Bitte beachten (wurde in meinen damaligen VO klar kommuniziert): Der gesamte Analysis-Zyklus ist stark an die (2005-2008 verfügbaren Ausgaben der) Bücher von Forster angelehnt, mit Zusätzen aus Heuser und Rudin im dritten Semester.

Vorlesungsskriptum zum Modul

ANALYSIS

Günther Hörmann & David Langer

Fakultät für Mathematik der Universität Wien

Wintersemester 2008/2009

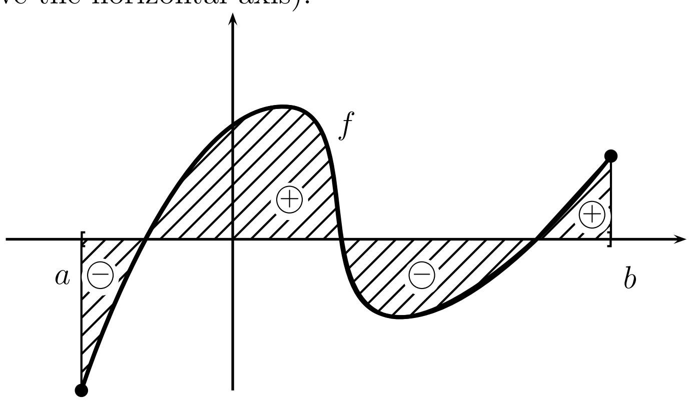
Inhalt

$\boxed{\text{IV}}$ INTEGRATION

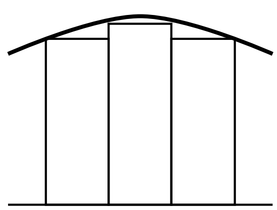
§9. The Riemann integral

9.0. Two paths leading to the idea of integration:

(A) Geometric motivation: Suppose we are to determine wether more area of the subset of the plane between the horizontal axis and the graph of a function $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ is below or above the axis. Or, in case $f(t) \geq 0$ for all t, we want to determine the area underneath the graph (and above the horizontal axis).



In the small, if f is reasonably flat, we could hope to approximate the area quite well by using narrow vertical rectangles:



Such a rectangular approximation can be thought of being the area underneath the graph of a simple function $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ corresponding to a partition $a = t_0 < t_1 \ldots < t_n = b$ and satisfying

$$\varphi(t) = c_j \qquad t \in [t_j, t_{j+1}[\quad (j = 0, \ldots, n-1)$$

for suitably chosen constants $c_0, \ldots, c_{n-1}$. The approximate value of the area A is then given by

$$A \approx \sum_{j=0}^{n-1} c_j\,(t_{j+1}-t_j) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(t_j)\,(t_{j+1}-t_j).$$

(B) A basic problem from physics: If $x\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ represents the position of a one-dimensional particle at all times $t \in [0,T]$, then the speed $v(t)$ at time t is given by the derivative (assuming that it exists)

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{\Delta \text{ distance}}{\Delta \text{ time}}.$$

Suppose that we only know the initial position $x_0 := x(0)$ of the particle and its speed at all times, that is, $v\colon [0,T] \to \mathbb{R}$. How can we recover the position (function) $x\colon [0,T] \to \mathbb{R}$?

Within any short time interval $[t_1,t_2] \subseteq [0,T]$ we might try to approximate the position $x(t)$ as the gain in distance relative to the position $x(t_1)$ according to the law 'distance = speed × time' for a constant speed motion:

$$x(t) \approx x(t_1) + v(t_1)\,(t-t_1) \qquad (t \in [t_1,t_2]).$$

We may successively carry out such approximations in time intervals $[0,t_1],[t_1,t_2],\ldots,$ $[t_{n-1},T]$. Finally, we sum over the respective intervals (putting $t_0=0$ and $t_n=T$) and obtain

$$x(T) \approx x_0 + \sum_{j=0}^{n-1} v(t_j)\,(t_{j+1}-t_j).$$

We observe that the sum can be interpreted as the area between the horizontal axis and the graph of the simple function $\varphi\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ with values $\varphi(t) := v(t_j)$ when $t \in [t_j, t_{j+1}[$ $(j = 0,\ldots,n-1)$.

We saw that in both cases (A) and (B) we could employ simple functions as the basic building blocks for an approximate solution of the posed problems. Thus we introduce a notation for the set of all simple functions on a given interval.

Definition: Let $a<b$. We define $\mathcal{T}[a,b] := \{\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R} : \varphi \text{ is a simple function}\}$.

9.1. Proposition: (i) If $\varphi,\psi \in \mathcal{T}[a,b]$ then $\varphi+\psi \in \mathcal{T}[a,b]$.

(ii) If $\lambda \in \mathbb{R}$ and $\varphi \in \mathcal{T}[a,b]$ then $\lambda \cdot \varphi \in \mathcal{T}[a,b]$.

In other words, $\mathcal{T}[a,b]$ is a linear subspace of the real vector space $\mathbb{R}^{[a,b]} = \{g\colon [a,b] \to \mathbb{R}\}$ of all real-valued functions on $[a,b]$.

Proof: (ii) is clear from the definition.

(i) Let φ be defined via the partition $\mathcal{Z} = \{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ with $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ and ψ be defined via the partition $\mathcal{Z}' = \{x'_0,x'_1,\ldots,x'_m\}$ with $a = x'_0 < x'_1 < \ldots < x'_m = b$.

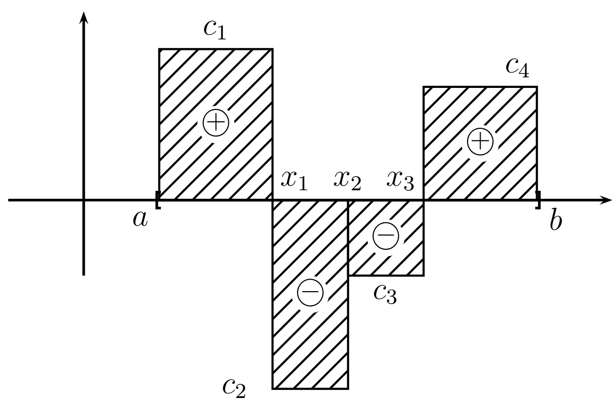
Then we define the partition $\widetilde{\mathcal{Z}} := \mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}'$, which may be written in the form $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$, where each t_j $(0 \le j \le k)$ equals some x_l $(0 \le l \le n)$ or x'_p $(0 \le p \le m)$ and $\max(n, m) \le k \le n + m$.

Since each interval $]t_{j-1}, t_j[$ is contained in some subinterval of the partition $\mathcal{Z}$ and $\mathcal{Z}'$ respectively, we have that φ and ψ is constant on each interval $]t_{j-1}, t_j[$ $(j = 1, \ldots, k)$. Hence also $\varphi + \psi$ is constant on these intervals, which proves that $\varphi + \psi$ is a simple function. $\square$

9.2. Integral of simple functions:

DEFINITION: Let $\varphi \in \mathcal{T}[a, b]$ with partition $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ and values $\varphi(x) = c_j$ when $x \in]x_{j-1}, x_j[$ $(j = 1, \ldots, n)$. Then the integral[1] of φ over $[a, b]$ is defined by

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx := \sum_{j=1}^{n} c_j\,(x_j - x_{j-1}). \tag{9.1}$$



LEMMA: $\varphi \mapsto \int_a^b \varphi(x)\,dx$ defines a map $\mathcal{T}[a, b] \to \mathbb{R}$, that is, the value of the integral does not depend on the choice of representation (and partition) of φ.

Proof: Denote by $\mathcal{Z} : a = x_0 < \ldots < x_n = b$ and $\mathcal{Z}' : a = t_0 < \ldots < t_m = b$ two partitions for φ with respective values

$$\varphi(x) = c_j \quad (x \in]x_{j-1}, x_j[, j = 1, \ldots, n) \qquad \text{and} \qquad \varphi(x) = c'_k \quad (x \in]t_{k-1}, t_k[, k = 1, \ldots, m)$$

[1] The term "integral" is derived from the Latin integer, meaning whole, untouched. The modern integral sign was introduced by Leibnitz in 1675. It was originally an abbreviation of the Latin word summa, written *ſumma* in Leibnitz's handwriting.

and put

$$\int\limits_{\mathcal{Z}} \varphi := \sum_{j=1}^{n} c_j\,(x_j - x_{j-1}), \qquad \int\limits_{\mathcal{Z}'} \varphi := \sum_{k=1}^{m} c'_k\,(t_k - t_{k-1}).$$

We have to show that $\int_{\mathcal{Z}} \varphi = \int_{\mathcal{Z}'} \varphi$.

Case 1: $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}'$

For all $j \in \{0, \ldots, n\}$ we can find k_j such that $x_j = t_{k_j}$. Hence we have

$$x_{j-1} = t_{k_{j-1}} < t_{k_{j-1}+1} < \ldots < t_{k_j} = x_j \qquad (1 \le j \le n)$$

and $c_j = c'_l$ when $k_{j-1} < l \le k_j$. Therefore

$$\int\limits_{\mathcal{Z}'} \varphi = \sum_{k=1}^{m} c'_k\,(t_k - t_{k-1}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=k_{j-1}+1}^{k_j} c'_l\,(t_l - t_{l-1})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j \underbrace{\sum_{l=k_{j-1}+1}^{k_j} (t_l - t_{l-1})}_{=t_{k_j} - t_{k_{j-1}} = x_j - x_{j-1}} = \sum_{j=1}^{n} c_j\,(x_j - x_{j-1}) = \int\limits_{\mathcal{Z}} \varphi.$$

Case 2: $\mathcal{Z}' \subseteq \mathcal{Z}$ is treated as in case 1 with the roles of $\mathcal{Z}$ and $\mathcal{Z}'$ interchanged.

Case 3: Neither $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}'$ nor $\mathcal{Z}' \subseteq \mathcal{Z}$.

Define the common refinement of the partitions by $\mathcal{Z}^* := \mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}'$. Then $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}^*$ and $\mathcal{Z}' \subseteq \mathcal{Z}^*$, thus we have

$$\int\limits_{\mathcal{Z}} \varphi = \int\limits_{\mathcal{Z}^*} \varphi = \int\limits_{\mathcal{Z}'} \varphi$$

by cases 1 and 2. □

9.3. Proposition (Linearity and monotonicity of the integral): Let $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a,b]$ and $\lambda \in \mathbb{R}$. We have the following:

(i) $\displaystyle\int_a^b (\varphi + \psi)(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_a^b \psi(x)\,dx$

(ii) $\displaystyle\int_a^b (\lambda\,\varphi)(x)\,dx = \lambda \int_a^b \varphi(x)\,dx$

(iii) If $\varphi \le \psi$, i.e., $\varphi(x) \le \psi(x)$ for all x, then $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,dx \le \int_a^b \psi(x)\,dx$.

In other words, the map $\varphi \mapsto \int_a^b \varphi(x)\,dx$, $\mathcal{T}[a,b] \to \mathbb{R}$ is a linear monotone functional.

Proof: Use a common partition for both functions φ and ψ (as in the previous proofs), then the assertions follow from corresponding properties of the defining finite sums. $\square$

9.4. Definition (Riemann-integral): Let $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ be a <u>bounded</u> function.

(i) We define the *upper integral* of f by

$$\int_a^{b*} f(x)\,dx := \inf\,\{\int_a^b \psi(x)\,dx : \ \psi \in \mathcal{T}[a,b],\ f \le \psi\} \tag{9.2}$$

and the *lower integral* of f by

$$\int_{a*}^{b} f(x)\,dx := \sup\,\{\int_a^b \varphi(x)\,dx : \ \varphi \in \mathcal{T}[a,b],\ \varphi \le f\}. \tag{9.3}$$

Note that we always have $\int_a^{b*} f(x)\,dx \ge \int_{a*}^{b} f(x)\,dx$.

(ii) The function f is *Riemann*[2] *-integrable* ⟨Riemann-integrierbar⟩ if

$$\int_a^{b*} f(x)\,dx = \int_{a*}^{b} f(x)\,dx.$$

In this case we define the *R-integral of f from a to b* by

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^{b*} f(x)\,dx. \tag{9.4}$$

Occasionally we will also employ the short-hand notation $\int_a^b f$ instead of $\int_a^b f(x)\,dx$.

9.5. Examples: 1) If $\varphi \in \mathcal{T}[a,b]$, then clearly the lower integral equals the upper integral, thus φ is R-integrable and the R-integral coincides with the integral of simple functions as defined above.

2) The Dirichlet function $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is bounded, thus its restriction $f := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}\,|_{[0,1]}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ is bounded. But f is not R-integrable: Indeed, since every open interval contains rational as well as irrational numbers, we have that
$\psi \in \mathcal{T}[0,1], \psi \ge f \quad \Longrightarrow \quad \psi \ge 1$ on every open subinterval of any partition

[2] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) [ˈgeˑɔʁk ˈfriːtrɪç ˈbeʁnhaʁt ˈʁiːman], German mathematician

and
$\varphi \in \mathcal{T}[01], \varphi \leq f \quad \Longrightarrow \quad \varphi \leq 0$ on every open subinterval of any partition.
Therefore $\int_0^{1*} f(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_{*0}^{1} f(x)\,dx$.

For practical purposes as well as for a further theoretical investigation it is essential to have a list of basic properties of the integral and alternative characterizations of R-integrability at hand. To develop such is our task in the remainder of this section.

9.6. Theorem: Let $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ be bounded. The following are equivalent:

(i) f is R-integrable

(ii) For all $\varepsilon > 0$ we can find $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a,b]$ with $\varphi \leq f \leq \psi$ such that

$$0 \leq \int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx \leq \varepsilon.$$

Proof: This follows directly from the definition of the R-integral and the general properties of the infimum and the supremum. □

9.7. Corollary: Every continuous function $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ is R-integrable.

Proof: Let $\varepsilon > 0$. By Proposition 5.11 we can find $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a,b]$ with $\varphi \leq f \leq \psi$ such that

$$\sup_{x \in [a,b]} (\psi(x) - \varphi(x)) \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Then monotonicity and linearity of the integral gives

$$0 \leq \int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b (\psi - \varphi)(x)\,dx \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b 1\,dx = \varepsilon,$$

which implies R-integrability by the above theorem. □

9.8. Corollary: Every monotone function $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ is R-integrable.

Remark: Note that a monotone function on a bounded closed interval is necessarily bounded, since $f([a,b]) \subseteq [\min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b))]$.

Proof: We may assume that f is increasing, since the case f being decreasing is analogous.

For any $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, we define an equidistant partition of $[a,b]$ by $x_k := a + k(b-a)/n$ $(k = 0, \ldots, n)$.

Associated with this partition we define simple functions $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a,b]$ as follows:

$$\varphi(x) = f(x_{k-1}) \text{ and } \psi(x) = f(x_k) \text{ when } x \in [x_{k-1}, x_k[\quad (k = 0, \dots, n), \\ \text{and } \varphi(b) = \psi(b) = f(b).$$

Since f is increasing we have $\varphi \leq f \leq \psi$. Furthermore, we obtain

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx &= \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big) = \frac{b-a}{n}\big(f(x_n) - f(x_0)\big) \\ &= \frac{(b-a)\,(f(b) - f(a))}{n} \to 0 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

Hence, for any $\varepsilon > 0$ we have $0 \leq \int_a^b \psi - \int_a^b \varphi \leq \varepsilon$ for sufficiently large n, which proves R-integrability due to the above theorem. □

9.9. Proposition (Linearity and monotonicity again): Let $f, g \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ be R-integrable and $\lambda \in \mathbb{R}$. Then the following statements hold:

(i) $f + g$ is R-integrable and

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

(ii) λf is R-integrable and

$$\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

(iii) If $f \leq g$ then $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Proof: (iii) is immediate from the definition.

(i): Let $\varepsilon > 0$. We may choose $\varphi_j, \psi_j \in \mathcal{T}[a,b]$ $(j = 1,2)$ such that $\varphi_1 \leq f \leq \psi_1$, $\varphi_2 \leq g \leq \psi_2$ and $\int_a^b \psi_j - \int_a^b \varphi_j \leq \varepsilon/2$ $(j = 1,2)$. Then clearly

$$\varphi_1 + \varphi_2 \leq f + g \leq \psi_1 + \psi_2 \quad \text{and} \quad \int_a^b (\psi_1 + \psi_2)(x)\,dx - \int_a^b (\varphi_1 + \varphi_2)(x)\,dx \leq \varepsilon,$$

thus $f + g$ is R-integrable.

Furthermore, since $\int_a^b(\psi_1+\psi_2) = \int_a^b \psi_1 + \int_a^b \psi_2$ and $\int_a^b(\varphi_1+\varphi_2) = \int_a^b \varphi_1 + \int_a^b \varphi_2$ we obtain

$$\int_a^b f + \int_a^b g = \int_{*a}^b f + \int_{*a}^b g \leq \int_{*a}^b (f+g) \leq \int_a^{*b} (f+g) \leq \int_a^{*b} f + \int_a^{*b} g = \int_a^b f + \int_a^b g,$$

therefore equality throughout and thus the asserted equation.

The proof of (ii) is left as an exercise (hint: consider the cases $\lambda = 0$, $\lambda > 0$, $\lambda = -1$, and $\lambda < 0$ separately). $\square$

9.10. Positive and negative part of a function: Let D be an arbitrary set and $f\colon D \to \mathbb{R}$ be a real-valued function. Then the positive part $f_+\colon D \to \mathbb{R}$ and the negative part $f_-\colon D \to \mathbb{R}$ of f are defined as follows:

$$f_+(x) := \begin{cases} f(x) & \text{if } f(x) > 0 \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \qquad \text{and} \qquad f_-(x) := \begin{cases} -f(x) & \text{if } f(x) < 0 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Note that we have $f_+(x) = \max(f(x), 0)$, $f_-(x) = -\min(f(x), 0)$ (for all $x \in D$) and

$$f = f_+ - f_- \qquad |f| = f_+ + f_-. \tag{9.5}$$

9.11. Proposition: Let $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ be R-integrable, then the following statements hold:

(i) f_+, f_-, and $|f|$ are R-integrable as well and we have the triangle inequality for integrals

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx. \tag{9.6}$$

(ii) For all $p \in [1, \infty[$: $|f|^p$ is R-integrable.

(iii) $f \cdot g$ is R-integrable.

Proof: (i): Let $\varepsilon > 0$. Choose $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a,b]$ with $\varphi \leq f \leq \psi$ such that $0 \leq \int_a^b \psi - \int_a^b \varphi \leq \varepsilon$. Then φ_+, ψ_+ (as well as φ_-, ψ_-) also belong to $\mathcal{T}[a,b]$ and we have $\varphi_+ \leq f_+ \leq \psi_+$ (as well as $\varphi_- \leq f_- \leq \psi_-$). Since $\psi_+ - \psi = \psi_- \leq \varphi_- = \varphi_+ - \varphi$ we obtain with some $\xi \in [a,b]$

$$0 \leq \int_a^b \psi_+ - \int_a^b \varphi_+ = \int_a^b (\psi_+ - \varphi_+) \leq \int_a^b (\psi - \varphi) \leq \varepsilon,$$

hence the R-integrability of f_+. Similarly, we can prove that f_- is R-integrable.

Using the relation $|f| = f_+ + f_-$ we deduce that $|f|$ is R-integrable. Since $-f \le |f|$ and $f \le |f|$ Equation (9.6) follows from the monotonicity and linearity of the integral.

(ii): Assume that f is bounded by $K > 0$, i.e., $0 \le |f(x)| \le K$ for all $x \in [a, b]$.

Let $\varepsilon > 0$. Since by (i) $|f|$ is R-integrable and $0 \le |f| \le K$ we can find simple functions $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a, b]$ with $0 \le \varphi \le |f| \le \psi \le K$ such that $0 \le \int_a^b \psi - \int_a^b \varphi \le \varepsilon/(pK^{p-1})$.

Consider $h\colon [0, K] \to \mathbb{R}$ given by $h(x) := x^p$. By the mean value theorem of differential calculus we have for all $y, z \in [0, K]$

$$|h(z) - h(y)| \le \sup_{\xi \in [0,K]} |h'(\xi)| \cdot |z - y| = pK^{p-1}|z - y|.$$

Inserting $z = \psi(x)$ and $y = \varphi(x)$ we obtain for all $x \in [a, b]$

$$|\psi^p(x) - \varphi^p(x)| \le pK^{p-1}|\psi(x) - \varphi(x)|.$$

Note that φ^p and ψ^p are simple functions satisfying $0 \le \varphi^p \le |f|^p \le \psi^p$. Moreover, by the previous estimate we obtain

$$0 \le \int_a^b \psi^p - \int_a^b \varphi^p = \int_a^b (\psi^p - \varphi^p) \le pK^{p-1} \int_a^b (\psi - \varphi) \le \varepsilon.$$

Therefore we conclude that $|f|^p$ is R-integrable.

(iii): Since $f \pm g$ is R-integrable the assertion follows from (ii) using the decomposition $fg = \big((f + g)^2 - (f - g)^2\big)/4$. □

9.12. Proposition (Mean value theorem of integral calculus): Let $f, \varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ be continuous and assume that $\varphi \ge 0$. Then there exists $\xi \in [a, b]$ such that

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{9.7}$$

In particular, if $\varphi(x) := 1$ for all x we obtain

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b - a). \tag{9.8}$$

Remark: The number

$$M(f) := \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\,dx$$

is called the *mean (value)* of f on $[a,b]$.

Proof: f is bounded, hence the values of

$$m := \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}, \text{ and } M := \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$$

are finite. Since $\varphi \geq 0$ we have $m\varphi \leq f\varphi \leq M\varphi$ and therefore

$$m \int_a^b \varphi \leq \int_a^b (f\varphi) \leq M \int_a^b \varphi.$$

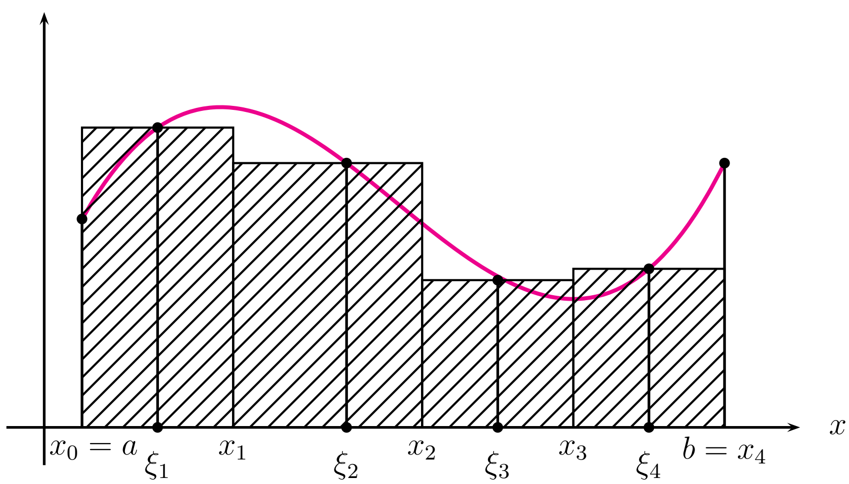
Thus there must be a number $\mu \in [m, M]$ such that $\int_a^b (fg) = \mu \int_a^b \varphi$. Since f is continuous the intermediate value theorem guarantees the existence of some $\xi \in [a,b]$ such that $\mu = f(\xi)$. Thus the assertion follows. □

9.13. Riemann sums: Here we discuss an important alternative to compute (and define) R-integrals. The following approach is, in fact, in the spirit of Riemann's original treatment.

DEFINITION: Let $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ and $\mathcal{Z} : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ be a partition of $[a,b]$. For all $k \in \{1,\ldots,n\}$ let ξ_k be an arbitrary point (⟨*Stützstelle*⟩) in $[x_{k-1}, x_k]$. We summarize all division points $x_0,\ldots,x_n$ and intermediate points $\xi_1,\ldots,\xi_n$ in the notation $\mathfrak{Z} := ((x_k)_{k=0}^n; (\xi_j)_{j=1}^n)$ and call

$$S(\mathfrak{Z}, f) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \tag{9.9}$$

the *Riemann sum* ⟨*Riemann-Summe*⟩ of f with respect to $\mathfrak{Z}$. We also introduce the value $\mu(\mathfrak{Z}) := \max\limits_{1\leq k\leq n}(x_k - x_{k-1})$ as a measure of the (maximum size of) subintervals of the partition $\mathcal{Z}$ (⟨*Feinheit der Zerlegung*⟩). (Note that $\mu(\mathfrak{Z})$ depends only on the division points in $\mathcal{Z}$, and not on the ξ_k. But it is common practice to associate it with $\mathfrak{Z}$, thus the notation.)



We see that the Riemann sum can be interpreted as the integral of a simple function φ with values $\varphi(x) = f(\xi_k)$ when $x \in]x_{k-1}, x_k[$, i.e.,

$$S(\mathfrak{Z}, f) = \int_a^b \varphi(x)\, dx,$$

where φ interpolates f at the points $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Riemann's idea was to consider the limit behavior of $S(\mathfrak{Z}, f)$ as $\mu(\mathfrak{Z}) \to 0$, and, if the limit exists, take this to be the integral of f.

THEOREM: Let $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ be bounded. Then the following are equivalent:

(i) f is R-integrable

(ii) There exists $s \in \mathbb{R}$ with the following property: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ such that for any choice of $\mathfrak{Z}$ with $\mu(\mathfrak{Z}) < \delta$ we have

$$|S(\mathfrak{Z}, f) - s| \leq \varepsilon.$$

Moreover, in this case $s = \int_a^b f(x)\, dx$. (Hence the integral can then be obtained as the limit of Riemann sums.)

REMARK: One can show that property (ii) in the above theorem implies that f is bounded on $[a, b]$ (cf. [Heu03, Satz 79.7]).

Proof: (i) $\Rightarrow$ (ii): For arbitrary $\mathfrak{Z}$ and any choice $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a, b]$ with $\varphi \leq f \leq \psi$ we clearly have

$$S(\mathfrak{Z}, \varphi) \leq S(\mathfrak{Z}, f) \leq S(\mathfrak{Z}, \psi).$$

Therefore it suffices to prove that $S(\mathfrak{Z}, \varphi) \to \int_a^b \varphi(x)\, dx$, $S(\mathfrak{Z}, \psi) \to \int_a^b \psi(x)\, dx$ ($\mu(\mathfrak{Z}) \to 0$), respectively, since due to the Sandwich property this will imply that $S(\mathfrak{Z}, f) \to \int_a^b f(x)\, dx$ upon letting the integrals over the simple functions approach the integral over f.

Thus it remains to prove the following *assertion*: If $h \in \mathcal{T}[a, b]$ then property (ii) holds for h (with $s = \int_a^b h$ instead).

Let $\mathcal{Z} : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ be a partition for h. Let $\mathfrak{Z} = ((x_k)_{k=0}^n; (\xi_j)_{j=1}^n)$ and define the simple function $\tilde{h} \in \mathcal{T}[a, b]$ as follows:

$$\tilde{h}(a) := h(a), \text{ and } \tilde{h}(x) := h(\xi_k) \text{ for } x \in]x_{k-1}, x_k] \ (1 \leq k \leq n).$$

Then we have

$$S(\mathfrak{Z}, h) = \int_a^b \tilde{h}(x)\, dx$$

and therefore

$$\left| \int_a^b h(x)\, dx - S(\mathfrak{Z}, h) \right| = \left| \int_a^b (h - \tilde{h})(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |h(x) - \tilde{h}(x)|\, dx.$$

Whenever $]x_{k-1}, x_k] \cap \{t_1, \ldots, t_m\} = \emptyset$ we have $(h - \tilde{h})(x) = 0$ for all $x \in]x_{k-1}, x_k]$.

Since every t_j $(1 \leq j \leq m)$ can lie in at most one of the subintervals $]x_{k-1}, x_k]$ we can have $(h - \tilde{h}) \neq 0$ in at most m intervals of length at most $\mu(\mathfrak{Z})$ each. This gives a total length of at most $m\,\mu(\mathfrak{Z})$ of the union of subintervals where the above integrand $|h - \tilde{h}|$ may be non-zero.

The simple functions h and $\tilde{h}$ are bounded, hence there is some $M > 0$ such that $|h(x) - \tilde{h}(x)| \leq M$ for all $x \in [a, b]$.

In summary, we obtain

$$\left| \int_a^b h(x)\, dx - S(\mathfrak{Z}, h) \right| \leq \int_a^b |h(x) - \tilde{h}(x)|\, dx \leq m\,\mu(\mathfrak{Z})\, M,$$

where the upper bound becomes arbitrarily small as $\mu(\mathfrak{Z}) \to 0$.

<u>(ii) $\Rightarrow$ (i):</u> Let s be the limit of the Riemann sums according to (ii). Let $\varepsilon > 0$ arbitrary.

We may choose $\delta > 0$ such that the statement in (ii) holds with this δ. Let $\mathfrak{Z} = ((x_k), (\xi_k))$ with $\mu(\mathfrak{Z}) < \delta$.

We define the simple functions φ, ψ as follows: Put $\varphi(a) = \psi(a) = f(a)$ and for $x \in]x_{k-1}, x_k]$

$$\varphi(x) = m_k := \inf\{f(x) : x_{k-1} < y \leq x_k\}, \quad \psi(x) = M_k := \sup\{f(x) : x_{k-1} < y \leq x_k\}.$$

Then clearly $\varphi \leq f \leq \psi$.

For each $k \geq 1$ choose $\alpha_k, \beta_k \in]x_{k-1}, x_k]$ such that

$$m_k \leq f(\alpha_k) < m_k + \varepsilon, \quad M_k - \varepsilon < f(\beta_k) \leq M_k.$$

Put $\mathfrak{Z}' := ((x_k), (\alpha_k))$ and $\mathfrak{Z}'' := ((x_k), (\beta_k))$, then $\mu(\mathfrak{Z}') < \delta$ and $\mu(\mathfrak{Z}'') < \delta$ holds. Therefore, by assumption, we have

$$(\star) \qquad |s - S(\mathfrak{Z}', f)| \leq \varepsilon \quad \text{and} \quad |s - S(\mathfrak{Z}'', f)| \leq \varepsilon.$$

By construction, $m_k = \varphi(\alpha_k) \leq f(\alpha_k) < \varphi(\alpha_k) + \varepsilon$ and therefore

$$S(\mathfrak{Z}', \varphi) \leq S(\mathfrak{Z}', f) \leq S(\mathfrak{Z}', \varphi) + \varepsilon(b - a),$$

which combined with $(\star)$ gives

$$(\star\star) \qquad S(\mathfrak{Z}', \varphi) - \varepsilon \leq s \leq S(\mathfrak{Z}', \varphi) + \varepsilon + \varepsilon(b - a).$$

Taking the supremum in $(\star\star)$ over all $\varphi \in \mathfrak{T}[a, b]$ with $\varphi \leq f$ yields

$$\int_{*a}^{b} f - \varepsilon \leq s \leq \int_{*a}^{b} f + \varepsilon(1 + b - a).$$

Since $\varepsilon > 0$ was arbitrary we have, in fact, shown that $\displaystyle\int_{*a}^{b} f(x)\,dx = s$.

Similarly it follows that also $\displaystyle\int_a^{b*} f(x)\,dx = s$, which in summary proves that f is R-integrable and $\int_a^b f(x)\,dx = s$. □

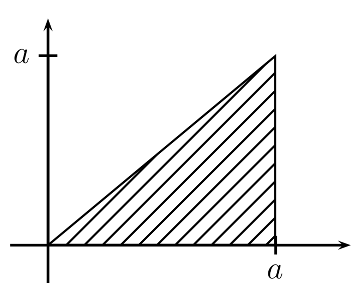
EXAMPLES: We illustrate the technique of Riemann sums in the computation of two integrals. Both could, of course, be determined quickly by using *primitive functions* ⟨*Stammfunktionen*⟩ as discussed in the following section.

1) Let $a > 0$. We design particular Riemann sums to determine the value of $\int_0^a x\,dx$ (note that the integrand is continuous, hence R-integrable): For $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, consider the division points $x_k := ka/n$ $(k = 0, \ldots, n)$ and intermediate points $\xi_k := x_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Let $\mathfrak{Z} := ((x_k), (\xi_l))$, then $\mu(\mathfrak{Z}) = a/n \to 0$ as $n \to \infty$. The corresponding Riemann sum for $f := \mathrm{id}\,|_{[0,a]}$ gives an approximating sequence

$$S_n := S(\mathfrak{Z}, f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{ka}{n} \cdot \frac{a}{n} = \frac{a^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Since $S_n \to a^2/2$ as $n \to \infty$ we obtain that $\displaystyle\int_0^a x\,dx = \frac{a^2}{2}.$

This is also clear by looking at the triangular area underneath the graph of f:



2) Let $a > 0$. We determine $\displaystyle\int_0^a \cos(x)\,dx$ via Riemann sums:

Define $\mathfrak{Z}$ for $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ as above by $x_k := ka/n$ and $\xi_k = x_k$. Then

$$S_n := S(\mathfrak{Z}, \cos) = \sum_{k=1}^{n} \cos(\frac{ka}{n}) \cdot \frac{a}{n} = \frac{a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \cos(\frac{ka}{n}).$$

Mini-Lemma: Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, and $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Then we have

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{t}{2})}. \tag{9.10}$$

Proof: Since $\cos(kt) = (e^{ikt} + e^{-ikt})/2$ and $e^{it} \neq 1$ we have

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) &= \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{e^{-int}}{2} \sum_{k=0}^{2n} \left(e^{it}\right)^k \\
&= \frac{e^{-int}}{2} \cdot \frac{e^{i(2n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{it}e^{int} - e^{-int}}{e^{it} - 1} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{i(n+1/2)t} - e^{-i(n+1/2)t}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}.
\end{aligned}$$

□

Applying (9.10) to the above Riemann sum we obtain for n large enough such that $a/n \notin 2\pi\mathbb{Z}$

$$S_n = \frac{a}{2n}\left(\frac{\sin((n+\frac{1}{2})\frac{a}{n})}{\sin(\frac{a}{2n})} - 1\right) = \underbrace{\frac{\frac{a}{2n}}{\sin(\frac{a}{2n})}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\sin\left((1+\frac{1}{2n})a\right)}_{\to \sin(a)} - \underbrace{\frac{a}{2n}}_{\to 0} \to \sin(a) \quad (n \to \infty).$$

Therefore we have shown that $\displaystyle\int_0^a \cos(x)\, dx = \sin(a)$.

9.14. Integration over subintervals and orientation:

Let $a < b < c$ and $f\colon [a,c] \to \mathbb{R}$ be bounded. By restricting and patching together corresponding simple functions one easily proves that

$$f \text{ is R-integrable} \iff \text{both } f\,|_{[a,b]} \text{ and } f\,|_{[b,c]} \text{ are R-integrable.}$$

In this case we also have that $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.

We will use the following convention in the sequel: If $a < b$ we put

$$\int_b^a f(x)\, dx := -\int_a^b f(x)\, dx,$$

which reflects the idea that the x-axis is oriented by considering the direction from smaller to larger x-values positive, and negative otherwise.

Finally, we also put $\int_a^a f(x)\, dx := 0$.
(This is also the value of the limit of $\int_{a-\delta}^{a+\delta} f(x) dx$ as $\delta \to 0$, if f is defined and integrable on some interval $[a-c, a+c]$ for some $c > 0$.)

§10. Integral and derivative; Taylor's theorem

Throughout this section let $I \subseteq \mathbb{R}$ denote an interval.

10.1. The fundamental theorem of calculus ⟨*Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*⟩:

DEFINITION: (i) Let $f\colon I \to \mathbb{R}$. A differentiable function $F\colon I \to \mathbb{R}$ is called a *primitive (function) of f (on I)* ⟨*Stammfunktion von f (auf I)*⟩ if $F' = f$ (on I).

(ii) A function $g\colon I \to \mathbb{R}$ is said to be *continuously differentiable* ⟨*stetig differenzierbar*⟩ if g is differentiable (on I) and $g'\colon I \to \mathbb{R}$ is continuous.

Let $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. The function g is *k-times continuously differentiable* if g is k-times differentiable (in all points of I) and $g^{(k)}\colon I \to \mathbb{R}$ is continuous. We denote the set of k-times continuously differentiable functions $I \to \mathbb{R}$ by $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$. By convention, we also write $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) := \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) = \{f\colon I \to \mathbb{R} : f \text{ is continuous}\}$.

Two questions naturally arise about primitive functions:

How many primitives does a given function possess?

How can we systematically determine primitive functions?

PROPOSITION: Let $F\colon I \to \mathbb{R}$ be a primitive of $f\colon I \to \mathbb{R}$. For a function $G\colon I \to \mathbb{R}$ we have:

$$G \text{ is a primitive of } f \iff F - G \text{ is a constant function.}$$

As a consequence, in order to determine all primitive functions of f it suffices to find a particular primitive F. Then any primitive of f has to be of the form $x \mapsto F(x) + c$, where $c \in \mathbb{R}$.

Proof: $\boxed{\Rightarrow}$ If G is also a primitive of f, then $G' = f = F'$. Hence $(F - G)'(x) = 0$ for all $x \in I$, which implies that $F - G$ is constant.

$\boxed{\Leftarrow}$ Let $c \in \mathbb{R}$ and $G(x) = F(x) + c$ $(x \in I)$. Then G is differentiable as well and $G' = (F + c)' = F' = f$. □

It remains to address the question how to determine a primitive. For continuous functions this is settled by the following result.

THEOREM (FUNDAMENTAL THEOREM OF CALCULUS): Let $f\colon I \to \mathbb{R}$ be continuous and $a, b \in I$ arbitrary.

(i) If we define $F\colon I \to \mathbb{R}$ by

$$F(x) := \int_a^x f(y)\,dy \qquad (x \in I), \tag{10.1}$$

then F is continuously differentiable (in short: f is $\mathcal{C}^1$) and $F' = f$.
In particular, F is a primitive of f.

(ii) If $F\colon I \to \mathbb{R}$ is an arbitrary primitive of f, then

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b \tag{10.2}$$

holds.

Proof: (i): Let $x \in I$ and $h \neq 0$ such that $x + h \in I$. Then we have

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f - \int_a^x f\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)\,dy.$$

By the mean value theorem for integrals there is some ξ_h between x and $x + h$ such that

$$\int_x^{x+h} f(y)\,dy = h\,f(\xi_h).$$

Note that $\xi_h \to x$ as $h \to 0$, since $|x - \xi_h| \leq |x - (x+h)| = |h|$. Thus by continuity of f we obtain

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)\,dy = \lim_{h\to 0} f(\xi_h) = f(x),$$

which implies that $F'(x) = f(x)$, thereby also showing that F' is continuous.

(ii): Define the primitive $G\colon I \to \mathbb{R}$ of f according to formula (10.1), i.e., $G(x) := \int_a^x f(y)\,dy$. By the above proposition there exists a constant $c \in \mathbb{R}$ such that $F(x) - G(x) = c$ for all $x \in I$. Therefore we have

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b f - \int_a^a f = \int_a^b f(y)\,dy.$$

$\square$

REMARKS: (i) One often finds a short-hand notation like $F(x) = \int f(x)\,dx$ to denote a (or sometimes all) primitive function(s) of f. The latter is also referred to as *indefinite integral* ⟨unbestimmtes Integral⟩. Within this set of lecture courses we will adopt the following **convention**: "determine $\int f(x)\,dx$" shall mean "find a primitive of f".

(ii) The fundamental theorem of calculus clarifies that "the processes of differentiation and integration are essentially the inverses of one another". To be more precise, we have the following scheme:

Fix $a \in I$. For a continuous function $g\colon I \to \mathbb{R}$ denote by $R(g)$ the function $R(g)(x) := \int_a^x g(y)\,dy$. Then $R(g)\colon I \to \mathbb{R}$ is continuously differentiable and $R\colon g \mapsto R(g)$ defines a linear map $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$. Denote by $D\colon \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ the map given by $h \mapsto h'$, which is also linear. Then the statement of the above theorem can be rephrased as follows:

- $D \circ R$ is the identity map on $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$, in other words, for $f\colon I \to \mathbb{R}$ continuous the following holds

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(y)\,dy\right) = f(x)}$$

- $(R \circ D)(f) = f - f(a)$ for all $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$, i.e., since f is a primitive of f',

$$\boxed{\int_a^x f'(y)\,dy = f(x) - f(a)}$$

EXAMPLES: 1) Let $s \in \mathbb{R}$, $s \neq -1$, and $a, b > 0$. Since $(x^{s+1})' = (s+1)x^s$ we have

$$\int_a^b x^s\,dx = \frac{x^{s+1}}{s+1}\Big|_a^b$$

In case $s \in \mathbb{Z}$, $s \neq -1$, the same holds with $a, b \in \mathbb{R}$ arbitrary.

2) The case $s = -1$ in 1) leads to $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x}$.

Since $\log'(x) = 1/x$ we obtain $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x} = \log(x)\Big|_a^b = \log(b) - \log(a)$ (if $a, b > 0$).

Observe that for $x < 0$ we obtain $(\log(-x))' = -1/(-x) = 1/x$, so that we may state $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x} = \log(-x)\Big|_a^b$, if $a, b < 0$.

