Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Mathematik

zusammengestellt von G. Greschonig, WS 2020/21

Einige der folgenden Aufgaben wurden (mitunter auch teilweise) der *Aufgabensammlung für den Studienbeginn* von *Mathematik macht Freu(n)de* entnommen.

1. Aufgaben für den 14/15.10.2020

Aufgabe 1.1. Zeige, dass es keine ganzen Zahlen x, y gibt mit

$$35x - 49y = 1000.$$

(Verwende die Tatsache, dass jeder Teiler des Ausdrucks auf der linken Seite auch ein Teiler der rechten Seite sein muss und umgekehrt.)

Aufgabe 1.2. (Eine Warnung von Oscar Perron). Sei $n \in \mathbb{N}$ die größte natürliche Zahl. Angenommen, $n > 1$. Indem wir beide Seiten mit n multiplizieren sehen wir, dass n^2 größer als n ist. Weil n nun aber schon die größte natürliche Zahl ist, sehen wir ein, dass die Annahme $n > 1$ falsch ist. Das heißt, $n = 0$ oder $n = 1$. Nun ist $1 > 0$. Also ist 1 die größte natürliche Zahl. Oder doch nicht?

Aufgabe 1.3. Schreibe folgende Summen und Produkte ohne Summen bzw. Produktzeichen:

a) $\sum_{i=0}^{5} ix^{i+1}$
b) $\prod_{i\in\{3,4,7\}}(ix - 3)$
c) $\sum_{j=2}^{5}\prod_{k=0}^{2}(j(k+1) - 2)$
d) $\sum_{j=0}^{4}\sum_{k=j}^{4} k^j$

Aufgabe 1.4. Schreibe folgende Ausdrücke unter Verwendung des Summen bzw. Produktzeichens oder beider:

a) $7 + 14 + 21 + 28$
b) $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 - x_8$
c) $2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 8 \cdot 125 \cdot 16 \cdot 625$
d) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + 10x^9$

Aufgabe 1.5. Richtig oder falsch? Begründe!

a) $\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}) = \sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n} a_{ij})$
b) $\prod_{i=1}^{n}(\prod_{j=1}^{n}(a_i + b_j)) = (\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{j=1}^{n} b_j)$
c) $\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_i b_j) = (\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{j=1}^{n} b_j)$
d) $\prod_{i=1}^{n} a_{i+1}/a_i = a_n/a_1$

Aufgabe 1.6. a) Schreibe folgende Matrix explizit an:

$$A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \text{ mit } a_{ij} = \delta_{i,j+1}$$

b) Finde Formeln für die Eintragungen b_{ij} von $B := \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

2. Aufgaben für den 21/22.10.2020

Aufgabe 2.1. Zeige durch vollständige Induktion $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{n-1}{n}$ für $n \geq 2$.

Aufgabe 2.2. Zeige durch vollständige Induktion $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{2+n}{2^n}$ für $n \geq 0$.

Aufgabe 2.3. Zeige durch vollständige Induktion $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$ für $n \geq 1$.

Aufgabe 2.4. Zeige durch vollständige Induktion $\sum\limits_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$ für $n \geq 0$.

Aufgabe 2.5. Zeige durch vollständige Induktion $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$ für $n \geq 0$.

Aufgabe 2.6. Zeige durch vollständige Induktion $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$ für $n \geq 1$. (Hinweis: Verwende die Gaußsche Summenformel)

3. Aufgaben für den 28/29.10.2020

Aufgabe 3.1. Zeige $\binom{n}{k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}$ für $n \geq 0$ und $0 \leq k \leq n$.

Aufgabe 3.2. Finde eine von $n \in \mathbb{N}$ abhängige mathematische Aussage $A(n)$ (am besten eine Gleichung oder Ungleichung), die folgendes erfüllt: man kann zeigen, dass aus der Gültigkeit von $A(n)$ die Gültigkeit von $A(n+1)$ folgt, aber dennoch ist $A(n)$ für kein $n \in \mathbb{N}$ richtig.

Aufgabe 3.3. p, s seien wahre Aussagen, q, r hingegen falsche Aussagen. Bestimme den Wahrheitswert von

a) $(p \vee r) \wedge ((r \wedge s) \vee p)$,
b) $\neg(p \vee q) \vee (\neg s \wedge \neg r)$,
c) $\neg(p \wedge q) \wedge (\neg r \vee \neg s)$,
d) $((p \Longrightarrow q) \Longrightarrow r) \Longrightarrow s$.

