0) = 0$, $F_n(1) = 1$ und F_n gleich $j/2^n$ auf der j'ten Lücke von C_n und dehne es durch lineare Interpolation auf ganz $[0,1]$ aus (mit $F_n(0) = 0$, $F_n(1) = 1$). Beachte dass sich F_n dabei auf den Lücken aus den vorhergehenden Schritten nicht mehr verändert. Der Grenzwert $F(x) := \lim F_n(x)$ ist die Cantorfunktion.

    a) Zeige, dass F_n gleichmäßig konvergiert und F somit wohldefiniert und stetig ist.
    b) Zeige, dass $F' = 0$ auf einer Menge vom Lebesgue-Maß 1 ist.
    c) Zeige, dass F keine Dichte besitzt.
    Hinweis: Angenommen F hätte eine Dichte, dann müsste diese Dichte auf den Lücken – also auf dem Komplement der Cantormenge – verschwinden.

44. Zeige
$$I_n := \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-|x|^2} d^n x = \pi^{n/2}.$$
Hinweis: Verwende Fubini um $I_n = I_1^n$ zu zeigen und berechne I_2 mit Polarkoordinaten.

45. Die **Gammafunktion** ist definiert als
$$\Gamma(z) := \int_0^\infty x^{z-1} \mathrm{e}^{-x} dx, \qquad z > 0.$$
Zeige dass das Integral konvergiert.

    Verwende partielle Integration um
$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \qquad \Gamma(1) = 1,$$
zu zeigen und schließe daraus $\Gamma(n) = (n-1)!$ für $n \in \mathbb{N}$.

46. Zeige $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ und
$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi}$$
Hinweis: Substitution $x = t^2$ und Aufgabe 44.

47. Es sei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ und F sei eine streng monoton steigende, stetige Funktion mit $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$. Zeige
$$F_\star \lambda = d(F^{-1}),$$
wobei F^{-1} die Inverse von F ist und $d(F^{-1})$ das Maß auf $(0,1)$ zur Verteilungsfunktion F^{-1} bezeichnet.

    Besitzt F sogar eine Dichte $f > 0$, so ist
$$F_\star \lambda = \frac{1}{f \circ F^{-1}} \mathbb{1}_{(0,1)} d\lambda.$$

Hinweis: Betrachte F als Verteilungsfunktion eines Maßes dF und verwende die in der Vorlesung gezeigte Substitutionsregel

$$\int_{\mathbb{R}} g\, dF = \int_0^1 (g \circ F^{-1})(x) dx.$$

48. Es sei $d\mu(x) := \mathbb{1}_{[0,1]}(x)dx$ und $f := \mathbb{1}_{(-\infty,t]}$, $t \in \mathbb{R}$. Berechne $f_\star \mu$.

49. Zeigen Sie, dass die Exponentialverteilung gedächtnisfrei ist:

$$P(X \leq t) = P(X \leq s + t | X \geq s).$$

Die Ausfallwahrscheinlichkeit ist unabhängig vom Alter.

50. Die **Weibull-Verteilung** ist gegeben durch

$$F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-(\frac{t}{T})^b}.$$

Sie wird für die Modellierung von Lebensdauern verwendet. Dabei ist T die charakteristische Lebensdauer, bei der die Ausfallwahrscheinlichkeit gleich $F(T) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} = 63.2\%$ ist. Zeigen Sie:
a) Ist X Weibull-verteilt, so gilt

$$\mathrm{E}(X^n) = T^n \Gamma(1 + \frac{n}{b}).$$

Insbesondere

$$\mathrm{E}(X) = T\,\Gamma(1 + \frac{1}{b}), \qquad \mathrm{Var}(X) = T^2(\Gamma(1 + \frac{2}{b}) - \Gamma(1 + \frac{1}{b})^2).$$

(Tipp: Substitution $s = (\frac{t}{T})^b$ und Vergleich mit der Definition der Gammafunktion $\Gamma(x)$.)
b) Ist $X \sim \mathcal{E}xp(\alpha)$ exponentialverteilt, so ist $Y = X^c$ Weibull-verteilt mit Parametern $T = \alpha^{-c}$ und $b = \frac{1}{c}$.
(Tipp: $P(Y \leq y) = P(X^c \leq y)$.)