The two cases can be summarized by

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = (\log|x|)\Big|_a^b, \qquad \text{if } a,b<0 \text{ or } a,b>0.$$

3) $\int \sin x\, dx = -\cos x$, $\int \cos x\, dx = \sin x$

4) $\int e^x\, dx = e^x$

5) In the interval $I =]-1,1[$ we have $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$

7) In any interval I such that $I \cap (\{\frac{\pi}{2}\} + \pi\mathbb{Z}) = \emptyset$ we have $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$

10.2. Change of variable in an integral ⟨*Substitutionsregel*⟩:

PROPOSITION: Let $f\colon I \to \mathbb{R}$ be continuous and $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ be $\mathcal{C}^1$ with $\varphi([a,b]) \subseteq I$. Then the following substitution formula holds

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx. \tag{10.3}$$

Proof: Let F be a primitive of f, then $F\circ\varphi\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ is differentiable and by the chain rule

$$(F\circ\varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

Therefore the fundamental theorem of calculus gives

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = (F\circ\varphi)(t)\Big|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$

□

REMARK: (i) In practice, the following symbolic notation is useful and intuitively helps to remember the above formula: Think of x representing the new variable via the transformation $x = \varphi(t)$, then $dx = d(\varphi(t)) = \varphi'(t)\,dt$ gives the correct transformation on the infinitesimal level (it simply corresponds to the equation $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$) and, finally, the integration limits are transformed via φ accordingly, i.e., $a \mapsto \varphi(a)$ and $b \mapsto \varphi(b)$.

(ii) Keep in mind that formula (10.3) works both ways:

(a) from right to left: if we encounter a complicated integrand $f(x)$, we might be lucky to find φ such that $(f \circ \varphi)\varphi'$ becomes simple

(b) from left to right: an at first sight nasty looking integrand might turn out to be of the structure $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ with appropriate φ such that f has a known primitive.

10.3. Examples: 1) $\displaystyle\int_a^b f(t+c)\,dt \underset{[t+c=\varphi(t),\varphi'(t)=1]}{=} \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx$

2) Let $c \neq 0$, then

$$\int_a^b f(ct)\,dt = \frac{1}{c}\int_a^b f(ct)c\,dt \underset{[\varphi(t)=ct,\varphi'(t)=c]}{=} \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(x)\,dx$$

3) $\displaystyle\int_a^b tf(t^2)\,dt \underset{[\varphi(t)=t^2,\varphi'(t)=2t]}{=} \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} f(x)\,dx$

4) Let $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ be $\mathcal{C}^1$ and such that $\varphi(t) \neq 0$ for all t. Then we can interpret an expression of the form $\varphi'(t)/\varphi(t)$ as $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ with $f(x) = 1/x$. Therefore we obtain

$$\int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,dt = \int_a^b \varphi'(t)f(\varphi(t))\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \big(\log|x|\big)\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \big(\log|\varphi(t)|\big)\Big|_a^b$$

5) Exercise: Apply 4) to find $\displaystyle\int_a^b \tan(t)\,dt$ (where $[a,b]$ does not contain a zero of cos).

6) Assume that $-1, 1 \notin [a,b]$. We determine $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{1-x^2}$ in two steps:

First, we decompose the rational function $1/(1-x^2)$ into *partial fractions* ⟨Partialbruch-*zerlegung*⟩. To do so, we use the factorization

$$1 - x^2 = (1-x)(1+x)$$

of the denominator and make the ansatz

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x}.$$

Upon multiplication with $1-x^2$ the constants α and β can be determined from the equation

$$1 = \alpha(1+x) + \beta(1-x) = (\alpha+\beta) + (\alpha-\beta)x$$

by comparing coefficients of the resulting polynomials. We obtain $1 = \alpha+\beta$ and $0 = \alpha-\beta$, thus $\alpha = \beta = 1/2$ and the integrand can be written in the form

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x}.$$

Hence we have

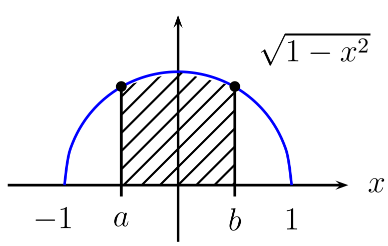
$$\int_a^b \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\int_a^b \frac{dx}{1-x} + \int_a^b \frac{dx}{1+x}\right),$$

where each integral can be computed by a simple application of the rule in 4) and gives

$$\int_a^b \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(-\int_a^b \frac{-1}{1-x}\,dx + \int_a^b \frac{dx}{1+x}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\big(-\log|1-x| + \log|1+x|\big)\Big|_a^b = \frac{1}{2}\cdot\left(\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)\Big|_a^b.$$

Remark: The procedure of *decomposition into partial fractions* ⟨Partialbruchzerlegung⟩ can (in principle) be applied to arbitrary rational functions $p(x)/q(x)$. By carrying out a polynomial division first, one may assume that q is of higher degree than p. Then starting from a factorization of q into linear factors (when allowing for complex roots) or quadratic factors (when insisting on real roots only) one can make an ansatz similar as above and write the rational function as a sum of simpler rational functions, which can be integrated by standard means. (See, e.g., [Heu03, §69] or [HW96, Section II.5] for details.)

7) Let $-1 \le a < b \le 1$ and consider $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx$.



The idea is to use the relation $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$, which suggests that we substitute $x = \sin t = \varphi(t)$ and hope for the best ...

We have $\varphi'(t) = \cos t$, in other words, $dx = d\varphi(t) = \cos t\,dt$, thus

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \cos t\cdot\cos t\,dt = \int_u^v \cos^2 t\,dt,$$

where we have put $u := \varphi^{-1}(a) = \arcsin a$ and $v := \varphi^{-1}(b) = \arcsin b$.

Since $\cos(t+t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1$ we may write $\cos^2 t = (1+\cos(2t))/2$ and therefore compute

$$\int\limits_u^v \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_u^v \cos(2t)\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_u^v 1\,dt = \frac{1}{4}\int\limits_{2u}^{2v} \cos r\,dr + \frac{1}{2}(t)\Big|_u^v$$
$$= \frac{1}{4}\big(\sin r\big)\Big|_{2u}^{2v} + \frac{\arcsin x}{2}\Big|_a^b = \left(\frac{\sin(2\arcsin x)}{4} + \frac{\arcsin x}{2}\right)\Big|_a^b.$$

Using the relation $\sin(t+t) = 2\cos t\sin t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}$ we can simplify the first term on the right-hand side and finally obtain

$$\int\limits_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right)\Big|_a^b.$$

Note that as a special case we deduce that the area of the upper half of the unit disc is

$$\int\limits_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Big(\big(1\sqrt{0} + \arcsin 1\big) - \big(-1\sqrt{0} + \arcsin(-1)\big)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

10.4. Integration by parts ⟨*Partielle Integration*⟩:

PROPOSITION: Let $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ be continuously differentiable, then we have

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)\,dx = \big(f(x)g(x)\big)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'(x)g(x)\,dx. \tag{10.4}$$

Proof: If we set $F := fg$ then $F' = f'g + fg'$. Therefore the fundamental theorem of calculus gives

$$\big(f(x)g(x)\big)\Big|_a^b = F(x)\Big|_a^b = \int\limits_a^b F'(x)\,dx = \int\limits_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int\limits_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

□

EXAMPLES: 1) Let $a, b > 0$, then

$$\int\limits_a^b \log x\,dx = \int\limits_a^b \log x \cdot 1\,dx \underset{\substack{[f(x)=\log x,\\ g(x)=x]}}{=} \big(x\log x\big)\Big|_a^b - \int\limits_a^b \frac{1}{x}\cdot x\,dx = \big(x\log x - x\big)\Big|_a^b$$

2) $\displaystyle\int \arctan x\,dx = \int \arctan x \cdot 1\,dx = x\,\arctan x - \int x\,\arctan'(x)\,dx$

Using $\arctan'(x) = 1/(1+x^2)$ and the substitution $t = \varphi(x) = x^2$, $dt = 2x\,dx$, this becomes

$$x\,\arctan x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx = x\,\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t}.$$

Upon observing that $\int \frac{dt}{1+t} = \log(1+t) = \log(1+x^2)$ (note that $t = x^2 \geq 0$) we arrive at

$$\int \arctan x\,dx = x\,\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2).$$

3) Let $m \in \mathbb{N}$ and consider $I_m(y) := \displaystyle\int_0^y \sin^m(x)\,dx \quad (y \in \mathbb{R})$.

We derive a recursion relation for $m \geq 2$:

$$\begin{aligned} I_m(y) = \int_0^y \sin^{m-1}(x)\,\underbrace{\sin(x)}_{-\cos'(x)}\,dx &= -\cos(y)\sin^{m-1}(y) + (m-1)\int_0^y \sin^{m-2}(x)\,\underbrace{\cos^2(x)}_{1-\sin^2(x)}\,dx \\ &= -\cos(y)\sin^{m-1}(y) + (m-1)\,I_{m-2}(y) - (m-1)\,I_m(y), \end{aligned}$$

hence

$$m\,I_m(y) = (m-1)\,I_{m-2}(y) - \cos(y)\sin^{m-1}(y).$$

To summarize, we have

$$I_0(y) = \int_0^y 1\,dx = y, \quad I_1(y) = \int_0^y \sin(x)\,dx = 1 - \cos(y)$$

$$I_m(y) = \frac{m-1}{m} \cdot I_{m-2}(y) - \frac{\cos(y)\sin^{m-1}(y)}{m} \qquad (m \geq 2).$$

As an application we consider the sequence defined by $A_m := I_m(\frac{\pi}{2})$ $(m \in \mathbb{N})$. We have

$$A_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad A_1 = 1$$

and for $m \geq 2$

$$A_m = \frac{m-1}{m}\,A_{m-2} - \frac{\cos(\frac{\pi}{2})\sin^{m-1}(\frac{\pi}{2})}{m} = \frac{m-1}{m}\,A_{m-2}.$$

Therefore we obtain for even $m = 2n$

$$A_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot A_0 = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

and for odd $m = 2n+1$

$$A_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3}\cdot \underbrace{A_1}_{1}.$$

When $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ we have $\sin^{2n+2}(x) \le \sin^{2n+1}(x) \le \sin^{2n}(x)$, thus by the monotonicity of the integral $A_{2n+2} \le A_{2n+1} \le A_{2n}$, which implies

$$\frac{A_{2n+2}}{A_{2n}} \le \frac{A_{2n+1}}{A_{2n}} \le 1.$$

Since $\dfrac{A_{2n+2}}{A_{2n}} = \dfrac{2n+1}{2n+2} \to 1$ $(n\to\infty)$ we obtain

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_{2n+1}}{A_{2n}} = 1.$$

On the other hand,

$$\frac{A_{2n+1}}{A_{2n}} = \frac{(2n)^2(2n-2)^2\cdots 4^2\cdot 2^2}{(2n+1)(2n-1)^2(2n-3)^2\cdots 5^2\cdot 3^2\cdot 1}\cdot\frac{2}{\pi}$$
$$= \frac{2}{\pi}\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2}{\pi}\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{4k^2-1}.$$

Thus we obtain *Wallis'*[1] *product representation of* π

$$\pi = 2\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{4k^2-1} = 2\prod_{k=1}^{\infty}\frac{4k^2}{4k^2-1}. \tag{10.5}$$

[1] John Wallis (1616–1703), English mathematician

10.5. Riemann's lemma and a series representation of π:

Lemma (Riemann): Let $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ be a $\mathcal{C}^1$ function and define $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ by

$$F(\nu) := \int_a^b f(x)\sin(\nu x)\,dx.$$

Then we have

$$\lim_{|\nu|\to\infty} F(\nu) = 0.$$

Proof: We may assume that $\nu \neq 0$. Integration by parts gives

$$F(\nu) = \int_a^b f(x)\,\underbrace{\sin(\nu x)}_{(-\frac{\cos(\nu x)}{\nu})'}\,dx = -\left(f(x)\frac{\cos(\nu x)}{\nu}\right)\Big|_a^b + \frac{1}{\nu}\int_a^b f'(x)\cos(\nu x)\,dx.$$

Since f and f' are continuous on $[a,b]$ they are bounded, hence there is some $M > 0$ such that $|f(x)| \leq M$ and $|f'(x)| \leq M$ for all $x \in [a,b]$. Therefore we obtain from the above equation that

$$|F(\nu)| \leq \frac{2M}{|\nu|} + \frac{1}{|\nu|}\int_a^b M\cdot 1\,dx = \frac{2M+(b-a)M}{|\nu|} \to 0 \qquad (|\nu|\to\infty).$$

□

Application (The Fourier[2] series of $\frac{\pi-x}{2}$): Recall the relation (9.10), which gives

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{2}.$$

If we integrate both sides in this relation from π to $x \in]0,2\pi[$ with respect to t we obtain on the left-hand side

$$\int_\pi^x \sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\,dt = \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kt)}{k}\Big|_\pi^x = \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k},$$

and on the right-hand side

$$\underbrace{\int_\pi^x \sin((n+\frac{1}{2})t)\cdot\frac{1}{2\sin(\frac{t}{2})}\,dt}_{=F(n+\frac{1}{2}),\text{ with } f(t)=1/(2\sin(\frac{t}{2}))} - \frac{x-\pi}{2}$$

[2] Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) [ʒɑ̃ babˈtist ʒoßef fuʀˈje], French mathematician and physicist

Sending $n \to \infty$ the above equality must remain and gives

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2} \qquad (0 < x < 2\pi).$$

In particular, if we set $x = \pi/2$ and observe that $\sin(k\pi/2) = 0$ for k even, and $\sin(k\pi/2) = (-1)^l$ for $k = 2l+1$ odd, we obtain the following sum

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots.$$

10.6. Taylor's[3] formula: Suppose $f\colon I \to \mathbb{R}$ is $\mathcal{C}^2$ and $x_0 \in I$. By the fundamental theorem of calculus we have for all $x \in I$ the identity

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt. \tag{10.6}$$

Note that $\frac{d}{dt}(x-t) = -1$ and f' is $\mathcal{C}^1$, hence we may apply integration by parts to $\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = -\int_{x_0}^{x} \frac{d}{dt}(x-t) \cdot f'(t)\,dt$ and obtain

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) - \big((x-t)\,f'(t)\big)\Big|_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^{x} (x-t) f''(t)\,dt \\ &= f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t) f''(t)\,dt. \end{aligned} \tag{10.7}$$

Observe that the first two terms on the right-hand side represent the (affine) linear approximation to f near x_0. If f is $\mathcal{C}^3$ we can carry out one more integration by parts and obtain a quadratic approximation plus an integral remainder term. Proceeding inductively we arrive at the following

Taylor's theorem: *Let $f\colon I \to \mathbb{R}$ be in $\mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ (i.e, an $(n+1)$-times continuously differentiable function) and let $x_0 \in I$ arbitrary. Then we have for all $x \in I$ Taylor's formula*

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x-x_0)^2 + \ldots \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n + R_{n+1}(x), \end{aligned} \tag{10.8}$$

[3] Brook Taylor (1685–1731), English mathematician

where

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int\limits_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt. \tag{10.9}$$

Proof: We introduce the notation $T_n[f, x_0](x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, then the asserted equation reads

$$f(x) = T_n[f, x_0](x) + R_{n+1}(x).$$

If $n = 0$ or $n = 1$ this is precisely (10.6) or (10.7). We prove (10.8) by induction, assuming that

$$f(x) = T_{n-1}[f, x_0](x) + R_n(x)$$

already holds. We apply integration by parts to the remainder term

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)^{n-1}}_{-\frac{d}{dt}[\frac{(x-t)^n}{n}]} f^{(n)}(t)\, dt = -\frac{(x-t)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(t) \Big|_{t=x_0}^{t=x} + \frac{1}{n!} \int\limits_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

$$= \frac{(x-x_0)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0) + R_{n+1}(x),$$

which proves the assertion. □

10.7. Definition: Let $f\colon I \to \mathbb{R}$ be n-times differentiable and $x_0 \in I$. For $m \in \mathbb{N}$, $m \le n$ the *Taylor polynomial* of order m of f at x_0 is defined by

$$T_m[f, x_0](x) := \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

If f is differentiable the *Taylor series* of f about x_0 is defined by

$$T[f, x_0](x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

(regardless of its convergence or not).

10.8. Corollary (Alternative formulae for the remainder term):

(i) Let $f\colon I \to \mathbb{R}$ be $\mathcal{C}^{n+1}$ and $x_0, x \in I$. Then there exists some ξ between x_0 and x such that

$$f(x) = T_n[f, x_0](x) + R_{n+1}(x)$$

with the *Lagrange formula*

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{10.10}$$

(ii) Let $f\colon I \to \mathbb{R}$ be $\mathcal{C}^n$ and $x_0 \in I$. Then there exists a function $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ with $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$ such that for all $x \in I$

$$f(x) = T_n[f, x_0](x) + \varphi(x)\,(x - x_0)^n.$$

We may rephrase this as

$$f(x) = T_n[f, x_0](x) + o(|x - x_0|^n) \quad (x \to x_0). \tag{10.11}$$

Proof: (i): Applying the mean value theorem of integral calculus to the integral formula for the remainder term (10.9) we obtain with some ξ between x_0 and x that

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n\,dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot \frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1}\Big|_{t=x_0}^{t=x} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

(ii): We may apply (i) with n in place of $n+1$. Hence for all $x \in I$ there exists $\xi(x) \in I$ with $|x_0 - \xi(x)| \le |x_0 - x|$ such that

$$\begin{aligned} f(x) - T_{n-1}[f, x_0](x) &= \frac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!}\,(x-x_0)^n \\ &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n + \underbrace{\frac{f^{(n)}(\xi(x)) - f^{(n)}(x_0)}{n!}}_{=:\,\varphi(x)}\,(x-x_0)^n. \end{aligned}$$

We have $\lim_{x\to x_0} \xi(x) = x_0$, thus by continuity of $f^{(n)}$ that $\lim_{x\to x_0} f^{(n)}(\xi(x)) = f^{(n)}(x_0)$, which in turn implies that $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$. □

10.9. Corollary: Let $f\colon I \to \mathbb{R}$ be infinitely differentiable and $x_0 \in I$. Then we have for all $n \in \mathbb{N}$ and for all $x \in I$

$$f(x) = T_n[f, x_0](x) + R_{n+1}(x),$$

where $R_{n+1}(x)$ is given by (10.9) or (10.10).

Moreover, for $x \in I$ the Taylor series $T[f, x_0](x)$ converges with sum $f(x)$, that is

$$f(x) = T[f, x_0](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k$$

if and only if $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Proof: Follows immediately from Theorem 10.6 and Corollary 10.8. □

10.10. Corollary: Let $f\colon I \to \mathbb{R}$ be $(n+1)$-times differentiable. If $f^{(n+1)}(x) = 0$ for all $x \in I$, then f is a polynomial function of degree at most n.

Proof: Since $f^{(n+1)} = 0$ it is continuous and thus f is in $\mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$. Therefore we may apply Theorem 10.6. Since the remainder term $R_{n+1}(x)$ in (10.8) now vanishes, the assertion follows directly. $\square$

10.11. Examples: 1) For all $x \in \mathbb{R}$ and $k \in \mathbb{N}$ we have $\exp^{(k)}(x) = \exp(x)$, hence $\exp^{(k)}(0) = 1$. Thus we obtain the Taylor series $T[\exp, 0](x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ and the remainder term with some ξ between 0 and x satisfies

$$R_n(x) = \exp(\xi)\frac{x^n}{n!} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

since we have already shown in Section 4 that the above series is absolutely convergent. Therefore we have that

$$\exp(x) = T[\exp, 0](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

holds for all $x \in \mathbb{R}$. To summarize, the Taylor series of the exponential function is convergent and its sum gives the function value for all x.

Similarly, we can determine the Taylor series of sin and cos (e.g., simply compute $\sin^{(2k)}(0) = 0$ and $\sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$ for all k) and find that these agree with the already given series expansion in Section 6. (Work out all details as an exercise!)

2) **Series expansion of the logarithm:** Consider $f(x) := \log(1+x)$, $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Then we obtain

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

and, inductively,

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k} \quad (k \geq 1).$$

Hence $f(0)/0! = 0$ and $f^{(k)}(0)/k! = (-1)^{k-1}/k$, which gives the Taylor series

$$T[f, 0](x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, x^k$$

and the remainder term (with $0 \leq \xi \leq x \leq 1$)

$$|R_n(x)| = \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n(1+\xi)^n}\, x^n\right| \leq \frac{|x|^n}{n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Therefore we obtain the Taylor series expansion

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, x^k \qquad (0 \leq x \leq 1).$$

In particlar, we have $\log(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

The above expansion is also valid when $-1 < x < 0$. We do not prove this here, since it will be a simple consequence of results in Section 12.

By the following trick we can also find a series expansion for $\log(y)$ when $y \geq 2$: Let $0 < \lambda < 1$ and choose $r > 1$ such that $y = (1+\lambda)^r$. Then $\log(y) = r\log(1+\lambda)$ and the problem is reduced to the series expansion for $\log(1+\lambda)$.

3) **The binomial series:** Let $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ and consider $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$, $f(x) := (1+x)^\alpha$. We have

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

hence $f^{(k)}(0)/k! = \binom{\alpha}{k}$, yielding the Taylor series

$$T[f,0](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

The ratio test implies absolute convergence for all x with $|x| < 1$:

$$\left| \frac{\binom{\alpha}{k+1} x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k} x^k} \right| = \left| \frac{\alpha - k}{k+1} \right| |x| \to |x| \quad (k \to \infty).$$

But note that this still leaves open the question wether we have

$$T[f,0](x) \overset{?}{=} f(x) \qquad (|x| < 1).$$

We will answer this in the positive by estimating the remainder term for two cases separately.

$\underline{0 \leq x < 1}$: We have with some $\xi \in [0,x]$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\, x^n = (1+\xi)^{\alpha-n} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Since $(1+\xi)^{\alpha-n} \leq 1$ when $n \geq \alpha$ and the series $T[f,0](x)$ is absolutely convergent we deduce that

$$|R_n(x)| \leq |\binom{\alpha}{n} x^n| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

$\underline{-1 < x < 0}$: Using the integral form of the remainder term we obtain, after substitution of $-t$ in place of t,

$$R_n(x) = n\binom{\alpha}{n} \int_0^{|x|} (x+t)^{n-1}(1-t)^{\alpha-n}\, dt.$$

Note that for $x < 0$ and $0 \leq t \leq |x| < 1$ we have

$$|x+t| = |x| - t \leq |x| - |x|t = |x|\,(1-t)$$

and therefore

$$|R_n(x)| \le \left| n\binom{\alpha}{n} \right| |x|^{n-1} \int_0^{|x|} (1-t)^{n-1}(1-t)^{\alpha-n}\, dt$$

$$= \left| \alpha \binom{\alpha-1}{n-1} \right| |x|^{n-1} \int_0^{|x|} (1-t)^{\alpha-1}\, dt = \underbrace{|\alpha| \int_0^{|x|} (1-t)^{\alpha-1}\, dt}_{=:C(\alpha,|x|)} \cdot \underbrace{\left| \binom{\alpha-1}{n-1} x^{n-1} \right|}_{=:a_n},$$

where $C(\alpha, |x|)$ is independent of n and $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ by absolute convergence of $T[f,0](x)$.

Observe that for $\alpha = m \in \mathbb{N}$ the series $T[f,0](x)$ simply reduces to the finite sum according to the binomial theorem applied to $(1+x)^m$. In summary, we have shown that

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad (|x| < 1, \alpha \in \mathbb{R}). \tag{10.12}$$

10.12. Remark and warning: Even when a Taylor series converges (for all x) its sum need not give the corresponding function values. Consider, for example, the function $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, defined by

$$f(x) := \begin{cases} \exp(-1/x^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

We will prove below that f is infinitely differentiable and that $f^{(k)}(0) = 0$ for all k. Therefore $T[f,0](x) = 0$ for all $x \in \mathbb{R}$, which is clearly convergent. But note that $f(x) > 0$ for all $x \neq 0$, therefore

$$0 = T[f,0](x) \neq f(x), \qquad \text{if } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

It remains to prove the following

Claim: f is infinitely differentiable and that $f^{(k)}(0) = 0$ for all k.

We will show inductively that f is n-times differentiable for all $n \in \mathbb{N}$ and that the following assertion holds

$$\exists \text{ polynomial function } p_n : \quad f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n(\frac{1}{x})\, e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases} \tag{$\star$}$$

The claim then follows immediately from $(\star)$.

By definition of f, the assertion holds for $n = 0$. Assume that it holds for $1, \dots, n$ as well.

Let $x \neq 0$, then by the induction hypothesis

$$
\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) = \Big(p_n(\frac{1}{x})e^{-1/x^2}\Big)' &= p_n'(\frac{1}{x})\,(\frac{-1}{x^2})\,e^{-1/x^2} + \frac{2}{x^3}\,p_n(\frac{1}{x})\,e^{-1/x^2} \\
&= \Big(p_n'(\frac{1}{x})\,(\frac{-1}{x^2}) + \frac{2}{x^3}\,p_n(\frac{1}{x})\Big)\,e^{-1/x^2} =: p_{n+1}(\frac{1}{x})\,e^{-1/x^2}.
\end{aligned}
$$

To show differentiability at 0 we have for $h \neq 0$

$$
\frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} = \frac{p_n(\frac{1}{h})\,e^{-1/h^2}}{h} = y\,p_n(y)\,e^{-y^2},
$$

where we have put $y = 1/h$. Thus, $h \to 0$ is equivalent to sending $|y| \to \infty$, which shows that $f^{(n+1)}(0) = 0$.

§11. Improper integrals

11.1. Unbounded integration interval:

Definition: Let $a \in \mathbb{R}$ and $f\colon [a,\infty[\to \mathbb{R}$ be such for all $R > a$ the function $f\mid_{[a,R]}$ is R-integrable. If the limit $\lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\,dx$ exists, then the *improper integral* ⟨*das uneigentliche Integral*⟩ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ is said to be *convergent* and we set

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\,dx.$$

Similarly for the case $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$.

Example: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$ is convergent $\iff$ $s > 1$

Indeed, if $s \neq 1$ and $R > 1$ we have

$$\int_1^R \frac{dx}{x^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s}\Big|_1^R = \frac{R^{1-s}-1}{1-s},$$

which converges as $R \to \infty$ if and only if $s > 1$. If $s = 1$ we have for all $R > 1$

$$\int_1^R \frac{dx}{x} = \log(x)\Big|_1^R = \log(R) \to \infty \quad (R\to\infty).$$

11.2. Unbounded or undefined integrand at the boundary:

Definition: Let $f\colon]a,b] \to \mathbb{R}$ be such that for all $\varepsilon > 0$ (with $0 < \varepsilon < b-a$) the function $f\mid_{[a+\varepsilon,b]}$ is R-integrable. The *improper integral* $\int_a^b f(x)\,dx$ is said to be *convergent* if the limit $\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$ exists. In this case we set

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

EXAMPLE: $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$ is convergent $\iff$ $s < 1$

Indeed, if $s \neq 1$ and $1 > \varepsilon > 0$ we have

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^s} = \frac{1 - \varepsilon^{1-s}}{1 - s},$$

which converges as $\varepsilon \to 0$ if and only if $s < 1$. If $s = 1$ and $\varepsilon > 0$ we have

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = -\log(\varepsilon) \to \infty \quad (\varepsilon \to 0).$$

11.3. Combined cases:

DEFINITION: Let $-\infty \leq a < b \leq \infty$ and $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ be such that f is R-integrable on $[\alpha, \beta]$ for all $\alpha, \beta \in]a,b[$ with $\alpha < \beta$. Let $c \in]a,b[$ arbitrary. If both improper integrals $\int_a^c f(x)\,dx$ and $\int_c^b f(x)\,dx$ are convergent, then the *improper integral* $\int_a^b f(x)\,dx$ is said to be *convergent* and we set

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

EXAMPLES: 1) For all $s \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^s}$ is divergent.

Indeed for all $c > 0$ we have that $\int_0^c \frac{dx}{x^s}$ diverges if $s \geq 1$ and $\int_c^\infty \frac{dx}{x^s}$ diverges if $s \leq 1$.

2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ is convergent:

We have

$$\int_{-1+\varepsilon}^0 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\arcsin(-1 + \varepsilon) \to -\arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} \quad (\varepsilon \to 0)$$

and

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin(1 - \varepsilon) \to \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \quad (\varepsilon \to 0).$$

Therefore

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ is convergent:

Let $R > 0$. We have

$$\int_{-R}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = -\arctan(-R) \to \frac{\pi}{2}, \quad \int_{0}^{R} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(R) \to \frac{\pi}{2} \quad (R \to \infty),$$

hence

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

11.4. Basic convergence principles: To keep notation simple we will formulate everything for a one-sided infinite interval $[a, \infty[$ of integration and a function $f\colon [a, \infty[\to \mathbb{R}$ that is R-integrable on all finite subintervals $[a, R]$ $(R > a)$. The required adaptation to cases involving functions with critical behavior or undefined at the boundary should be routine.

(A) Cauchy principle: $\displaystyle\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ is convergent if and only if

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists R > a : \; \forall r, s \geq R \quad \left| \int_{r}^{s} f(x)\,dx \right| < \varepsilon. \tag{11.1}$$

Proof: $\boxed{\Leftarrow}$ Let (R_n) be a sequence with $R_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. Let $\varepsilon > 0$ and choose $R > a$ such (11.1) holds. There exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $R_n \geq R$ for all $n \geq n_0$. Therefore

$$|\int_{R_m}^{R_n} f(x)\,dx| < \varepsilon$$

holds for all $m, n \geq n_0$, which shows that $\left(\int_a^{R_n} f\right)_{n\in\mathbb{N}}$ is a Cauchy sequence, thus convergent.

$\boxed{\Rightarrow}$ (By contradiction.) Assume that there is some $\varepsilon > 0$ such that (11.1) does not hold. Then for every $n \in \mathbb{N}$ we can find $r_n, s_n \geq n$ such that

$$(\star) \qquad \left| \int_{r_n}^{s_n} f(x)\,dx \right| \geq \varepsilon.$$

We have that $r_n \to \infty$ and $s_n \to \infty$ as $n \to \infty$. We define a new sequence (R_m) by mixing: $R_{2k} := r_k$ and $R_{2k+1} := s_k$ ($k \in \mathbb{N}$). Then $R_m \to \infty$ ($m \to \infty$), hence $\left(\int_a^{R_m} f\right)_m$ is convergent, thus it is a Cauchy sequence — a contradiction $\lightning$ to $(\star)$. $\square$

(B) Comparison tests ⟨*Majoranten- und Minorantenkriterium*⟩**:** (i) Let $h\colon [a,\infty[\to \mathbb{R}$ with $h \geq 0$ and such that $\int_a^\infty h(x)\,dx$ is convergent. If $|f(x)| \leq h(x)$ for all x, then $\int_a^\infty f(x)\,dx$ is convergent.

Indeed, since

$$\left| \int_r^s f(x)\,dx \right| \leq \int_r^s |f(x)|\,dx \leq \int_r^s h(x)\,dx$$

the assertion follows from the Cauchy principle.

(ii) Let $g\colon [a,\infty[\to \mathbb{R}$ with $g \geq 0$ and such that $\int_a^\infty g(x)\,dx$ is divergent. If $f(x) \geq g(x)$ for all x, then $\int_a^\infty f(x)\,dx$ is divergent.

This follows from (i), since otherwise $\int_a^\infty g$ would have to converge.

Examples: 1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx$ converges due to (B)(i): $\displaystyle\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ and $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ is convergent.

2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ is convergent: Let $1 < r < s$, then integration by parts with $f(x) = 1/x$ and $g'(x) = \sin(x)$ and applying the Cauchy principle to the convergent integral $\int_1^\infty dx/x^2$ we obtain

$$\left| \int_r^s \frac{\sin(x)}{x}\,dx \right| = \left| \frac{-\cos(x)}{x}\Big|_r^s - \int_r^s \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx \right| \leq \left| \frac{\cos(r)}{r} - \frac{\cos(s)}{s} \right| + \left| \int_r^s \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx \right|$$
$$\leq \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right) + \int_r^s \frac{dx}{x^2} < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

if r and s are sufficiently large. Thus the Cauchy principle (A) proves convergence.

Remark: However, in contrast to Example 2), one can show that the improper integral $\int_1^\infty \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx$ is divergent.
(Hint: Write $\int_1^{n\pi}$ as a sum of n integrals; upon a suitable change of variable, each of these can be reduced to an integration over $[0,\pi]$, which can be estimated from below such that the harmonic series occurs in a lower bound.)

11.5. Integral test for series:

PROPOSITION: Let $f\colon [1,\infty[\to [0,\infty[$ be a decreasing function. Then the following holds:

$$\sum_1^\infty f(n) \text{ is convergent} \iff \int_1^\infty f(x)\,dx \text{ is convergent.}$$

Proof: Define $\varphi,\psi\colon [1,\infty[\to \mathbb{R}$ as follows: $\psi(x) := f(n)$, $\varphi(x) := f(n+1)$ when $x \in [n,n+1[$. Then the restrictions of φ and ψ to each finite subinterval are simple functions and $0 \le \varphi \le f \le \psi$. Therefore we have for all $N \in \mathbb{N}$, $N \ge 1$,

$$\underbrace{\int_1^N \varphi(x)\,dx}_{\sum\limits_{n=2}^{N} f(n)} \le \int_1^N f(x)\,dx \le \underbrace{\int_1^N \psi(x)\,dx}_{\sum\limits_{n=1}^{N-1} f(n)}.$$

If $\int_1^\infty f(x)\,dx$ is convergent, then we obtain that $\sum_{n=2}^N f(n)$ is bounded, hence convergent.
On the other hand, if $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ is convergent, then for all increasing sequences $R_l \to \infty$ $(l \to \infty)$ the sequence $\left(\int_1^{R_l} f(x)\,dx\right)_{l\in\mathbb{N}}$ is increasing and bounded, hence convergent. Therefore $\int_1^\infty f(x)\,dx$ is convergent. $\square$

EXAMPLE: Let $s > 0$, then we have

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^s} \text{ is convergent} \iff \int_1^\infty \frac{dx}{x^s} \text{ is convergent} \iff s > 1.$$

($\sum_1^\infty \frac{1}{n^s}$ is clearly divergent when $s \le 0$.)

11.6. The Gamma function:

Lemma: If $x > 0$ then $\int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ is convergent.

Proof: For all $t > 0$ we have that

$$0 \le t^{x-1}e^{-t} \le \frac{1}{t^{1-x}} = \frac{1}{t^s},$$

where $s := 1 - x < 1$. Therefore, the comparison test shows that for arbitrary $R > 0$ the improper integral $\int\limits_0^R t^{x-1}e^{-t}\,dt$ is convergent.

To obtain also convergence of $\int\limits_R^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ (with some fixed $R > 1$) we proceed as follows: Since $\lim_{t\to\infty} t^{x+1}e^{-t} = 0$ there is some $R > 1$ such that

$$\forall t \ge R: \quad t^{x-1}e^{-t} = t^{-2}t^{x+1}e^{-t} \le t^{-2}\cdot 1 \le \frac{1}{t^2}.$$

Hence $\int_R^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ is convergent by the comparison test. □

Definition: The *Gamma function* $\Gamma\colon\,]0,\infty[\to\mathbb{R}$ is given by

$$\Gamma(x) := \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

Proposition: (i) (Functional equation) For all $x \in\,]0,\infty[$: $\Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x)$.

(ii) For all $n \in \mathbb{N}$: $\Gamma(n+1) = n!$

In other words, the Gamma function is an interpolation of the factorial function.

Proof: (i): Let $0 < \varepsilon < R$. Integration by parts gives

$$\int\limits_\varepsilon^R t^x e^{-t}\,dt = -t^x e^{-t}\Big|_{t=\varepsilon}^{t=R} + \int\limits_\varepsilon^R x\,t^{x-1}e^{-t}\,dt = \frac{\varepsilon^x}{e^\varepsilon} - \frac{R^x}{e^R} + x\int\limits_\varepsilon^R t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

Hence $\Gamma(x+1) = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\int_\varepsilon^R t^x e^{-t}\,dt = 0 + x\,\Gamma(x)$.

(ii): $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = \lim_{R\to\infty}(-e^{-t})\Big|_0^R = 1$ and inductively by (i)

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n\,(n-1)! = n!$$

□

$\boxed{\text{V}}$ FUNKTIONENFOLGEN UND -REIHEN

§12. Gleichmäßige und punktweise Konvergenz

12.1. Definition

Es sei K eine Menge und für $n \in \mathbb{N}$ sei eine Funktion $f_n\colon K \to \mathbb{C}$ gegeben. Dann erhalten wir für jedes $x \in K$ durch $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen.

1.) Die Funktionenfolge (f_n) *konvergiert punktweise* gegen die Funktion $f\colon K \to \mathbb{C}$, falls für jedes $x \in K$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert:

$$\forall x \in K: \quad f_n(x) \to f(x) \quad (n \to \infty),$$

d.h. im Detail

$$\forall x \in K\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N: \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{12.1}$$

(Beachte: N hängt hier von ε und von x ab!)

2.) Die Funktionenfolge (f_n) *konvergiert gleichmäßig* gegen die Funktion $f\colon K \to \mathbb{C}$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N: \underbrace{\forall x \in K \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon}_{\sup_{x\in K} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon}. \tag{12.2}$$

(Beachte: N hängt hier nicht von x ab!)

3.) Es sei $g\colon K \to \mathbb{C}$, dann bezeichnen wir

$$\|g\|_\infty := \sup_{x\in K} |g(x)| \tag{12.3}$$

als *Supremumsnorm* oder *Unendlichnorm* von g. Die Funktion g ist beschränkt genau dann, wenn $\|g\|_\infty < \infty$ gilt.

Bemerkungen:

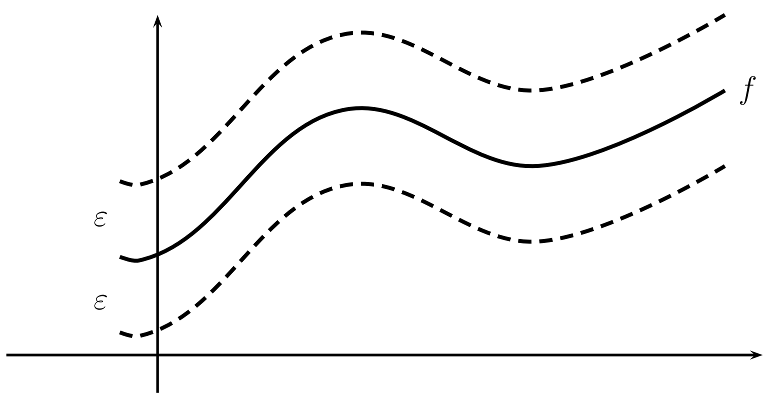
(i) Die Bedingung (12.2) ist stärker als (12.1), daher folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz einer Funktionenfolge stets die punktweise Konvergenz.

(ii) Die gleichmäßige Konvergenz $f_n \to f$ ist gleichbedeutend mit folgender Bedingung

(12.2') $$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : \quad \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon,$$

das heißt $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$ (insbesondere $\|f_n - f\|_\infty < \infty$ für fast alle n).

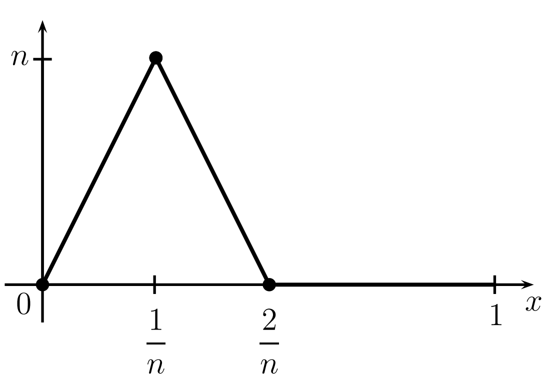
(iii) Die Bedingung (12.2) können wir mit Hilfe von ε-Umgebungen auch so umformulieren: zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $f_n(x) \in U_\varepsilon(f(x))$ für alle $n \geq N$ und für alle $x \in K$ gilt (äquivalent: $f_n(x) - f(x) \in U_\varepsilon(0)$).



Anschaulich gesprochen heißt letzteres, dass die Graphen der Funktionen f_n schließlich innerhalb eines ε-Schlauches um den Graphen von f bleiben.

12.2. Beispiele

1) Es sei für $n \in \mathbb{N}$ die stückweise (affin) lineare Funktion $f_n \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, gegeben durch folgenden Graphen:



[Wir benötigen für die weiteren Überlegungen gar keine expliziten Formeln für $f_n(x)$. Die Skizze macht schneller klar, was passiert, wenn n groß wird: die Dreiecke werden höher und schmäler, wobei die Spitzen und rechten Eckpunkte nach links wandern. Vergleichen Sie mit der Angabe $f_n(x) = n^2 x$, wenn $0 \leq x \leq 1/n$, $f_n(x) = -n^2 x + 2n$, wenn $1/n < x < 2/n$, und $f_n(x) = 0$, wenn $2/n \leq x \leq 1$.]

Behauptung 1: $f_n \to 0$ $(n \to \infty)$ punktweise.

Beweis: Zunächst gilt $f_n(0) = 0$ für alle n. Zu $x \neq 0$ gibt es ein $N \geq 2$ mit $2/N \leq x$ (N hängt also von x ab!). Somit folgt für jedes $n \geq N$, dass $2/n \leq x$ und daher $f_n(x) = 0$. Somit gilt für jedes $x \in [0,1]$, dass $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ ist.

Behauptung 2: (f_n) ist nicht gleichmäßig konvergent.

Beweis: (Indirekt) Falls (f_n) gleichmäßig konvergiert, so muss der gleichmäßige Limes gleich dem punktweisen Limes sein (klar warum?). Ist f_n gleichmäßig konvergent gegen 0, so folgt aber

$$\|f_n - 0\|_\infty = f_n(1/n) = n \not\to 0 \quad (n \to \infty).$$

(Die Folge der Supremumsnormen der f_n ist hier sogar unbeschränkt. Auch mit Spitzen der fixen Höhe 1 ergäbe sich noch keine gleichmäßige Konvergenz.)