Aufgabe 3.4. Finde unter den folgenden Aussagen die Kontradiktionen und Tautologien heraus:

a) $p \vee (q \wedge \neg p)$
b) $(r \vee q) \Longleftrightarrow (\neg r \Longrightarrow q)$
c) $(p \wedge q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$
d) $(p \vee (\neg p \vee q)) \vee \neg(q \wedge r)$

Aufgabe 3.5. Zeige mithilfe von Wahrheitstabellen:

a) $(a \vee b) \Longleftrightarrow ((\neg a) \Longrightarrow b)$
b) $(a \wedge b) \Longleftrightarrow (\neg(a \Longrightarrow \neg b))$
c) $(a \Longleftrightarrow b) \Longleftrightarrow ((a \Longrightarrow b) \wedge (b \Longrightarrow a))$

Aufgabe 3.6. Zeige mithilfe einer Wahrheitstabelle das Distributivgesetz $a \wedge (b \vee c) \Longleftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

4. Aufgaben für den 04/05.11.2020

Aufgabe 4.1. Verneine die folgenden Aussagen:

a) Alle Rosen sind geruchlos oder haben Stacheln.
b) Alle Rosen sind entweder geruchlos oder haben Stacheln.
c) Mindestens zwei Studierende haben bei der Prüfung die volle Punktezahl erreicht.
d) Mindestens ein Studierender hat einem Sitznachbar zu einer positiven Note verholfen, jedoch selbst nicht bestanden.

Aufgabe 4.2. Ermittle, ob die gegebene Aussage wahr oder falsch ist und bilde die Negation:

a) $\forall p \in \mathbb{P} : \exists q \in \mathbb{P} : p \mid q$
b) $\exists n \in \mathbb{N} : \forall p \in \mathbb{P} : p \mid n$
c) $\forall r \in \mathbb{Q} : \exists p \in \mathbb{P} : r \cdot p \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 4.3. Ermittle, ob die gegebene Aussage wahr oder falsch ist und bilde die Negation:

a) $\forall p \in \mathbb{P} : \forall q \in \mathbb{P} : (p \mid q \implies p = q)$
b) $\forall p \in \mathbb{P} : \forall m, n \in \mathbb{Z} : (p \mid m \cdot n \implies (p \mid m \vee p \mid n))$
c) $\exists m \in \mathbb{Z} : \forall n \in \mathbb{Z} : (n \text{ ungerade } \implies m \cdot n \text{ gerade})$

Aufgabe 4.4. Ermittle, ob die gegebene Aussage wahr oder falsch ist und bilde die Negation:

a) $\exists a, b \in \mathbb{R} : (a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \cdot b = 0)$
b) $\forall x \in \mathbb{R} : (x \notin \mathbb{Q} \implies x^2 \notin \mathbb{Q})$
c) $\forall x \in \mathbb{R} : (x^2 \notin \mathbb{Q} \implies x \notin \mathbb{Q})$

Aufgabe 4.5. Formuliere gemäß der Regel $(p \implies q) \iff (\neg q \implies \neg p)$ äquivalente Aussagen zu:

a) $n^2 > n \implies n > 1$
b) $\forall n \in \mathbb{N} : 6 \nmid n \implies 3 \nmid n$
c) $\forall n \in \mathbb{N} : n^3 \text{ ungerade} \implies n \text{ ungerade}$

Aufgabe 4.6. Gegeben sind die Mengen $A, B \subseteq X$. Vereinfache die folgenden Ausdrücke:

a) $(A \cap B^c) \cup B$
b) $(A \cap B) \cup (A^c \cap B)$

5. Aufgaben für den 11/12.11.2020

Aufgabe 5.1. Seien $A, B \subseteq X$. Zeige: Die Mengen $A \setminus B, B \setminus A, A \cap B \subseteq X$ sind paarweise disjunkt und ihre Vereinigung ist $A \cup B$.

Aufgabe 5.2. Zeige, dass für drei Mengen $A, B, C \subseteq X$ gilt:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \text{ und } (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Aufgabe 5.3. Gib ein Beispiel für eine Relation an, die antisymmetrisch und transitiv aber nicht reflexiv ist. Gib ein Beispiel für eine Relation an, die symmetrisch und transitiv aber nicht reflexiv ist.