51. Es sei

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{16}, & 0 \leq x < 2, \\ x - \frac{x^2}{8} - 1, & 2 \leq x < 4, \\ 1, & 4 \leq x, \end{cases}$$

die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable X. Berechne $\mathrm{E}(X)$.

52. Die Dichte von X sei gegeben durch

$$f(x) = a + bx^2, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

und $f(x) = 0$ sonst. Bestimme $a, b \in \mathbb{R}$ unter der Annahme $\mathrm{E}(X) = \frac{3}{4}$. Bestimme die Verteilungsfunktion von X.

53. Es sei X eine nichtnegative Zufallsvariable mit stetiger Dichte und endlichem Erwartungswert. Zeige

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty (1 - F(y)) dy.$$

54. Es sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ standardnormalverteilt. Zeige

$$\mathrm{E}(X^k) = \begin{cases} 0, & k \text{ ungerade,} \\ (k-1)!!, & k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Mit $(k-1)!! := \frac{(2j)!}{2^j j!} = (k-1)\cdot(k-3)\cdots 1$ für $k = 2j$ gerade (Doppelfakultät).

55. Es sei X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mu := \mathrm{E}(X)$ und Standardabweichung $\sigma(X) := \sqrt{\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2}$. Die Schiefe von X ist definiert als

$$\gamma(X) := \mathrm{E}\left(\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right).$$

Zeige

$$\gamma(X) = \frac{\mathrm{E}(X^3) - 3\mu\sigma^2 - \mu^3}{\sigma^3}.$$

56. Es sei $X \sim \mathcal{U}(-1,1)$ gleichverteilt. Bestimme die Dichten von X^2 und $\exp(X)$.

57. Es sei $X, Y \sim \mathcal{U}(-1,1)$ gleichverteilt und unabhängig. Bestimme die Dichten von $X+Y$, XY und X/Y.

58. Es sei $X \sim \mathcal{U}(-1,1)$ gleichverteilt, $Y \sim \mathcal{E}xp(\alpha)$ exponentialverteilt und unabhängig. Bestimme die Dichte von $X+Y$.

59. Es seien $X, Y \sim \mathcal{B}e(p)$ bernoulliverteilt und unabhängig. Bestimme die Verteilung von $X+Y$.

60. Die Lebenserwartung eines Fisches sei exponentialverteilt und beträgt im Durchschnitt 120 Tage. Die Lebenserwartungen der einzelnen Fische seien unabhängig. Was ist die Wahrscheinlichkeit dass bis zur nächsten Paarungszeit (in einem Jahr = 365 Tage) von 500 mindestens 50 Fische überleben.

61. Die Zeit zwischen Empfängnis und Geburt ist näherungsweise normalverteilt mit $\mu = 266$ und $\sigma = 16$. Wenn der Mann zwischen 290 und 260 Tagen vor der Geburt im Ausland war, mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt er als Vater in Frage?

62. Zwei Zufallsvariablen X_1 und X_2 können nur die Werte 0 und 1 annehmen mit gemeinsamer Verteilung:

X_2 \ X_1	0	1
0	$1+p_0-p_1-p_2$	p_2-p_0
1	p_1-p_0	p_0

mit $0 \le p_j \le 1$, $p_0 \le p_{1,2}$ und $p_1 + p_2 \le 1 + p_0$.

Berechne die Kovarianz $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

63. Es seien X und Y absolut stetige Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & -x \le y \le x,\ 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Berechne die Randverteilung und den Erwartungswert von X.
b) Berechne die Randverteilung und den Erwartungswert von Y.
c) Berechne die Kovarianz $\mathrm{Cov}(X,Y)$ von X und Y.
d) Sind X und Y unabhängig?