2) Sei $m > 0$ beliebig und für $n \in \mathbb{N}$ betrachte $f_n \colon [-m, m] \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Wir wissen bereits aus dem ersten Semester, dass f_n punktweise gegen die Exponentialfunktion strebt ($(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist ja gerade die Partialsummenfolge für $\exp(x)$). Es ist

$$\exp(x) = f_n(x) + R_{n+1}(x),$$

wobei wir für $|x| \leq 1 + n/2$ die Restgliedabschätzung

$$|R_{n+1}(x)| \leq 2\,\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

(am Ende von Kapitel I) gezeigt hatten. Daher gilt für $n \geq 2(m-1)$

$$\|\exp - f_n\|_\infty = \sup_{|x|\leq m} |\exp(x) - f_n(x)| \leq \frac{2m^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Mit anderen Worten: (f_n) konvergiert auf dem Intervall $[-m, m]$ gleichmäßig gegen exp.

12.3. Theorem

Es sei $K \subseteq \mathbb{C}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine stetige Funktion $f_n \colon K \to \mathbb{C}$ gegeben. Falls (f_n) gleichmäßig gegen die Funktion $f \colon K \to \mathbb{C}$ konvergiert, dann ist auch f stetig.

Beweis:

Es sei $x \in K$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass f stetig in x ist.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgelegt. Dann gibt es wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (f_n) gegen f ein $N \in \mathbb{N}$, so dass gilt

$$\forall \xi \in K : \quad |f_N(\xi) - f(\xi)| < \varepsilon/3.$$

Wegen der Stetigkeit von f_N gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\forall x' \in K, |x - x'| < \delta : \quad |f_N(x) - f_N(x')| < \varepsilon/3.$$

Somit gilt für alle $x' \in K$ mit $|x - x'| < \delta$ (mittels Einschieben von geeigneten Differenzen)

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x')| + |f_N(x') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

□

12.4. Bemerkungen

(i) Sind alle f_n stetig und konvergieren aber nur punktweise gegen die Funktion f, so muss f im Allgemeinen nicht stetig sein. (Ein konkretes Beispiel dafür ist in den Übungsaufgaben versteckt.)

(ii) Das obige Theorem kann natürlich auch für folgende Schlussweise verwendet werden: falls die stetigen Funktionen f_n punktweise gegen eine Funktion f streben und f aber unstetig ist, so kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein.

Als konkrete Anwendung erinnern wir an die (punktweise gültige) Gleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2} \quad (x \in]0, 2\pi[),$$

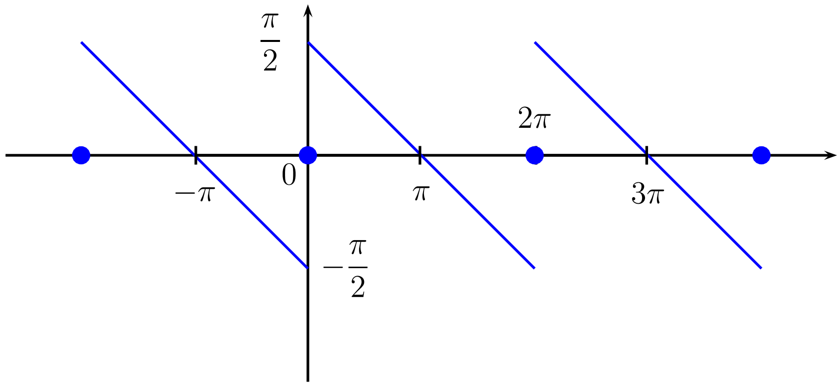
die wir in Kapitel IV, bewiesen hatten.

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(0) = 0$, $f(x) = (\pi - x)/2$ für $0 < x < 2\pi$ (die rechte Seite obiger Gleichung) und 2π-periodische Fortsetzung auf ganz $\mathbb{R}$. Weiters setzen wir $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx)/k$ ($x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$; entspricht also den Partialsummen der linken Seite in obiger Gleichung). Dann bedeutet obige Summenformel gerade, dass

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f_n(x) \to f(x) \quad (n \to \infty),$$

also die punktweise Konvergenz von f_n gegen f.

Die Grenzfunktion f hat aber Sprungstellen, ist also unstetig:



Daher kann f_n (auf $\mathbb{R}$) nicht gleichmäßig gegen f konvergieren. (Auf keinem Intervall, das einen Punkt $2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$, enthält, kann gleichmäßige Konvergenz stattfinden.)

12.5. Theorem (Satz von Weierstraß)

Es sei K eine Menge und $f_n \colon K \to \mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{N}$). Falls die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty$ konvergiert, so ist die Funktionenreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ absolut konvergent (d.h. $\sum |f_k(x)|$ konvergiert für jedes $x \in K$) und gleichmäßig konvergent (d.h. $\sum\limits_{k=0}^{n} f_k$ konvergiert gleichmäßig für $n \to \infty$).

Beweis: Für $x \in K$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt $|f_k(x)| \le \|f_k\|_\infty$, daher ist $\sum \|f_k\|_\infty$ eine konvergente Majorante für $\sum |f_k(x)|$. Somit ist für jedes $x \in K$ die Reihe $\sum f_k(x)$ absolut konvergent.

Setze $F(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ für $x \in K$ und $F_n := \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, dass $F_n \to F$ gleichmäßig (auf K) für $n \to \infty$.

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen der Konvergenz von $\sum \|f_k\|_\infty$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty < \varepsilon$ für alle $n \ge N$.

Es sei $x \in K$ und $n \ge N$, dann gilt

$$|F(x) - F_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty < \varepsilon.$$

Wenn wir zum Supremum über $x \in K$ übergehen, erhalten wir daraus

$$\|F - F_n\|_\infty \le \varepsilon \qquad \forall n \ge N$$

und somit die Behauptung. $\square$

Eine kleine Warnung: In der Situation von Theorem 12.5 erhalten wir sogar, dass auch die Reihe der Absolutbeträge $\sum |f_k|$ gleichmäßig konvergiert (wende den Satz auf $|f_k|$ statt f_k an). Allerdings folgt im Allgemeinen aus der gleichmäßigen und punktweise absoluten Konvergenz einer Funktionenreihe nicht, dass die Reihe der Absolutbeträge gleichmäßig konvergiert, wie man an Hand des Beispiels (aus [BF00, p.316]) mit $f_k(x) = (-1)^k x^2/(1+x^2)^k$ ($x \in \mathbb{R}$) studieren kann.

12.6. Beispiele

1) Es sei $m > 0$ und $f_k\colon [-m, m] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_k(x) = \frac{x^k}{k!}$ ($k \in \mathbb{N}$). Dann ist $\|f_k\|_\infty = m^k/k!$ und wegen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^k}{k!} = e^m < \infty$$

erhalten wir einen weiteren Beweis dafür, dass $\sum \frac{x^k}{k!}$ auf jedem Intervall $[-m, m]$ gleichmäßig konvergent (gegen $\exp(x)$) ist.

2) Es sei $f_k(x) = \frac{\cos(kx)}{k^2}$ ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$). Wegen $\|f_k\|_\infty = 1/k^2$ ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

und daher $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$ gleichmäßig konvergent (auf $\mathbb{R}$).

12.7. Proposition (Vertauschung von Limes und Integral)

Es sei $f_n\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig ($n \in \mathbb{N}$) und (f_n) gleichmäßig konvergent. Dann gilt

$$\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx.$$

Beweis:

Wir setzen $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für $x \in [a, b]$. Nach Theorem 12.3 ist $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, also integrierbar und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b f_n(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\, dx \leq (b-a)\|f - f_n\|_\infty \to 0 \quad (n \to \infty).$$

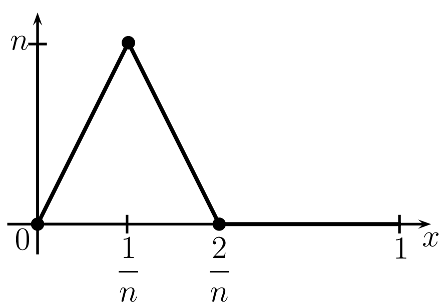
$\square$

12.8. Beispiele

1) Es sei $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(kx)}{k^2}$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 1,\ x \in [0, 2\pi])$. Gemäß Beispiel 12.6.2) ist (f_n) gleichmäßig konvergent, daher besagt Proposition 12.7 für jedes $t \in [0, 2\pi]$

$$\int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_0^t \cos(kx)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left. \frac{\sin(kx)}{k} \right|_0^t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{k^3}.$$

2) Punktweise Konvergenz reicht im Allgemeinen nicht aus, um Limes und Integral vertauschen zu dürfen:



für die (Dreiecks-)Funktionen f_n aus Beispiel 12.2.1) ergibt sich $\int_0^1 f_n = \frac{2}{n} \cdot n \cdot \frac{1}{2} = 1$ für alle n, aber

$$\int_0^1 \lim f_n(x)\, dx = \int_0^1 0\, dx = 0.$$

12.9. Proposition (Vertauschung von Limes und Differentiation)

Es sei $f_n \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar $(n \in \mathbb{N})$. Die Folge (f_n) sei punktweise konvergent gegen $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ und die Folge der Ableitungen (f_n') sei gleichmäßig konvergent. Dann ist f differenzierbar und es gilt

$$\forall x \in [a, b] : \quad f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Insbesondere ist f' stetig.

Beweis:

Wir setzen $g := \lim_{n\to\infty} f_n'$. Nach Theorem 12.3 ist $g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.

Sei $x \in [a, b]$, dann wird aus der Gleichung $f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\, dt$

für $n \to \infty$ gemäß Proposition 12.7 die Gleichung $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\, dt.$

Somit muss $f'(x) = g(x)$ gelten. $\square$

12.10. Bemerkung

Die gleichmäßige Konvergenz der Folge (f_n) allein genügt im Allgemeinen nicht, um Limes und Differentiation vertauschen zu können, d.h. selbst wenn f_n stetig differenzierbar für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, $f_n \to f$ gleichmäßig und f differenzierbar, dann folgt i.a. **nicht** (einmal), dass $f_n' \to f'$ (punktweise).

Als Beisiel betrachte $f_n(x) = \sin(nx)/n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$). Wegen $\|f_n\|_\infty = 1/n \to 0$ gilt $f_n \to 0$ gleichmäßig ($n \to \infty$). Aber $f_n'(x) = \cos(nx)$ ist nicht einmal punktweise konvergent (z.B. im Punkt $x = \pi$).

Die Situation wird bedeutend übersichtlicher, wenn wir spezielle Typen von Funktionenfolgen und -reihen betrachten, wie zum Beispiel Potenzreihen im folgenden Abschnitt.

§13. Potenzreihen

Wir hatten in Kapitel IV den Begriff der Taylor-Reihe für eine unendlich oft differenzierbare (reelle) Funktion f auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ eingeführt und gesehen, dass wir damit in vielen Fällen polynomiale Approximationen an die Funktion gewinnen können. Für einen Entwicklungspunkt $x_0 \in I$ definiert man dazu die Folge

$$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k \in \mathbb{N})$$

und erhält (für jedes $x \in I$ und $n \in \mathbb{N}$)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k + R_{n+1}(x),$$

wobei wir für das Restglied verschiedene konkrete Darstellungen gegeben hatten. Die Taylor-Reihe ist dann gegeben durch

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

und stellt die Funktion f dar, falls das Restglied mit $n \to \infty$ gegen Null strebt. Wir nehmen nun einen anderen Standpunkt ein, indem wir allgemein Reihen obigen Typs (zunächst) losgelöst von im Vorhinein gegebenen Funktionen betrachten, d.h. für (c_k) irgendeine Zahlenfolge zulassen.

13.1. Definition

Es sei (c_k) eine Folge komplexer Zahlen und $x_0 \in \mathbb{C}$, dann nennen wir $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$ $(x \in \mathbb{C})$ eine *Potenzreihe* mit Entwicklungspunkt x_0.

Wir untersuchen in diesem Abschnitt die Konvergenzeigenschaften von Potenzreihen in Abhängigkeit von x, d.h. wir studieren Folgen von Polynomfuntionen (p_n), wobei $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k$.

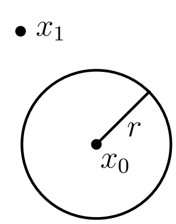
13.2. Proposition

Es sei $\sum c_k (x - x_0)^k$ eine Potenzreihe und $x_1 \in \mathbb{C}$ habe die Eigenschaft, dass $\sum c_k (x_1 - x_0)^k$ konvergent ist.

Für $r \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < |x_1 - x_0|$ bezeichne

$$K(x_0, r) := \{x \in \mathbb{C} : |x - x_0| \leq r\}$$

die (abgeschlossene) Kreisscheibe mit Radius r um x_0.



Dann gilt:

1.) $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$ konvergiert absolut und gleichmäßig auf $K(x_0,r)$.

2.) Die (formal[1]) gliedweise differenzierte Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k\, k\,(x-x_0)^{k-1}$ konvergiert ebenfalls absolut und gleichmäßig auf $K(x_0,r)$.

Beweis: 1.) Wir setzen $f_n(x) = c_n(x-x_0)^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $x \in K(x_0,r)$). Es ist für jedes $x \in K(x_0,r)$

$$|f_n(x)| = |c_n||x-x_0|^n = |c_n||x_1-x_0|^n \left(\frac{|x-x_0|}{|x_1-x_0|}\right)^n,$$

wobei $\frac{|x-x_0|}{|x_1-x_0|} \le \frac{r}{|x_1-x_0|} =: \theta < 1$. Weiters müssen wegen der Konvergenz der Reihe $\sum c_n(x_1-x_0)^n$ die Glieder eine Nullfolge bilden, insbesondere gibt es also ein $M > 0$ mit $|c_n||x_1-x_0|^n \le M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher liefert die obige Darstellung für $f_n(x)$ die Abschätzung

$$|f_n(x)| \le M \cdot \theta^n \qquad \forall x \in K(x_0,r)\ \forall n \in \mathbb{N},$$

und somit

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in K(x_0,r)} |f_n(x)| \le M\,\theta^n.$$

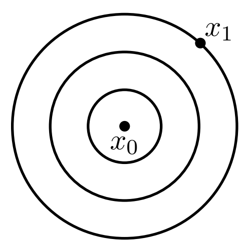
Nach dem Majorantenkriterium ist $\sum \|f_n\|_\infty$ konvergent, daher nach dem Satz von Weierstraß 12.5 also die Reihe $\sum f_n$ absolut und gleichmäßig konvergent auf $K(x_0,r)$.

2.) Wir setzen $g_n(x) = c_n n(x-x_0)^{n-1}$ $(= f_n'(x))$ und erhalten wie im Beweis von 1.), dass

$$\|g_n\|_\infty \le nM\theta^{n-1}.$$

Aus dem Quotiententest folgt, dass $\sum nM\theta^{n-1}$ konvergiert. Daher ist wiederum nach dem Satz von Weierstraß die Reihe $\sum g_n$ absolut und gleichmäßig konvergent auf $K(x_0,r)$. □

13.3. Bemerkungen



(i) Satz 13.2 besagt insbesondere, dass zwischen Punkten $x \in \mathbb{C}$ mit $|x-x_0| = r$ und $x = x_0$ keine Lücken bezüglich Konvergenz auftreten: falls die Potenzreihe für $x = x_1$ konvergent ist, so ist sie in jeder (abgeschlossenen) Kreisscheibe $K(x_0,r)$ mit $r < |x_1-x_0|$ gleichmäßig konvergent.

In allen Punkten der (offenen) Kreisscheibe $\{x \in \mathbb{C} : |x-x_0| < |x_1-x_0|\}$ ist die Potenzreihe somit jedenfalls punktweise konvergent. (Für das Konvergenzverhalten in den Randpunkten kann keine allgemeine Aussage gemacht werden.)

[1] Für reelle x ist dies natürlich die übliche Ableitung im Sinne der Analysis 1.

(ii) Wir erhalten also durch $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$ eine Funktion $f\colon \{x \in \mathbb{C} : |x-x_0| < |x_1-x_0|\} \to \mathbb{C}$, die sogar stetig ist: eine genügend kleine Umgebung eines beliebig gegebenen Punktes $x \in \mathbb{C}$ mit $|x-x_0| < |x_1-x_0|$ ist in einem passenden $K(x_0,r)$ mit $|x-x_0| < r < |x_1-x_0|$ enthalten, und darauf findet die Konvergenz der stetigen Partialsummen (das sind ja Polynomfunktionen) gleichmäßig statt. Umgekehrt kann man die Frage stellen, welche Funktionen denn durch Potenzreihen gegeben sind. Dies führt auf den Begriff der *analytischen Funktion*, der im Rahmen der Komplexen Analysis (oder 'Funktionentheorie') eingehend studiert wird.

Aus dem obigen stellt sich die Frage, ob wir für jede Potenzreihe auf praktikable Weise einen maximalen Konvergenzkreis bestimmen können. Dies führt unmittelbar auf den nächsten Begriff.

13.4. Definition

Es sei $\sum c_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe, dann heißt

$$R := \sup\{r \in [0,\infty[: \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \text{ konvergiert in } K(x_0,r)\} \tag{13.1}$$

Konvergenzradius der Potenzreihe. Es ist $0 \le R \le \infty$.

13.5. Proposition

Es sei R der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum c_n(x-x_0)^n$. Dann gilt:

1.) Im Falle $R = 0$ konvergiert die Reihe nur im Punkt $x = x_0$.

2.) Im Falle $R = \infty$ konvergiert die Reihe für alle $x \in \mathbb{C}$ und die Konvergenz ist gleichmäßig auf jeder (abgeschlossenen) Kreisscheibe $K(x_0,r)$ mit $0 \le r < \infty$.

3.) Im Falle $0 < R < \infty$ konvergiert die Reihe für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x-x_0| < R$ und die Konvergenz ist gleichmäßig auf jeder (abgeschlossenen) Kreisscheibe $K(x_0,r)$ mit $0 \le r < R$.

   Die Reihe ist divergent für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x-x_0| > R$. (Für die Randpunkte $x \in \mathbb{C}$ mit $|x-x_0| = R$ kann sowohl Divergenz als auch Konvergenz vorliegen [und zwar auch beide Fälle in verschiedenen Randpunkten derselben Reihe].)

4.) Es gilt die *Formel von Hadamard*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}, \tag{13.2}$$

   wobei wir $R = 0$ setzen, falls der Limes superior unendlich ist, und $R = \infty$, falls der Limes superior Null ist.

Beweis:

1.) und 2.) folgen unmittelbar aus der Definition 13.4 und Bemerkung 13.3.

3.) Es sei $x \in \mathbb{C}$ mit $|x - x_0| < R$. Dann gibt es ein $x_1 \in \mathbb{C}$ mit $|x_1 - x_0| > |x - x_0|$, so dass die Reihe $\sum c_n(x_1 - x_0)^n$ konvergiert. Daher konvergiert die Potenzreihe gleichmäßig auf jeder Kreisscheibe $K(x_0, r)$ mit $0 \leq r < |x_1 - x_0|$, insbesondere auch im Punkt x. Weil R als Supremum definiert ist, kann der Punkt x_1 so gewählt werden, dass $|x_1 - x_0|$ beliebig nahe (unterhalb) R ist. Damit folgt der erste Teil der Aussage.

Sei nun $x \in \mathbb{C}$ mit $|x - x_0| > R$. Wäre $\sum c_n(x - x_0)^n$ konvergent, so stünde das im Widerspruch zur Definition von R, weil Proposition 13.2 dann Konvergenz auf einer Kreisscheibe $K(x_0, r)$ mit $R < r < |x - x_0|$ impliziert.

4.) als Übungsaufgabe. (Hinweis: Wurzeltest.) $\square$

13.6. Bemerkung

Die Berechnung des Konvergenzradius ist oft auch mit Hilfe des Quotiententests möglich (bzw. einfacher). Falls $|\frac{c_n}{c_{n+1}}|$ konvergiert, dann gilt

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|. \tag{13.3}$$

(Sei nämlich ρ der angegebene Limes, dann haben wir im Quotiententest $|\frac{c_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{c_n(x-x_0)^n}| = |x - x_0||\frac{c_{n+1}}{c_n}| \to \frac{|x-x_0|}{\rho}$ für $n \to \infty$, also Konvergenz für $|x - x_0| < \rho$).

13.7. Beispiele

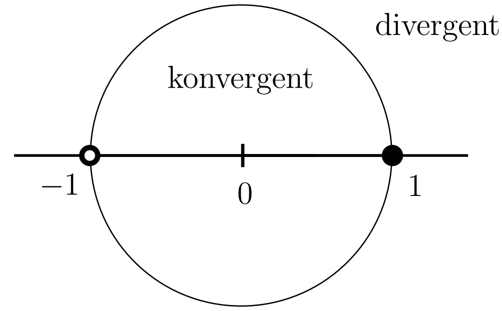
1) Wir betrachten die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$. [Taylor-Reihe für $\log(1 + x)$]
In diesem Beispiel ist also $x_0 = 0$ und $c_0 = 0$, $c_n = (-1)^{n-1}/n$ (für $n \geq 1$).

Für $x = 1$ erhalten wir die Reihe $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, die nach dem Leibniz-Kriterium konvergent ist. Daher konvergiert die Potenzreihe sicher für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$ und gleichmäßig auf jedem Kreis $K(0, r)$ mit $0 \leq r < 1$.

Für $x = -1$ erhalten wir die divergente Reihe $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}(-1)^n = -\sum \frac{1}{n}$, daher hat der Konvergenzradius den Wert $R = 1$. Insbesondere folgt Divergenz für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| > 1$.

Übrigens folgt das Resultat für den Konvergenzradius hier ebenso einfach aus der Formel von Hadamard (weil $(1/n)^{1/n} \to 1$) oder dem Quotiententest (weil $(n + 1)/n \to 1$).

Zusammenfassend erhalten wir bisher folgende Übersicht: Konvergenz innerhalb des Einheitskreises, Divergenz außerhalb; im Randpunkt $x = -1$ Divergenz und im Randpunkt $x = 1$ Konvergenz. (Man kann zeigen, dass diese Reihe für jeden Randpunkt $x \neq -1$ konvergiert [vgl. etwa [RS02, 4.2, Aufgabe 2] oder [SS03, Chapter 1, Exercises 14 and 19]])



2) $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n \quad (x_0 = 0,\, c_n = n!)$ hat Konvergenzradius

$$R = \lim \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim \frac{1}{n+1} = 0.$$

Daher ist diese Potenzreihe für jedes $x \neq 0$ divergent.

Übrigens folgt hier aus der Tatsache $R = 0$ mit Hilfe der Hadamard-Formel, dass

$$\lim_{n\to\infty} (n!)^{\frac{1}{n}} = \infty.$$

3) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad$ (also die Cosinus-Reihe).
Wir haben $x_0 = 0$ und $c_n = 0$ für ungerades n, $c_n = (-1)^{n/2}/n!$ für gerades n.

Wir wissen bereits aus der Einführung in die Analysis, dass diese Reihe für jedes $x \in \mathbb{C}$ konvergiert, daher ist $R = \infty$. Ebenso erhalten wir Konvergenzradius $R = \infty$ für die Sinus- und die Exponentialreihe.

Wenn alle Koeffizien c_n sowie x_0 reell sind, so definiert die Potenzreihe eine reelle Funktion auf dem Durchschnitt ihres Konvergenzkreises mit $\mathbb{R}$. Es stellt sich heraus, dass wir hierdurch unendlich oft differenzierbare Funktionen erhalten, deren Taylor-Reihen dann gerade durch die Potenzreihen gegeben sind.

13.8. Proposition

Es sei $\sum c_n(x - x_0)^n$ eine Potenzreihe mit $x_0 \in \mathbb{R}$, $c_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und Konvergenzradius $R > 0$. Wir setzen $I :=]x_0 - R, x_0 + R[\subseteq \mathbb{R}$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n \qquad (x \in I).$$

Dann gilt:

1.) $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, d.h. f ist unendlich oft differenzierbar.

2.) Für alle $x \in I$ gilt: $\quad f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, c_n\, (x - x_0)^{n-1}$.

3.) Für alle $a, b \in I$ gilt: $\quad \int_a^b f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left. \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1} \right|_a^b$.

Beweis: Nach Proposition 13.2 ist für jedes $0 < r < R$ sowohl die Potenzreihe wie auch die gliedweise differenzierte Reihe gleichmäßig konvergent auf $[x_0 - r, x_0 + r]$. Daher folgt aus Proposition 12.9 die stetige Differenzierbarkeit von f und die Formel für f' in 2.).

Durch sukzessive Anwendung derselben Argumentation auf f', f'', ... folgt weiters die Behauptung 1.).

3.) ist eine direkte Konsequenz aus den Propositionen 13.2 und 12.7. $\square$

13.9. Korollar

Es sei $f\colon]x_0 - R, x_0 + R[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum c_n (x - x_0)^n$ durch eine Potenzreihe mit reellen Koeffizienten und Entwicklungspunkt x_0 sowie Konvergenzradius $R > 0$ gegeben. Dann gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

d.h. die Taylor-Reihe von f um x_0 ist gleich der Potenzreihe $\sum c_n (x - x_0)^n$.
Insbesondere sind die Koeffizienten einer Potenzreihe also stets eindeutig bestimmt (nämlich durch die Ableitungen von f bei x_0).

Beweis: Nach Proposition 13.8 ist f unendlich oft differenzierbar und sukzessive Anwendung der Ableitungsformel liefert

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k \cdot k(k-1) \cdots (k - n + 1)(x - x_0)^{k-n}.$$

Für $x = x_0$ folgt daraus $f^{(n)}(x_0) = c_n \cdot n!$. $\square$

13.10. Beispiele

1) In Kapitel IV hatten wir für $0 \leq x \leq 1$ die Gültigkeit der folgenden Taylor-Reihenentwicklung nachgewiesen:

$$\log(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

Wir können nun aber alternativ aus Proposition 13.8 herleiten, dass diese Entwicklung im Intervall $]-1,1[$ gilt, wodurch dann insgesamt die Gültigkeit in $]-1,1]$ bewiesen ist.

In 13.7.1) haben wir schon den Wert $R = 1$ für den Konvergenzradius dieser Potenzreihe ermittelt. Wir setzen $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ für $x \in]-1,1[$ und erhalten durch gliedweise Differentiation

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \frac{1}{1+x}.$$

Daher folgt auch für alle $t \in]-1,1[$

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(x)\,dx = 0 + \int_0^t \frac{1}{1+x}\,dx = \log(1+t).$$

2) Wir bestimmen die Taylor-Reihenentwicklung für die Funktion $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(x)$ durch einen ähnlichen Trick wie in 1).

Es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, x^{2k},$$

wobei der Konvergenzradius der auftretenden Potenzreihe $R = 1/\lim |(-1)^k|^{1/2k} = 1$ ist (beachte $c_{2k} = (-1)^k$ und $c_{2k+1} = 0$). Daher folgt aus Proposition 13.8 für alle $t \in]-1,1[$

$$\arctan(t) = f(t) = f(0) + \int_0^t f'(x)\,dx = 0 + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^t x^{2k}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, \frac{t^{2k+1}}{2k+1}.$$

§14. Fourier-Reihen

In der Physik und Elektrotechnik gehört die Zerlegung periodischer Signale oder allgemeiner Schwingungen in Grundschwingungen und Grundfrequenzen zu den Standardmethoden. Mathematisch gesprochen geht es dabei um die Darstellung oder Approximation periodischer Funktionen als Summen bzw. Reihen von Winkelfunktionen bzgl. einer Folge von Frequenzen.

14.1. Periodische Funktionen

Sei $L > 0$; $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *periodisch* mit Periode L (kurz L-periodisch), wenn

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f(x+L) = f(x). \tag{14.1}$$

Es folgt dann induktiv $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}: \quad f(x + k\,L) = f(x)$. Daher ist eine L-periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bereits festgelegt, sobald sie auf einem Intervall der Form $[x_0, x_0 + L[$ bekannt ist für ein beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$.

Es gilt für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und $L > 0$

f ist L-periodisch $\;\Leftrightarrow\;$ $F(x) := f\left(\frac{L}{2\pi}x\right)$ ist 2π-periodisch.

Daher „genügt“ es also, 2π-periodische Funktionen zu studieren und man kann stets mittels Skalierung rückübersetzen auf L-periodische Funktionen. Wir betrachten deshalb im weiteren oBdA nur noch Periode 2π.

Beispiele: $\sin, \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \exp(ix), \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sind 2π-periodisch;

ebenso sind für $k \in \mathbb{Z}$ die Funktionen $e_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $e_k(x) := e^{ikx}$ bzw. $x \mapsto \sin(kx)$, $x \mapsto \cos(kx)$ 2π-periodisch;

konstante Funktionen sind periodisch bzgl. jeder Periode $L > 0$.

Definition

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ $(k = 0, \ldots, n)$. Dann heißt $p_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$p_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big)$$

trigonometrisches Polynom (der Ordnung n).

Die komplexe Version trigonometrischer Polynome der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir durch Koeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$ $(-n \leq k \leq n)$ als Abbildung $q_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit der Darstellung

$$q_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

Mittels der Euler-Relationen $\cos(kx) = (e^{ikx} + e^{-ikx})/2$ und $\sin(kx) = (e^{ikx} - e^{-ikx})/2i$ erhalten wir nach Koeffizientenvergleich

$$q_n = p_n \quad \Longleftrightarrow \quad c_0 = \frac{a_0}{2},\ c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k),\ c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) = \overline{c_k} \quad (k \in \mathbb{N}, k \geq 1).$$

14.2. Fourier-Koeffizienten

Mini-Exkurs über Integration und Differentiation komplexwertiger Funktionen: Für $f \colon [a,b] \to \mathbb{C}$ setze $u(x) := \mathrm{Re}(f(x))$, $v(x) := \mathrm{Im}(f(x))$, somit erhalten wir reelle Funktionen $u, v \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\forall x \in [a,b]\colon \quad f(x) = u(x) + iv(x)$.

f heißt Riemann-integrierbar, falls u und v R-integrierbar sind. Wir setzen in diesem Fall

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^b u(x)\,dx + i \int_a^b v(x)\,dx.$$

Ebenso verfahren wir beim Begriff der Differenzierbarkeit: f ist differenzierbar, falls u und v es sind und wir setzen $f' := u' + iv'$.

Es sei nun $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ein trigonometrisches Polynom der Ordnung n, also von der Form $f(x) = \sum\limits_{l=-n}^{n} c_l\, e^{ilx}$. Können wir die Koeffizienten c_l aus der Kenntnis von f bestimmen?

Durch Multiplikation mit e^{-ikx} erhalten wir zunächst

$$(\star) \qquad e^{-ikx} \cdot f(x) = \sum_{l=-n}^{n} c_l\, e^{i(l-k)x}.$$

Bevor wir dies weiter umformen machen wir folgende entscheidende Beobachtung: das Integral $\int_0^{2\pi} e^{imx}\,dx$ ergibt für $m = 0$ den Wert $\int_0^{2\pi} 1\,dx = 2\pi$ und für $m \neq 0$ haben wir eine Stammfunktion e^{imx}/m, somit wegen der 2π-Periodizität also $\int_0^{2\pi} e^{imx}\,dx = \frac{e^{imx}}{m}\,\big|_0^{2\pi} = 0$; zusammenfassend gilt

$$(14.2) \qquad \int_0^{2\pi} e^{imx}\,dx = \begin{cases} 2\pi & m = 0 \\ 0 & m \neq 0. \end{cases}$$

Integrieren wir nun beide Seiten der Gleichung $(\star)$ über das Intervall $[0, 2\pi]$ (und benützen zur vereinfachten Notation das Kronecker-Delta[1]: $\delta_{lk} = 0$ für $l \neq k$, $\delta_{kk} = 1$), so erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x)\, dx = \sum_{l=-n}^{n} c_l \int_0^{2\pi} e^{i(l-k)x}\, dx = \sum_{l=-n}^{n} c_l \cdot 2\pi \cdot \delta_{lk} = 2\pi \cdot c_k.$$

Folglich ist c_k durch f wie folgt bestimmt:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x)\, dx.$$

Für allgemeinere 2π-periodische Funktionen erheben wir diese Relation nun zur

Definition: Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion und R-integrierbar auf $[0, 2\pi]$. Dann sind

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x)\, dx \qquad (k \in \mathbb{Z}) \tag{14.3}$$

die (komplexen) *Fourier-Koeffizienten*[2] von f und

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{ikx} \tag{14.4}$$

heißt zugeordnete *Fourier-Reihe.*

14.3. Reelle Version der Fourier-Koeffizienten

Ist f reell-wertig, d.h. $\overline{f(x)} = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann folgt aus (14.3) auch $\overline{c_k} = c_{-k}$ und somit

$$c_k\, e^{ikx} + c_{-k}\, e^{-ikx} = c_k\, e^{ikx} + \overline{c_k\, e^{ikx}} = 2\,\mathrm{Re}(c_k e^{ikx}) = 2\,\mathrm{Re}(c_k)\cos(kx) - 2\,\mathrm{Im}(c_k)\sin(kx).$$

[1] Leopold Kronecker (*7. 12. 1823 Liegnitz; †29. 12. 1891 Berlin), deutscher Mathematiker

[2] Jean Baptiste Joseph Fourier (*21. 3. 1768 Auxerre; †16. 5. 1830 Paris) [ʃɔ̃ bapˈtist ʃoˈsɛf fuˈʀje], französischer Mathematiker und Physiker

Setzen wir das in die Partialsummen der Fourier-Entwicklung ein, dann ergibt sich (vgl. die reelle Form der trigonometrischen Polynome in 14.1)

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k\, e^{ikx} = c_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k\, e^{ikx} + c_{-k}\, e^{-ikx}) =$$

$$= \underbrace{c_0}_{a_0/2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(\underbrace{2 \cdot \mathrm{Re}(c_k)}_{a_k} \cdot \cos(kx) + \underbrace{(-2 \cdot \mathrm{Im}(c_k))}_{b_k} \cdot \sin(kx) \Big).$$

Insgesamt erhalten wir für die reellen Fourier-Koeffizienten a_k, b_k aus (14.3) die Formeln

(14.5(a)) $$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx)\, dx \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

(14.5(b)) $$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx)\, dx \qquad (k = 1, 2, \dots).$$

Wir lesen aus obigen Integralformeln folgende Eigenschaften ab:

- ist f gerade, d.h. $f(-x) = f(x)$, dann folgt $b_k = 0$ für alle k,
- ist f ungerade, d.h. $f(-x) = -f(x)$, dann gilt $a_k = 0$ für alle k.

14.4. Beispiel

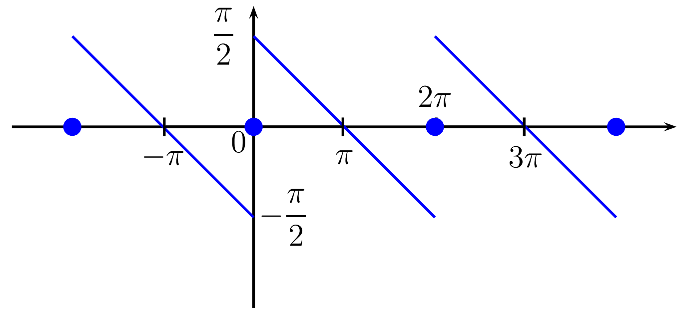
Wir kommen zurück zu der schon in §12 1 bewiesenen Relation

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = f(x),$$

wobei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Fortsetzung folgender Funktion ist

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{\pi - x}{2} & x \in \,]0, 2\pi[. \end{cases}$$

Wie bereits in 12.4(ii) festgestellt, ist die Konvergenz punktweise für alle $x \in \mathbb{R}$, aber nicht gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, weil die Grenzfunktion Unstetigkeitsstellen in den Punkten $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ hat.



Behauptung: Obige Summe ist genau die Fourier-Reihe für f, d.h. in diesem Fall wird die Funktion f (punktweise) durch ihre Fourier-Reihe dargestellt.

Proof: Wir bestimmen die (komplexen) Fourierkoeffizienten von f: zunächst bemerken wir, dass allgemein der Wert eines R-Integrals $\int_a^b g(x)\,dx$ gleich bleibt, wenn der Integrand g nur an endlich vielen Stellen abgeändert wird. Daher dürfen wir hier für den Integranden einfach die Funktion $(\pi - x)/2$ verwenden und erhalten für $k = 0$: $2\pi\, c_0 = \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\,dx = 0$; und für $k \neq 0$:

$$2\pi\, c_k = \int_0^{2\pi} e^{-ikx}\,\frac{\pi - x}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-ikx}\,dx}_{0} - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x e^{-ikx}\,dx =$$

$$[\text{part. Int.}\ ] = \frac{1}{2ik} x e^{-ikx}\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2ik}\underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-ikx}\,dx}_{0} = \frac{\pi}{ik},$$

daher ist $c_k = -i/2k$.

Für die reelle Version der Fourierkoeffizienten erhalten wir daraus $a_k = 2\,\mathrm{Re}(c_k) = 0$ und $b_k = -2\,\mathrm{Im}(c_k) = 1/k$, d. h. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$ ist tatsächlich genau die Fourier-Reihe von f. $\square$

Es gilt sogar folgende zusätzliche Aussage: Für jedes $0 < \delta < \pi$ konvergiert die Fourier-Reihe von f auf dem Intervall $[\delta, 2\pi - \delta]$ gleichmäßig gegen f.
(Hinweise für einen Beweis finden sich in einem [freiwilligen] Zusatzbeispiel im Übungen.)

14.5. Bemerkung

Wir haben in der obigen Berechnung bereits verwendet, dass alle Fourierkoeffizienten c_k — und somit auch die Fourier-Reihe — unverändert bleiben, solange f nur an endlich vielen Stellen im Intervall $[0, 2\pi[$ beliebig abgeändert wird. Daher ist klar, dass die Forderung der punktweisen Konvergenz der Fourier-Reihe gegen die Funktionswerte **in allen Punkten** eines Periodizitätsintervalls im Allgemeinen nicht angemessenen sein kann. Wir werden daher weiter unten eine andere Art von Konvergenz für Fourier-Reihen untersuchen.

Man kann zeigen, dass die Fourier-Reihe einer 2π-periodischen *stückweise stetig differenzierbaren* Funktion f (d.h. es gibt eine Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 2\pi$, so dass $f\big|_{]t_{j-1},t_j[}$ stetig differenzierbar und stetig fortsetzbar auf $[t_{j-1}, t_j]$ ist) auf jedem endlichen abgeschlossenen Teilintervall innerhalb des Stetigkeitsbereichs gleichmäßig gegen die Funktion konvergiert; an den (endlich vielen) Unstetigkeitsstellen ist der Limes der Fourier-Reihe gleich dem arithmetischen Mittel aus links- und rechtsseitigem Grenzwert der Funktion, d.h. es gilt dann in allen Punkten zumindest

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} = \frac{1}{2}\left(\lim_{t\nearrow x} f(t) + \lim_{t\searrow x} f(t)\right)$$

(denn in Stetigkeitspunkten steht rechts einfach $f(x)$). (Vgl. z.B. [Heu04, Sätze 136.3 und 137.2].)

14.6. Beispiel

Wir bestimmen die reelle Version der Fourier-Reihe der Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die als 2π-periodische Fortsetzung von

$$g(x) = \frac{(x-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} \qquad (x \in [0, 2\pi[)$$

gegeben ist. Da g gerade ist, sind alle $b_k = 0$. Weiters ist

$$\pi a_0 = \int_0^{2\pi} g(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{(x-\pi)^2}{4}\,dx - \frac{\pi^2}{12}\cdot 2\pi = \left[\frac{(x-\pi)^3}{12}\right]_0^{2\pi} - \frac{\pi^3}{6} = \frac{\pi^3}{12} + \frac{\pi^3}{12} - \frac{\pi^3}{6} = 0.$$

Für die Berechnung von a_k für $k > 0$ haben wir

$$\begin{aligned}
a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cos(kx)\,dx &= \frac{1}{4\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\cos(kx)\,dx}_{\text{[part. Int.]}} - \frac{\pi}{12}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(kx)\,dx}_{=0} \\
&= \frac{1}{4\pi}\Big(\underbrace{\frac{(x-\pi)^2}{k}\sin(kx)\Big|_0^{2\pi}}_{=0} - \underbrace{\frac{2}{k}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\sin(kx)\,dx}_{\text{[part. Int.]}}\Big) \\
&= -\frac{1}{2\pi k}\Big((x-\pi)\frac{-\cos(kx)}{k}\Big|_0^{2\pi} + \underbrace{\int_0^{2\pi}\frac{\cos(kx)}{k}\,dx}_{=0}\Big) \\
&= \frac{1}{2\pi k^2}\big(\pi\cos(2k\pi) + \pi\cos(0)\big) = \frac{1}{2k^2}(1+1) = \frac{1}{k^2}.
\end{aligned}$$

Daher lautet die Fourier-Reihe von g also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}.$$

Wie wir bereits in 12.6.2) bemerkt haben, ist diese Reihe gleichmäßig konvergent. Es gilt in diesem Fall wiederum, dass die Funktion durch ihre Fourier-Reihe (sogar als gleichmäßiger Limes) dargestellt wird, d.h. es gilt im Sinne gleichmäßiger Konvergenz

$$\frac{(x-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} \qquad \forall x \in [0, 2\pi].$$

Dies folgt allgemeiner für stetige stückweise stetig differenzierbare Funktionen (vgl. [For06, §23, Satz 3]), jedoch können wir mit Hilfe der am Ende von Beispiel 14.4 angegeben Eigenschaft einen direkten Beweis dafür geben: demnach ist für jedes $\delta \in]0, \pi[$ die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(kx)}{k^2} \right)' = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{x-\pi}{2}$$

gleichmäßig konvergent im Intervall $[\delta, 2\pi - \delta]$.