Aufgabe 5.4. Zeige, dass auf $\mathbb{Z}$ durch die Relation

$$x \sim y :\iff |x - y| < 1$$

eine Äquivalenzrelation definiert wird (welche Äquivalenzrelation?), dass aber durch

$$x \approx y :\iff |x - y| \leq 1$$

sowie

$$x \simeq y :\iff x - y \text{ ist ungerade}$$

keine solche definiert wird.

Aufgabe 5.5. Sei M die Menge aller Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4\}$. Setze

$P_0 := \{\emptyset\}$,
$P_1 := \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$,

$P_2 = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$,
$P_3 := \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$,
$P_4 := \{\{1,2,3,4\}\}$.

Zeige, dass $P_0, \ldots, P_4$ eine Partition von M bilden und bestimme die durch diese Partition festgelegte Äquivalenzrelation.

Aufgabe 5.6. Sei M eine beliebige Menge und $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge von M. Dann definiert $A \leq B :\Longleftrightarrow A \subseteq B$ eine Ordnungsrelation auf $\mathcal{P}(M)$.

6. Aufgaben für den 18/19.11.2020

Aufgabe 6.1. Seien $(A, \leq)$ und $(B, \preceq)$ zwei geordnete Mengen. Zeige, dass auf $A \times B$ durch

$$(a,b) \trianglelefteq (a',b') :\Longleftrightarrow a < a' \vee (a = a' \wedge b \preceq b')$$

eine Ordnungsrelation definiert ist.

Aufgabe 6.2. Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Funktion und $\approx$ eine Äquivalenzrelation auf Y. Zeige, dass

$$x \sim x' :\Longleftrightarrow f(x) \approx f(x')$$

eine Äquivalenzrelation auf X definiert. Dies gilt insbesondere für $y \approx y' :\Longleftrightarrow y = y'$. Funktioniert diese Konstruktion auch im Falle einer Ordnungsrelation auf Y?

Aufgabe 6.3. Ermittle für folgende Mengen Supremum, Infimum, Maximum und Minimum, sofern diese existieren:

a) $(-3,1] \cup (2,7]$
b) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [-1,1]$
c) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(1 + 1/2^n, n+2)$
d) $\bigcap_{n=1}^{\infty}(1 - 1/n^2, 2 - 1/n]$

Aufgabe 6.4. Bestimme das Bild und das Urbild von

a) $[0,2)$ unter der Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto (x-1)/(x+1)$,
b) $(-1,1]$ unter der Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{x^2}{2} + 2x + 1$.

Aufgabe 6.5. Sei $f : A \longrightarrow B$. Sind $A_1, A_2 \subseteq A$ und $B_1 \subseteq B$, so gelten die Inklusionen

$$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2),$$

$$A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$$

und

$$f(f^{-1}(B_1)) \subseteq B_1.$$

Zeige jeweils anhand eines Beispiels, dass die Gleichheit i.A. nicht zutrifft.

Aufgabe 6.6. Zeige: Ist $f : A \longrightarrow B$ jedoch injektiv, dann gilt für alle $A_1, A_2 \subseteq A$ die Gleichheit

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2).$$

7. Aufgaben für den 25/26.11.2020

Aufgabe 7.1. a) Gibt es zwei Funktionen f, g, die beide nicht bijektiv sind, sodass die Verknüpfung $f \circ g$ bijektiv ist?
b) Gibt es zwei Funktionen f, g, die beide nicht injektiv sind, sodass die Verknüpfung $f \circ g$ injektiv ist?

Aufgabe 7.2. Sei die Funktion $f : A \longrightarrow B$ injektiv und $A, B \neq \emptyset$. Zeige, dass eine surjektive Funktion $g : B \longrightarrow A$ existiert.

Aufgabe 7.3. Wähle jeweils Teilmengen von $\mathbb{R}$ so als Definitionsbereich und Zielbereich aus, dass durch die Zuordnung $x \longmapsto x^2 - 2x + 3$ eine weder injektive noch surjektive Funktion, eine injektive aber nicht surjektive Funktion, eine surjektive aber nicht injektive Funktion, eine bijektive Funktion bestimmt wird.

Aufgabe 7.4. Bestimme für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2 - 2x$ und $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^{-1}$ die Kompositionen $f \circ g$ und $g \circ f$ unter der Angabe eines geeigneten Definitionsbereichs.