64. Bei Bitcoin werden Transaktionen in Blöcken gesammelt und jeder neue Block wird wie bei einer Kette am Ende angehängt. Um Manipulationen zu verhindern enthält jeder Block eine Art Signatur die kollektiv von den Teilnehmern erstellt wird. Zu diesem Zweck wird ein mathematisches Rätsel gelöst bei dem die effektivste Strategie zufälliges Durchprobieren aller Möglichkeiten ist. Die Zeit bis ein Teilnehmer eine Lösung findet kann daher als exponentialverteilt mit Parameter α betrachtet werden. Der Paramter α spiegelt dabei die verfügbare Rechenleistung der Teilnehmer wieder und liegt bei Bitcoin bei ca. $\alpha \approx 0.1 min^{-1}$ (dazu wird alle zwei Wochen die Komplexität des Problems angepasst). Für eine erfolgreiche Manipulation der Kette müsste ein Angreifer eine alternative Kette erzeugen die länger ist (denn eine zentrale Regel bei Bitcoin ist, dass sobald eine länger Kette bekannt wird, alle kürzeren verworfen werden müssen). Da eine Transaktion bei Bitcoin als unmanipulierbar gilt wenn sie 6 Blöcke tief in der Kette ist, muss ein Angreifer schneller als die restlichen Teilnehmer 7 Blöcke validieren (und er muss dabei unabhängig von den restlichen Teilnehmern arbeiten).
a) Was ist die Verteilung für die Zeit in der n Blöcke validiert werden.
b) Angenommen eine Angreifer kann Blocke mit einer Rate β validieren. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Angreifer 7 Blöcke schneller als die restlichen Teilnehmer validiert?

65. Zeige

$$\mathrm{E}(|X-\mu|) \le \sigma(X), \qquad \mu = \mathrm{E}(X).$$

66. Es sei $X \sim \mathcal{F}(m,n)$ fisherverteilt. Berechne $\mathrm{Var}(X)$.

67. Ein System bestehe aus 3 unabhängigen Bauteilen deren Ausfallszeitpunkt (in Stunden) $X_j \sim \mathcal{E}xp(\alpha)$ exponentialverteilt mit Erwartungswert 50 Stunden sei. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach 100 Stunden noch
a) mindestens ein Bauteil funktioniert.
b) alle Bauteile funktionieren.

68. Es seinen $X_1, \dots X_n$ identisch verteilte, unabhängige Zufallsvariablen. Was ist die Verteilung von $X_\wedge = \min(X_1, \dots, X_n)$ bzw. $X_\vee = \max(X_1, \dots, X_n)$? (Hinweis: Was hat das mit dem vorherigen Beispiel zu tun?)

69. Die Lebensdauer (in Jahren) eines Brandmelders $X \sim \mathcal{E}xp(3)$ sei exponentialverteil. Die Anzahl der pro Jahr auftretenden Auslöseereignisse $Y \sim \mathcal{P}oi(1)$ sei poissonverteilt. Beide Zufallsvariablen werden als unabhängig angenommen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Brandmelder während seiner ganzen Lebensdauer nie anspricht? (Hinweis: Verwende die gemeinsame Dichte.)

70. Eine Maschine produziert Bolzen mit einem mittleren Durchmesser von $9.9mm$ und Standardabweichung $0.1mm$ und eine weitere Maschine bohrt Löcher mit einem mittleren Durchmesser von $10.0mm$ und Standardabweichung $0.2mm$. Beide Werte seien normalverteilt und unabhängig. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewählter Bolzen in ein zufällig gewähltes Loch passt.

71. Es sei X_j eine Folge quadratintegrierbarer Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie, dass das schwache Gesetz der großen Zahlen gilt falls $\mathrm{Cov}(X_j, X_k) \le c_{|j-k|}$ mit einer Nullfolge c_n gilt. (Hinweis: Verwende die Bilinearität der Kovarianz und zerlege die Summe in einen Teil mit $|j-k| \le R$ und in einen Teil mit $|j-k| > R$.)

72. Es seien X_n und X Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeige: falls $X_n \to X$ in Wahrscheinlichkeit, dann gilt $\mathrm{E}(f(X_n)) \to \mathrm{E}(f(X))$ für jede gleichmäßig stetige, beschränkte Funktion f.