Wegen $g'(x) = (x-\pi)/2$ für alle $x \in [0, 2\pi]$ gilt also nach Proposition 12.9, dass g und die Summe der Fourier-Reihe sich nur um eine Konstante c unterscheiden (und zwar durch stetige Ausdehnung auf dem gesamten Bereich). Durch Integration der Differenz von g und der Summenfunktion über das Periodizitätsintervall erhalten wir (dank obiger Berechnung von $a_0 = 0$ und Vertauschung der Summe mit dem Integral [Prop. 12.7]), dass $c = 0$ sein muss. Daher gilt also

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} \qquad \forall x \in [0, 2\pi].$$

- Speziell für $x = 0$ ergibt sich $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}$

- Für $x = \pi$ erhalten wir $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}$, d.h. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

14.7. Eine hermitesche Form für R-integrierbare Funktionen

Die auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ komplex-wertigen, Riemann-integrierbaren Funktionen $\mathcal{R}[0, 2\pi]$ bilden einen Vektorraum über $\mathbb{C}$, wenn die Operationen wie üblich punktweise definiert werden, d.h. für $f, g \in \mathcal{R}[0, 2\pi]$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ setzen wir

$(f + g)(x) := f(x) + g(x),\ (\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x);$

und sowohl $f + g$ als auch λf sind ebenfalls R-integrierbar.

Aus der Linearen Algebra kennen wir den m-dimensionalen komplexen Vektorraum $\mathbb{C}^m$ als unitären Vektorraum ausgestattet mit dem Skalarprodukt (d.i. eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform) definiert für $z = (z_1, \ldots, z_m), w = (w_1, \ldots, w_m) \in \mathbb{C}^m$ durch

$$\langle w \mid z \rangle = \sum_{k=1}^{m} w_k \, \overline{z_k}$$

und der daraus resultierenden Norm $\|w\| := \sqrt{\langle w \mid w \rangle}$ (siehe z.B. [Fis03, Kapitel 5]).

In Analogie dazu verwenden wir nun $\int_0^{2\pi} f\,\overline{g}$, um eine Hermitesche Form auf $\mathcal{R}[0, 2\pi]$ zu erhalten. Übrigens haben wir in §9 bewiesen, dass für $f, g \in \mathcal{R}[0, 2\pi]$ auch die R-Integrierbarkeit von $f\,\overline{g}$ und $|f|^2$ folgt.

Definition: Es sei $\langle . \mid . \rangle \colon \mathcal{R}[0, 2\pi] \times \mathcal{R}[0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\langle f \mid g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx \quad \forall f, g \in \mathcal{R}[0, 2\pi] \tag{14.6}$$

und $\|.\|_2 \colon \mathcal{R}[0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ die (so genannte) 2-Norm

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f \mid f \rangle} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx \right)^{1/2} \tag{14.7}$$

(Wegen $|f(x)|^2 \geq 0$ folgt aus der Monotonie des Integrals, dass $\langle f \mid f \rangle \geq 0$ gilt; daher ist $\|f\|_2$ für jedes $f \in \mathcal{R}[0, 2\pi]$ definiert.)

Proposition: Für $f, g, h \in \mathcal{R}[0, 2\pi], \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt:

1.) $\langle \lambda f + \mu g \mid h \rangle = \lambda \langle f \mid h \rangle + \mu \langle g \mid h \rangle$ [d.h. $f \mapsto \langle f \mid h \rangle$ ist linear]

2.) $\langle f \mid \lambda g + \mu h \rangle = \bar{\lambda} \langle f \mid g \rangle + \bar{\mu} \langle f \mid h \rangle$ [d.h. $h \mapsto \langle f \mid h \rangle$ ist konjugiert-linear]

3.) $\langle f \mid g \rangle = \overline{\langle g \mid f \rangle}$ [d.h. $\langle . \mid . \rangle$ ist hermitesch]

4.) $\langle f \mid f \rangle \geq 0$ (d.h. $\langle . \mid . \rangle$ ist positiv semidefinit).

Beweis: 1.) und 2.) folgen direkt aus der Linearität des Integrals, 3.) durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil. 4.) folgt direkt aus der Definition in (14.7) (bzw. der Klammerbemerkung unmittelbar danach). □

Bemerkung: $\langle . \mid . \rangle$ ist kein „richtiges" Skalarprodukt auf $\mathcal{R}[0, 2\pi]$ (und daher auch $\|.\|_2$ keine „richtige" Norm), weil $f \neq 0$ (Nullfunktion!) nicht impliziert, dass $\langle f \mid f \rangle > 0$ gilt, d.h. $\langle . \mid . \rangle$ ist auf den R-integrierbaren Funktionen **nicht positiv definit** (es folgt eben i.A. nur $\langle f \mid f \rangle \geq 0$): als Beispiel betrachten wir die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq \pi \\ 1 & x = \pi; \end{cases}$$

es gilt $f \in \mathcal{R}[0, 2\pi]$, $f \neq 0$, aber $\int_0^{2\pi} f(x)^2 \, dx = 0$.

Dieser „Defekt" stört die Anwendung auf Fourier-Reihen in der Praxis nicht und kann außerdem auch strukturell sozusagen umgangen werden, indem man „Klassen von Funktionen bildet, die sich nur auf solchen Mengen unterscheiden, die bei Integration vernachlässigbar sind" ($\rightsquigarrow$ was sind das für Mengen? [führt auf so gennante Nullmengen, im Jordan- oder Lebesgue-Sinn].)

Auf stetigen Funktionen ergibt $\langle . \mid . \rangle$ übrigens sehr wohl ein Skalarprodukt, d.h. die Einschränkung auf $\mathcal{C}([0, 2\pi]) \times \mathcal{C}([0, 2\pi])$ ist positiv definit (Übungsaufgabe!).

Für $k \in \mathbb{Z}$ sei $e_k \in \mathcal{R}[0, 2\pi]$ definiert durch

$$e_k(x) := e^{ikx} \qquad \forall x \in [0, 2\pi]. \tag{14.8}$$

Dann entspricht in dieser Notation der Relation (14.2) die folgende Gleichung

$$\langle e_k \mid e_l \rangle = \delta_{kl} = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ 1 & k = l \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}). \tag{14.9}$$

Die Relation (14.9) besagt, dass $\{e_k \colon k \in \mathbb{Z}\}$ ein Orthonormalsystem bzgl. $\langle . \mid . \rangle$ bildet und Formel (14.3) für die Fourierkoeffizienten einer Funktion $f \in \mathcal{R}[0, 2\pi]$ können wir nun einfach so schreiben:

$$c_k = \langle f \mid e_k \rangle \qquad (k \in \mathbb{Z});$$

die Fourier-Reihenentwicklung wird dadurch formal ähnlich zur Darstellung eines Vektors f bzgl. einer Orthonormalbasis

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle f \mid e_k \rangle \cdot e_k.$$

(In seiner abstrakten Ausprägung führt dies zur Theorie der Hilberträume und konkret zum Raum der quadratisch Lebesgue-integrierbaren Funktionen $\mathcal{L}^2[0, 2\pi]$; $\rightsquigarrow$ Funktionalanalysis bzw. Maß- und Integrationstheorie.)

Lemma: Es seien $f, g \in \mathcal{R}[0, 2\pi]$. Dann gilt:

1.) Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle f \mid g\rangle| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2. \tag{14.10}$$

2.) Die Dreiecksungleichung

$$\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2 \tag{14.11}$$

(das ist ein Spezialfall der Minkowski-Ungleichung in Abschnitt 15 unten). *Proof:*[**Beweis:**]
1.) Beide Seiten der behaupteten Ungleichung können wir als Limiten von entsprechenden Riemann-Summen schreiben. Daher genügt es, folgende Version der Ungleichung für endliche Summen zu beweisen: Es sei $m \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{C}$, dann gilt

$$\sum_{k=1}^{m} |x_k|\,|y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{m} |y_k|^2\right)^{1/2} \tag{$\star$}$$

(wegen $|\sum x_k\,\overline{y_k}| \leq \sum |x_k|\,|y_k|$ impliziert dies die behauptete Ungleichung.)

Wir setzen $A := \sqrt{\sum |x_k|^2}$ und $B := \sqrt{\sum |y_k|^2}$ und dürfen $A, B > 0$ annehmen, weil andernfalls alle x_k oder alle y_k verschwinden und die Ungleichung dann trivial ist. Mit der Notation $\alpha_k := |x_k|/A$ und $\beta_k := |y_k|/B$ $(k = 1, \ldots, m)$ ist dann $(\star)$ äquivalent zur Aussage: $\sum \alpha_k\,\beta_k \leq 1$.
Diese wiederum ergibt sich leicht aus der, §8 bewiesenen, Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel ($\forall a, b \geq 0$: $\sqrt{a\,b} \leq (a+b)/2$) durch folgende Rechnung:

$$\sum \alpha_k\,\beta_k = \sum \sqrt{\alpha_k^2\,\beta_k^2} \leq \sum \frac{\alpha_k^2 + \beta_k^2}{2} = \frac{1}{2}\sum \alpha_k^2 + \frac{1}{2}\sum \beta_k^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

weil ja $\sum \alpha_k^2 = \sum \beta_k^2 = 1$ nach Konstruktion gilt.

2.) Wir verwenden die Cauchy-Schwarz-Ungleichung in der folgenden Rechnung:

$$\begin{aligned}\|f+g\|_2^2 = \langle f+g \mid f+g\rangle = \langle f \mid f\rangle + 2\,\mathrm{Re}\,\langle f \mid g\rangle + \langle g \mid g\rangle \\ \leq \|f\|_2^2 + 2\|f\|_2\,\|g\|_2 + \|g\|_2^2 = (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2\,.\end{aligned}$$

$\square$

14.8. Approximation im quadratischen Mittel

Lemma

Sei $f \in \mathcal{R}[0, 2\pi]$ mit den Fourier-Koeffizienten $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.

Dann gilt:

1.) $\forall n \in \mathbb{N}$: $\left\| f - \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum\limits_{k=-n}^{n} |c_k|^2$

2.) $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 := \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \;\leq\; \|f\|_2^2$ (Bessel-Ungleichung[3]).

Proof:[**Beweis:**] 1.) Setze $f_n := \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e_k$, dann gilt

$$\langle f \mid f_n \rangle = \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k} \underbrace{\langle f \mid e_k \rangle}_{c_k} = \underbrace{\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2}_{\text{reell}} = \overline{\langle f \mid f_n \rangle} = \langle f_n \mid f \rangle \quad \text{und}$$

$$\langle f_n \mid f_n \rangle = \sum_{k,l=-n}^{n} c_k \, \overline{c_l} \, \underbrace{\langle e_k \mid e_l \rangle}_{\delta_{kl}} = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2, \text{ somit}$$

$$\|f - f_n\|_2^2 = \langle f - f_n \mid f - f_n \rangle = \langle f \mid f \rangle - \overbrace{\langle f_n \mid f \rangle - \langle f \mid f_n \rangle}^{-2\cdot\langle f | f_n \rangle} + \langle f_n \mid f_n \rangle$$

$= \|f\|_2^2 - 2 \cdot \sum |c_k|^2 + \sum |c_k|^2$, also folgt 1.)

2.) Aus 1.) folgt $\sum\limits_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$, daraus folgt 2.) für $n \to \infty$. □

Definition: Sei $f \in \mathcal{R}[0, 2\pi]$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $f_n \in \mathcal{R}[0, 2\pi]$; wir sagen, (f_n) konvergiere gegen f *im quadratischen Mittel*, falls

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_2 = 0$$

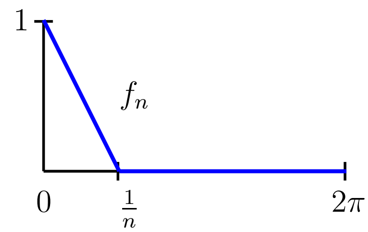
(man spricht von Konvergenz bzgl. der 2-Norm $\|.\|_2$; äquivalent dazu ist also die Aussage $\int_0^{2\pi} |f(x) - f_n(x)|^2 \, dx \to 0$ für $n \to \infty$).

[3]Friedrich Wilhelm Bessel (*22. 7. 1784 Minden; †17. 3. 1846 Königsberg) war einer der bekanntesten deutschen Wissenschaftler des 19. Jahrhunderts.

Bemerkung

1.) Falls $f_n \to f$ gleichmäßig auf $[0, 2\pi]$ und alle f_n stetig sind, dann folgt $\|f_n - f\|_2 \to 0$ [weil dann auch gilt, dass $|f_n - f|^2 \to 0$ glm., ist Prop. 12.7 anwendbar].
Die Umkehrung ist jedoch falsch!

Z.B. für f_n, gegeben durch $f_n(x) = 0$ ($\frac{1}{n} \le x \le 2\pi$) und $f_n(x) = 1 - nx$ ($0 \le x \le \frac{1}{n}$), ergibt sich



$$2\pi \, \|f_n\|_2^2 = \int_0^{1/n} (1 - nx)^2 \, dx = \frac{(1-nx)^3}{-3n}\bigg|_0^{1/n} = \frac{1}{3n} \to 0,$$

während $\|f_n\|_\infty = 1$ für alle n.

2.) Aus Punkt 1.) des obigen Lemmas schließen wir folgende nützliche Äquivalenz:

$$\text{die Fourier-Reihe konvergiert im quadr. Mittel gegen } f \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|_2^2.$$

Theorem

Sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und Rieman-integrierbar auf $[0, 2\pi]$. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f im quadratischen Mittel gegen f. Sind c_k ($k \in \mathbb{Z}$) die Fourier-Koeffizienten, so gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx \tag{14.12}$$

(Parseval-Gleichung[4] oder Vollständigkeitsrelation)

Beweis: 1. Schritt: Das Theorem gilt für jede charakteristische Funktion der Form

$$f(x) = \mathbb{1}_{[0,\,a[}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < a \\ 0 & a \le x < 2\pi \end{cases} \qquad (0 \le a \le 2\pi)$$

(mit 2π-periodischer Fortsetzung auf $\mathbb{R}$).

[4] Marc-Antoine Parseval des Chênes (*27. 4. 1755 Rosières-aux-Saline; †16. 8. 1836 Paris) [ˈmaʀk ɑ̃ˈtwan paʀsəˈval de ʃɛˈne], französischer Mathematiker

Wir berechnen die Fourier-Koeffizienten: $c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^a dx = \frac{a}{2\pi}$; für $k \neq 0$ erhalten wir $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^a e^{-ikx}\,dx = \frac{i}{2\pi k}\left(e^{-ika}-1\right)$, somit
$|c_k|^2 = \frac{1}{4\pi^2k^2}\underbrace{\left(e^{-ika}-1\right)\left(e^{ika}-1\right)}_{2-e^{ika}-e^{-ika}=2(1-\cos(ka))} = \frac{1-\cos(ka)}{2\pi^2k^2}$.

Daher gilt zunächst

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k|^2 = \frac{a^2}{4\pi^2}+2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos(ka)}{2\pi^2k^2} = \frac{a^2}{4\pi^2}+\frac{1}{\pi^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{\pi^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(ka)}{k^2} \underset{[14.6]}{=}$$
$$= \frac{a^2}{4\pi^2}+\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{(a-\pi)^2}{4}-\frac{\pi^2}{12}\right) = \frac{a^2}{4\pi^2}+\frac{1}{6}-\frac{a^2}{4\pi^2}+\frac{a\pi}{2\pi^2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{12} = \frac{a}{2\pi};$$

andererseits ist auch

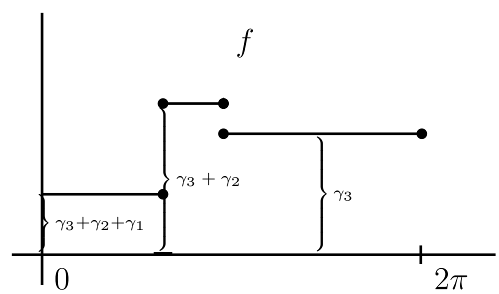
$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^a 1\,dx = \frac{a}{2\pi},$$

daher konvergiert nach obiger Bemerkung 2.) die Fourier-Reihe im quadratischen Mittel gegen f.

2. Schritt: Das Theorem gilt für Treppenfunktionen (mit 2π-periodischer Fortsetzung).

Es sei $N \in \mathbb{N}$ und $0 \leq a_1 < \cdots < a_N \leq 2\pi$, $\gamma_1,\ldots,\gamma_N \in \mathbb{R}$ und $f_j = \mathbb{1}_{[0,a_j[}$ ($1 \leq j \leq N$; jedes f_j ist vom Typ wie in Schritt 1).
Für $x \in [0,2\pi]$ mit $x \neq a_j$ (mögliche Sprungstellen) sei die Treppenfunktion f gegeben durch

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N}\gamma_j\,f_j(x).$$



Es bezeichne $F[f,n](x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ die n-te Partialsumme der Fourier-Reihe von f und $F[f_j,n]$ ($j=1,\ldots,N$) die entsprechenden Partialsummen für die Fourier-Reihe von f_j.

Es gilt $F[f,n] = \sum\limits_{j=1}^{N}\gamma_j F[f_j,n]$ (endliche Summe mit fixer Anzahl von Summanden), daher folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung und Schritt 1 für $n \to \infty$ nun

$$\|f-F[n,f]\|_2 = \left\|\sum_{j=1}^{N}\gamma_j\cdot(f_j-F[f_j,n])\right\|_2 \leq \sum_{j=1}^{N}|\gamma_j|\cdot\|f_j-F[f_j,n]\|_2 \to 0.$$

3. Schritt: allgemeiner Fall. OBdA ist f reellwertig (betrachte Real- und Imaginärteil getrennt) und $|f(x)| \leq 1$ (andernfalls Division durch $\|f\|_\infty$).

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[0, 2\pi]$ (die wir uns 2π-periodisch fortgesetzt denken) mit folgenden Eigenschaften:

(a) $-1 \leq \varphi \leq f \leq \psi \leq 1$

(b) $\int_0^{2\pi} (\psi(x) - \varphi(x))\, dx \leq \frac{\pi}{4} \cdot \varepsilon^2$.

Wir setzen $g := f - \varphi$, dann gilt $F[f,n] = F[g,n] + F[\varphi,n]$.

Gemäß Schritt 2 gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$: $\quad \|\varphi - F[\varphi,n]\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Aus 14.8, Lemma 1.), folgt zudem $\quad \|g - F[g,n]\|_2^2 \leq \|g\|_2^2$.

Weiters ist $|g|^2 = |f - \varphi|^2 \leq (\psi - \varphi)^2 = \underbrace{(\psi - \varphi)}_{[0 \leq . \leq 2]} \cdot (\psi - \varphi) \leq 2\,(\psi - \varphi)$, daher

$$\|g - F[g,n]\|_2^2 \leq \|g\|_2^2 \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \int_0^{2\pi} (\psi - \varphi)(x)\, dx \underset{[(b)]}{\leq} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi \varepsilon^2}{4} = \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Durch Kombination erhalten wir (wieder mittels Dreiecksungleichung) für $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \|f - F[f,n]\|_2 &= \|g + \varphi - F[g,n] - F[\varphi,n]\|_2 \\ &\leq \|g - F[g,n]\|_2 + \|\varphi - F[\varphi,n]\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

also zusammenfassend $\|f - F[f,n]\|_2 \to 0$ $(n \to \infty)$, somit wegen Lemma 1.) schließlich die behauptete Parseval-Gleichung

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2.$$

□

Reelle Version der Parseval-Gleichung: Falls f reellwertig, 2π-periodisch und R-integrierbar auf $[0, 2\pi]$ ist, haben wir für die Koeffizienten der zugeordneten reellen Fourier-Reihe $c_0 = a_0/2$, und für $k \geq 1$ die Relationen $c_{-k} = \overline{c_k}$ sowie $c_k = (a_k - i b_k)/2$. Somit ist in der Parseval-Gleichung $|c_k|^2 = (a_k^2 + b_k^2)/4$ einzusetzen und wegen $|c_{-k}| = |c_k|$, $|f(x)|^2 = f(x)^2$ also

$$\frac{a_0^2}{4} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{4} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2\, dx,$$

daher gilt

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 \, dx. \tag{14.12'}$$

14.9. Beispiel

Wir betrachten nochmals die Fourier-Reihe aus Beispiel 14.6, wobei wir diesmal aber den konstanten Term $\pi^2/12$ der Reihenentwicklung zurechnen, d.h.

$$\underbrace{\frac{\pi^2}{12}}_{a_0/2} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k^2}}_{a_k} \cdot \cos(kx) = \frac{(x-\pi)^2}{4} \qquad (x \in [0, 2\pi]).$$

Die reelle Version der Parseval-Gleichung (mit $a_0 = \pi^2/6$, $a_k = 1/k^2$ für $k \geq 1$, $b_k = 0$) liefert nun

$$\frac{\pi^4}{72} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(x-\pi)^4}{16} \, dx = \frac{1}{16\pi} \cdot \left. \frac{(x-\pi)^5}{5} \right|_0^{2\pi} = \frac{\pi^5 - (-\pi)^5}{80\pi} = \frac{\pi^4}{40},$$

und daraus erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \pi^4 \left(\frac{1}{40} - \frac{1}{72} \right) = \frac{\pi^4}{8} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) = \frac{\pi^4}{8} \cdot \frac{4}{45} = \frac{\pi^4}{90}.$$

$\boxed{\text{VI}}$ TOPOLOGISCHE GRUNDBEGRIFFE

§15. Metrische und normierte Räume

15.1. Definition

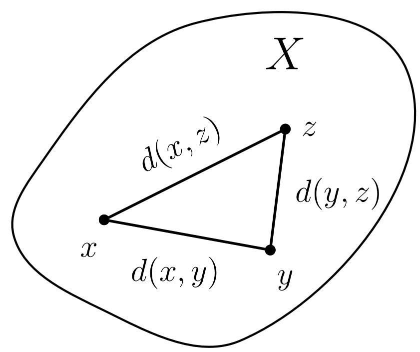
Es sei X eine Menge. Eine *Metrik* auf X ist eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto d(x,y)$ mit folgenden Eigenschaften:

(M1) $d(x,y) \geq 0 \ \forall x,y \in X; d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M2) Symmetrie: $\forall x,y\colon d(x,y) = d(y,x)$

(M3) Dreiecksungleichung: $\forall x,y,z \in X$ gilt

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$



Wir nennen (X,d) einen *metrischen Raum* und $d(x,y)$ den *Abstand* oder die *Distanz* der Punkte $x,y \in X$ bzgl. der Metrik d.

15.2. Beispiele

1.) $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit $d(x,y) := |x-y|$

2.) Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Dann ist $d_A := d\big|_{A\times A}$ die so genannte induzierte Metrik auf A und (A, d_A) ist ein metrischer Raum.

3.) Sei X eine beliebige Menge. Unter der trivialen oder diskreten Metrik auf X versteht man $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

Im Rahmen dieser Vorlesung entstehen die wichtigsten Beispiele metrischer Räume aus Teilmengen von normierten Vektorräumen.

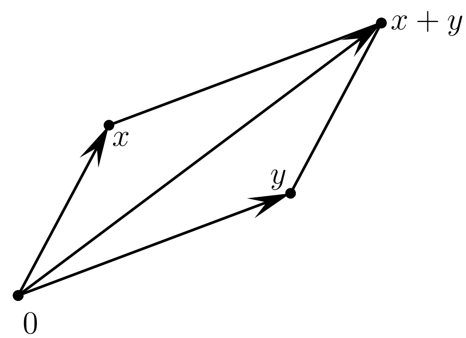
15.3. Definition

Sei V ein Vektorraum über dem Grundkörper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Eine *Norm* auf V ist eine Abbildung $\|.\| \colon V \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ mit folgenden Eigenschaften:

(N1) $\forall x \in V \colon \|x\| \geq 0; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(N2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in V \colon \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

(N3) Dreiecksungleichung:
$\forall x, y \in V$ gilt: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$



$(V, \|.\|)$ ist ein *normierter (Vektor)-Raum*.

15.4. Proposition

Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter Raum. Dann wird durch $d(x, y) := \|x - y\|$ $(x, y \in V)$ eine Metrik auf V definiert.

Proof:[**Beweis**] Übungsaufgabe. □

15.5. Beispiele: Euklidische Normen

$\mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt $\langle x \mid y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j\, y_j$, wobei $x = (x_j)_{j=1}^n, y = (y_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\|x\| = \|x\|_2 := \sqrt{\langle x \mid x \rangle} = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2} \tag{15.1}$$

die *euklidische Norm (oder 2-Norm)*. Einen Beweis, dass tatsächlich (N1-3) erfüllt ist, erhält man aus den Überlegungen im Beweis des Lemmas in 14.7 oder als Spezialfall für $p = 2$ in 15.6 unten.

Entsprechend ist

$$d(x, y) := \|x - y\|_2 = \left(\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \right)^{1/2}$$

der *euklidische Abstand* zwischen x und y.

Allgemeiner: Ist V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle .|. \rangle \colon V \times V \to \mathbb{R}$ (symmetrische, positiv definite Bilinearform), dann definiert $\|x\| := \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$ eine Norm auf V (siehe z.B. [Fis03, Kapitel 5]).

15.6. p-Normen

Wir führen hier eine wichtige Klasse von Normen, die sogenannten *p-Normen* $(1 \leq p \leq \infty)$, auf $\mathbb{C}^m$ und für Räume komplexwertiger Funktionen ein.

1.) **Maximums- und Supremumsnorm,** $\underline{p = \infty}$:

(a) Sei $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{C}^m$ (oder $\mathbb{R}^n$), dann setzen wir

$$\|x\|_\infty := \max(|x_1|, \dots, |x_m|) = \max_{1 \leq j \leq m} |x_j|$$

Für $\| \ \|_\infty$ auf $\mathbb{C}^m$ sind die Eigenschaften (N1-2) unmittelbar klar, d.h. $\|\lambda x\|_\infty = |\lambda| \cdot \|x\|_\infty$ und $\|x\|_\infty \geq 0, ; \|x\|_\infty = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Weiters folgt (N3) direkt aus der Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen, indem wir in den Ungleichungen $|x_j + y_j| \leq |x_j| + |y_j|$ $(j = 1, \dots, m)$ jeweils zum Maximum übergehen.

Daher gilt: $(\mathbb{R}^m, \| \ \|_\infty)$ (bzw. $(\mathbb{C}^m, \| \ \|_\infty)$) ist normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$).

(b) Sei X eine Menge und $f \colon X \to \mathbb{C}$ beschränkt, dann setzen wir

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(z)| : z \in X\} = \sup_{z \in X} |f(z)| \qquad \text{(Supremumsnorm).} \tag{15.2}$$

Behauptung: Die Supremumsnorm $\| \ \|_\infty$ auf den beschränkten Funktionen $\mathcal{B}(X) := \{f \colon X \to \mathbb{C} : f \text{ ist beschränkt}\}$ erfüllt die Norm-Axiome (N1-3), mit anderen Worten: $(\mathcal{B}(X), \| \ \|_\infty)$ ist ein normierter Vektorraum.

Wir überprüfen die Norm-Axiome:

(N1): $\|f\|_\infty \geq 0$ ist klar; falls $\|f\|_\infty = 0$, dann gilt $|f(x)| = 0$ für alle $x \in X$, also $\forall x \in X \colon f(x) = 0$ und somit $f = 0$ in $\mathcal{B}(X)$.

(N2): Für $\lambda \in \mathbb{C}, f \in \mathcal{B}(X)$ gilt $\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x \in X} |\lambda f(x)| = \sup |\lambda| \cdot |f(x)| = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$.

(N3): $\forall x \in X \colon |\underbrace{f(x) + g(x)}_{(f+g)(x)}| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \underbrace{\sup_{x \in X} |f(x)| + \sup_{x \in X} |g(x)|}_{\|f\|_\infty + \|g\|_\infty}$, daher folgt

$\|f + g\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x) + g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Somit ist die Behautung bewiesen.

2.) **Die Fälle** $\underline{1 \leq p < \infty}$:

(a) Sei $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{C}^m$ (oder $\mathbb{R}^m$), dann setzen wir

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^m |x_k|^p \right)^{1/p}$$

(der Spezialfall $p = 2$ entspricht der euklidischen Norm).

(b) Sei $f \in \mathcal{R}[a,b]$, dann setzen wir

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

(eine Verallgemeinerung von (14.7) — abgesehen vom Normierungsfaktor $1/2\pi$, der dort verwendet worden war).

Für $\| \ \|_p$ auf $\mathbb{C}^m$ (bzw. $\mathbb{R}^m$) sind die Eigenschaften (N1-2) unmittelbar klar, d.h. $\|\lambda x\|_p = |\lambda| \cdot \|x\|_p$ und $\|x\|_p \geq 0,$; $\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$. (N3) folgt aus der Minkowski-Ungleichung (siehe das folgende Lemma).

Für $\| \ \|_p$ $(1 \leq p < \infty)$ auf R-integrierbaren Funktionen ist die Eigenschaft (N2) und der erste Teil von (N1) unmittelbar klar, d.h. $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p$, $\|f\|_p \geq 0$; aber $\|f\|_p = 0$ erzwingt nicht $f = 0$.

Allerdings ist auch (N1) gültig, falls wir uns auf die stetigen Funktionen $\mathcal{C}([a,b]) \subseteq \mathcal{R}[a,b]$ beschränken: für f stetig und $f \neq 0$ gibt es x_0 und $\delta > 0$ mit $|f(x)| \geq |f(x_0)|/2 > 0$, wenn $|x - x_0| \leq \delta$; dann folgt $\|f\|_p^p = \int_a^b |f|^p \geq 2\delta |f(x_0)|^p / 2^p > 0$.

(N3) folgt ebenfalls aus dem angekündigten

Lemma

Seien $p, q \in]1, \infty[$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ oder $p = 1$ und $q = \infty$.

(i) $\forall x, y \in \mathbb{C}^m$ gilt:

$$\sum_{k=1}^m |x_k y_k| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q \qquad \text{(Hölder-Ungleichung)}$$

und

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \qquad \text{(Minkowski-Ungleichung)}$$

(ii) $\forall f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ gilt:

$$\int_a^b |f(x) g(x)| \, dx \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \qquad \text{(Hölder-Ungleichung für Integrale)}$$

und

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \qquad \text{(Minkowski-Ungleichung für Integrale)}$$

Bemerkung: Die Spezialfälle der Hölder-Ungleichungen für $p = q = 2$ ergeben jeweils die entsprechenden Cauchy-Schwarz-Ungleichungen, denn

$|\langle x \mid y\rangle| \leq \sum |x_k y_k| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$ bzw. $|\langle f \mid g\rangle| \leq \int |f(x)g(x)|\, dx \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$.

Beweis

$\boxed{\text{(i)}}$ • OBdA ist $x \neq 0$ und $y \neq 0$. Für $p = 1$, $q = \infty$ ergibt sich die Hölder-Ungleichung direkt wie folgt

$$\sum_{k=1}^{m} |x_k||y_k| \leq \sum_{k=1}^{m} |x_k| \cdot \|y\|_\infty = \|x\|_1 \cdot \|y\|_\infty.$$

• Für $1 < p, q < \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$ erinnern wir an die in §8, bewiesene Ungeichung

$$\forall r, s > 0: \quad r^{1/p} \cdot s^{1/q} \leq \frac{r}{p} + \frac{s}{q}.$$

Wir setzen $\xi_k := \left(\frac{|x_k|}{\|x\|_p}\right)^p$, $\eta_k := \left(\frac{|y_k|}{\|y\|_q}\right)^q$ $(k = 1, \ldots, m)$, dann ist $\sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k = \sum\limits_{k=1}^{m} \eta_k = 1$ und somit

$$\frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} \sum_{k=1}^{m} |x_k\, y_k| = \sum_{k=1}^{m} \xi_k^{1/p}\, \eta_k^{1/q} \leq \sum_{k=1}^{m} (\frac{\xi_k}{p} + \frac{\eta_k}{q}) = \frac{1}{p} \sum \xi_k + \frac{1}{q} \sum \eta_k = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

• Für $p = 1$ folgt die Minkowski-Ungleichung direkt aus der Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen:

$$\sum_{k=1}^{m} |x_k + y_k| \leq \sum_{k=1}^{m} (|x_k| + |y_k|) = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

• Sei $p > 1$: Wir setzen $z_k := |x_k + y_k|^{p-1}$ $(k = 1, \ldots, m)$, dann gilt mit $q \geq 1$, $1/p + 1/q = 1$

$$z_k^q = |x_k + y_k|^{q \cdot (p-1)} = |x_k + y_k|^{\frac{p}{p-1} \cdot (p-1)} = |x_k + y_k|^p$$

und weiter $\|z\|_q = \left(\sum\limits_k z_k^q\right)^{1/q} = \|x + y\|_p^{p/q}$. Daraus erhalten wir mit Hilfe der Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen und der eben bewiesenen Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p^p = \sum |x_k + y_k|^p = \sum_k |x_k + y_k| \cdot |z_k| &\leq \sum_k |x_k\, z_k| + \sum_k |y_k\, z_k| \\ &\leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \cdot \|z\|_q = (\|x\|_p + \|y\|_p) \cdot \|x + y\|_p^{p/q}. \end{aligned}$$

Wegen $p - \frac{p}{q} = 1$ folgt also $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

$\boxed{\text{(ii)}}$ In §9 haben wir gezeigt, dass mit f und g auch $|f \cdot g|$, $|f|^p$, $|g|^p$ R-integrierbar (auf $[a, b]$) sind.

Die Hölder- und die Minkowski-Ungleichung gelten für die entsprechenden Riemann-Summen und überträgen sich im Limes daher auch auf die Integrale.

$\square$

Somit erhalten wir zusammenfassend die

Proposition: Es sei $1 \leq p \leq \infty$, dann sind $(\mathbb{R}^m, \| \ \|_p)$, $(\mathbb{C}^m, \| \ \|_p))$ und $(\mathcal{C}([a, b]), \| \ \|_p)$ normierte Vektorräume (über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$).

15.7. Definition

Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

1.) Sei $a \in X$, $r > 0$, dann heißt

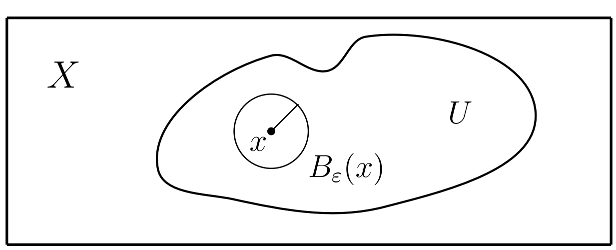
$$B_r(a) := \{x \in X : d(a, x) < r\} \tag{15.3}$$

die *(offene) Kugel*[1] mit Mittelpunkt a und Radius r (bzgl. der Metrik d auf X)

2.) Sei $U \subseteq X, x \in U$. Dann ist U eine *Umgebung* von x, falls gilt:

$$\exists \varepsilon > 0 \colon B_\varepsilon(x) \subseteq U$$

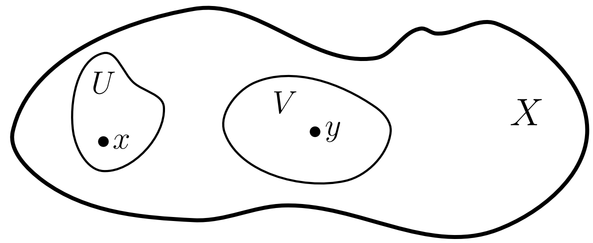
Insbesondere ist $B_\varepsilon(x)$ stets eine Umgebung von x, die so genannte *ε-Umgebung* von x (bzgl. d).



[1]Für Kugeln wird in der Mathematik oftmals der Buchstabe B benutzt, weil in vielen Sprachen das Wort für Kugel mit b beginnt; hier einige Beispiele: englisch ball, spanisch bola, französisch boule.

15.8. Proposition (Hausdorff-Trennungseigenschaft)[2]

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Dann gibt es Umgebungen U von x und V von y, die disjunkt sind, d. h. $U \cap V = \emptyset$.



Beweis:

Setze $\varepsilon := \frac{d(x,y)}{3} > 0$, $U := B_\varepsilon(x)$, $V := B_\varepsilon(y)$. Dann ist U Umgebung von x und V Umgebung von y.

Weiters ist $U \cap V = \emptyset$, denn

$$\begin{aligned} z \in U \cap V \quad &\Rightarrow \quad d(x,z) < \varepsilon \ \text{ und } \ d(z,y) < \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad 3\varepsilon = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < 2\varepsilon \quad \text{ein Widerspruch } \lightning. \end{aligned}$$

□

15.9. Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $U \subseteq X$. U heißt *offen*, falls $\forall x \in U$ gilt: U ist Umgebung von x. (D.h. U ist Umgebung jedes ihrer Punkte.)

Eine äquivalente Bedingung ist: $\forall x \in U \colon \exists \varepsilon > 0 \colon B_\varepsilon(x) \subseteq U$.

15.10. Beispiele

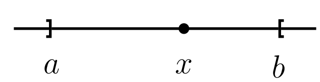
1.) Sei (X, d) ein beliebiger metrischer Raum, $a \in X$, $r > 0$. Dann ist $U := B_r(a)$ offen:

Sei $x \in B_r(a)$, $\varepsilon := r - d(x,a) > 0$, dann gilt für jedes $y \in B_\varepsilon(x)$:

$d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a) < \varepsilon + d(x,a) = r$, d. h. $y \in B_r(a)$; also $B_\varepsilon(x) \subseteq B_r(a)$.

2.) Sei $a < b$, dann ist $]a, b[$ ist offen in $\mathbb{R}$:

Sei $x \in]a, b[$; setze $\varepsilon := \min(x - a, b - x) > 0$, dann ist $B_\varepsilon(x) =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subseteq]a, b[$.



Ebenso sieht man, dass $]a, \infty[$ und $]-\infty, a[$ offen sind.

Intervalle der Form $[a, b[$ oder $[a, b]$ sind nicht offen (siehe Übungsaufgaben).

[2]Felix Hausdorff (*8. 11. 1868 Breslau; †26. 1. 1942 Bonn), deutscher Mathematiker

15.11. Theorem

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

1.) X und $\emptyset$ sind offen

2.) $U, V \subseteq X$ offen $\Rightarrow U \cap V$ offen (allgemeiner: endliche Durchschnitte)

3.) Sei I eine Menge. Falls $U_i \subseteq X$ offen für alle $i \in I$, dann ist $\bigcup\limits_{i \in I} U_i$ offen.

Beweis:

1.) $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0\colon B_\varepsilon(x) \subseteq X$, also ist X Umgebung jedes Punktes $x \in X$.
Für $\emptyset$ ist die Umgebungsbedingung trivialerweise erfüllt.

2.) Sei $x \in U \cap V$.
U ist offen, daher $\exists \varepsilon_1 > 0\colon B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq U$;
V ist offen, daher $\exists \varepsilon_2 > 0\colon B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq V$.
Für $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ist dann $B_\varepsilon(x) \subseteq U \cap V$.

3.) Sei $x \in \bigcup\limits_{i \in I} U_i$. Dann existiert ein $j \in I\colon x \in U_j$.
U_j ist offen, daher existiert $\varepsilon > 0\colon B_\varepsilon(x) \subseteq U_j \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} U_i$.

$\square$

15.12. Bemerkung

Eigenschaft 2.) gilt nur für endliche, nicht aber für unendliche Durchschnitte.
Z. B. betrachte in $X = \mathbb{R}$ die Folge offener Intervalle $U_n =]-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}[$ (für $n \in \mathbb{N}$,$n \geq 1$).
Dann ist $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} U_n = [0, 1]$, also nicht offen.

15.13. Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. A heißt *abgeschlossen*, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Folgende Eigenschaften erhalten wir direkt aus Theorem 15.11:

1.) $\emptyset$ und X sind abgeschlossen
(diese Mengen haben beide Eigenschaften: offen und abgeschlossen.)

2.) $A, B \subseteq X$ abgeschlossen $\Rightarrow A \cup B$ abgeschlossen (allg.: endliche Vereinigungen)

3.) Ist $\forall i \in I$ die Menge $A_i \subseteq X$ abgeschlossen, dann ist auch $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ abgeschlossen.

15.14. Beispiele

1.) Sei $a < b$, dann ist $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen, weil

$$[a, b] = \big(\mathbb{R} \setminus]-\infty, a[\big) \cap \big(\mathbb{R} \setminus]b, \infty[\big)$$

ein Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist.

Hingegen ist $[a, b[$ nicht abgeschlossen (und auch nicht offen).

2.) $A_1 \subseteq \mathbb{R}^k, A_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ seien abgeschlossen (jeweils bzgl. der euklidischen Metrik).

Behauptung: $A_1 \times A_2 \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{k+m}$ ist abgeschlossen.
(Allg.: endliche kartesische Produkte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.)

Beweis:

Wir zeigen, dass $U := (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m) \setminus (A_1 \times A_2)$ offen ist.

Sei $(x, y) \in U$, dann gilt $x \in \mathbb{R}^k \setminus A_1$ oder $y \in \mathbb{R}^m \setminus A_2$.