Aufgabe 7.5. Bestimme die Umkehrfunktion von $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

Aufgabe 7.6. Gib eine explizite Bijektion $f : A \longrightarrow B$ an und beweise deren Bijektivität:
a) $A = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ und $B = \{2l - 1 \mid l \in \mathbb{Z}\}$.
b) $A = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ und $B = \{3l + 1 \mid l \in \mathbb{Z}\} \cup \{3m + 2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

8. Aufgaben für den 02/03.12.2020

Aufgabe 8.1. Zeige, dass alle Teilmengen der Gestalt $m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\}$ mit $m \in \mathbb{N}$ versehen mit der Addition Untergruppen von $(\mathbb{Z}, +)$ sind.

Aufgabe 8.2. Bestimme die Gruppentafel von $(\mathbb{Z}_6, +)$ sowie alle Untergruppen.

Aufgabe 8.3. Bilde die Gruppentafel von $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{\bar{0}\}, \cdot)$. Welche additive Gruppe von Restklassen hat eine entsprechende Gruppentafel? Gib einen Gruppenisomorphismus zwischen den beiden Gruppen an.

Aufgabe 8.4. Sei $\mathcal{S}_n$ die Menge aller bijektiven Abbildungen (= Permutationen) der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ in sich und für $\phi, \psi \in \mathcal{S}_n$ bezeichne $\phi \circ \psi$ die Komposition dieser beiden Permutationen. Zeige, dass $(\mathcal{S}_n, \circ)$ eine Gruppe bildet. Gib die Gruppentafel für $\mathcal{S}_3$ an.

Aufgabe 8.5. Sei M eine Teilmenge einer Gruppe G. Sei $U(M)$ der Durchschnitt aller Untergruppen H von G, die M enthalten, d.h. $U(M) = \bigcap\{H \leq G : M \subseteq H\}$. Zeige, dass $U(M)$ eine Untergruppe von G ist.

Aufgabe 8.6. Sei $f : G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige:
a) Der Kern $\ker(f) := f^{-1}(e_H) = \{g \in G : f(g) = e_H\}$ ist eine Untergruppe von G.
b) Es gilt $\ker(f) = \{e_G\} \Longleftrightarrow f$ ist injektiv.

9. Aufgaben für den 10/11.12.2020

Aufgabe 9.1. Bestimme die Lösungen der folgenden Kongruenzen:
a) $4 + 3x \equiv 2 \mod 7$
b) $x^2 \equiv 2 \mod 7$
c) $x^2 \equiv 3 \mod 7$

Aufgabe 9.2. Vereinfache die angegebenen Terme:

a) $\frac{[2]_7-[6]_7}{[3]_7+[1]_7}$

b) $\cfrac{\cfrac{[3]_7}{[2]_7}}{\cfrac{[4]_7}{[5]_7}}$

Aufgabe 9.3. Berechne $7^{100} \mod 40$ ohne technische Hilfsmittel.

Aufgabe 9.4. Löse die Gleichung $x^2 = -3$ in $\mathbb{Z}_5$ bzw. in $\mathbb{Z}_7$.

Aufgabe 9.5. Zeige, dass die Einheiten (multiplikativ invertierbaren Elemente) eines Ringes mit Eins stets eine multiplikative Gruppe bilden.

Aufgabe 9.6. Stelle die gegebene Zahl in der Form $p + q \cdot \sqrt{5}$ mit $p, q \in \mathbb{Q}$ dar:

a) $5 \cdot (3 - 6 \cdot \sqrt{5}) - (-4 + \sqrt{5}) \cdot 7$
b) $(1 - \sqrt{5}) \cdot (2 + \sqrt{5})$
c) $\frac{1}{3 \cdot \sqrt{5}+2}$

10. Aufgaben für den 17/18.12.2020

Aufgabe 10.1. Bestimme $\mathrm{ggT}(213, 2311)$ mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus. Stelle diesen ggT als Linearkombination von 213 und 2311 dar.

Aufgabe 10.2. Sei K ein angeordneter Körper, $a, b \in K$. Zeige, dass aus $a < b$ folgt, dass $a < (a + b)/2 < b$, wobei $2 := 1 + 1$.

Aufgabe 10.3. Zeige, dass für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \text{ und } |x - z| \leq |x - y| + |y - z|$$

Aufgabe 10.4. Löse in $\mathbb{R}$ die Ungleichung

$$|x^2 + 1| + 1 \leq |4x + 2|.$$

Aufgabe 10.5. Löse in $\mathbb{R}$ die Ungleichung

$$\frac{x - 1}{x + 1} < |x - 1|.$$

Aufgabe 10.6. Bestimme die Lösungsmenge in $\mathbb{R}$ der folgenden Gleichung in Abhängigkeit von t:

$$(x + 1)^2 + t^2 = 4$$