Angenommen $x \in \mathbb{R}^k \setminus A_1$ (der Fall $y \in \mathbb{R}^m \setminus A_2$ ist dann analog).
$\exists \varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(x) \subseteq \mathbb{R}^k \setminus A_1$ und daher ist auch $B_\varepsilon((x, y)) \subseteq (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m) \setminus (A_1 \times A_2)$, denn

$$\begin{aligned}(x', y') \in B_\varepsilon((x, y)) \quad \Rightarrow \quad & \varepsilon^2 > \|(x, y) - (x', y')\|^2 \\ & = \|(x, 0) - (x', 0)\|^2 + \|(0, y) - (0, y')\|^2 \geq \|x - x'\|^2 \quad \Rightarrow \quad x' \notin A_1\end{aligned}$$

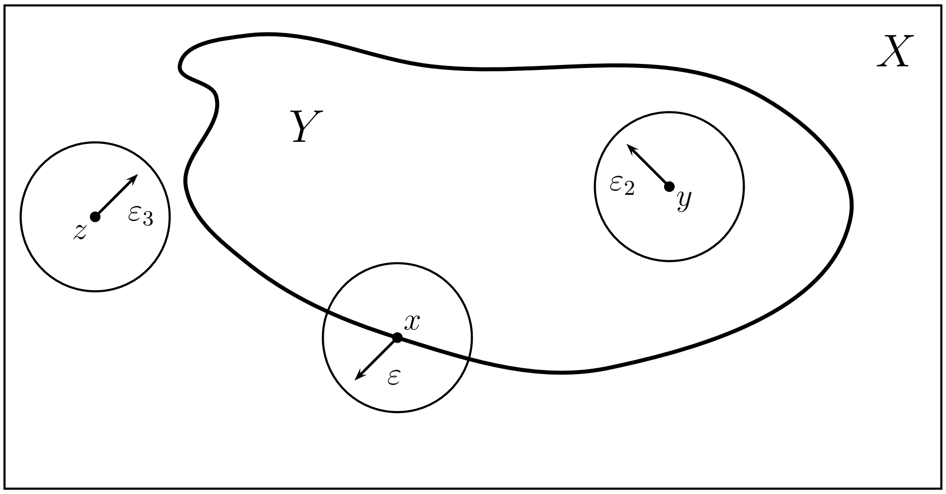
□

Spezialfall: Seien $a_j \leq b_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, dann ist der Quader

$$Q := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j \leq b_j \ (j = 1, \ldots, n)\} = \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j] \tag{15.4}$$

abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$.

Lage von Punkten bzgl. einer Teilmenge Y im metrischen Raum X:



y liegt innerhalb von Y: $\exists$ „Schutzkugel" $B_{\varepsilon_2}(y) \subseteq Y$

z liegt außerhalb von Y: $\exists$ „Schutzkugel" $B_{\varepsilon_3}(z) \subseteq X \setminus Y$

x liegt weder außen noch innen bzgl. $Y \rightsquigarrow$

15.15. Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$. Ein Punkt $x \in X$ heißt *Randpunkt* von Y, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0: \quad B_\varepsilon(x) \cap Y \neq \emptyset \;\text{ und }\; B_\varepsilon(x) \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset.$$

(Äquivalent: Jede Umgebung von x enthält sowohl Punkte aus Y als auch aus $X \setminus Y$.)

Die Menge $\partial Y := \{x \in X : x \text{ ist Randpunkt von } Y\}$ heißt der *Rand* von Y.

15.16. Beispiele

1.) Es sei $a < b$ und $I \subseteq \mathbb{R}$ das Intervall $[a, b]$ oder $[a, b[$ oder $]a, b]$ oder $]a, b[$.

In allen Fällen gilt $\partial I = \{a, b\}$.

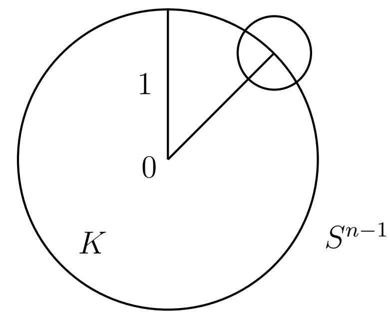
2.) In $X = \mathbb{R}^n$ sei $K := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$. Dann ist $\partial K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} =: S^{n-1}$, also die (Einheits-)Sphäre.[3]

Ebenso gilt für die offene Kugel $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$, dass $\partial B_1(0) = S^{n-1}$.

[3] Die $(n-1)$-Sphäre bildet also die „Oberfläche" der n-dimensionalen Einheits-Kugel um den Ursprung; der Name kommt von dem griechischen Wort ἡ σφαῖρα (Kugel).

• $\varepsilon > 0, y \in S^{n-1} \Rightarrow \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot y \in B_\varepsilon(y) \cap (\mathbb{R}^n \setminus K)$ und der Punkt $(1-\frac{\varepsilon}{2}) \cdot y$ (falls $\varepsilon < 4$) oder 0 (falls $\varepsilon \geq 4$) gehört jedenfalls zu $K \cap B_\varepsilon(y)$, also gilt $S^{n-1} \subseteq \partial K$.

• $x \notin S^{n-1} \Rightarrow \|x\| > 1$ oder $\|x\| < 1$, also ist $B_\varepsilon(x)$ ganz innerhalb oder außerhalb von K, falls $\varepsilon := \big|1 - \|x\|\big|/2$ gesetzt wird; daher $\partial K \subseteq S^{n-1}$.



3.) Für $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ist $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ ($\mathbb{Q}$ ist also ein echte Teilmenge des eigenen Randes).

[Im ersten Semester hieß es '$\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liegen dicht in $\mathbb{R}$' in folgender Bedeutung: $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\colon B_\varepsilon(x) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ und $B_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$.]

15.17. Proposition

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $Y \subseteq X$ Dann gilt:

1.) $\mathring{Y} := Y \setminus \partial Y$ ist offen; $\mathring{Y}$ heißt das *Innere* von Y (auch *offener Kern* von Y)

2.) $\overline{Y} := Y \cup \partial Y$ ist abgeschlossen; $\overline{Y}$ heißt *Abschluss* von Y (auch *abgeschlossene Hülle* von Y)

3.) Der Rand ∂Y ist abgeschlossen.

4.) $\partial(X \setminus Y) = \partial Y$ (d.h. Y und sein Komplement [in X] haben denselben Rand)

Beweis:

1.) $y \in Y \setminus \partial Y$, d. h. $y \in Y$ und $y \notin \partial Y$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0\colon \quad \underbrace{B_\varepsilon(y) \cap Y = \emptyset}_{\text{unmöglich, weil } y \in Y \cap B_\varepsilon(y)} \quad$ oder $\quad B_\varepsilon(y) \cap (X \setminus Y) = \emptyset$

$\Rightarrow B_\varepsilon(y) \cap (X \setminus Y) = \emptyset$, d. h. $B_\varepsilon(y) \subseteq Y$;

noch zu zeigen: $B_\varepsilon(y) \cap \partial Y = \emptyset$ [dann fertig, weil $B_\varepsilon(y) \subseteq Y \setminus \partial Y$ folgt]

Indirekt: $z \in B_\varepsilon(y) \cap \partial Y \Rightarrow$ für alle η mit $0 < \eta < \varepsilon - d(y, z)$ gilt (weil z Randpunkt ist und wegen $B_\eta(z) \subseteq B_\varepsilon(y)$)

$\emptyset \neq (X \setminus Y) \cap B_\eta(z) \subseteq (X \setminus Y) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$, ein Widerspruch ϟ.

4.) $z \in \partial(X \setminus Y) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\colon B_\varepsilon(z) \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$ und $B_\varepsilon(z) \cap Y \neq \emptyset$

$\Longleftrightarrow \quad z \in \partial Y$

2.) $Y \cup \partial Y \underset{[4.)]}{=} Y \cup \partial(X \setminus Y) = \Big(X \setminus (X \setminus Y)\Big) \cup \partial(X \setminus Y) =$

$= X \setminus \Big[(X \setminus Y) \setminus \partial(X \setminus Y)\Big] = X \setminus \underbrace{(X \setminus Y)^\circ}_{[1.)\text{ offen}]}$ ist abgeschlossen

3.) $\partial Y = (Y \cup \partial Y) \setminus (Y \setminus \partial Y) = \overline{Y} \setminus \mathring{Y}$

und somit ist $X \setminus \partial Y = (X \setminus \overline{Y}) \cup \mathring{Y}$ offen [weil $\overline{Y}$ abgeschlossen gemäß 2.)]

$\Rightarrow \partial Y$ abgeschlossen

$\square$

§16. Konvergenz und Stetigkeit

16.1. Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

1.) Eine *Folge* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X ist eine Abbildung $x\colon \mathbb{N} \to X$, wobei $x_k := x(k)$ $(k \in \mathbb{N})$ gesetzt wird.

2.) Sei (x_k) eine Folge in X, $a \in X$. Dann heißt (x_k) *konvergent* gegen a, $a = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$, oder auch $x_k \to a$ $(k \to \infty)$, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall k \geq N: \quad x_k \in B_\varepsilon(a). \tag{16.1}$$

Äquivalent dazu ist die Bedingung

(16.1)' Für jede Umgebung U von a gilt: $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall k \geq N: \quad x_k \in U$

oder auch:

(16.1)” $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall k \geq N: \quad d(x_k, a) < \varepsilon$.

16.2. Definition

Sei (X, d) metrischer Raum, $A \subseteq X$; dann heißt

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x, y)\colon x, y \in A\} \in [0, \infty] \tag{16.2}$$

der *Durchmesser* von A. (griech.: ἡ διάμετρος).

Falls $\operatorname{diam}(A) < \infty$, so heißt A *beschränkt* (bzgl d). Eine Folge (x_k) in X heißt *beschränkt*, wenn $A := \{x_k\colon k \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ beschränkt ist.

16.3. Proposition

Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

1.) $r > 0, a \in X \Rightarrow \operatorname{diam} B_r(a) \leq 2r$, insbesondere ist $B_r(a)$ beschränkt

[Bem: für die diskrete Metrik und $r < 1$ ist stets $B_r(x) = \{x\}$ und $\operatorname{diam} B_r(x) = 0$, also echt kleiner als $2r$.]

2.) Für $A \subseteq X$ gilt: A beschränkt $\iff$ $\exists r > 0\ \exists z \in X\colon A \subseteq B_r(z)$

3.) Jede konvergente Folge in X ist beschränkt.

Beweis:

1.) $x, y \in B_r(a) \Rightarrow d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) \leq 2r$

2.) $\Leftarrow$ klar, weil $\operatorname{diam} A \leq \operatorname{diam} B_r(z) \leq 2r < \infty$

$\Rightarrow$ • $A = \emptyset \Rightarrow \forall r > 0\ \forall z \in X\colon A \subseteq B_r(z)$

• $A \neq \emptyset$: sei $z \in A$ und $r := 1 + \operatorname{diam}(A)$;

$x \in A \Rightarrow d(x,z) \leq \operatorname{diam}(A) < r \Rightarrow x \in B_r(z)$

3.) Sei $a = \lim(x_k)$; $\varepsilon = 1$ in (16.1) liefert: $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall k \geq N\colon x_k \in B_1(a)$;

sei $r_0 := \max\limits_{1 \leq j \leq N} d(x_j, a)$, dann gilt $\forall k \in \mathbb{N}\colon x_k \in B_{\max(r_0,1)}(a)$.

□

16.4. Theorem

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Dann besteht folgende Äquivalenz:

A ist abgeschlossen $\iff$ Für jede Folge (x_k) in A gilt: falls (x_k) konvergent ist und $x := \lim(x_k)$ (in X), dann folgt $x \in A$.

Beweis:

$\Rightarrow$ Sei (x_k) eine Folge in A, die konvergiert und $x = \lim(x_k) \in X$; z. z.: $x \in A$.

Indirekt: $x \notin A$, d.h. x ist Element der offenen Menge $X \setminus A$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0\colon B_\varepsilon(x) \subseteq X \setminus A$, d. h. $B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$.

Andererseits gilt wegen $x_k \to x$: $\exists N\colon \forall k \geq N\colon x_k \in B_\varepsilon(x)$, ein Widerspruch ↯ dazu, dass $x_k \in A$.

$\Leftarrow$ z. z.: $X \setminus A$ ist offen

Indirekt: angenommen $\exists\, x \in X \setminus A$ so, dass $\forall \varepsilon > 0$ gilt $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$;

zu $\varepsilon = \frac{1}{k}$ $(k \geq 1)$ wähle $x_k \in A \cap B_{\frac{1}{k}}(x)$

$\Rightarrow (x_k)$ ist eine Folge in A und $x_k \to x$, also $x \in A$, ein Widerspruch ↯

□

16.5. Cauchy-Folgen und Vollständigkeit

Definition: Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

1.) Eine Folge (x_k) in X heißt *Cauchy-Folge*, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall k, m \geq N\colon \quad d(x_k, x_m) < \varepsilon. \tag{16.3}$$

2.) (X, d) heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in X konvergiert.

3.) Ist $(V, \|.\|)$ ein normierter Vektorraum und als metrischer Raum vollständig (bzgl. der Metrik $d(x, y) := \|x - y\|$), so heißt $(V, \|.\|)$ *Banach-Raum*.[1]

Beispiel: 1.) aus dem ersten Semester wissen wir, dass $\mathbb{R}$ (mit der euklidischen Metrik) vollständig ist.

2.)$X = \mathbb{Q}$ mit $d(x, y) = |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ ist nicht vollständig; sei z. B. $x_k :=$ Dezimalbruchentwicklung von $\sqrt{2}$ bis zur k-ten Stelle

$\Rightarrow$ (x_k) ist Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$ und $x_k \to \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, d. h. (x_k) ist nicht konvergent in $\mathbb{Q}$.

Proposition: Wenn (x_k) eine konvergente Folge im metrischen Raum (X, d) ist, dann ist (x_k) eine Cauchy-Folge.

Beweis: Sei $a = \lim(x_k)$ und $\varepsilon > 0$; wähle $N \in \mathbb{N}\colon \forall k \geq N\colon d(x_k, a) < \frac{\varepsilon}{2}$,

dann folgt $\forall k, m \geq N\colon \quad d(x_k, x_m) \leq d(x_k, a) + d(a, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$ $\square$

16.6. Theorem

Wir betrachten nun $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm $\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$.

1.) Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn})$ für $k \in \mathbb{N}$, weiters sei $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$; dann gilt

$$x_k \to a\ (k \to \infty) \text{ in } \mathbb{R}^n \quad \Longleftrightarrow \quad j = 1, \ldots, n\colon \quad a_j = \lim_{k \to \infty} x_{kj} \text{ (in } \mathbb{R})$$

2.) $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ ist ein Banach-Raum.

[1] Stefan Banach (*30. 3. 1892 Krakau; †31. 8. 1945 Lemberg) [ˈstɛfan ˈbanax], polnischer Mathematiker

Beweis:

1.) $\Rightarrow$ für alle j gilt: $|x_{kj} - a_j| \leq \|x_k - a\| \to 0 \quad (k \to \infty)$

$\Leftarrow$ Sei $\varepsilon > 0$; zu jedem $j \in \{1, \ldots, n\}$ $\exists\, N_j$ $\forall k \geq N_j$: $|a_j - x_{kj}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$;

sei $N = \max\limits_{1 \leq j \leq n} N_j$ und $k \geq N$, dann ist

$$\|x_k - a\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |x_{kj} - a_j|^2 < n \cdot \tfrac{\varepsilon^2}{n} = \varepsilon^2.$$

Daher also $\forall k \geq N$: $\quad d(x_k, a) = \|x_k - a\| < \varepsilon$.

2.) (x_k) Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^n \quad \Longrightarrow \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}$: $|x_{kj} - x_{mj}| \leq \|x_k - x_m\|$

also ist für $j = 1, \ldots, n$ jeweils $(x_{kj})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$.

Daher gilt $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$: $\exists a_j := \lim_{k \to \infty} x_{k_j} \in \mathbb{R}$; setze $a = (a_1, \ldots, a_n)$, dann folgt nach 1.), dass $x_k \to a$ $(k \to \infty)$.

$\square$

16.7. Stetigkeit:

Definition: Es seien (X, d_1) und (Y, d_2) metrische Räume und $f\colon X \to Y$. Die Abbildung f heißt *stetig* im Punkt $a \in X$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\; \exists \delta > 0\; \forall x \in X\colon \quad d_1(x, a) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

f heißt stetig auf X, wenn f stetig in jedem Punkt $a \in X$ ist.

Wir nennen f einen *Homöomorphismus*, falls f stetig und bijektiv ist und die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon Y \to X$ ebenfalls stetig ist. X und Y heißen dann *zueinander homöomorph*[2].

Theorem: Es seien (X, d_1), (Y, d_2) metrische Räume, $f\colon X \to Y$ und $a \in X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1.) f ist stetig in a.

2.) Für jede Folge (x_k) in X mit $a = \lim x_k$ (in (X, d_1)) ist $f(a) = \lim f(x_k)$ (in (Y, d_2)). Man schreibt dann auch $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

[2]Von griechisch ὁμοιόμορφος, wörtl. „von gleicher Gestalt“.

Beweis:

1.) $\Rightarrow$ 2.): Sei (x_n) eine Folge in X mit $x_n \to a$.

Zu $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, sodass $\forall x \in X$ mit $d_1(x, a) < \delta$ gilt $d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Wähle $N \in \mathbb{N}$: $d_1(x_n, a) < \delta$ für alle $n \geq N$; daher folgt dann $\forall n \geq N$, dass $d_2(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$ gilt; somit $f(x_n) \to f(a)$.

2.) $\Rightarrow$ 1.): Es ist $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$;

indirekt: f nicht stetig in $a \Rightarrow$

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in X: \quad d_1(x, a) < \delta \text{ und } d_2(f(x), f(a)) \geq \varepsilon.$$

Zu $\delta = \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$ gibt es $x_n \in X$ mit $d_1(x_n, a) < \frac{1}{n}$ und $d_2(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$;

nun ist (x_n) eine Folge in X mit $x_n \to a$ $(n \to \infty)$, aber $f(x_n) \not\to f(a)$, ein Widerspruch ↯

$\square$

16.8. Beispiele

1.) $\operatorname{add}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$ ist stetig.

[$\lim(x_k, y_k) = (x, y) \Rightarrow \lim(x_k + y_k) = x + y = \operatorname{add}(x, y)$]

2.) $\operatorname{mult}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x \cdot y$ ist stetig.

3.) $\operatorname{quot}\colon \mathbb{R} \times \big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big) \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x/y$ ist stetig.

16.9. Proposition

Seien X, Y und Z metrische Räume und $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ Abbildungen.

Sei f stetig in $a \in X$ und g stetig in $b := f(a) \in Y$. Dann ist $g \circ f\colon X \to Z$ stetig in a.

Beweis: Sei $a = \lim x_k \in X$, dann ist $b = f(a) = \lim f(x_k) \in Y$ und

$$(g \circ f)(a) = g(b) = \lim g(f(x_k)) = \lim (g \circ f)(x_k),$$

also $g \circ f$ ist stetig in a. $\square$

16.10. Stetige Abbildungen $X \to \mathbb{R}^n$

Sei $f\colon X \to \mathbb{R}^n$, dann ist für jedes $x \in X$ der Funktionswert $f(x) \in \mathbb{R}^n$ gegeben durch ein n-Tupel $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, wobei $f_1, \dots f_n\colon X \to \mathbb{R}$ die Komponentenfunktionen von f sind.

[Bemerkung: Bezeichne für $1 \le j \le n$ jeweils $p_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j$, die j-te (Koordinaten-)Projektion, dann ist $f_j = p_j \circ f$.]

Proposition: Sei X ein metrischer Raum und $f\colon X \to \mathbb{R}^n$, dann gilt:

f stetig $\iff$ $\forall j \in \{1, \dots n\}\colon$ $f_j\colon X \to \mathbb{R}$ stetig

Beweis: Sei $X \ni a = \lim x_k$, $b := f(a) \in \mathbb{R}^n$, dann gilt nach Theorem 16.6, 1.):

$b = f(a) = \lim f(x_k) \iff \forall j\colon b_j = f_j(a) = \lim_{k\to\infty} f_j(x_k)$ □

Korollar: Sei X ein metrischer Raum und $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ stetig, dann sind auch die Abbildungen $f + g\colon X \to \mathbb{R}$, $f \cdot g\colon X \to \mathbb{R}$ stetig.

Ist zusätzlich $g(x) \neq 0\ \forall x \in X$, dann ist $\frac{f}{g}\colon X \to \mathbb{R}$ ebenfalls stetig.

Beweis: $(f, g)\colon X \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (f(x), g(x))$ ist stetig nach obiger Proposition; daher sind auch $f + g = \mathrm{add} \circ (f, g)$, $f \cdot g = \mathrm{mult} \circ (f, g)$, $\frac{f}{g} = \mathrm{quot} \circ (f, g)$ also Zusammensetzungen stetiger Abbildungen stetig (siehe 16.8 und 16.9). □

16.11. Beispiel (Polynomfunktionen auf $\mathbb{R}^n$)

Es sei $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion in n (reellen) Variablen vom Grad $\le m$, also gegeben durch

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_n \le m}} c_{k_1 \dots k_n} \cdot \underbrace{x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}}_{\text{Monome vom Grad } \le m} ,$$

wobei $c_{k_1 \dots k_n} \in \mathbb{R}$.

Zum Beispiel beschreibt der Ausdruck $7x_1^3 + 3x_1x_3^4 - 4x_2^5x_3^2$ eine Polynomfunktion vom Grad 7 auf $\mathbb{R}^3$ (d.h. in 3 Variablen).

F ist stetig, weil es als Summe von Produkten stetiger Funktionen entsteht ($x \mapsto \mathrm{const}$ und $x \mapsto x_j$ sind stetig).

16.12. Beispiel (Lineare Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$)

Eine lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sei gegeben durch die Matrix
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ (bzgl. der Standardbasen), d. h.

$$Lx = \left(\sum_{l=1}^{n} a_{jl}\, x_l \right)_{j=1}^{m} =: \Big(L_j(x)\Big)_{j=1}^{m}.$$

Die linearen Abbildungen $L_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind Spezialfälle von 16.11, nämlich vom Grad ≤ 1. Also ist jedes L_j stetig ($j = 1, \ldots, m$), daher auch L stetig.

16.13. Beispiele

1.) Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x_0 \in X$, dann ist $f\colon X \to \mathbb{R}$, $f(x) := d(x, x_0)$ stetig.

Sei $a \in X$ und $\varepsilon > 0$. Es ist

$$|f(x) - f(a)| = |d(x, x_0) - d(a, x_0)| = (\star)$$

Mini-Lemma: $|d(y, \xi) - d(z, \xi)| \leq d(y, z)$

„Beweisschen“: kombiniere $d(y, \xi) \leq d(y, z) + d(z, \xi)$ und $d(z, \xi) \leq d(z, y) + d(y, \xi)$ $\square$

Daher erhalten wir $(\star) \leq d(x, a)$, somit ist mit $\delta := \varepsilon$ die Stetigkeitsbedingung erfüllt.

(Ebenso einfach: $x_n \to a \Rightarrow d(x_n, a) \to 0 \Rightarrow |f(x_n) - f(a)| \to 0$.)

Bemerkung: ähnlich sieht man auch, dass $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ stetig ist; denn durch Einschieben geeigneter Terme erhalten wir aus dem Mini-Lemma auch

$$|d(x, y) - d(x_0, y_0)| \leq |d(x, y) - d(x_0, y)| + |d(x_0, y) - d(x_0, y_0)| \leq d(x, x_0) + d(y, y_0) \to 0,$$

falls $x \to x_0$ und $y \to y_0$.

2.) **Lineare Abbildung zwischen normierten Räumen:**

Seien $(V, \|.\|_1), (W, \|.\|_2)$ normierte Vektorräume und $L\colon V \to W$ linear. Wir definieren die *Operatornorm* von L durch

$$\|L\|_{\mathrm{op}} := \sup \{\|Lx\|_2 \colon x \in V \text{ mit } \|x\|_1 \leq 1\}. \tag{16.4}$$

Behauptung: L stetig $\iff$ $\|L\|_{\text{op}} < \infty$

In diesem Fall gilt auch

(16.5) $$\forall x \in V\colon \quad \|Lx\|_2 \le \|L\|_{\text{op}} \cdot \|x\|_1$$

Beweis:

($\Leftarrow$) Es ist $\|L0\|_2 = \|0\|_2 = 0$; falls $x \neq 0$, dann gilt

$$\|Lx\|_2 = \|x\|_1 \, \|L \frac{x}{\|x\|_1}\|_2 \le \|L\|_{\text{op}} \|x\|_1,$$

also folgt (16.5).

Somit ist auch $\|Lx - La\|_2 = \|L(x-a)\|_2 \le \|L\|_{\text{op}} \cdot \|x-a\|_1$,

d. h. zu beliebigem $\varepsilon > 0$ kann $\delta := \frac{\varepsilon}{2 \cdot \max(1, \|L\|_{\text{op}})} > 0$ gewählt werden, sodass $\|Lx - La\|_2 \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ gilt, falls $\|x-a\|_1 < \delta$.

($\Rightarrow$) Stetigkeit von L bei 0: zu $\varepsilon = 1$ $\exists \delta > 0$ $\forall z \in V\colon \|z\|_1 < \delta \Rightarrow \|Lz\|_2 < 1$;

Sei $x \in V \setminus \{0\}$, $\bar{x} := \frac{\delta}{2\|x\|_1} \cdot x$, dann ist $\|\bar{x}\|_1 = \frac{\delta}{2} < \delta$ und weiter

$1 > \|L\bar{x}\|_2 = \frac{\delta}{2\|x\|_1} \cdot \|Lx\|_2 \Rightarrow \frac{2}{\delta}\|x\|_1 \ge \|Lx\|_2$

d. h. $\forall x \in V$ mit $\|x\|_1 \le 1$ gilt $\|Lx\|_2 \le \frac{2}{\delta}$; somit also $\|L\|_{\text{op}} \le \frac{2}{\delta} < \infty$.

$\square$

Korollar: Sei $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, dann gilt $\|L\|_{\text{op}} < \infty$ und (jeweils mit euklidischer Norm)

$$\forall x \in \mathbb{R}^n\colon \quad \|Lx\| \le \|L\|_{\text{op}} \cdot \|x\|.$$

Beweis: L ist stetig, also folgt dies aus der obigen Behauptung bzw. aus (16.5). $\square$

Bemerkung: Durch direktes Nachrechnen der Normaxiome (N1-3) erhalten wir, dass $\mathcal{L}(V,W) = \{L\colon V \to W : L \text{ ist linear und stetig}\}$ ausgestattet mit $\|.\|_{\text{op}}$ zu einem normierten Vektorraum wird.

16.14. Theorem

Es seien X, Y metrische Räume und $f\colon X \to Y$. Dann ist äquivalent:

1.) Für jeden Punkt $a \in X$ gilt: zu jeder Umgebung V von $f(a)$ (in Y) gibt es eine Umgebung U von a (in X) mit $f(U) \subseteq V$.

2.) $\forall W \subseteq Y$ offen: $f^{-1}(W)$ ist offen in X.

3.) $\forall B \subseteq Y$ abgeschlossen: $f^{-1}(B)$ ist abgeschlossen in X.

4.) f ist stetig auf X.

Beweis:

1.)$\Leftrightarrow$ 4.) folgt aus den Definitionen von Umgebung, nämlich mit Hilfe von Kugeln bzgl. der betrachteten Metrik, und Stetigkeit: $\forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0\colon f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a))$.

2.)$\Leftrightarrow$ 3.) folgt direkt mittels der Äquivalenz 'W offen $\Leftrightarrow Y \setminus W$ abgeschlossen' und allgemeinen Relationen für Abbildungen $f^{-1}(Y \setminus W) = X \setminus f^{-1}(W)$ etc.

Wir zeigen noch 1.) $\Leftrightarrow$ 2.), dann sind wir fertig:

1.) $\Rightarrow$ 2.): Sei $W \subseteq Y$ offen; z. z.: $f^{-1}(W)$ offen in X.

Sei $a \in f^{-1}(W)$ beliebig. W ist Umgebung von $f(a)$, daher existiert eine Umgebung U von a (in X): $f(U) \subseteq W$, d. h. $U \subseteq f^{-1}(W)$.

2.) $\Rightarrow$ 1.): Sei V Umgebung von $f(a)$, dann $\exists \varepsilon > 0\colon B_\varepsilon(f(a)) \subseteq V$;

es ist $a \in f^{-1}\big(B_\varepsilon(f(a))\big) =: U$ offen, also Umgebung von a, und $f(U) \subseteq V$.

$\square$

16.15. Beispiel

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, $c \in \mathbb{R}$ beliebig, Dann sind Mengen der Form

$\{x \in X\colon f(x) < c\} = f^{-1}(]-\infty, c[)$ offen

$\{x \in X\colon f(x) = c\} = f^{-1}(\{c\})$ abgeschlossen

$\{x \in X\colon f(x) \leq c\} = f^{-1}(]-\infty, c])$ abgeschlossen.

Weiters ist z. B. $K_r(a) := \{x \in X\colon d(x, a) \leq r\} = f^{-1}([0, r])$ für $f(x) := d(x, a)$, wobei $f\colon X \to [0, \infty[$ stetig ist. Somit ist die „abgeschlossene“ Kugel um a mit Radius r auch abgeschlossen im Sinne der Metrik d.

16.16. Der Fixpunktsatz von Banach

Definition:

1.) Seien $(X, d_1), (Y, d_2)$ metrische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *Kontraktion*, falls es eine Konstante $q \in \,]0,1[$ gibt, so dass $\forall x, y \in X$ gilt:

$$d_2(f(x)), f(y)) \leq q \cdot d_1(x, y) \tag{16.6}$$

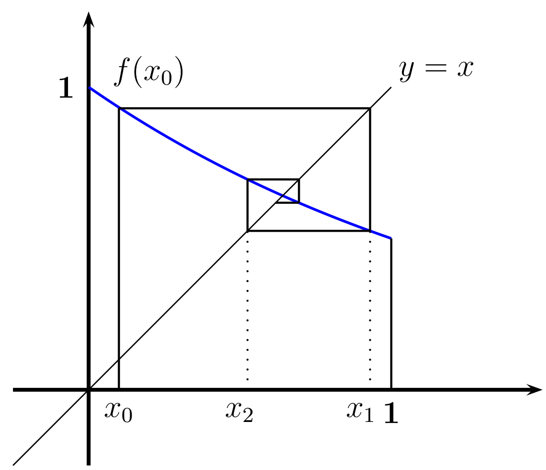
(insbesondere folgt, dass f stetig ist).

2.) Sei X eine Menge und $f\colon X \to X$ eine Abbildung. Ein *Fixpunkt* von f ist ein Punkt $a \in X$ mit der Eigenschaft $f(a) = a$.

Beispiel: $X = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$. $f\colon [0,1] \to [0,1]$, $x \mapsto 2^{-x}$, ist eine Kontraktion:
$|f(x) - f(y)| \leq \sup_{z\in[0,1]} |f'(z)| \cdot |x-y|$
$= \sup_{z\in[0,1]} |\log 2 \cdot 2^{-z}| \cdot |x - y| \leq \log 2 \cdot |x-y|$,
wobei $0 < \log 2 < 1$.

$\boxed{?}$ Hat f einen Fixpunkt $a \in [0,1]$

Idee: wähle $x_0 \in [0,1]$ beliebig und definiere $x_1 = f(x_0), \ldots, x_{n+1} = f(x_n), \ldots$ die Skizze gibt Hoffnung auf Konvergenz gegen Fixpunkt



Theorem: Es sei (X, d) ein vollständiger (!) metrischer Raum und $f\colon X \to X$ eine Kontraktion. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt $a \in X$. Für $x_0 \in X$ (beliebig) konvergiert die Folge (x_n) mit $x_{n+1} := f(x_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ gegen a.

Beweis:

Eindeutigkeit: wäre $a \neq b$ und $f(a) = a$, $f(b) = b$, so folgte

$\underline{0 < d(a,b)} = d(f(a), f(b)) \leq q \cdot d(a,b) \underline{< d(a,b)}$, ein Widerspruch ↯

Existenz: Sei $x_0 \in X$ beliebig und für $n \in \mathbb{N}$: $x_{n+1} := f(x_n)$;

dann gilt $\forall n \geq 1$: $\quad d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq q \cdot d(x_n, x_{n-1})$;

und induktiv: $d(x_{n+1}, x_n) \leq q^{n-k} \cdot d(x_{k+1}, x_k)$ $(0 \leq k < n)$; daraus folgt

$d(x_n, x_k) \leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + d(x_{k+1}, x_k) \leq$

$\leq \left(q^{n-k-1} + q^{n-k-2} + \cdots + 1\right) \cdot d(x_{k+1}, x_k) = \frac{1-q^{n-k}}{1-q} \cdot d(x_{k+1}, x_k)$.

Außerdem ist $d(x_{k+1}, x_k) \leq q^k \cdot d(x_1, x_0)$ (ersetze oben n durch k und k durch 0), also

$d(x_n, x_k) \leq \frac{q^k - q^n}{1-q} \cdot d(x_1, x_0) \leq \frac{q^k}{1-q} \cdot d(x_1, x_0)$.

Dies zeigt, dass (x_m) eine Cauchy-Folge ist (denn zu $\varepsilon > 0$ wähle N mit $\frac{q^N}{1-q} \cdot d(x_1, x_0) < \varepsilon$, dann gilt $d(x_n, x_k) < \varepsilon$ für $n, k \geq N$).

(X, d) ist vollständig, daher $\exists\, a := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ und es gilt (weil ja f stetig ist)

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & f(x_n) \\ \downarrow & (n \to \infty) & \downarrow \\ a & & f(a), \end{array}$$

wegen der Eindeutigkeit des Limes also $a = f(a)$. □

Bemerkung: Aus $d(x_n, x_k) \leq \frac{q^k}{1-q} d(x_1, x_0)$ erhalten wir für $n \to \infty, x_n \to a$,

die Fehlerabschätzung $d(a, x_k) \leq \frac{q^k}{1-q} \cdot d(x_1, x_0)$ im k-ten Schritt des Verfahrens.

16.17. Gleichmäßige Konvergenz

Definition: Sei X eine Menge, (Y, ρ) ein metrischer Raum, sowie $f\colon X \to Y$ und $f_n\colon X \to Y$ (für $n \in \mathbb{N}$) eine Folge von Abbildungen.

Die Folge (f_n) *konvergiert gleichmäßig* gegen f, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon \quad \underbrace{\forall x \in X\colon\ \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon}_{[\text{d.h. } \sup\limits_{x \in X} \rho(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon]} \quad \forall n \geq N.$$

Proposition: Seien $(X, d), (Y, \rho)$ metrische Räume, $f_n\colon X \to Y$ stetig ($n \in \mathbb{N}$). Wenn (f_n) gleichmäßig gegen $f\colon X \to Y$ konvergiert, dann ist f stetig.

Beweis: ① gleichmäßige Konvergenz: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ \forall x \in X\colon \rho(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

② f_N ist stetig in $a \in X$, daher $\exists \delta > 0\colon d(x, a) < \delta \Rightarrow \rho(f_N(x), f_N(a)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Somit gilt für alle $x \in X$ mit $d(x, a) < \delta$:

$$\rho(f(x), f(a)) \leq \underbrace{\rho(f(x), f_N(x))}_{①\colon < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\rho(f_N(x), f_N(a))}_{②\colon < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\rho(f_N(a), f(a))}_{①\colon < \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon.$$

Daher ist f stetig in a; a war beliebig aus X, also ist f stetig auf X. □

16.18. Korollar

Sei (X,d) ein metrischer Raum und

$$\mathcal{C}_b(X,\mathbb{R}^m) := \{f\colon X \to \mathbb{R}^m \text{ stetig} : \|f\|_\infty := \sup_{x\in X} \|f(x)\| < \infty\}.$$

Dann ist $(\mathcal{C}_b(X,\mathbb{R}^m), \|.\|_\infty)$ ein Banach-Raum.

Beweis: Zunächst ist $\|.\|_\infty\colon \mathcal{C}_b(X,\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ eine Norm [wie in §15].

(f_n) Cauchy-Folge bzgl. $\|.\|_\infty \implies \forall x \in X\colon (f_n(x))$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^m \implies \forall x \in X\colon \exists f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}^m$

Somit ist eine Abbildung $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ definiert; es bleibt noch zu zeigen, dass $f_n \to f$ und f stetig und beschränkt ist:

Sei $x \in X$, $k,n \in \mathbb{N}$

$\|f_k(x) - f_n(x)\| \le \|f_k - f_n\|_\infty < \varepsilon$ für $k,n \ge N$

$\downarrow (n \to \infty)$

$\|f_k(x) - f(x)\|$, x beliebig $\implies \|f_k - f\|_\infty \le \varepsilon \quad (k \ge N)$.

Daher ist (f_k) gleichmäßig konvergent gegen f und weiters folgt mit 16.17, dass f stetig ist.

Schließlich ist $\|f(x)\| \le \|f(x) - f_N(x)\| + \|f_N(x)\| \le \underbrace{\|f - f_N\|_\infty}_{\le\varepsilon} + \|f_N\|_\infty$,

daher $\|f\|_\infty \le \varepsilon + \|f_N\|_\infty < \infty$, also ist f beschränkt. $\square$

§17. Kompaktheit

17.1. Definition

Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$.

1.) Sei I eine Menge und $\forall i \in I : U_i \subseteq X$ offen.
$(U_i)_{i \in I}$ heißt *offene Überdeckung* von A, wenn gilt: $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \supseteq A$.

2.) A heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von A eine endliche Teilüberdeckung enthält, d. h. $\exists k \in \mathbb{N} : \exists i_1, \ldots, i_k \in I : \bigcup\limits_{l=1}^{k} U_{i_l} \supseteq A$ [endliche Vereinigung!]

17.2. Proposition

1.) Jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes ist beschränkt und abgeschlossen.

2.) Jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist selbst kompakt.

Beweis:

2.) Sei $K \subseteq X$ kompakt, $A \subseteq K$ abgeschlossen und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A.
Es ist $X \setminus A$ offen und $(X \setminus A) \cup \bigcup\limits_{i \in I} U_i \supseteq (X \setminus A) \cup A = X \supseteq K$, d.h. durch Hinzufügen von $X \setminus A$ erhalten wir eine offene Überdeckung von K.
Aus der Komaktheit von K folgt nun: $\exists i_1, \ldots i_k : (X \setminus A) \cup \bigcup\limits_{j=1}^{k} U_{i_j} \supseteq K \supseteq A$, daher auch $\bigcup\limits_{j=1}^{k} U_{i_j} \supseteq A$. Also ist A kompakt.

1.) Sei $A \subseteq X$ kompakt und $A \neq \emptyset$ (andernfalls ist die Aussage trivial).
Sei $a \in A$, dann gilt $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n(a) \supseteq A$, also ist $(B_n(a))_{n \geq 1}$ eine offene Überdeckung von A. Die Kompaktheit von A garantiert: $\exists n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: $\bigcup\limits_{j=1}^{k} B_{n_j}(a) \supseteq A$
Wegen $B_n(a) \subseteq B_m(a)$ für $m \geq n$ ist dann $A \subseteq B_N(a)$, wobei $N := \max(n_1, \ldots, n_k)$; also ist A beschränkt.
Noch z. z.: A ist abgeschlossen
Wir zeigen: $X \setminus A$ offen

Falls $A = X$, dann $X \setminus A = \emptyset$ offen. Daher nehmen wir im weiteren $A \neq X$ an.

Sei $x \in X \setminus A$; für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ setze

$$U_n := \{y \in X : d(x,y) > \frac{1}{n}\};$$

die Mengen U_n sind offen und $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = X \setminus \{x\} \supseteq A$, d.h. wir haben damit eine offene Überdeckungen von A konstruiert. Die Kompaktheit von A liefert somit

$\exists n_1, \ldots, n_k$: $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} U_{n_j}$, d. h. $\forall y \in A\ \exists j :\ d(x,y) > \frac{1}{n_j}$.

Setze $N := \max(n_1, \ldots, n_k)$, dann ist $\frac{1}{N} \leq \frac{1}{n_j}$ $(j = 1, \ldots, k)$ und $x \in B_{\frac{1}{N}}(x) \subseteq X \setminus A$. Also ist $X \setminus A$ offen.

$\square$

17.3. Theorem (Satz von Heine-Borel[1])

Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt:

A ist kompakt $\iff$ A ist beschränkt und abgeschlossen

Bemerkung und Warnung: In beliebigen metrischen Räumen müssen beschränkte, abgeschlossene Teilmengen nicht immer kompakt sein (Beispiele in VO zu Topologie und Funktionalanalysis).

Beweis:

$\Rightarrow$ gilt allgemein nach Proposition 17.2.

$\Leftarrow$ Indirekt: Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A, für die keine endliche Teilüberdeckung von A existiert.

A ist beschränkt, daher gibt es einen abgeschlossenen Würfel $W = \prod_{j=1}^{n} [-\frac{s}{2}, \frac{s}{2}]$ (also mit Kantenlänge $= s > 0$) mit $A \subseteq W$. [Bew: wähle $s > 0$ mit $A \subseteq B_{\frac{s}{2}}(0) \subseteq W$]

Wir zerlegen W in 2^n Teilwürfel mit Kantenlänge $\frac{s}{2}$.

Es muss ein Teilwürfel W_1 darunter sein, so dass $A \cap W_1$ nicht von endlich vielen U_i überdeckt werden kann;

[1]Heinrich Eduard Heine (*15. 3. 1821 Berlin; †21. 10. 1881 Halle), deutscher Mathematiker
Félix Édouard Justin Émile Borel (*7. 1. 1871 Saint-Affrique; †3. 2. 1956 Paris) [feˈliks eduˈɑʀ ʃysˈtɛ̃ eˈmil boˈʀɛl], französischer Mathematiker und Politiker

Wiederholung des Verfahrens mit W_1 usw. liefert eine Folge abgeschlossener Würfel $W_1 \supseteq W_2 \supseteq, \dots$, wobei W_k Kantenlänge $\frac{s}{2^k}$ hat und

$(\star)$ $\forall k : A \cap W_k$ kann nicht von endlich vielen der U_i $(i \in I)$ überdeckt werden.

Für $k \geq 1$ wähle $x_k \in A \cap W_k$ beliebig; für $l \geq k$ gilt dann $x_l, x_k \in A \cap W_k$ und somit $d(x_l, x_k) \leq \frac{s}{2^k}\sqrt{n}$.

Daher ist (x_k) eine Cauchy-Folge; sei $a := \lim_{k\to\infty} x_k$. Es ist $a \in A$, weil A abgeschlossen ist. Außerdem $\exists i_0 \in I : a \in U_{i_0}$ (weil $A \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} U_i$).

$\exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_0 : a \in W_k \subseteq U_{i_0}$

(denn $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(a) \subseteq U_{i_0}$ und für $\frac{s}{2^{k_0}} < \varepsilon/\sqrt{n}$ ist $W_k \subseteq W_{k_0} \subseteq B_\varepsilon(a)\ \forall k \geq k_0$)

Insgesamt folgt nun $\forall k \geq k_0 : A \cap W_k \subseteq U_{i_0}$, ein Widerspruch ↯ zu $(\star)$.

□

Das Konzept der Teilfolgen ist in allgemeinen metrischen Räumen genauso wie in $\mathbb{R}$:

für eine streng monotone Teilfolge von Indizes $n_0 < n_1 < \dots$ bildet $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von (x_n).

17.4. Proposition (Satz von Bolzano-Weierstraß)

Sei A eine kompakte Teilmenge des metrischen Raumes X und (x_n) eine Folge in A (d. h. für jedes n ist $x_n \in A$). Dann gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen einen Punkt $a \in A$ konvergiert.

Beweis: Indirekt: angenommen, es gäbe keine konvergente Teilfolge. Dann gibt es zu jedem $a \in A$ eine offene Umgebung U_a von a, in der nur endlich viele Folgenglieder liegen.

Wegen $A \subseteq \bigcup\limits_{a\in A} U_a$ und der Kompaktheit von A gibt es $a_1, \dots, a_N \in A$ so, dass $A \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{N} U_{a_j}$.

Demnach liegen aber überhaupt nur endlich viele Folgenglieder in A, ein Widerspruch ↯ □

Bemerkung: Es gilt auch die Umkehrung in obigem Satz (vgl. [Heu04, Satz 157.1]).

17.5. Korollar

Jede beschränke Folge in $\mathbb{R}^n$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis: Sei (x_k) eine beschränkte Folge. Dann ist $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ enthalten in einer offenen Kugel $B_R(0)$, somit auch in deren Abschluss $\overline{B_R(0)} = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \leq R\}$, der nach dem Satz von Heine-Borel kompakt ist. □

17.6. Theorem

Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Ist $K \subseteq X$ kompakt, dann ist auch $f(K) \subseteq Y$ kompakt.

Beweis:

Sei $(V_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$. Für jedes i ist $U_i := f^{-1}(V_i)$ ist offen in X, weil f stetig ist. Außerdem ist laut Konstruktion $K \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, was wegen der Kompaktheit von K eine endliche Auswahl von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in I$ mit $K \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{k} U_{i_j}$ erlaubt.

Dann ist aber auch $f(K) \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{k} f(U_{i_j}) \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{k} V_{i_j}$, somit eine endliche Teilüberdeckung von $(V_i)_{i\in I}$ für $f(K)$ gefunden. $\square$

17.7. Korollar

Sei X ein metrischer Raum, $K \subseteq X$ eine kompakte Teilmenge und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Funktion f beschränkt (d. h. $f(K)$ ist beschränkt) und nimmt ihr Maximum und Minimum an, d. h. $\exists p, q \in K$: $f(p) = \sup f(K)$, $f(q) = \inf f(K)$.

Beweis:

$A := f(K) \subseteq \mathbb{R}$ ist kompakt, da f stetig ist. Somit ist A beschränkt und abgeschlossen.

Sei $\alpha := \sup A$ und $\beta := \inf A$, dann gibt es Folgen (x_k) und (y_k) in A mit $x_k \to \alpha$ und $y_k \to \beta$ $(k \to \infty)$. Da A abgeschlossen ist, gilt $\alpha, \beta \in A$ und $\exists\, p, q \in K$: $f(p) = \alpha$, $f(q) = \beta$. $\square$

17.8. Proposition

Es seien (X, d_1), (Y, d_2) metrische Räume, $K \subseteq X$ kompakt und $f : K \to Y$ stetig. Dann ist $f : K \to Y$ *gleichmäßig stetig*, d. h.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in K : \quad d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

(δ kann unabhängig von der Stelle x bzw. y gewählt werden).

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$; f ist stetig in jedem Punkt von X, daher gilt:

$$\forall x \in K\ \exists \delta(x) > 0\ \forall y \in K : \quad d_1(x, y) < \delta(x) \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2};$$

$\bigcup_{x\in K} B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x) \supseteq K$ und K ist kompakt, daher $\exists x_1,\dots,x_k \in K : \bigcup_{j=1}^{k} B_{\frac{\delta(x_j)}{2}}(x_j) \supseteq K$.

Wir setzen $\delta := \min\left(\frac{\delta(x_1)}{2},\dots,\frac{\delta(x_k)}{2}\right)$; für $x,y \in K$ beliebig mit $d_1(x,y) < \delta$ gilt:
$\exists j \in \{1,\dots,k\} : x \in B_{\frac{\delta(x_j)}{2}}(x_j)$ und damit auch
$d_1(y,x_j) \le d_1(y,x) + d_1(x,x_j) < \delta + \frac{\delta(x_j)}{2} \le \frac{\delta(x_j)}{2} + \frac{\delta(x_j)}{2} = \delta(x_j)$, daher weiter
$d_2(f(x),f(y)) \le d_2(f(x),f(x_j)) + d_2(f(x_j),f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

17.9. Anwendung: Äquivalenz von Normen auf $\mathbb{R}^n$

Definition: Zwei Normen $\|.\|$ und $\|.\|'$ auf dem Vektorraum V (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) heißen *äquivalent*, falls gilt:

$$\exists C_1, C_2 > 0 : \forall x \in V : \quad C_1\,\|x\| \le \|x\|' \le C_2\,\|x\|. \tag{17.1}$$

Bemerkung: 1.) Es ist leicht zu sehen, dass (17.1) eine Äquivalenzrelation (auf der Menge aller Normen auf V) definiert.

2.) Auf unendlichdimensionalen Vektorräumen gibt es inäquivalente Normen (siehe Funktionalanalysis für Beispiele).

Proposition: Seien $\|.\|$ und $\|.\|'$ äquivalente Normen auf V und d bzw. d' die entsprechenden Metriken. Dann definieren d und d' die gleichen offenen Mengen und Umgebungen in V (daher bleiben auch die Begriffe Konvergenz und Stetigkeit dieselben).

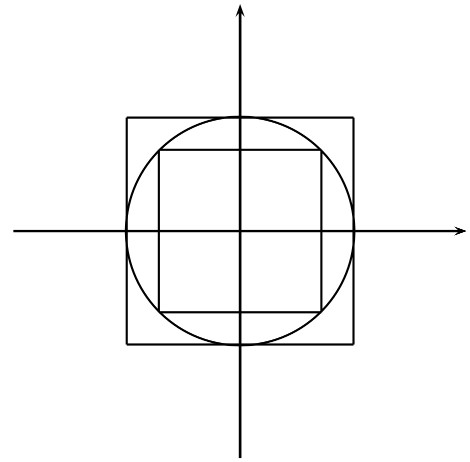
(„Die Topologie wird durch Übergang zu einer äquivalenten Norm nicht verändert.“)

Beweis: Es genügt, die entsprechende Schachtelung von offenen Kugeln zu zeigen; dies zeigt man leicht aus der folgenden Beobachtung:

$$\forall x,y \in V : d(x,y) = \|x-y\| \le \frac{1}{C_1}\|x-y\|' = \frac{1}{C_1}\cdot d'(x,y) \le \frac{C_2}{C_1}\|x-y\| = \frac{C_2}{C_1}d(x,y).$$

□

Beispiel: Auf $\mathbb{R}^n$ sind $\|.\|_\infty$ und $\|.\|_2$ äquivalent, denn



$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|) \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \|x\|_2 \leq \left(\sum_{j=1}^n \|x\|_\infty^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Theorem: Je zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.

Beweis:

Sei $\|.\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$ und bezeichne $\|.\|_2$ die euklidische Norm.

Sei $e_j = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-te Komponente}}, 0, \ldots, 0)$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ haben wir die Basisdarstellung $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$. Daraus folgt mit der Dreiecksungleichung

$$\|x\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \cdot \|e_j\| \leq \left(\sum |x_j|^2\right)^{1/2} \cdot \underbrace{\left(\sum \|e_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{=:C_2} = C_2 \cdot \|x\|_2.$$

Somit gilt $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq C_2 \|x - y\|_2$, daher ist die Abbildung $x \mapsto \|x\|$ stetig $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2) \to (\mathbb{R}, |.|)$.

$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$ ist kompakt (weil beschränkt und abgeschlossen), daher

$\exists x_0 \in S^{n-1} : \|x_0\| = \min\{\|x\| : x \in S^{n-1}\}$.

Wir setzen $C_1 := \|x_0\|$; es ist $C_1 > 0$, weil $x_0 \neq 0$.

$\forall x \neq 0$: $\frac{x}{\|x\|_2} \in S^{n-1}$, daher $C_1 \leq \|\frac{x}{\|x\|_2}\| = \frac{\|x\|}{\|x\|_2}$, d.h. $C_1 \cdot \|x\|_2 \leq \|x\|$.

Insgesamt haben wir gezeigt: $C_1 \cdot \|x\|_2 \leq \|x\| \leq C_2 \cdot \|x\|_2$.

Somit ist jede Norm auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent zur 2-Norm, also sind je zwei Normen äquivalent (Transitivität und Symmetrie). $\square$

$\boxed{\text{VII}}$ DIFFERENZIERBARE ABBILDUNGEN $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Grundlegende Notationen und Begriffe

$x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ... Zeilenschreibweise (um Platz zu sparen; in Operationen als Spaltenvektoren aufgefasst)

$1 \leq j \leq n$: $e_j = (\delta_{lj})_{l=1}^n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ ... j-ter Standardbasisvektor (1 in der j-ten Komponente, sonst 0); $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ... Standardbasis des $\mathbb{R}^n$

$U \subseteq \mathbb{R}^n, f \colon U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung ... oft in Kurzschreibweise: $f \colon \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^m$

Komponentenfunktionen: $\forall x \in U \colon f(x) = (f_1(x), \ldots f_m(x))$, wobei für $j = 1, \ldots, m$ jeweils $f_j \colon U \to \mathbb{R}$; es ist $f = (f_1, \ldots, f_m)$

Wichtiger Spezialfall: *skalare Funktion* $f \colon \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}$ *mehrerer Variablen* $x_1, \ldots, x_n$

mit *partiellen Funktionen* bei festem $x \in U$:

$\tilde{f}_{k,x} \colon y \mapsto f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + y, x_{k+1}, \ldots, x_n) = f(x + y \cdot e_k) \quad (1 \leq k \leq n)$

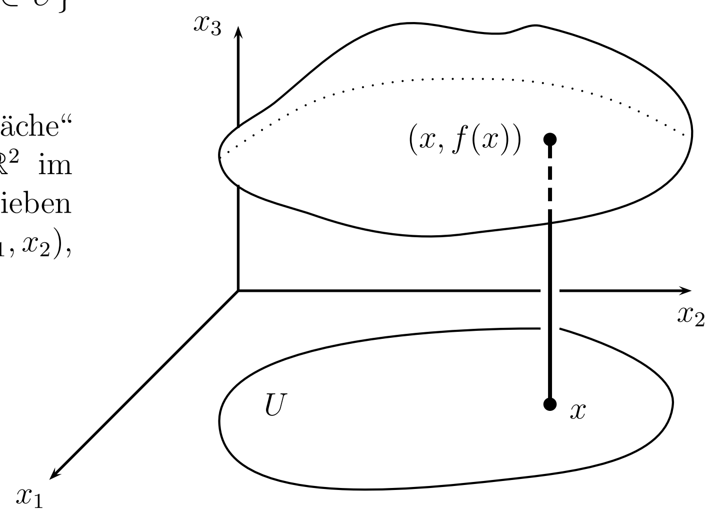
ist definiert für $y \in \mathbb{R}$ mit $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + y, x_{k+1}, \ldots, x_n) \in U$

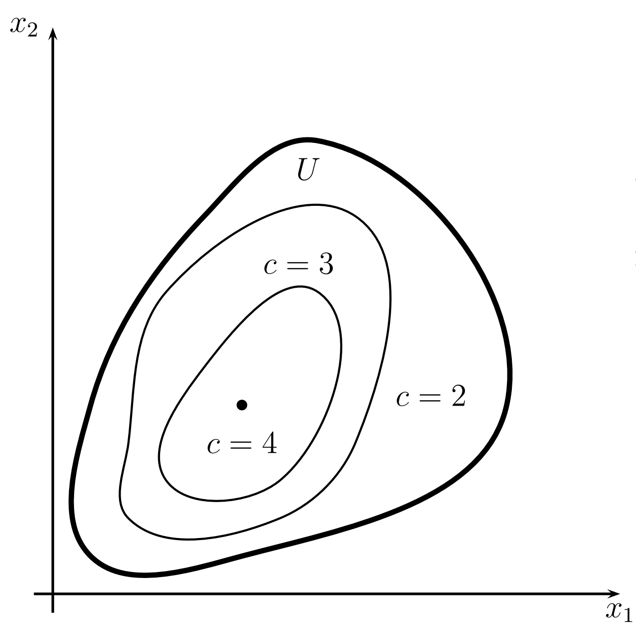
Bemerkung: Wenn U offen, dann existiert ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ um 0 derart, dass $\tilde{f}_{k,x}$ auf I definiert ist.
(Beweis: $y \mapsto x + y \cdot e_k$ ist stetig, daher ist das Urbild von U darunter offen in $\mathbb{R}$.)

Veranschaulichung skalarer Funktionen durch Graphen und Niveaumengen

$G(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \colon x \in U\}$ heißt *Graph von f*

Im Fall $n = 2$ ergibt sich eine „Fläche“ oder „Landschaft“ über $U \subseteq \mathbb{R}^2$ im dreidimensionalen Raum, beschrieben in Koordinaten durch $x_3 = f(x_1, x_2)$, $x = (x_1, x_2) \in U$.





Niveaumengen (auch „Niveaulinien“ oder „Höhenschichtlinien“):

für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist

$N_f(c) := \{x \in U \colon f(x) = c\} = f^{-1}(\{c\})$

§18. Partielle Ableitungen und Differenzierbarkeit

18.1. Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ und $1 \leq j \leq n$.

Dann heißt f in $x \in U$ *partiell differenzierbar* in der j-ten Koordinatenrichtung, falls

$$D_j f(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h \cdot e_j) - f(x)}{h} \qquad [= (\tilde{f}_{j,x})'(0)] \tag{18.1}$$

existiert (wobei der Limes natürlich für $h \to 0$ mit $h \neq 0, x + he_j \in U$ zu nehmen ist); in diesem Fall heißt $D_j f(x)$ die *j-te partielle Ableitung* von f bei x.

Wenn $D_j f(x)$ für jedes $x \in U$ existiert, so definiert $x \mapsto D_j f(x)$ wieder eine Funktion: $D_j f\colon U \to \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt *partiell differenzierbar* (in U), falls $D_j f(x)$ für jedes $x \in U$ und $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$ existiert. Es sind dann die partiellen Ableitungsfunktionen $D_1 f, \ldots, D_n f\colon U \to \mathbb{R}$ definiert. f heißt *stetig partiell differenzierbar*, wenn f partiell differenzierbar ist und alle $D_1 f, \ldots, D_n f$ stetig sind.

Andere Schreibweisen:

$$D_j f(x) = \partial_j f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \quad \text{bzw.} \quad D_j f = \partial_j f = \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

- Formal klarer ist die Notation als Operator ohne Variablenbezeichnung
- In Rechnungen mit konkreten Termen sind aber oft Ausdrücke mit Variablenbezeichnungen im Ableitungsoperator selbst vorteilhaft, wie z. B. in Ausdrücken der Form $\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-x^2+y^2}\right) = e^{-x^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{y^2}\right) = e^{-x^2} \cdot 2y\, e^{y^2} = 2y\, e^{-x^2+y^2}$.

  ([nach Michael Grosser:] x wird fürs Ableiten nach y zunächst eingefroren und danach wieder aufgetaut $\rightsquigarrow$ einfache Ableitung nach y mit x als „Konstante“; heraus kommt aber wieder eine Funktion beider Variablen!)

18.2. Beispiele

1.) Sei $r\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $r(x) := \|x\| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Für $c > 0$ ist $N_r(c) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| = c\} = c \cdot S^{n-1}$, also die Sphäre mit Radius c.

Sei $x \neq 0$ dann ist für $k = 1, \ldots, n$:

$$D_k\, r\,(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x_k = \frac{x_k}{r(x)},$$

daher ist r in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ stetig partiell differenzierbar.

Etwas allgemeiner: Sei $f\colon\,]0,\infty[\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann ist $g := f\circ r$, d.h. $g(x) = f(r(x)) = f(\|x\|)$, stetig partiell differenzierbar in $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ und

$$D_k\, g(x) = f'(\|x\|)\cdot D_k r(x) = f'(\|x\|)\cdot\frac{x_k}{r(x)}.$$

2.) Die Funktion $F\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, gegeben durch

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x_1\cdot x_2}{\|x\|^2} & \text{für } x\neq 0\\ 0 & \text{für } x = 0,\end{cases}$$

ist in $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ partiell differenzierbar, denn es ist $F(x) = \dfrac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}$ für $x\neq 0$ und nach der Quotienten-Regel folgt

$$D_1F(x) = \frac{x_2(x_1^2+x_2^2) - x_1x_2 2x_1}{(x_1^2+x_2^2)^2} = \frac{x_2}{\|x\|^2} - 2\frac{x_1^2x_2}{\|x\|^4}.$$

Analog ist $D_2F(x) = \dfrac{x_1}{\|x\|^2} - 2\dfrac{x_1x_2^2}{\|x\|^4}$.

$\boxed{?}$ partielle Differenzierbarkeit bei $x = 0$: wegen $\frac{F(0+he_k)-F(0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0$ folgt $D_kF(0) = 0$.

Also ist F partiell differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}^2$.

Aber F ist nicht stetig in $(0,0)$! (Übungsaufgabe; betrachte die Folge $(\frac{1}{k},\frac{1}{k})$)

Somit im Allgemeinen: $\boxed{\text{partiell differenzierbar} \not\Rightarrow \text{stetig}}$

3.) Es sei $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases}\frac{xy^3}{x^2+y^6} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y) = (0,0)\end{cases}$$

- $(x,y)\neq(0,0)$: $t\mapsto \frac{ty^3}{t^2+y^6}$ ist differenzierbar, die Ableitung bei $t = x$ liefert

$$\begin{aligned} D_1f(x,y) = D_xf(x,y) &= \frac{y^3}{x^2+y^6} - x\,y^3\cdot\frac{2x}{(x^2+y^6)^2}\\ &= \frac{y^3}{(x^2+y^6)^2}\cdot(x^2+y^6-2x^2) = \frac{y^3(y^6-x^2)}{(x^2+y^6)^2}\end{aligned}$$

ebenso durch Differentiation von $s\mapsto\frac{xs^3}{x^2+s^6}$ bei $s = y$

$$\begin{aligned} D_2f(x,y) = D_yf(x,y) &= \frac{3xy^2}{x^2+y^6} - xy^3\cdot\frac{6y^5}{(x^2+y^6)^2}\\ &= \frac{3xy^2}{(x^2+y^6)^2}\left(x^2+y^6-2y^6\right) = \frac{3xy^2(x^2-y^6)}{(x^2+y^6)^2}\end{aligned}$$

- In $(0,0)$: $f(x,0)=0$, daher $D_1f(0,0)=0$;
  $f(0,y)=0$, daher $D_2f(0,0)=0$;
  daher ist f partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$

  Es ist aber übrigens D_1f nicht stetig in $(0,0)$, denn z.B.
  $$D_1f(2t^3,t)=\frac{t^3(t^6-4t^6)}{(4t^6+t^6)^2}=-\frac{3\,t^9}{25\,t^{12}}=-\frac{3}{25\,t^3}$$
  ist nicht konvergent für $t\to 0$.
- f ist nicht stetig in $(0,0)$: für $t>0$ ist
  $$f(\pm t^3,t)=\pm\frac{t^3\cdot t^3}{t^6+t^6}=\pm\frac{1}{2}\not\to 0=f(0,0)\quad (t\to 0).$$

18.3. Definition

Sei $U\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U\to\mathbb{R}$ und $v_1,\dots,v_n\colon U\to\mathbb{R}$ seien partiell differenzierbare Funktionen; wir bilden $v:=(v_1,\dots,v_n)$, somit ist $v\colon U\to\mathbb{R}^n$ ein *Vektorfeld* auf U.

1.) Der *Gradient von* f ist definiert durch $\operatorname{grad} f\colon U\to\mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{grad} f(x):=\begin{pmatrix} D_1f(x)\\ \vdots\\ D_nf(x)\end{pmatrix}$

2.) Die *Divergenz von* v ist definiert durch $\operatorname{div}(v)\colon U\to\mathbb{R}$ mit
$$\operatorname{div}(v)(x):=\sum_{j=1}^{n}D_jv_j(x)$$

Formal erhalten wir mit dem sogenannten Nabla-Operator[1] $\nabla:=\begin{pmatrix} D_1\\ \vdots\\ D_n\end{pmatrix}$ die Merkregeln

$\operatorname{grad} f=\triangledown f$ [wie skalare Multiplikation von ∇ mit f von rechts]

$\operatorname{div}(v)=\langle\triangledown\mid v\rangle=D_1v_1+\dots+D_nv_n$ [inneres Produkt von ∇ mit v]

18.4. Beispiele

1.) $r(x)=\|x\|$, $r\colon\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$
$$\operatorname{grad} r(x)=(D_1r(x),\dots,D_nr(x))=\left(\frac{x_1}{r(x)},\dots,\frac{x_n}{r(x)}\right)=\frac{x}{r(x)}$$

[1] Die Bezeichnung Nabla geht auf William Robertson Smith (1846–1894) zurück und ist vom Namen eines antiken Saiteninstruments abgeleitet, das eine ähnliche Form hatte.

allgemeiner für eine Verknüpfung mit einer differenzierbaren Funktion f, d.h. $g(x) = f(r(x)) = f(\|x\|)$ ist

$$\operatorname{grad} g(x) = \frac{f'(\|x\|)}{\|x\|} \cdot x$$

2.) Für $v(x) := \frac{x}{r(x)}$, $v\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(v)(x) &= \sum_{j=1}^{n} D_j \left(\frac{x_j}{\|x\|} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{r(x)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x_j^2}{\|x\|^3} \right) \\ &= \frac{n}{r(x)} - \frac{1}{\|x\|^3} \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = \frac{n}{\|x\|} - \frac{1}{\|x\|^3} \cdot \|x\|^2 = \frac{n-1}{\|x\|} \end{aligned}$$

18.5. Höhere partielle Ableitungen

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar und $D_1 f, \dots, D_n f\colon U \to \mathbb{R}$ jeweils wieder partiell differenzierbar, d. h.: $\exists\, D_l(D_j f)$ $(1 \le l, j \le n)$, dann heißt f *zweimal partiell differenzierbar*.

Induktiv: $f\colon U \to \mathbb{R}$ heißt $(k+1)$*-mal partiell differenzierbar* $(k \in \mathbb{N})$, wenn f k-mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen $D_{j_k} \cdots D_{j_2} D_{j_1} f\colon U \to \mathbb{R}$ $(1 \le j_1, \dots, j_k \le n)$ wieder partiell differenzierbar sind.

f heißt k*-mal stetig partiell differenzierbar*, wenn f k-mal partiell differenzierbar ist und alle Ableitungen der Ordnung $\le k$ stetig sind.

$\boxed{?}$ f zweimal partiell differenzierbar $\overset{?}{\Longrightarrow} D_j D_i f = D_i D_j f$ $(1 \le i, j \le n)$.

Im Allgemeinen: nein!
(Übungsaufgabe: $f(x,y) = xy^3/(x^2+y^2)$ für $(x,y) \neq (0,0)$ und $f(0,0) = 0$ ergibt $D_x f(0,y) = y$, $D_y f(x,0) = 0$, daher $D_y D_x f(0,0) = 1 \neq 0 = D_x D_y f(0,0)$.)

18.6. Theorem (Satz von Schwarz[2])

Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \underset{\text{offen}}{\supseteq} U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt

$$1 \le i, j \le n\colon \forall a \in U\colon \quad D_j D_i f(a) = D_i D_j f(a).$$

Beweis:

OBdA: $n = 2$ (nur zwei Koordinatenrichtungen sind betroffen, die restlichen Variablen bleiben konstant) und $a = 0$ (was durch Verschiebung bewerkstelligt werden kann).

[2]Hermann Amandus Schwarz (*25. 1. 1843 Hermsdorf; †30. 11. 1921 Berlin), deutscher Mathematiker

Wähle $\delta > 0$: $[-\delta, \delta] \times [-\delta, \delta] \subseteq U$.

• Sei $0 \neq x_2 \in [-\delta, \delta]$, definiere $F_{x_2} \colon [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}$, $F_{x_2}(t) := f(t, x_2) - f(t, 0)$;

Sei $0 \neq x_1 \in [-\delta, \delta]$, dann liefert der Mittelwertsatz der Differentialrechnung: $\exists \xi_1 \in \mathbb{R}$ mit $|\xi_1| \leq |x_1|$:

$$F_{x_2}(x_1) - F_{x_2}(0) = F'_{x_2}(\xi_1) \cdot x_1 = \underbrace{\big(D_1 f(\xi_1, x_2) - D_1 f(\xi_1, 0)\big)}_{\text{hier MWS für } s \mapsto D_1 f(\xi_1, s)} \cdot x_1;$$

weiters $\exists \xi_2$ mit $|\xi_2| \leq |x_2|$: $D_1 f(\xi_1, x_2) - D_1 f(\xi_1, 0) = D_2 D_1 f(\xi_1, \xi_2) \cdot x_2$.

Daher folgt nun mit der Notation $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $x = (x_1, x_2)$

$$(\star) \qquad f(x) - f(x_1, 0) - f(0, x_2) + f(0) = F_{x_2}(x_1) - F_{x_2}(0) = D_2 D_1 f(\xi) \cdot x_1\, x_2.$$

• Definiere nun $G_{x_1} \colon [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}$ durch $G_{x_1}(s) := f(x_1, s) - f(0, s)$;

wiederum ergibt zweimalige Anwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, dass es $\eta_2, \eta_1 \in \mathbb{R}$ gibt mit $|\eta_2| \leq |x_2|$, $|\eta_1| \leq |x_1|$:

$$G_{x_1}(x_2) - G_{x_1}(0) = G'_{x_1}(\eta_2)\, x_2 = \big(D_2 f(x_1, \eta_2) - D_2 f(0, \eta_2)\big)\, x_2 = D_1 D_2 f(\eta_1, \eta_2)\, x_1 x_2,$$

d. h. mit $\eta = (\eta_1, \eta_2)$

$$(\star\star) \qquad f(x) - f(0, x_2) - f(x_1, 0) + f(0) = D_1 D_2 f(\eta) \cdot x_1\, x_2.$$

• Die linken Seiten von $(\star)$ und $(\star\star)$ sind gleich, daher folgt nach Division durch $x_1 x_2$ zunächst

$$D_1 D_2 f(\eta) = D_2 D_1 f(\xi);$$

beachten wir noch, dass $0 \leq \|\xi\|_\infty \leq \|x\|_\infty$ und $0 \leq \|\eta\|_\infty \leq \|x\|_\infty$, dann folgt für $x \to 0$ auch $\xi \to 0, \eta \to 0$; nach Voraussetzung sind $D_1 D_2 f$ und $D_2 D_1 f$ stetig, daher gilt

$$D_1 D_2 f(0) = D_2 D_1 f(0).$$

□

18.7. Korollar

Sei $f \colon \mathbb{R}^n \underset{\text{offen}}{\supseteq} U \to \mathbb{R}$ k-mal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt für jede Permutation σ der Menge $\{1, \ldots, k\}$ und für alle $j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}$, dass

$$D_{j_1} D_{j_2} \cdots D_{j_k} f = D_{j_{\sigma(1)}} \cdots D_{j_{\sigma(k)}} f.$$

Beweis: Jede Permutation ist als Verknüpfung von Transpositionen darstellbar (siehe z.B. [Fis03, Lemma in 3.2.2]) und für jede Transposition ist Theorem 18.6 anwendbar. □

18.8. Bemerkung

Häufig benutzte Schreibweisen für höhere Ableitungen:

$$D_j D_l f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l}, \quad D_j D_j f = D_j^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2 f \quad \text{usw.}$$

oder allgemeiner mit Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ und $D = (D_1, \ldots, D_n)$ in der Form

$$D^\alpha f = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n} f;$$

hierbei gibt dann $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots \alpha_n$ die Ordnung der Ableitung an. (Kommt am Beginn von §19 ausführlicher.)

18.9. Beispiele

1.) Auf der Menge der zweimal stetig partiell differenzierbaren Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \underset{\text{offen}}{\supseteq} U \to \mathbb{R}$ ist der *Laplace-Operator*[3] Δ definiert durch

$$\Delta f := \sum_{i=1}^{n} D_j^2 f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \langle \nabla \mid \nabla f \rangle.$$

2.) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $v = (v_1, v_2, v_3)\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld und v_j $(j = 1, 2, 3)$ partiell differenzierbar. Dann definieren wir die *Rotation* von v als $\operatorname{rot}(v)\colon U \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\operatorname{rot}(v) := (D_2 v_3 - D_3 v_2, D_3 v_1 - D_1 v_3, D_1 v_2 - D_2 v_1) = \nabla \times v. \tag{18.2}$$

Ist speziell $v = \operatorname{grad} f$, wobei $f\colon U \to \mathbb{R}$ zweimal **stetig** partiell differenzierbar ist, dann gilt nach dem Satz von Schwarz

$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = (D_2 D_3 f - D_3 D_2 f, \ldots) = (0, 0, 0)$,

d.h. in diesem Fall

$$v = \operatorname{grad} f \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{rot}(v) = 0. \tag{18.3}$$

3.) Einige partielle Differentialgleichungen aus der Physik:

$\Delta u = 0 \ldots$ Potentialgleichung für $u\colon \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}$

[3] Pierre-Simon Laplace (* 28. 3. 1749 Beaumont-en-Auge; †5. 3. 1827 Paris) [pjɛʁsiˈmɔ̃ laˈplas], französischer Mathematiker und Astronom

$D_t^2 u - c^2 \cdot \Delta_x u = 0 \ldots$ Wellengleichung für $u \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto u(x,t)$

[$c = \text{const}$ hat die Rolle einer Geschwindigkeit]

$D_t u - k \cdot \triangle_x u = 0 \ldots$ Wärmeleitungsgleichung [$k = \text{const} \ldots$ Leitfähigkeit]

$D_t \psi - i\frac{\hbar}{2} \triangle_x \psi = 0 \ldots$ Schrödinger-Gleichung für $\psi \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $(x,t) \mapsto \psi(x,t)$

[$\hbar = h/2\pi$, h das Plancksche Wirkungsquantum]

4.) $r(x) = \|x\|$, $r \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$; wir haben in 18.4 bereits

$$\operatorname{grad} r(x) = \frac{x}{r(x)} =: v(x)$$

und

$$\operatorname{div}(v)(x) = \frac{n-1}{\|x\|}$$

berechnet. Zusammen ergibt das nun

$$\triangle r(x) = \frac{n-1}{r(x)}.$$

5.) $u(x) := \log \|x\|$, $u \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$; wegen $\log'(t) = 1/t$ erhalten wir aus 18.4

$$\operatorname{grad} u(x) = \frac{1}{\|x\|} \cdot \frac{x}{\|x\|} = \frac{x}{\|x\|^2};$$

nun ist für $j = 1, 2$ zunächst

$$D_j \left(\frac{x_j}{\|x\|^2} \right) = D_j \left(\frac{x_j}{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \right) = \frac{1}{\|x\|^2} - \frac{x_j \cdot 2x_j}{\|x\|^4},$$

und daraus durch Summenbildung

$$\begin{aligned} \triangle u(x) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u)(x) &= D_1 \left(\frac{x_1}{\|x\|^2} \right) + D_2 \left(\frac{x_2}{\|x\|^2} \right) \\ &= \frac{1}{\|x\|^2} - 2\frac{x_1^2}{\|x\|^4} + \frac{1}{\|x\|^2} - 2\frac{x_2^2}{\|x\|^4} = \frac{2}{\|x\|^2} - \frac{2\|x\|^2}{\|x\|^4} = 0. \end{aligned}$$

18.10. Differenzierbarkeit

Wir haben in 18.2 gesehen, dass partielle Differenzierbarkeit (das ist also Differenzierbarkeit entlang jeder Koordinatenrichtung) nicht einmal ausreicht, um die Stetigkeit einer Funktion mehrerer Variablen zu erzwingen. Das legt nahe, dass wir für einen geeigneten Differenzierbarkeitsbegriff im Höherdimensionalen gewissermaßen alle Richtungen „auf einmal“ berücksichtigen müssen.

In Analysis 1 wurde die Ableitung auch (gleichwertig) als lineare Approximation aufgefasst. Nun machen diesen Aspekt zum definierenden Prinzip:

Definition: Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ heißt im Punkt $x \in U$ *differenzierbar*, falls es eine lineare Abbildung $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt mit der Eigenschaft

$$\lim_{\substack{0 \neq \|\xi\| \to 0 \\ x+\xi \in U}} \frac{f(x+\xi) - f(x) - A \cdot \xi}{\|\xi\|} = 0. \tag{18.4}$$

Anders ausgedrückt: $\exists \delta > 0 \; \exists\, r\colon B_\delta(0) \to \mathbb{R}^m$ mit $\lim\limits_{\xi \to 0} r(\xi) = 0$ und

$$f(x+\xi) = f(x) + A \cdot \xi + r(\xi)\, \|\xi\| \qquad \forall \xi \in B_\delta(0) \tag{18.5}$$

[vgl. mit (18.4): $r(\xi) = \frac{f(x+\xi)-f(x)-A\xi}{\|\xi\|}$];

oder wiederum äquivalent dazu:

Es gibt $\delta > 0$ und $\varphi\colon B_\delta(0) \to \mathbb{R}^m$ mit $\varphi(\xi) = o(\|\xi\|)$ (für $\xi \to 0$) und

$$f(x+\xi) = f(x) + A \cdot \xi + \varphi(\xi). \tag{18.5'}$$

Bemerkung: 1.) Wir identifizieren die lineare Abbildung A mit ihrer Matrixdarstellung bzgl. der Standardbasen in $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$, d. h.

$$A \cdot \xi = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix},$$

wobei $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$). Dann lautet (18.4) in Komponenten gelesen: für $1 \leq i \leq m$ ist

$$\lim_{0 \neq \xi \to 0} \frac{f_i(x+\xi) - f_i(x) - \sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j}{\|\xi\|} = 0.$$

Insbesondere folgt für $\xi = h \cdot e_k$ mit $h \in \mathbb{R}$

$$0 = \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f_i(x+he_k) - f_i(x) - h \cdot a_{ik}}{h} = \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f_i(x+he_k) - f_i(x)}{h} - a_{ik}$$

d. h. f ist partiell differenzierbar in x und $D_k f_i(x) = a_{ik}$; insbesondere ist A durch die Bedingung (18.4) eindeutig bestimmt; es ist

$$A = \Big(D_k f_i(x)\Big)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq n}} =: (Df)(x) \qquad [(m \times n)\text{-Matrix}]. \tag{18.6}$$

$(Df)(x)$ heißt *Ableitung*, *Differential* oder *Jacobi-Matrix*[4] von f bei x.

2.) Für den Spezialfall $m = n = 1$ erhalten wir $(Df)(x) = f'(x)$ und somit bedeutet (18.4) genau die Differenzierbarkeit gemäß Kapitel III (im Falle von Funktionen auf offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$).

[4] Carl Gustav Jacob Jacobi (*10. 12. 1804 Potsdam; †18. 2. 1851 Berlin), deutscher Mathematiker

Proposition: Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \underset{\text{offen}}{\supseteq} U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $x \in U$. Dann gilt:

1.) Für $i = 1, \ldots, m$ ist f_i ist partiell differenzierbar in x.

2.) $(Df)(x) = \Big(D_k f_i(x)\Big)_{\substack{i=1,\ldots,m\\k=1,\ldots,n}}$ ist die eindeutige lineare Abbildung mit Eigenschaft (18.4).

3.) f ist stetig in x.

Beweis: 1.) und 2.) wurden im Laufe der Herleitung von (18.6) gezeigt.

3.) Nach (18.5′) gibt es $\varphi\colon B_\delta(0) \to \mathbb{R}^m$ mit $\varphi(\xi) = o(\|\xi\|)$ $(\xi \to 0)$ und

$$f(x+\xi) = f(x) + A \cdot \xi + \varphi(\xi) \to f(x) + A \cdot 0 + 0 = f(x) \qquad (\|\xi\| < \delta, \xi \to 0).$$

Also gilt

$$\lim_{\eta \to x} f(\eta) = \lim_{\xi \to 0} f(x+\xi) = f(x),$$

d. h. f ist stetig in x. $\square$

Beispiele: 1.) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x \in U$; dann ist $Df(x)$ also die $(1 \times n)$-Matrix

$$(Df)(x) = (D_1 f(x), \ldots, D_n f(x)) = {}^t(\operatorname{grad} f(x)).$$

2.) Sei $C = (c_{ij})$ eine symmetrische reelle $(n \times n)$-Matrix und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die zugehörige quadratische Form

$$f(x) := \langle x \mid Cx \rangle = {}^t x \cdot C \cdot x.$$

Es ist

$$\begin{aligned} f(x+\xi) = \langle x+\xi \mid C(x+\xi)\rangle = \langle x \mid Cx\rangle + \langle \xi \mid Cx\rangle + \langle x \mid C\xi\rangle + \langle \xi \mid C\xi\rangle \\ = f(x) + \langle 2Cx \mid \xi\rangle + \underbrace{\langle \xi \mid C\xi\rangle}_{\varphi(\xi)}, \end{aligned}$$

wobei nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung $\left|\frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|}\right| \le \frac{\|C\xi\|\cdot\|\xi\|}{\|\xi\|} \le \|C\|_{\text{op}} \cdot \|\xi\| \to 0$ für $\xi \to 0$.

Daher ist f differenzierbar in x und $(Df)(x) = {}^t(\operatorname{grad} f(x)) = {}^t(2Cx)$.

(Alternativ könnten wir auch direkt berechnen: $D_k f(x) = D_k \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_i x_j\right) = \ldots$)

18.11. Theorem

Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \underset{\text{offen}}{\supseteq} U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar und alle partiellen Ableitungen $D_k f$ $(k = 1, \ldots, n)$ seien stetig in $x \in U$. Dann ist f differenzierbar in x.

Bemerkung: Für $f\colon U \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ gilt ein analoges Statement. Dabei ist die obige Aussage zunächst auf jede Komponentenfunktion f_j $(j = 1, \dots, m)$ anwendbar und die Differenzierbarkeit von f folgt dann leicht mit Hilfe der Tatsache, dass sich die lineare Abbildung $Df(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ aus den m linearen Funktionalen $Df_1(x), \dots Df_m(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ aufgebaut werden kann, nämlich als Zeilenvektoren in der entsprechenden Matrix (bezüglich der Standardbasen).

Beweis: $\exists \delta > 0\colon B_\delta(x) \subseteq U$; sei $\xi \in B_\delta(0)$ (somit gilt $x + \xi \in B_\delta(x)$).
Für $k = 1, \dots, n$ setzen wir

$$z^{(k)} := x + \sum_{j=1}^{k} \xi_j e_j \ \in B_\delta(x), \quad z^{(0)} := x;$$

dann ist $z^{(n)} = x + \xi$ und für $k \geq 1$ gilt $z^{(k)} - z^{(k-1)} = \xi_k e_k$.

Mit Hilfe der Notation für partielle Funktionen (eingeführt unmittelbar vor §18) können wir schreiben

$$f(z^{(k)}) - f(z^{(k-1)}) = \tilde{f}_{k,z^{(k-1)}}(\xi_k) - \tilde{f}_{k,z^{(k-1)}}(0).$$

Daher gibt es nach dem Mittelwertsatz (bzgl. der k-ten Variable) ein $\theta_k \in [0,1]$:

$$f(z^{(k)}) - f(z^{(k-1)}) = D_k f(z^{(k-1)} + \theta_k\, \xi_k e_k) \cdot \xi_k;$$

als Abkürzung setzen wir $y^{(k)} := z^{(k-1)} + \theta_k\, \xi_k e_k$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} f(x+\xi) - f(x) &= \sum_{k=1}^{n} \big(f(z^{(k)}) - f(z^{(k-1)}) \big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} D_k f(y^{(k)}) \cdot \xi_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} D_k f(x) \cdot \xi_k}_{\langle \operatorname{grad} f(x) | \xi \rangle} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (D_k f(y^{(k)}) - D_k f(x)) \cdot \xi_k}_{=:\varphi(\xi)}. \end{aligned}$$

Für $\xi \to 0$ folgt $y^{(k)} \to x$, somit wegen der Stetigkeit von $D_k f$ auch $D_k f(y^{(k)}) - D_k f(x) \to 0$ $(k = 1, \dots, n)$. Daraus folgt

$$\frac{|\varphi(\xi)|}{\|\xi\|} \leq \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\big| D_k f(y^{(k)}) - D_k f(x) \big|}_{\to 0} \underbrace{\frac{|\xi_k|}{\|\xi\|}}_{\text{beschränkt}} \to 0 \qquad (\xi \to 0),$$

also die Differenzierbarkeit von f bei x. $\square$

Korollar: Ist $f\colon \mathbb{R}^n \underset{\text{offen}}{\supseteq} U \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar, dann ist f stetig auf U.

18.12. Bemerkung:

zusammenfassend erhalten wir folgende Übersicht

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{stetig partiell differenzierbar}} \arrow[r, "{[18.11]}"'] & \boxed{\text{differenzierbar}} \arrow[r, "{[18.10]}"'] \arrow[d, "{[18.10]}"] & \boxed{\text{partiell differenzierbar}} \\
 & \boxed{\text{stetig}} &
\end{tikzcd}$$

Vorsicht! Keiner der Implikationspfeile ist (im Allgemeinen) umkehrbar: so kennen wir schon aus Kapitel III differenzierbare Funktionen, deren Ableitung nicht stetig ist; weiters fanden wir unter den Beispielen 18.2 Funktionen, die partiell differenzierbar, aber nicht einmal stetig sind, daher schon gar nicht differenzierbar; und stetige Funktionen, die nicht differenzierbar sind, kennen wir ebenfalls schon aus dem ersten Semester.

Wir werden im folgenden meistens die kürzere Sprechweise *stetig differenzierbar* statt *stetig partiell differenzierbar* verwenden. (Eine gewisse Rechtfertigung dafür kann man in obigem Schema sehen.)

18.13. Proposition (Kettenregel)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^m$, $g\colon V \to \mathbb{R}^p$ mit $f(U) \subseteq V$. Wenn f differenzierbar in $x \in U$ ist und g differenzierbar in $y = f(x) \in V$ ist, dann ist $g \circ f\colon U \to \mathbb{R}^p$ differenzierbar in x und es gilt

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \cdot Df(x) \tag{18.7}$$

(Auf der rechten Seite handelt es sich also um eine Verknüpfung linearer Abbildungen bzw. um eine entsprechende Matrizenmultiplikation.)

Beweis: Wir setzen $A := Df(x)$ und $B := Dg(y)$. Zu zeigen ist: $D(g \circ f)(x) = B \cdot A$.

(18.5′) für f, g besagt: $\exists \varphi(\xi) = o(\|\xi\|), \psi(\eta) = o(\|\eta\|)$, sodass (für $\|\xi\|$ und $\|\eta\|$ klein) gilt

$$\begin{aligned} f(x+\xi) &= f(x) + A\xi + \varphi(\xi) \\ g(y+\eta) &= g(y) + B\eta + \psi(\eta). \end{aligned}$$

Für $\eta = f(x+\xi) - f(x) = A\xi + \varphi(\xi)$ gilt wegen der Stetigkeit von f in x:
$\|\xi\| \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \|\eta\| \to 0.$

Es ist

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x+\xi) = g(f(x+\xi)) = g(f(x)+\eta) = g(f(x)) + B\cdot\eta + \psi(\eta)\\ = g(f(x)) + B\cdot(A\xi+\varphi(\xi)) + \psi(A\xi+\varphi(\xi))\\ = (g\circ f)(x) + (B\cdot A)\,\xi + \underbrace{B\cdot\varphi(\xi) + \psi(A\xi+\varphi(\xi))}_{=:\chi(\xi)}.\end{aligned}$$

Wir müssen zeigen, dass $\chi(\xi) = o(\|\xi\|)$ $(\xi\to 0)$.

Es ist

$$\frac{\chi(\xi)}{\|\xi\|} = B\cdot\frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} + \underbrace{\frac{\psi(A\xi+\varphi(\xi))}{\|\xi\|}}_{(*)},$$

wobei der erste Term auf der rechten Seite mit $\xi\to 0$ gegen Null strebt, weil (die lineare Abbildung) B stetig ist und $\varphi(\xi) = o(\|\xi\|)$ ist. Es bleibt also zu zeigen, dass der Ausdruck $(*)$ ebenfalls beliebig klein wird für $\xi\to 0$.

Zunächst ist für $\|\xi\|$ klein genug (weil $\varphi(\xi) = o(\|\xi\|)$ ist)

$$\|\eta\| = \|A\xi+\varphi(\xi)\| \le \|A\|_{\mathrm{op}}\|\xi\| + \frac{\|\varphi(\xi)\|}{\|\xi\|}\|\xi\| \le (\|A\|_{\mathrm{op}}+1)\|\xi\|.$$

Wegen $\psi(\eta) = o(\|\eta\|)$ gilt auch $\psi(\eta) = \psi_1(\eta)\,\|\eta\|$ (für $\|\eta\|$ klein),
wobei $\lim\limits_{\substack{\eta\to 0\\ \eta\neq 0}} \psi_1(\eta) = \lim\limits_{\substack{\eta\to 0\\ \eta\neq 0}} \frac{\psi(\eta)}{\|\eta\|} = 0$.

Wenn $\delta > 0$ klein wird, so wird mit $\|\xi\| < \delta$ auch $\|\eta\| = \|A\xi+\varphi(\xi)\| \le (\|A\|_{\mathrm{op}}+1)\cdot\delta$ klein. Daher ist dann

$$\|\psi(\underbrace{A\xi+\varphi(\xi)}_{\eta})\| = \|A\xi+\varphi(\xi)\|\cdot\|\psi_1(A\xi+\varphi(\xi))\| \le (\|A\|_{\mathrm{op}}+1)\,\|\xi\|\,\|\psi_1(A\xi+\varphi(\xi))\|$$

und somit

$$\|(*)\| = \left\|\frac{\psi(A\xi+\varphi(\xi))}{\|\xi\|}\right\| \le (\|A\|_{\mathrm{op}}+1)\cdot\|\psi_1(A\xi+\varphi(\xi))\| \to 0 \quad (\xi\to 0).$$

Insgesamt haben wir also gezeigt, dass $\lim\limits_{\substack{\xi\to 0\\ \xi\neq 0}} \frac{\chi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$ gilt. $\square$

18.14. Korollar

Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \underset{\text{offen}}{\supseteq} U \to \mathbb{R}$ differenzierbar:

1.) Koordinatenwechsel: Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^n \underset{\text{offen}}{\supseteq} V \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar mit $\varphi(V) \subseteq U$. Dann gilt für die Ableitung von $g := f \circ \varphi$

$$Dg(y) = {}^t\operatorname{grad} f(\varphi(y)) \cdot D\varphi(y) \qquad \forall y \in V. \tag{18.8}$$

2.) Ableitung entlang von Kurven: Sei $\gamma\colon \mathbb{R} \underset{\text{offen}}{\supseteq} I \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar mit $\gamma(I) \subseteq U$. Dann gilt

$$D(f \circ \gamma)(t) = {}^t\operatorname{grad} f(\gamma(t)) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix}}_{D\gamma(t) =: \dot\gamma(t)} = \langle \operatorname{grad} f(\gamma(t)) \mid \dot\gamma(t) \rangle. \tag{18.9}$$

18.15. Beispiel

1.) Wenn $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind, dann gilt

$$\frac{d}{dx}\big(f(g(x), h(x))\big) = D_1 f(g(x), h(x)) \cdot g'(x) + D_2 f(g(x), h(x)) \cdot h'(x).$$

2.) Für $v \in S^{n-1}$ $(= \{y \in \mathbb{R}^n \colon \|y\| = 1\})$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ stellt $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = x_0 + t \cdot v$ die Gerade durch x_0 in Richtung v dar.

Für jede differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt dann

$$(f \circ \gamma)'(t) = D(f \circ \gamma)(t) = {}^t\operatorname{grad} f(x_0 + tv) \cdot v = \langle \operatorname{grad} f(x_0 + tv) \mid v \rangle;$$

speziell bei $t = 0$ ergibt sich $(f \circ \gamma)'(0) = \langle \operatorname{grad} f(x_0) \mid v \rangle$.

18.16. Definition

Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \underset{\text{offen}}{\supseteq} U \to \mathbb{R}$, $x \in U$ und $v \in S^{n-1}$. Die *Richtungsableitung* von f im Punkt x in Richtung v ist

$$D_v f(x) := \frac{d}{dt}\big(f(x + tv)\big)\Big|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \qquad \text{(falls existent).} \tag{18.10}$$

Spezialfall: für $v = e_j$ ($j \in \{1, \dots, n\}$) ergibt sich $D_{e_j} f(x) = D_j f(x)$, d.h. die j-te partielle Ableitung ist die Richtungsableitung bzgl. e_j.

Bemerkung: Aus der Existenz aller Richtungsableitungen (d.h. für alle $v \in S^{n-1}$) bei einem Punkt x folgt nicht die Differenzierbarkeit bei x! (siehe Übungsaufgaben oder auch [BF96, 14.2. Beispiel 5)])

18.17. Geometrische Bedeutung des Gradienten

Proposition: Sei $f\colon \mathbb{R}^n \underset{\text{offen}}{\supseteq} U \to \mathbb{R}$ differenzierbar; dann gilt:

1.) Für alle $v \in S^{n-1}$ existiert die Richtungsableitung und es gilt

$$D_v f(x) = \langle \operatorname{grad} f(x) \mid v \rangle \qquad \forall x \in U.$$

2.) Falls $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$, dann ist die Richtungsableitung im Punkt x maximal für die Richtung

$$v_0 := \frac{\operatorname{grad} f(x)}{\|\operatorname{grad} f(x)\|}.$$

d.h. $\operatorname{grad} f(x)$ gibt die Richtung des stärksten Anstiegs von f bei x an.

Beweis: 1.) ist klar nach 18.15.

2.) $\forall v \in S^{n-1}$ gilt nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\langle \operatorname{grad} f(x) \mid v \rangle \leq \|\operatorname{grad} f(x)\| \cdot \|v\| = \|\operatorname{grad} f(x)\|$$

und für $v = v_0$ erhalten wir

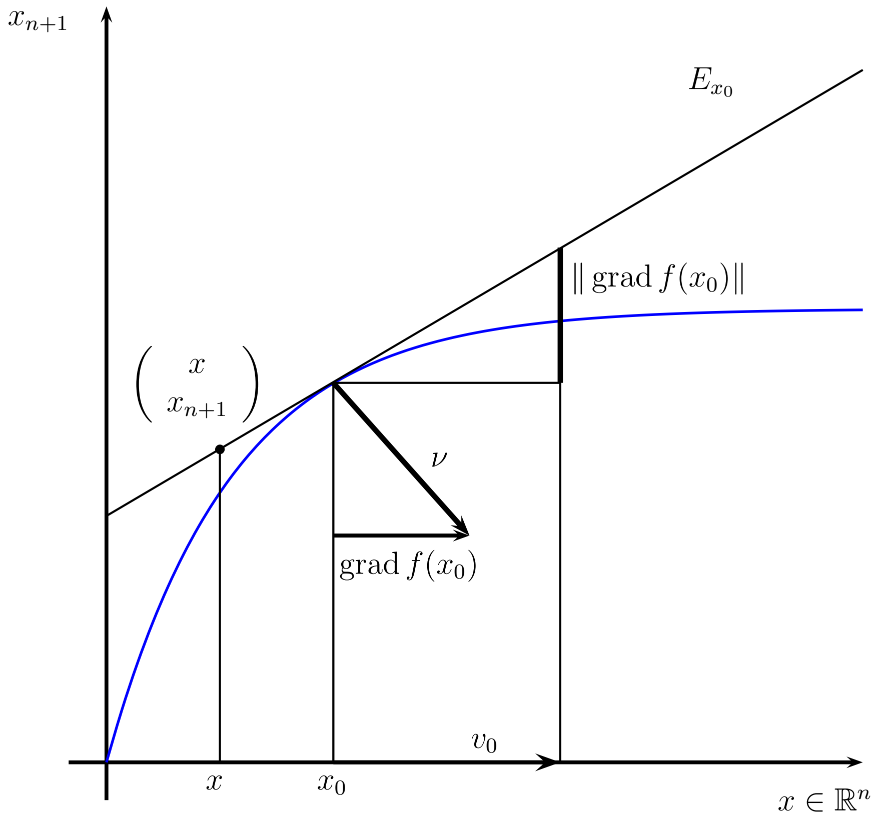
$$\langle \operatorname{grad} f(x) \mid v_0 \rangle = \frac{\langle \operatorname{grad} f(x) \mid \operatorname{grad} f(x) \rangle}{\|\operatorname{grad} f(x)\|} = \frac{\|\operatorname{grad} f(x)\|^2}{\|\operatorname{grad} f(x)\|} = \|\operatorname{grad} f(x)\|.$$

$\square$

Bemerkung: Das Maximum der Richtungsableitungen (in Punkten mit $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$) ist sogar eindeutig, weil in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung Gleichheit bekanntlich genau dann gilt, wenn die beteiligten Vektoren linear abhängig sind (vgl. [Fis03, Kapitel 5]).

Tangentialhyperebene an den Graphen einer differenzierbaren Funktion:

Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \underset{\text{offen}}{\supseteq} U \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in U$. Wir betrachten den vertikalen Schnitt des Graphen $G(f)$ über der Geraden $t \mapsto x_0 + t \cdot v_0$, wobei $v_0 := \frac{\operatorname{grad} f(x_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0)\|}$ (bzw. $v_0 \in S^{n-1}$ beliebig, falls $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$):



Die Funktion hat in dieser Schnittebene den größten Anstieg, nämlich $\|\operatorname{grad} f(x_0)\|$, in (der) Richtung (über) $\operatorname{grad} f(x_0)$. Ein Normalvektor auf die Tangentialhyperebene E_{x_0} über dem Punkt x_0 ist gegeben durch

$$\nu = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f(x_0) \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Daher ist nach der Hesseschen Normalform:

$$\begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in E_{x_0} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\langle \nu \,\middle|\, \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix} \right\rangle = 0,$$

was nach Zerlegung entsprechend (x, x_{n+1}) bedeutet, dass

$$\langle \operatorname{grad} f(x_0) \mid x - x_0 \rangle - (x_{n+1} - f(x_0)) = 0,$$

oder nach kurzer Umformung

$$(*) \qquad x_{n+1} = f(x_0) + \langle \operatorname{grad} f(x_0) \mid x - x_0 \rangle.$$

Definition: Die *Tangentialhyperebene* E_{x_0} an den Graphen von f bei $(x_0, f(x_0))$ ist gegeben als Menge jener Punkte $(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, die $(*)$ erfüllen. (Dies entspricht der linearen Approximation von f.)

Beispiel: $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} = z$, $U = \{(x,y)\colon x^2+y^2<1\} \ni (x_0,y_0)$ beliebig und $z_0 = f(x_0,y_0)$.

$\mathbb{R}^3 \supseteq G(f)$ ist die obere Halbsphäre (ohne Äquator) und $\operatorname{grad} f(x_0,y_0) = -(\frac{x_0}{z_0}, \frac{y_0}{z_0})$.

Für die Tangentialebene erhalten wir die Gleichung

$$z = z_0 - \frac{1}{z_0} \left\langle \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und nach Umformung die sogenannte *Spaltform* für die Sphäre $x^2+y^2+z^2=1$ als Tangentialebenengleichung

$$x\,x_0 + y\,y_0 + z\,z_0 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1.$$

18.18. Mittelwertsatz

Erinnere an Kapitel IV: sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, x und $x+\xi \in I$, dann folgt (durch Substitution $r = x + t\xi$)

$$f(x+\xi) - f(x) = \int_x^{x+\xi} f'(r)\,dr = \int_0^1 f'(x+t\xi)\,dt \cdot \xi.$$

Wir geben nun eine entsprechende Verallgemeinerung dieser Relation für $f\colon \mathbb{R}^n \underset{\text{offen}}{\supseteq} U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar entlang von geradlinigen Strecken innerhalb U.

Da nun $(Df)(x+t\xi)$ eine Matrix ist, brauchen wir also eine passende Version von $\int_a^b v(t)\,dt$, wobei $v\colon \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}^p$ vektorwertig und stetig ist (z.B. $p = m \cdot n$ im Falle von $(m \times n)$-Matrizen, weil der Vektorraum $M(m,n,\mathbb{R})$ all dieser ismomorph zu $\mathbb{R}^{m \cdot n}$ ist.)

Ist $v\colon I \to \mathbb{R}^p$ stetig mit $v = (v_1,\dots,v_p)$, so definieren wir einfach für $a,b \in I$ das Integral komponentenweise

$$\int_a^b v(t)\,dt := \left(\int_a^b v_j(t)\,dt \right)_{j=1}^{p}$$

Lemma: Sei $v\colon [a,b] \to \mathbb{R}^p$ stetig, dann gilt

(18.11) $$\left\| \int_a^b v(t)\,dt \right\| \le \int_a^b \|v(t)\|\,dt.$$

Beweis: Setze $w := \int_a^b v(t)\,dt \in \mathbb{R}^p$, dann gilt:

$$\|w\|^2 = \langle w \mid w\rangle = \left\langle \int_a^b v(t)dt \mid w \right\rangle \underset{\substack{\text{[Linearität} \\ \text{des Integrals]}}}{=} \int_a^b \langle v(t) \mid w\rangle\, dt$$

$$\leq \int_a^b \|v(t)\| \cdot \|w\|\, dt = \|w\| \int_a^b \|v(t)\| dt.$$

Nun ist im Fall $\|w\| = 0$ die Aussage des Lemmas trivial und für $w \neq 0$ folgt sie aus obiger Ungleichung nach Division durch $\|w\|$. □

Proposition: Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \underset{\text{offen}}{\supseteq} U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar und $x \in U$.

(i) Falls für $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt, dass $\{x + t\,\xi\colon t \in [0,1]\} \subseteq U$ (d.h. die ganze Strecke von x nach $x + \xi$ liegt innerhalb U), dann folgt:

$$f(x+\xi) - f(x) = \left(\int_0^1 Df(x + t\xi)\, dt \right) \cdot \xi \tag{18.12}$$

und mit $M := \max\{\|Df(x + t\xi)\|_{\text{op}}\colon t \in [0,1]\}$ weiters

$$\|f(x+\xi) - f(x)\| \leq M \cdot \|\xi\|. \tag{18.13}$$

(Es ist $M < \infty$, weil $t \mapsto \|Df(x + t\xi)\|_{\text{op}}$ stetig ist und $[0,1]$ kompakt.)

(ii) Insbesondere muss f konstant (d.h. gleich einem fixen Vektor in $\mathbb{R}^m$) auf jeder Kugel um x innerhalb U sein, auf der $Df = 0$ gilt.

Beweis: (i) Seien $f_j\colon U \to \mathbb{R}$ die Komponenten von f ($j \in \{1,\ldots,m\}$) und setze $g_j\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $g_j(t) := f_j(x + t\,\xi)$. Dann ist g_j stetig differenzierbar und

$$f_j(x+\xi) - f_j(x) = g_j(1) - g_j(0) = \int_0^1 g_j'(t)\, dt = \int_0^1 (Df_j(x + t\xi) \cdot \xi)\, dt$$

$$= \left(\int_0^1 Df_j(x + t\xi)\, dt \right) \cdot \xi.$$

Es ist $Df = \begin{pmatrix} Df_1 \\ \vdots \\ Df_m \end{pmatrix}$ (mit Df_j als Zeilenvektoren), also gilt (18.12).

Setzen wir $v(t) := Df(x+t\xi)\cdot\xi$ in (18.12), dann folgt aus dem obigen Lemma:

$$\begin{aligned}\|f(x+\xi)-f(x)\| = \left\|\int_0^1 Df(x+t\xi)\cdot\xi\,dt\right\| &\le \int_0^1 \|Df(x+t\xi)\cdot\xi\|dt\\ &\le \int_0^1 \|Df(x+t\xi)\|_{\mathrm{op}}\,dt\cdot\|\xi\| \le \int_0^1 M\,\|\xi\|dt = M\,\|\xi\|.\end{aligned}$$

(ii) Falls $B_\delta(x)\subseteq U$ und $Df(y)=0$ für jedes $y\in B_\delta(x)$ gilt, so folgt aus (18.12) (mit $\xi = y-x$)

$$f(y)-f(x)=0 \qquad \forall B_\delta(x).$$

□

18.19. Parameterintegrale

In Anwendungen aus der Physik, aber auch bei innermathematischen Fragen (z.B. bei Kurvenintegralen oder Fourier- und Laplace-Transformation), treffen wir häufig auf Funktionen mehrerer Variabler $(t,x_1,\dots,x_n)\mapsto g(t,x_1,\dots,x_n)$, die bezüglich einer Variable (bei festgehaltenen anderen Variablen) integriert werden: z.B. $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ fix und $\int_a^b g(t,x_1,\dots,x_n)\,dt$. Die von der Integration nicht betroffenen Variablen $x_1,\dots,x_n$ werden dann als so genannte („äußere") Parameter aufgefasst und es stellt sich die Frage, welche Eigenschaften die resultierende Funktion

$$(x_1,\dots,x_n)\mapsto\int_a^b g(t,x_1,\dots,x_n)\,dt$$

bzgl. Stetigkeit oder Differenzierbarkeit hat.

Proposition: Es sei $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $U\subseteq\mathbb{R}^n$ und $g\colon[a,b]\times U\to\mathbb{R}$ stetig. Wir definieren die Funktion $h\colon U\to\mathbb{R}$ durch

$$h(x) := \int_a^b g(t,x)\,dt. \tag{18.14}$$

dann gilt:

1.) h ist stetig

2.) Sei U offen. Ist für jedes $t\in[a,b]$ die Funktion $x\mapsto g(t,x)$, $U\to\mathbb{R}$ partiell differenzierbar und sind die partiellen Ableitungen $D_{x_j}g\colon[a,b]\times U\to\mathbb{R}$ stetig $(j=1,\dots,n)$, dann folgt, dass h stetig differenzierbar auf U ist und für die partiellen Ableitungen von h gelten die Formeln

$$(18.15) \qquad D_j h(x) = \int_a^b D_{x_j} g(t,x)\,dt \qquad (j = 1, \dots, n).$$

[mit anderen „Worten“ $\frac{\partial}{\partial x_j} \int_a^b g(t, x_1, \dots, x_n) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_j} g(t, x_1, \dots, x_n)\,dt$]

Beweis: Zunächst ist h wohldefiniert, weil für jedes $x \in U$ die Funktion $t \mapsto g(t,x)$ stetig und somit R-integrierbar ist.

ad 1.): Sei $\bar{x} \in U$ und (x_k) eine Folge in U mit $x_k \to \bar{x}$ $(k \to \infty)$.

$Q := \{x_k \in U \colon k \in \mathbb{N}\} \cup \{\bar{x}\}$ ist kompakt in $\mathbb{R}^n$ und $[a,b] \times Q$ ist kompakt in $\mathbb{R}^{n+1}$; daher ist $g\big|_{[a,b]\times Q}$ gleichmäßig stetig, d. h.

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (t,x), (t',x') \in [a,b] \times Q\colon$$
$$|t - t'| + \|x - x'\| < \delta \Rightarrow |g(t,x) - g(t',x')| < \varepsilon.$$

Wir setzen $g_k(t) := g(t, x_k)$, $g_k \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{N})$.

Behauptung: (g_k) konvergiert gleichmäßig gegen die Funktion $\bar{g}$, wobei $\bar{g}(t) = g(t, \bar{x})$.

Sei nämlich $\varepsilon > 0$, dann wähle $\delta > 0$ gemäß $(*)$ und $N \in \mathbb{N}$, sodass $\forall k \geq N$ gilt $\|x_k - \bar{x}\| < \delta$; wenden wir $(*)$ auf (t, x_k) und $(t, \bar{x})$ an, so folgt

$$|g_k(t) - \bar{g}(t)| = |g(t, x_k) - g(t, \bar{x})| < \varepsilon;$$

da diese Abschätzung für beliebiges $t \in [a,b]$ gilt, erhalten wir

$$\sup_{t \in [a,b]} |g_k(t) - \bar{g}(t)| \leq \varepsilon$$

und somit die Behauptung.

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der g_k gilt schließlich

$$\lim_{k\to\infty} h(x_k) = \lim_{k\to\infty} \int_a^b g_k(t)\,dt = \int_a^b \lim_{k\to\infty} g_k(t)\,dt = \int_a^b g(t, \bar{x})\,dt = h(\bar{x}),$$

daher ist h stetig im Punkt $\bar{x} \in U$.

ad 2.): Sei $x \in U$, $1 \leq j \leq n$ und (h_k) eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $h_k \neq 0$, $h_k \to 0$; wir setzen

$$f_k^{(j)}(t) := \frac{g(t, x + h_k e_j) - g(t,x)}{h_k} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Behauptung: Die Folge $(f_k^{(j)})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $\bar{g}_j$, wobei $\bar{g}_j(t) = D_{x_j}g(t,x)$.

Sei $r > 0$ so gewählt, dass $\{h_k \colon k \in \mathbb{N}\} \subseteq [-r,r]$. Die Funktion $D_{x_j}g\big|_{[a,b]\times\overline{B_r(x)}}$ ist gleichmäßig stetig, d. h.

$$(**) \qquad \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall(t,y),(t',y') \in [a,b]\times\overline{B_r(x)} : \\ |t-t'| + \|y-y'\| < \delta \Rightarrow |D_{x_j}g(t,y) - D_{x_j}g(t',y')| < \varepsilon.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (in der j-ten Variable) können wir für jedes k ein $\theta_k \in [0,1]$ finden, sodass gilt:

$$f_k^{(j)}(t) = D_{x_j}g(t, x+\theta_k h_k e_j).$$

Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\|h_k\| < \delta$ für alle $k \geq N$ gilt und wenden $(**)$ auf $(t, x+\theta_k h_k e_j)$ und (t,x) an (es ist ja $\|x+\theta_k h_k e_j - x\| = \theta_k \cdot \|h_k\| \leq \|h_k\| < \delta$). Dies ergibt

$$|f_k^{(j)}(t) - \bar{g}_j(t)| = |D_{x_j}g(t,x+\theta_k h_k e_j) - D_{x_j}g(t,x)| < \varepsilon,$$

und weiter, weil t beliebig war auch

$$\sup_{t\in[a,b]} |f_k^{(j)}(t) - \bar{g}_j(t)| \leq \varepsilon.$$

Also ist die Behauptung bewiesen.

Schließlich erlaubt die gleichmäßige Konvergenz folgende Umformungen

$$\lim_{k\to\infty} \frac{h(x+h_k e_j) - h(x)}{h_k} = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k^{(j)}(t)\,dt = \int_a^b \bar{g}_j(t)\,dt = \int_a^b D_{x_j}g(t,x)\,dt.$$

□

Beispiel einer Anwendung auf Parameterintegrale mit variablen Grenzen: Wir wollen die Differenzierbarkeit eines Integralausdrucks der Form

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} g(t,x)\,dt$$

bezüglich x untersuchen und die Ableitung bestimmen.

Wir vereinbaren folgende Annahmen: Es seien $\varphi,\psi \colon [c,d] \to [a,b]$ differenzierbar. Die Funktion $g \colon [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ sei stetig mit der Eigenschaft, dass für jedes $t \in [a,b]$ die partielle Funktion $x \mapsto g(t,x)$ differenzierbar ist und deren Ableitung $D_x g$ stetig auf $[a,b]\times[c,d]$ ist.

Behauptung: Für alle $x \in I :=]c, d[$ gilt

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} g(t,x)\,dt = g(\psi(x),x)\cdot\psi'(x) - g(\varphi(x),x)\cdot\varphi'(x) + \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} D_x g(t,x)\,dt. \tag{18.16}$$

Zum *Beweis* betrachten wir die Hilfsfunktion $f\colon I^3 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x,y,z) := \int\limits_y^z g(t,x)\,dt.$$

Dann ist also

$$\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} g(t,x)\,dt = f(x,\varphi(x),\psi(x)).$$

Die Funktion f ist stetig partiell differenzierbar, denn

- bei festem (x,y) ist $z \mapsto f(x,y,z)$ nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung differenzierbar mit Ableitung
$$D_3 f(x,y,z) = g(z,x);$$
die Funktion $(x,y,z) \mapsto D_3 f(x,y,z)$ ist stetig, weil g es ist
- bei festem (x,z) ist $y \mapsto f(x,y,z)$ ebenso nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung differenzierbar mit Ableitung
$$D_2 f(x,y,z) = -g(y,x);$$
die Funktion $(x,y,z) \mapsto D_2 f(x,y,z)$ ist stetig, weil g es ist
- bei festem (y,z) ist $x \mapsto f(x,y,z)$ nach der obigen Proposition differenzierbar mit Ableitung
$$D_1 f(x,y,z) = \int\limits_y^z D_2 g(t,x)\,dt;$$
wir werden weiter unten den Beweis dafür nachreichen, dass auch die Funktion $(x,y,z) \mapsto D_1 f(x,y,z)$ stetig ist.

Somit ist f also differenzierbar und wir können die Kettenregel anwenden:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\Big(f(x,\varphi(x),\psi(x))\Big) &= \\
&D_1 f(x,\varphi(x),\psi(x)) + D_2 f(x,\varphi(x),\psi(x))\cdot\varphi'(x) + D_3 f(x,\varphi(x),\psi(x))\cdot\psi'(x) \\
&= \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} D_x g(t,x)\,dt - g(\varphi(x),x)\cdot\varphi'(x) + g(\psi(x),x)\cdot\psi'(x).
\end{aligned}$$

Nun noch der Nachtrag zur Stetigkeit von $D_1 f$: die Ableitung $D_2 g$ ist stetig auf der kompakten Menge $[a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$, daher gilt

$$\|D_2 g\|_\infty = \sup_{\substack{a \le t \le b \\ c \le x \le d}} |g(t, x)| < \infty$$

und $D_2 g$ ist gleichmäßig stetig, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$, sodass

$$\forall (t, x), (t', x') \in [a, b] \times [c, d] : \quad |t - t'| + \|x - x'\| < \delta \quad \Rightarrow \quad |D_2 g(t, x) - D_2 g(t', x')| < \varepsilon.$$

Nun sei $(x_0, y_0, z_0) \in I^3$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $\delta > 0$ wie oben und zusätzlich kleiner als ε, dann folgt für $(x, y, z) \in I^3$ mit $|x - x_0| + |y - y_0| + |z - z_0| < \delta$ (mittels Einschieben geeigneter Terme)

$$\begin{aligned}
|D_1 f(x, y, z) - D_1 f(x_0, y_0, z_0)| &= \left| \int_y^z D_2 g(t, x)\, dt - \int_{y_0}^{z_0} D_2 g(t, x_0)\, dt \right| \\
&= \left| \int_y^z D_2 g(t, x)\, dt - \int_y^{z_0} D_2 g(t, x)\, dt + \int_y^{z_0} D_2 g(t, x)\, dt - \int_{y_0}^{z_0} D_2 g(t, x)\, dt \right. \\
&\qquad \left. + \int_{y_0}^{z_0} D_2 g(t, x)\, dt - \int_{y_0}^{z_0} D_2 g(t, x_0)\, dt \right| \\
&\le \left| \int_{z_0}^z D_2 g(t, x)\, dt \right| + \left| \int_y^{y_0} D_2 g(t, x)\, dt \right| + \left| \int_{y_0}^{z_0} \big(D_2 g(t, x) - D_2 g(t, x_0) \big)\, dt \right| \\
&\le |z - z_0| \cdot \|D_2 g\|_\infty + |y_0 - y| \cdot \|D_2 g\|_\infty + |z_0 - y_0| \cdot \varepsilon \le (2 \|D_2 g\|_\infty + |z_0 - y_0|) \cdot \varepsilon
\end{aligned}$$

und somit die Stetigkeit von $D_1 f$ bei (x_0, y_0, z_0).

§19. Taylor-Formel und lokale Extrema

19.1. Höhere Ableitungen

Vorbemerkung: Es seien V_1, V_2, V_3 endlichdimensionale Vektorräume über demselben Grundkörper. Dann gilt

$$L(V_1, L(V_2, V_3)) \cong BL(V_1 \times V_2, V_3),$$

wobei wir allgemein mit $L(V, W)$ den Vektorraum der linearen Abbildungen $V \to W$ bezeichnen und mit $BL(V_1 \times V_2, V_3)$ den Raum der bilinearen Abbildungen $V_1 \times V_2 \to V_3$ (vgl. [AE99, Abschnitt VII.4], wo dies sogar etwas allgemeiner für stetige multilineare Abbildungen auf Banachräumen bewiesen wird). [Für einen Beweis betrachte die Abbildung $L(V_1, L(V_2, V_3)) \to BL(V_1 \times V_2, V_3)$, $A \mapsto \beta_A$ mit $\beta_A(v_1, v_2) := (A \cdot v_1) \cdot v_2$ bzw. als Inverse $\beta \mapsto (v \mapsto \beta(v, .))$.]

Es sei $f : \mathbb{R}^n \underset{\text{offen}}{\supseteq} U \to \mathbb{R}^m$ eine N-mal stetig (partiell) differenzierbare Abbildung, wobei $N \geq 2$; für $1 \leq k \leq n$, $1 \leq l \leq m$ ist dann $D_k f_l : U \to \mathbb{R}$ stetig (partiell) differenzierbar.

Daher ist die Abbildung $Df : U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong M(m, n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{m \cdot n}$ differenzierbar und $\forall x \in U$: $D(Df)(x) \in L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$.

Somit ist $D^2 f(x) := D(Df)(x)$ auffassbar als bilineare Abbildung $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; indem wir so für $p \leq N$ sukzessive fortfahren, erhalten wir das p-fache Differential $D^p f(x) = D(\cdots(Df))(x)$ als p-lineare Abbildung $(\mathbb{R}^n)^p \to \mathbb{R}^m$ (vgl. [AE99, VII.5]).

Wichtigster Spezialfall $N = 2, m = 1$: Es ist also $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann ist für $x \in U$ das zweite Differential $D^2 f(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform mit Wirkung $D^2 f(x)(v, w) := (D(Df)(x) \cdot v)^t \cdot w$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$.

$$\big(\big(D(Df)\big)(x) \cdot v\big)^t \underset{\text{[Lin. der Abl.]}}{=} D(Df \cdot v)(x) = D \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n D_k f \cdot v_k\right)}_{\text{als Abb. } F: U \to \mathbb{R}}(x)$$

$$= (D_1 F, \ldots, D_n F)(x) = \left(\sum_k D_1 D_k f(x) \cdot v_k, \ldots, \sum_k D_n D_k f(x) \cdot v_k\right),$$

d. h. mit $w = {}^t(w_1, \ldots, w_n)$ ist

$$D^2 f(x)(v, w) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n D_j D_k f(x) \cdot v_k \, w_j = {}^t v \cdot \Big(D_j D_k f(x)\Big)_{1 \leq j,k \leq n} \cdot w.$$

Nach dem Satz von Schwarz ist $D_j D_k f = D_k D_j f$, daher folgt

$$D^2 f(x)(v, w) = D^2 f(x)(w, v),$$

also ist $D^2 f(x)$ symmetrisch und wird (als quadratische Form auf $\mathbb{R}^n$) durch die Matrix $\Big(D_j D_k f(x)\Big)_{1\le j,k\le n}$ gegeben.

Definition: Es sei $f : \mathbb{R}^n \underset{\text{offen}}{\supseteq} U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, dann heißt

(19.1) $$H_f(x) := (D_j D_k f(x))_{1\le j,k\le n}$$

Hesse-Matrix[1] von f bei x. (Die Hesse-Matrix ist symmetrisch.)

19.2. Multiindex-Notation

Es sei $\alpha \in \mathbb{N}^n$, d.h.. ein n-Tupel $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ mit $\alpha_j \in \mathbb{N}$ $(j = 1, \ldots, n)$. Im Zusammenhang mit der Differentialrechnung mehrerer Variablen wird so ein n-Tupel als sogenannter Multiindex verwendet.

Zunächst heißt
$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$
die Ordnung oder Länge von α und zur vereinfachten Notation mit kombinatorischen Faktoren wird
$$\alpha! := \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_n!$$
gesetzt.

Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ führen wir die Notation
$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \quad (\in \mathbb{R})$$
ein.

Wenn f eine N-mal stetig differenzierbare Funktion in n Variablen ist und $|\alpha| \le N$, dann ist
$$D^\alpha f := D_1^{\alpha_1} \cdot D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n} f$$
wobei die Reihenfolge der partiellen Ableitungen gemäß Korollar 18.7 beliebig ist.

[1]Ludwig Otto Hesse (*22. 4. 1811 Königsberg; †4. 8. 1874 München), deutscher Mathematiker

19.3. Lemma

Es sei $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$ und $f : \mathbb{R}^n \underset{\text{offen}}{\supseteq} U \to \mathbb{R}$ N-mal stetig (partiell) differenzierbar. Weiters sei $x \in U$ und für $\xi \in \mathbb{R}^n$ gelte $\{x + t\xi : t \in [0,1]\} \subseteq U$.

Dann ist die Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(t) := f(x + t\xi)$, N-mal stetig differenzierbar und

$$g^{(N)}(t) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| = N}} \frac{N!}{\alpha!} (D^\alpha f)(x + t\xi) \cdot \xi^\alpha. \tag{19.2}$$

Beweis: Wir zeigen zunächst induktiv die Relation

$$(*)_N \qquad g^{(N)}(t) = \sum_{j_1,\ldots,j_N=1}^{n} D_{j_N} \cdots D_{j_1} f(x + t\xi) \cdot \xi_{j_1} \cdots \xi_{j_N}.$$

$N = 1$: aus der Kettenregel folgt $g'(t) = Df(x + t\xi) \cdot \xi = \sum_{j=1}^n D_j f(x + t\xi) \cdot \xi_j$, also $(*)_1$;

$N \mapsto N+1$: $g^{(N+1)}(t) = (g^{(N)})'(t) = \sum_{j_1,\ldots,j_N=1}^{n} \underbrace{(D_{j_N} \cdots D_{j_1} f(x + t\xi))'}_{\sum_{j=1}^n D_j D_{j_N} \cdots D_{j_1} f(x+t\xi) \cdot \xi_j} \cdot \xi_{j_1} \cdots \xi_{j_N}$;
wenn wir nun $j = j_{N+1}$ setzen, ergibt das $(*)_{N+1}$.

Wir sortieren nun die Mehrfachumme in $(*)_N$ um und nützen also aus, dass die Reihenfolge der partiellen Ableitungen $D_{j_N} \cdots D_{j_1}$ beliebig abgeändert werden darf.

Es ist

$$D_{j_N} \cdots D_{j_1} = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n},$$

wobei für $l = 1, \ldots, n$:

$$0 \leq \alpha_l := |\underbrace{\{k \in \{1, \ldots, N\} : j_k = l\}}_{=: A_l(j_1,\ldots,j_N)}|$$

(α_l gibt an, wie oft l unter $j_1, \ldots, j_N$ vorkommt) und mit $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

$$\left|\{(j_1, \ldots, j_N) \in \{1, \ldots, n\}^N : |A_l(j_1, \ldots, j_N)| = \alpha_l \quad (l = 1, \ldots, n)\}\right| = \frac{N!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} = \frac{N!}{\alpha!}$$

(Modell: N Zahlen aus $\{1, \ldots, n\}$ auf n Kästchen aufteilen, wobei α_1 in das erste Kästchen kommen usw.)

Weiters ist $\xi_{j_1} \cdots \xi_{j_N} = \xi^\alpha$, somit ergibt $(*)_N$ also die Gleichung (19.2). $\square$

19.4. Theorem (Taylor-Formel)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \underset{\text{offen}}{\supseteq} U \to \mathbb{R}$ sei $(N+1)$-mal stetig (partiell) differenzierbar und $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\{x + t\xi : t \in [0,1]\} \subseteq U$. Dann gibt es ein $\theta \in [0,1]$, mit dem gilt

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha| \le N} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \cdot \xi^\alpha + \sum_{|\alpha| = N+1} \frac{D^\alpha f(x+\theta\xi)}{\alpha!} \cdot \xi^\alpha. \tag{19.3}$$

Beweis: Wir betrachten die Hilfsfunktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(t) := f(x+t\xi)$. Dann ist g ebenfalls $(N+1)$-mal stetig differenzierbar und die Taylor-Formel in der Variable t ergibt: $\exists \theta \in [0,1]$ so, dass

$$g(1) = \sum_{k=0}^{N} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} 1^k + \frac{g^{(N+1)}(\theta)}{(N+1)!} \underset{[19.3]}{=} \underbrace{\sum_{k=0}^{N} \sum_{|\alpha|=k}}_{\sum_{|\alpha| \le N}} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \cdot \xi^\alpha + \sum_{|\alpha|=N+1} \frac{D^\alpha f(x+\theta\xi)}{\alpha!} \cdot \xi^\alpha.$$

□

19.5. Korollar

Sei $f : \mathbb{R}^n \underset{\text{offen}}{\supseteq} U \to \mathbb{R}$ eine N-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt $\forall x \in U$:

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha| \le N} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \cdot \xi^\alpha + o(\|\xi\|^N) \qquad (\xi \to 0). \tag{19.4}$$

Beweis: Zu $x \in U$ existiert $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subseteq U$.

$\forall \xi \in B_\delta(0)\ \exists \theta(\xi) \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} f(x+\xi) = \sum_{|\alpha| \le N-1} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + \sum_{|\alpha|=N} \frac{D^\alpha f(x+\theta\xi)}{\alpha!} \xi^\alpha \\ = \sum_{|\alpha| \le N} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + \sum_{|\alpha|=N} \underbrace{\frac{D^\alpha f(x+\theta\xi) - D^\alpha f(x)}{\alpha!}}_{=: r_\alpha(\xi)} \cdot \xi^\alpha. \end{aligned}$$

Für $|\alpha| \le N$ ist $D^\alpha f$ stetig; wegen $|\theta(\xi)| \le 1$ folgt $x + \theta(\xi)\,\xi \to x$ für $\|\xi\| \to 0$ und weiter $\lim_{\xi \to 0} r_\alpha(\xi) = 0$.

Außerdem ist $|\xi^\alpha| = |\xi_1|^{\alpha_1} \cdots |\xi_n|^{\alpha_n} \le \|\xi\|^{\alpha_1} \cdots \|\xi\|^{\alpha_n} = \|\xi\|^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} = \|\xi\|^{|\alpha|}$,
daher also $\sum\limits_{|\alpha|=N} r_\alpha(\xi)\xi^\alpha = o(\|\xi\|^N)$ $(\xi \to 0)$. □

19.6. Spezialfall: Approximation 2. Ordnung

Sei $f : \mathbb{R}^n \underset{\text{offen}}{\supseteq} U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, dann gilt $\forall x \in U$:

$$f(x+\xi) = f(x) + \langle \operatorname{grad} f(x) \mid \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(x)\, \xi \mid \xi \rangle + o(\|\xi\|^2) \qquad (\xi \to 0). \tag{19.5}$$

Beweis: Wir verwenden Korollar 19.5 mit $N = 2$:

$$f(x+\xi) = f(x) + \underbrace{\sum_{|\alpha|=1} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!}\, \xi^\alpha}_{①} + \underbrace{\sum_{|\alpha|=2} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!}\, \xi^\alpha}_{②} + o(\|\xi\|^2).$$

ad ①: weil $|\alpha| = 1$ gibt es $l \in \{1, \ldots, n\}$: $\alpha_l = 1$ und $\alpha_j = 0$ für $j \neq l$ (d.h. $\alpha = e_l$).

Daher ist $D^\alpha = D_l$, $\alpha! = 1$, $\xi^\alpha = \xi_l$, also einfach

$$① = \sum_{l=1}^{n} D_l f(x) \cdot \xi_l = \langle \operatorname{grad} f(x) \mid \xi \rangle.$$

ad ②: wir haben $|\alpha| = 2$ und unterscheiden 2 Fälle:

- $\alpha = 2 \cdot e_j = (0, \ldots, \underbrace{2,}_{j\text{-te Komponente}} 0, \ldots, 0)$, d.h. $D^\alpha = D_j^2$ und $\alpha! = 2! = 2$
- $\alpha = e_l + e_j = (0, \ldots 0, \underbrace{1,}_{l\text{-te Stelle}} 0, \ldots, 0, \underbrace{1,}_{j\text{-te Stelle}} 0, \ldots, 0)$ mit $l < j$,

  d.h. $D^\alpha = D_l D_j = D_j D_l$, $\alpha! = 1$ und $\xi^\alpha = \xi_l \cdot \xi_j$.

Also ist

$$② = \sum_{j=1}^{n} \frac{D_j^2 f(x)}{2} \xi_j^2 + \underbrace{\sum_{1 \le l < j \le n} \frac{D_j D_l f(x)}{1} \xi_j \xi_l}_{= \frac{1}{2} \sum_{j \neq l}}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{l,j} D_j D_l f(x)\, \xi_l \xi_j = \frac{1}{2}\, {}^t\xi \cdot \underbrace{(D_j D_l f(x))}_{1 \le j,l \le n} \cdot \xi.$$

$\square$

19.7. Definition

Es sei $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}$. Ein Punkt $x \in U$ heißt *lokales Maximum* (bzw. *Minimum*) von f, falls gilt: Es gibt eine Umgebung V von x, $V \subseteq U$, so dass gilt:

$$\forall y \in V: \quad f(x) \geq f(y) \quad (\text{bzw. } f(x) \leq f(y)).$$

Wir nennen x ein *lokales Extremum*, falls es ein lokales Maximum oder Minimum ist.

Ein Extremum ist *strikt*, falls in obiger Bedingung zusätzlich $\forall y \in V \setminus \{x\}$ gilt $f(x) > f(y)$ (bzw. $f(x) < f(y)$).

19.8. Proposition

Sei $f : \mathbb{R}^n \underset{\text{offen}}{\supseteq} U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar und $x \in U$ ein lokales Extremum von f.

Dann gilt $\operatorname{grad} f(x) = 0$

Beweis: Für $j = 1, 2, \ldots, n$ betrachten wir die partiellen Funktionen $g_j : t \mapsto f(x+te_j) = \tilde{f}_{j,x}(t)$ (vgl. Einleitung zu Kapitel VII, unmittelbar vor §18); g_j ist definiert auf einem offenen Intervall $0 \in I_j \subseteq \mathbb{R}$ und ist laut Voraussetzung differenzierbar.

Da x ein lokales Extremum für f ist, folgt, dass g_j ein lokales Extremum bei $t = 0$ besitzt. Daher gilt $0 = g_j'(0) = D_j f(x)$. □

19.9. Bemerkung und Vorbetrachtung

Wie wir schon aus dem ersten Semester (d.i. also der Fall $n = 1$) wissen, kann die Bedingung $\operatorname{grad} f(x) = 0$ im Allgemeinen nicht hinreichend sein!

Nun sei f zweimal stetig differenzierbar und es gälte $\operatorname{grad} f(x) = 0$. Die quadratische Approximation an f gemäß (19.5) nahe x lautet dann:

$$\begin{aligned} f(\underbrace{x+\xi}_{y}) &= f(x) + \langle 0 \mid \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle \underbrace{H_f(x)}_{A} \cdot \xi \mid \xi \rangle + o(\|\xi\|^2) \\ &\approx f(x) + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\langle A \cdot (y-x) \mid (y-x) \rangle}_{\substack{(y \neq x)}\begin{cases} > 0, & \text{falls } A \text{ positiv definit} \\ < 0, & \text{falls } A \text{ negativ definit} \end{cases}} \end{aligned}$$

Aus dieser Heuristik heraus erwarten wir also folgendes:

$H_f(x)$ positiv definit $\Longrightarrow$ lokales Minimum
$H_f(x)$ negativ definit $\Longrightarrow$ lokales Maximum.

Man vergleiche dies wiederum mit dem Fall einer Variable ($n = 1$), in dem z.B. gilt: $f''(x) > 0 \Longrightarrow$ lokales Minimum.

19.10. (Wiederholung) aus der Linearen Algebra

Eine reelle symmetrische $(n \times n)$-Matrix A heißt:

1.) *positiv definit*, falls $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$: $\langle A\xi \mid \xi \rangle > 0$

2.) *positiv semidefinit*, falls $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$: $\langle A\xi \mid \xi \rangle \geq 0$

3.) *negativ definit*, falls $-A$ positiv definit ist

4.) *negativ semidefinit*, falls $-A$ positiv semidefinit ist

5.) *indefinit*, falls gilt $\exists \xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle A\xi \mid \xi \rangle > 0$ und $\langle A\eta \mid \eta \rangle < 0$.

Da A symmetrisch ist, gibt es eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ aus Eigenvektoren; alle Eigenwerte $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ sind reell und $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$: $\quad A\xi = \sum_{j=1}^n \lambda_j \underbrace{\langle \xi \mid v_j \rangle}_{j\text{-te Komponente von } \xi \text{ bzgl. } \mathcal{B}} v_j$;

d.h. A ist ähnlich zur Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Somit ist $\langle A\xi \mid \xi \rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \langle \xi \mid v_j \rangle^2$ und daher gilt:

(a)	A positiv definit	$\Leftrightarrow$	$\forall j : \lambda_j > 0$
(b)	A positiv semidefinit	$\Leftrightarrow$	$\forall j : \lambda_j \geq 0$
(c)	A negativ definit	$\Leftrightarrow$	$\forall j : \lambda_j < 0$
(d)	A negativ semidefinit	$\Leftrightarrow$	$\forall j : \lambda_j \leq 0$
(e)	A indefinit	$\Leftrightarrow$	$\exists j_1, j_2 : \lambda_{j_1} < 0 < \lambda_{j_2}$

Ein Nachteil dieser Kriterien ist allerdings, dass man zu deren Anwendung (außer eventuell im Fall (e)) alle Eigenwerte kennen muss.

Lemma zum Spezialfall n = 2: Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ eine reelle (symmetrische) (2×2)-Matrix, dann gilt:

1.) A indefinit $\iff$ $\det A < 0$

2.) A positiv definit $\iff$ $\det A > 0$ und $a > 0$

3.) A negativ definit $\iff$ $\det A > 0$ und $a < 0$

Bemerkung: Allgemein gilt für symmetrische $(n \times n)$-Matrizen das folgende Kriterium mittels der sogenannten *Hauptminoren*: sei für $k = 1, \dots, n$ eine $(k \times k)$-Teilmatrix von A definiert durch $A_k := (a_{ij})_{1 \le i,j \le k}$ (die linken oberen k Reihen und Spalten in A), dann gilt (siehe [Fis03, 5.7.7])

$$A \text{ positiv definit} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{für } k = 1, \dots, n: \ \det A_k > 0.$$

Beweis: Wir schreiben $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

ad 2.) $\Rightarrow$ setze $z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dann folgt $0 < {}^t zAz = a$;

Setze $z = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \end{pmatrix}$, dann folgt $0 < {}^t zAz = a\left(-\frac{b}{a}\right)^2 + 2b\left(-\frac{b}{a} \cdot 1\right) + c =$

$$= \tfrac{b^2}{a} - 2 \cdot \tfrac{b^2}{a} + c = \tfrac{ac-b^2}{a} = \tfrac{\det A}{a} \Rightarrow \det A > 0;$$

$\Leftarrow$ ${}^t zAz = az_1^2 + 2bz_1z_2 + cz_2^2 = a\left(z_1 + \frac{b}{a}z_2\right)^2 + \underbrace{\left(c - \frac{b^2}{a}\right)}_{\frac{ac-b^2}{a} > 0} z_2^2 \ge 0;$

${}^t zAz = 0 \Rightarrow z_2 = 0$ und $0 = z_1 + \frac{b}{a}z_2 = z_1 \Rightarrow z = 0$.

ad 3.) Wie in 2.) für $-A$; beachte $\det(-A) = (-1)^2 \cdot \det A = \det A$.

ad 1.) $\det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = \lambda^2 - \underbrace{(a+c)}_{s := \mathrm{Spur}(A)} \lambda + \underbrace{ac - b^2}_{\det A}$

hat als Nullstellen $\lambda_\pm = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - \det A}$; setze $\Delta := \left(\left(\frac{s}{2}\right)^2 - \det A\right)$, dann gilt

$$\det A < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta > \left(\frac{s}{2}\right)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_- < 0 < \lambda_+ \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ indefinit.}$$

□

19.11. Hinreichende Bedingungen für lokale Extrema

Theorem: Sei $f : \mathbb{R}^n \underset{\text{offen}}{\supseteq} U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $x \in U$ mit $\operatorname{grad} f(x) = 0$ (man sagt: x ist eine *kritische Stelle*). Dann gilt:

1.) $H_f(x)$ positiv definit $\quad \Longrightarrow \quad x$ ist striktes lokales Minimum

2.) $H_f(x)$ negativ definit $\quad \Longrightarrow \quad x$ ist striktes lokales Maximum

3.) $H_f(x)$ indefinit $\quad \Longrightarrow \quad x$ ist kein lokales Extremum
(im Fall $n = 2$ spricht man hier von einem Sattelpunkt)

Bemerkung: Die Bedingungen im Theorem sind zwar hinreichend, aber nicht notwendig (vgl. nochmals mit dem Fall $n = 1$). Ist $H_f(x)$ semidefinit, so kann keine allgemeine Aussage getroffen werden: z. B. im $\mathbb{R}^2$ haben die folgenden Funktionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f_1(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^4, \quad f_2(x_1, x_2) := x_1^2, \quad f_3(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^3$$

jeweils eine kritische Stelle in $(0, 0)$ (mit Funktionswert $f(0, 0) = 0$); die Hesse-Matrix $H_{f_k}(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist in allen Fällen positiv semidefinit (für $k = 1, 2, 3$), aber

- f_1 hat ein striktes Minimum in $(0, 0)$ $[f(x_1, x_2) > 0$ für $(x_1, x_2) \neq (0, 0)]$
- f_2 hat ein lokales Minimum in $(0, 0)$, das aber nicht strikt ist $[f_2(0, x_2) = 0 \ \forall x_2]$
- f_3 hat kein Extremum in $(0, 0)$ $[t \mapsto f_3(0, t) = t^3$ nimmt in jeder Umgebung von $(0, 0)$ sowohl positive als auch negative Werte an].

Beweis des Theorems: Wir setzen $A := H_f(x)$. Nach (19.5) gilt für $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi\| < r$, wenn r klein genug ist ($\Leftrightarrow x + \xi$ nahe x):

$$f(x + \xi) = f(x) + \frac{1}{2}\langle A\xi \mid \xi\rangle + h(\xi),$$

wobei $h(\xi) = o(\|\xi\|^2)$, d.h.

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \|\xi\| < \delta \implies |h(\xi)| \leq \varepsilon \, \|\xi\|^2.$$

ad 1.) A ist positiv definit, daher ist $g(\xi) := \langle A\xi \mid \xi\rangle > 0 \quad \forall \xi \neq 0$;

die Abbildung $\xi \mapsto g(\xi)$ ist stetig $S^{n-1} \to \mathbb{R}$ und S^{n-1} kompakt, somit gilt

$\alpha := \min\{g(\xi) : \xi \in S^{n-1}\} > 0$.

Sei $\xi \neq 0$, dann ist

$$\langle A\xi \mid \xi\rangle = \left\langle \frac{A\xi}{\|\xi\|} \mid \frac{\xi}{\|\xi\|} \right\rangle \|\xi\|^2 \geq \alpha \, \|\xi\|^2$$

und für $\xi = 0$ gilt die resultierende Ungleichung ebenso.

Wähle $\varepsilon := \frac{\alpha}{4}$ in $(*)$ und $\delta > 0$ passend, dann gilt

$$f(x + \xi) \geq f(x) + \frac{\alpha}{2}\|\xi\|^2 - \frac{\alpha}{4}\|\xi\|^2 = f(x) + \frac{\alpha}{4}\|\xi\|^2 > f(x)$$

für $\|\xi\| < \delta$, $\xi \neq 0$; daher hat f ein striktes lokales Minimum in x.

ad 2.) Betrachte $-f$ und wende 1.) an.

ad 3.) A ist indefinit; wähle $\xi_0, \eta_0 \in S^{n-1}$ mit

$$\gamma_1 := \langle A\xi_0 \mid \xi_0 \rangle > 0 \quad \text{und} \quad \gamma_2 := \langle A\eta_0 \mid \eta_0 \rangle < 0$$

(OBdA können die zwei Vektoren in der Indefinitheitsdefinition mit Länge 1 angenommen werden).

Sei $r > 0$, dann gilt für $t \in]-r, r[$ stets $t \cdot \xi_0$, $t \cdot \eta_0 \in B_r(0)$; es ist

$$\begin{aligned} f(x + t\xi_0) &= f(x) + \frac{t^2}{2}\gamma_1 + h(t\xi_0) \\ f(x + t\eta_0) &= f(x) + \frac{t^2}{2}\gamma_2 + h(t\eta_0). \end{aligned}$$

Aus der Bedingung $(*)$ erhalten wir:

$\exists \delta \in]0, r[$: $|t| < \delta \;\Rightarrow\; |h(t\xi_0)| \leq \gamma_1 t^2/4$ und $|h(t\eta_0)| \leq |\gamma_2|\, t^2/4$;

somit gilt für $0 < |t| < \delta$:

$$\begin{aligned} f(x + t\xi_0) \geq f(x) + \frac{t^2\gamma_1}{2} - \frac{t^2\gamma_1}{4} &= f(x) + \frac{t^2\gamma_1}{4} > f(x) \\ &> f(x) + \frac{t^2\gamma_2}{4} = f(x) + \frac{t^2\gamma_2}{2} + \frac{t^2|\gamma_2|}{4} \geq f(x + t\eta_0), \end{aligned}$$

d. h. für alle Umgebungen V von x gilt: $\exists\, \xi, \eta \in V$ mit $f(\xi) > f(x) > f(\eta)$
(z.B. mit t klein genug: $\xi = x + t\xi_0$, $\eta = x + t\eta_0$).
Also kann in x kein lokales Extremum vorliegen. $\square$

19.12. Beispiel

Wir untersuchen die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := (x^2 - y^2)\, e^{-x^2-y^2}$ auf lokale Extrema:

$$\operatorname{grad} f(x, y) = e^{-x^2-y^2} \cdot \begin{pmatrix} 2x\,(1 - x^2 + y^2) \\ -2y\,(1 + x^2 - y^2) \end{pmatrix} =: e^{-x^2-y^2} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

$$H_f(x, y) = e^{-x^2-y^2} \cdot \begin{pmatrix} 2(1 - x^2 + y^2) - 4x^2 - 2xa_1 & -4xy - 2xa_2 \\ -4xy - 2xa_2 & -2(1 + x^2 - y^2) + 4y^2 - 2ya_2 \end{pmatrix}$$

Um die kritischen Stellen zu finden, lösen wir das Gleichungssystem

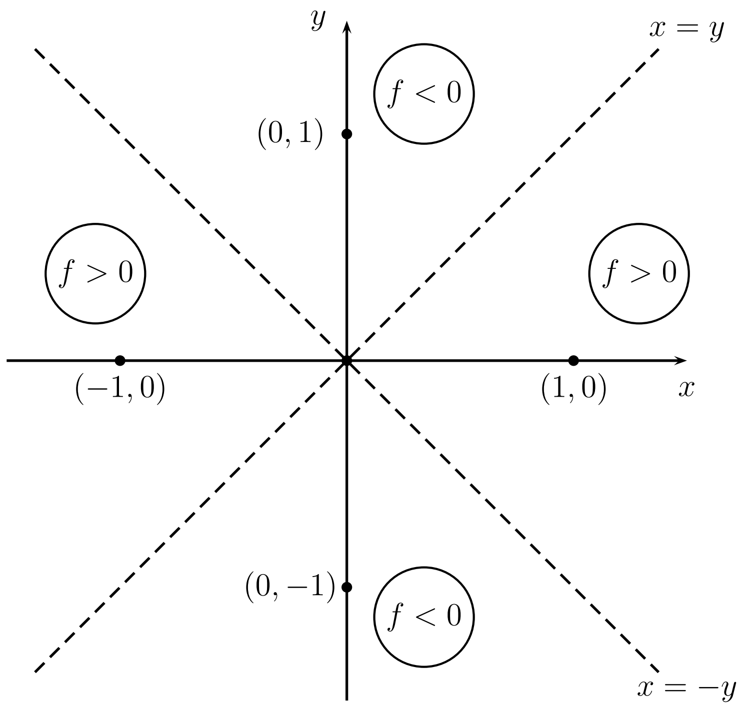
$$\begin{aligned} 2x\,(1 - x^2 + y^2) &= 0 \\ -2y\,(1 + x^2 - y^2) &= 0. \end{aligned}$$

- $x = 0:\quad -2y(1 - y^2) = 0 \quad\Rightarrow\quad y = 0 \vee y = -1 \vee y = 1$

• $x \neq 0: \; 1 = x^2 - y^2 \;\wedge\; -2y(1 + x^2 - y^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = x^2 - y^2 \;\wedge -2y(1+1) = 0$

$\Rightarrow \quad y = 0, x = -1 \;\vee\; x = 1$

Also haben wir die kritischen Stellen $K_0 = (0,0)$, $K_1 = (1,0)$, $K_2 = (0,1)$, $K_3 = (-1,0)$ und $K_4 = (0,-1)$. Außerdem lesen wir aus der Definition von f direkt ab, welches Vorzeichen f in verschiedenen Bereichen des $\mathbb{R}^2$ hat: es ist $f > 0 \Leftrightarrow x^2 > y^2$. Somit kommen wir zunächst zur folgenden schematischen Übersicht:



Weiters genügt es wegen der Symmetrien $f(-x,y) = f(x,y) = f(x,-y) = f(-x,-y)$, die Punkte K_0, K_1 und K_2 zu untersuchen.

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ist indefinit $\quad \Rightarrow \quad$ Sattelpunkt in K_0

$H_f(1,0) = \frac{1}{e}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ ist negativ definit $\quad \Rightarrow \quad$ striktes lokales Maximum in K_1

$H_f(0,1) = \frac{1}{e}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ positiv definit $\quad \Rightarrow \quad$ striktes lokales Minimum in K_2

Die entsprechenden Funktionswerte sind $f(0,0) = 0$, $f(1,0) = 1/e$ und $f(0,1) = -1/e$.

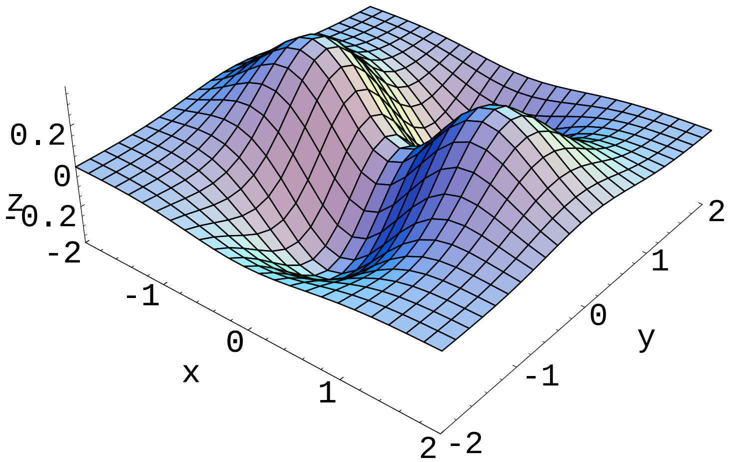
Wegen $\lim\limits_{\|z\| \to \infty} f(z) = 0$ folgt somit, dass

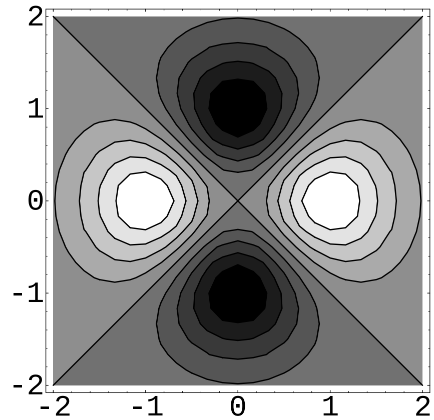
in $(1,0)$ ein globales Maximum vorliegt, weil $\frac{1}{e} > 0$;

in $(0,1)$ ein globales Minimum vorliegt, weil $-\frac{1}{e} < 0$.

In den folgenden Darstellungen des Graphen und einiger Niveaulinien der Funktion f mit

Hilfe von MATHEMATICA werden die Ergebnisse auch recht gut sichtbar: im rechten Bild bedeuten dunklere Zonen niedrigere Funktionswerte; beachte die Nullniveaulinien, die in diesem Fall genau die Diagonalen $x = y$ und $x = -y$ sind.





Der Funktionsgraph wurde mit der Eingabe

```
Plot3D[(x^2 - y^2) Exp[-x^2 - y^2], {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
  AxesLabel -> {x, y, z}, Boxed -> False,
  ViewPoint ->  {1.803, -2.246, 1.775}]
```

erzeugt, das Bild der Höhenlinien mit

```
ContourPlot[(x^2 - y^2) Exp[-x^2 - y^2], {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
  Contours -> 9, ImageSize -> 180]
```

19.13. Extrema unter Nebenbedingungen

Definition: Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \underset{\text{offen}}{\supseteq} U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $M \subseteq U$ sowie $a \in M$.

Wir sagen, $f\big|_M$ besitze ein *lokales Maximum (bzw. Minimum)* in a, wenn gilt:

$\exists V \underset{\text{offen}}{\subseteq} U$ mit $a \in V$: $\quad f(x) \leq f(a) \quad$ (bzw. $f(x) \geq f(a)$) $\quad \forall x \in M \cap V$.

Theorem: Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \underset{\text{offen}}{\supseteq} U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Weiters seien $r \leq n$ und $g_1, \dots, g_r\colon U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen mit der Eigenschaft, dass der Rang der Jacobi-Matrix $D(g_1, \dots, g_r)(x)$ gleich r (also maximal) ist für alle $x \in M$, wobei

$$M := \{x \in U\colon \underbrace{g_1(x) = \cdots = g_r(x) = 0}_{r \text{ Nebenbedingungen}}\}.$$

Falls $f\big|_M$ in $a \in M$ ein lokales Maximum oder Minimum besitzt, dann existieren r reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$, die so genannten *Lagrange-Multiplikatoren*, sodass die folgende Gleichung gilt

$$\text{(19.6)} \qquad \operatorname{grad} f(a) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \cdot \operatorname{grad} g_j(a).$$

Anstatt eines *Beweises* machen wir hier nur für den Fall einer Nebenbedingungsgleichung von der Form $g(x, y) := y - h(x) = 0$ im $\mathbb{R}^2$ eine Plausibilitätsüberlegung und geben später in 23.9 einen rein geometrischen Beweis für den allgemeinen Fall. Eine Version des Beweises, die ohne den Begriff der Untermannigfaltigkeit auskommt und direkt auf den Satz über implizite Funktionen (vgl. bei uns 20.2) zugreift findet sich z.B. in [Heu04, Abschnitt 174].

Plausibilitätsüberlegung: Seien also $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sowie $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $g(x, y) := y - h(x)$. Die Lösungsmenge der Nebenbedingung

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = h(x)\} = \{(x, h(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$$

ist dann einfach der Graph von h im $\mathbb{R}^2$. Laut Annahme hat f ein lokales Extremum im Punkt $a \in M$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $(x_0, h(x_0)) = a$. Dann muss die differenzierbare Funktion $x \mapsto f(x, h(x))$ ein lokales Extremum in x_0 besitzen, also verschwindende Ableitung in diesem Punkt haben. Somit folgt nach der Kettenregel

$$0 = \frac{d}{dx}\Big(f(x, h(x))\Big) = D_1 f(a) + D_2 f(a) \cdot h'(x_0).$$

Dies lehrt uns aber, dass der Vektor $\operatorname{grad} f(a) \in \mathbb{R}^2$ normal auf $(1, h'(x_0)) \neq 0$ steht, daher also parallel zur Richtung $(-h'(x_0), 1) = \operatorname{grad} g(a)$ sein muss. Mit anderen Worten: es gibt eine reelle Zahl λ so, dass

$$\operatorname{grad} f(a) = \lambda \operatorname{grad} g(a).$$

Methode: Die größte Bedeutung der Lagrange-Multiplikatoren liegt in ihrer Anwendung beim Aufsuchen von Kandidaten für lokale Extrema einer $\mathcal{C}^1$-Funktion f unter den Nebenbedingungen $g_1 = \cdots = g_r = 0$. Dazu gehen wir wie folgt vor:

wir bilden eine neue Funktion von $n + r$ Variablen durch

$$F(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_r) := f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \cdots - \lambda_r g_r(x)$$

und bestimmen Lösungen $(x, \lambda) = (x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in U \times \mathbb{R}^r$ des Gleichungssystems $\operatorname{grad}_{(x,\lambda)} F(x, \lambda) = 0$, d.h. in Zeilen gemäß x- und λ-Ableitungen aufgeteilt

$$\text{(19.7)} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \operatorname{grad} f(x) - \lambda_1 \operatorname{grad} g_1(x) - \cdots - \lambda_r \operatorname{grad} g_r(x) & = & 0 \\ g_1(x) & = & 0 \\ & \vdots & \\ g_r(x) & = & 0 \end{array} \right.$$

Mit ein wenig Naivität betrachtet sieht das vielversprechend aus, weil wir hier $n + r$ Gleichungen für $n + r$ „Unbekannte" vorfinden. In der Praxis wird man natürlich nur so viele λ_j bestimmen wie nötig sind, um alle x_k zu erhalten. Allerdings kann obiges Gleichungssystem sehr unzugänglich für eine explizite Lösungsfindung sein, weil es ja z.B. bzgl. $x_1, \ldots, x_n$ typischer Weise nichtlinear ist.

Beispiel: Für $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 5x + y - 3z$ stellen wir uns die folgende Aufgabe:

Bestimme die Maxima und Minima von f auf dem Schnitt der Ebene $x + y + z = 0$ mit der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Die **zwei** Nebenbedingungen erhalten wir, indem wir die Ebene sowie die Sphäre als Nullstellenmenge der stetig differenzierbaren Funktionen

$g_1(x, y, z) := x + y + z$ bzw. $g_2(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$

darstellen.

Nun bilden wir für die Funktion $F(x, y, z, \lambda, \mu) := f(x, y, z) - \lambda\, g_1(x, y, z) - \mu\, g_2(x, y, z)$ zeilenweise die Ableitungen nach x, y, z, λ, μ:

$$\begin{array}{ll} \begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array} & \begin{pmatrix} 5\\ 1\\ -3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 2x\\ 2y\\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \\ (4) & x + y + z = 0 \\ (5) & x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{array}$$

$(1) + (2) + (3) \quad \Rightarrow \quad 3 - 3\lambda - 2\mu \underbrace{(x + y + z)}_{0\ [(4)]} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\lambda = 1}$, daher ergibt sich weiter

(1): $4 - 2\mu x = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu \neq 0$

(2): $-2\mu y = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{y = 0}$

(4): $x + z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -x$

(5): $x^2 + (-x)^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = 1$, d h. $\underline{x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

Wir haben also folgende Kandidaten für Extrema: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ und $Q = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Wir bemerken, dass die Menge $M = \{(x, y, z)\colon g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0\}$ kompakt ist (weil abgeschlossen und $\subseteq$ Kugel), daher existiert sowohl ein Maximum als auch ein Minimum von $f\big|_M$. Nachdem wir nur zwei Kandidaten haben, genügt ein einfacher Vergleich der Werte an diesen Stellen:

wegen $f(P) = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ und $f(Q) = -4\sqrt{2}$ muss also das Maximum in P und das Minimum in Q angenommen werden.

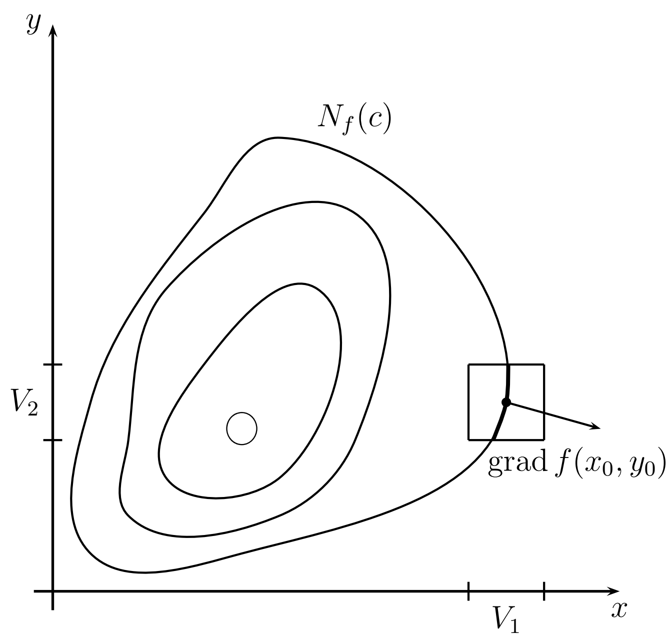
§20. Implizite Funktionen und Umkehrsatz

20.1. Spezialfall: Höhenlinien im $\mathbb{R}^2$

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \underset{\text{offen}}{\supseteq} U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Für $c \in \mathbb{R}$ ist die entsprechende Niveaumenge im Definitionsbreich gegeben durch

$$N_f(c) = \{(x,y) \in U : f(x,y) = c\},$$

wird also durch „eine Gleichung in zwei Variablen“ beschrieben. Naiv gesehen würden wir erwarten, dass sich aus dieser Gleichung „eine Variable durch die andere ausdrücken lässt“, womit eine explizite Beschreibung einer Höhenlinie erreicht wäre (nämlich beider Koordinaten entlang der Niveaumenge durch einen Parameter).



Um die Fragestellung zu präzisieren, gehen wir von einem fixen Punkt $(x_0, y_0) \in N_f(c)$ aus.

$\boxed{?}$ Gilt nahe (x_0, y_0):

$$f(x,y) = c \qquad [\text{d.h. } (x,y) \in N_f(c)]$$

$$\Updownarrow$$

$$x = g(y) \text{ oder } y = h(x).$$

Genauer: es sollen also Umgebungen V_1 von x_0 und V_2 von y_0 existieren, sodass obige Äquivalenz in $V_1 \times V_2$ gilt, wobei $g : V_2 \to V_1$ bzw. $h : V_1 \to V_2$ stetig differenzierbar sind.

Um ausgeartete Fälle zu vermeiden nehmen wir zusätzlich an, dass

$$\boxed{\text{grad } f(x_0, y_0) \neq 0}$$

gilt, der Punkt (x_0, y_0) also nicht kritisch ist. Zum Beispiel gehören zu strikten lokalen Extrema stets einpunktige Niveaumengen und in einem Sattelpunkt schneiden einander zwei Niveaulinien (das kann z.B. aus Teil 3.) des Beweises von Theorem 19.11 geschlossen werden.)

Notwendige Bedingungen: Angenommen es gibt eine differenzierbare Funktion $g\colon V_2 \to V_1$, sodass $(x_0, y_0) \in V_1 \times V_2 \underset{\text{offen}}{\subseteq} U$ mit $g(y_0) = x_0$ und

$$f(g(y), y) = c \qquad \forall y \in V_2.$$

Dann folgt durch Differentiation (nach y) mit der Kettenregel

$$D_1 f(g(y), y) \cdot g'(y) + D_2 f(g(y), y) = 0.$$

$D_1 f(x_0, y_0) = 0$ erzwingt $D_2 f(x_0, y_0) = 0$ und daher auch $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = 0$ — ein Widerspruch ϟ

Somit muss gelten:

$$D_1 f(x_0, y_0) \neq 0 \quad \text{und} \quad g'(y_0) = -\frac{D_2 f(x_0, y_0)}{D_1 f(x_0, y_0)}. \tag{20.1}$$

Ähnlich zeigt man: Falls $h : V_1 \to V_2$ differenzierbar mit $h(x_0) = y_0$, dann folgt aus $f(x, h(x)) = c \;\forall x \in V_1$, dass

$$D_2 f(x_0, y_0) \neq 0 \quad \text{und} \quad h'(x_0) = -\frac{D_1 f(x_0, y_0)}{D_2 f(x_0, y_0)}. \tag{20.2}$$

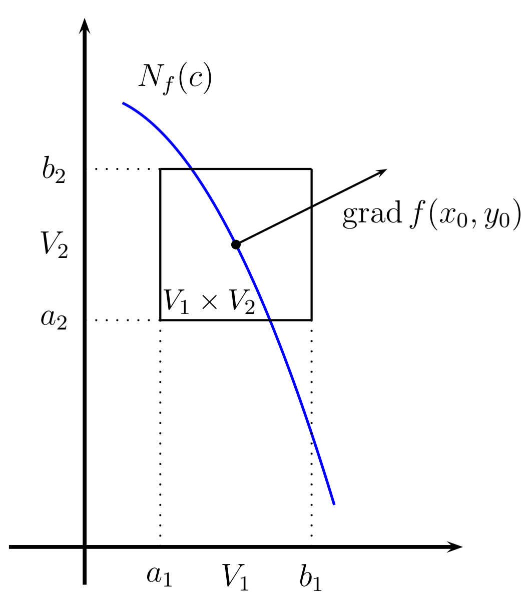
Existenz von g oder h: Es sei $\gamma := D_1 f(x_0, y_0) > 0$.

Die Funktion $x \mapsto f(x, y_0)$ ist dann nahe x_0 streng monoton wachsend und wegen der Stetigkeit von $D_1 f$ erhalten wir:

$\exists\, V_j =]a_j, b_j[$ $(j = 1, 2)$ mit $a_1 < x_0 < b_1$ und $a_2 < y_0 < b_2$, sodass gilt

1.) $\forall\,(x, y) \in \overline{V}_1 \times \overline{V}_2$: $D_1 f(x, y) \geq \frac{\gamma}{2} > 0$

2.) $\forall y \in \overline{V}_2 = [a_2, b_2]$: $f(a_1, y) < c = f(x_0, y_0) < f(b_1, y)$.



Konstruktion von $\mathbf{g} : \mathbf{V}_2 \to \mathbf{V}_1$:

sei $y \in V_2$: $t \mapsto f(t, y)$ ist streng monoton wachsend $[a_1, b_1] \to \mathbb{R}$ und es gilt $f(a_1, y) < c < f(b_1, y)$;
daher $\exists!\, x \in]a_1, b_1[$: $f(x, y) = c$.
Wir setzen $g(y) := x$.

Die Funktion g ist auf V_2 eindeutig bestimmt und es gilt $f(g(y), y) = c$ nach Konstruktion.

Noch zu zeigen: g ist stetig differenzierbar.

◉ **Stetigkeit von g:** Sei $y \in V_2$ und (y_n) eine Folge in V_2 mit $y_n \to y$ $(n \to \infty)$.

Setze $x := g(y)$, $x_n := g(y_n)$; wir müssen zeigen, dass $x_n \to x$ gilt.

Es ist $\underbrace{f(x_n, y_n)}_{c} - \underbrace{f(x, y_n)}_{\substack{\to c \\ (n\to\infty)}} = \underbrace{D_1 f(\xi_n, y_n)}_{\geq \frac{\gamma}{2} > 0} \cdot (x_n - x)$ für ein ξ_n zwischen x und x_n,

daher $0 \leq \frac{\gamma}{2} \cdot |x_n - x| \leq |D_1 f(\xi_n, y_n)||x_n - x| = |c - f(x, y_n)| \to 0 \quad (n \to \infty)$

und somit $x_n \to x$ $(n \to \infty)$, d. h. $g(y_n) \to g(y)$.

◉ **Stetige Differenzierbarkeit von g:** Sei $y \in V_2$ und $0 \neq h$ so klein, dass $y + h \in V_2$ gilt.

- $g(y+h) = g(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{g(y+h)-g(y)}{h} = 0$
- $g(y+h) \neq g(y) \quad \Rightarrow \quad f(g(y+h), y) \neq f(g(y), y)$ (wegen strenger Monotonie) und

$$\frac{g(y+h)-g(y)}{h} = \frac{g(y+h)-g(y)}{f(g(y+h),y) - \underbrace{f(g(y),y)}_{c}} \cdot \frac{f(g(y+h),y) - \overbrace{f(g(y+h),y+h)}^{c}}{h}$$

[für $h \to 0$,
$g(y+h) \to g(y)$]

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\frac{1}{D_1 f(g(y),y)} \quad \cdot \quad \big(-D_2 f(g(y),y)\big),$$

wobei wir beim zweiten Faktor verwendet haben, dass nach dem Mittelwertsatz $f(g(y+h),y) - f(g(y+h),y+h) = -D_2 f(g(y+h), y+\theta h)$ mit $0 \leq \theta \leq 1$ gilt und $D_2 f$ (sowie g) stetig ist.

- ist $h_n \neq 0$, $h_n \to 0$ und $g(y+h_n) = g(y)$ $\forall n$, dann haben wir einfach

$$D_2 f(g(y),y) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(g(y), y+h_n) - f(g(y),y)}{h_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{f(g(y+h_n), y+h_n)}^{c} - \overbrace{f(g(y),y)}^{c}}{h_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{c-c}{h_n} = 0$$

Insgesamt erhalten wir also:

$$\exists\, g'(y) = \lim_{h\to 0} \frac{g(y+h)-g(y)}{h} = -\frac{D_2 f(g(y),y)}{D_1 f(g(y),y)}.$$

Diese Formel zeigt auch die Stetigkeit der Ableitung, also ist g stetig differenzierbar.

Analog argumentiert man für die Fälle $D_1 f(x_0,y_0) < 0$ bzw. $D_2 f(x_0,y_0) > 0$ und $D_2 f(x_0,y_0) < 0$, wobei wir bei letzteren zwei Fällen lokal $y = h(x)$ erhalten.

Zusammenfassend gilt also folgende

Proposition: Es sei $f : \mathbb{R}^2 \underset{\text{offen}}{\supseteq} U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $c \in \mathbb{R}$ und $(x_0, y_0) \in N_f(c) = f^{-1}(\{c\})$ mit $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Falls $\left\{ \begin{array}{c} D_1 f(x_0, y_0) \\ D_2 f(x_0, y_0) \end{array} \right\} \neq 0$ ist, dann gibt es $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}$ offen mit $(x_0, y_0) \in V_1 \times V_2 \subseteq U$ und $\left\{ \begin{array}{c} g : V_2 \to V_1 \\ h : V_1 \to V_2 \end{array} \right\}$ stetig differenzierbar und eindeutig mit der Eigenschaft:

$$\forall (x, y) \in V_1 \times V_2 : \qquad (x, y) \in N_f(c) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = g(y) \\ y = h(x). \end{array} \right.$$

Weiters gilt dann $\left\{ \begin{array}{l} g'(y) = -\frac{D_2 f(g(y), y)}{D_1 f(g(y), y)} \\ h'(y) = -\frac{D_1 f(x, h(x))}{D_2 f(x, h(x))}. \end{array} \right.$

Bemerkung: Bei der Anwendung dieser Proposition wird oft die Schreibweise $y = y(x)$ statt $y = h(x)$ verwendet und mit so genanntem „impliziten Differenzieren“ gearbeitet:

$$c = f(x, y(x)) \quad \Rightarrow \quad f_x \cdot \underbrace{\frac{dx}{dx}}_{1} + f_y \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'} = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{f_x}{f_y}.$$

Beispiel: $f \colon]0, \infty[^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := x + y + \log(xy)$, $c = 2$ und $(x_0, y_0) = (1, 1)$;

es ist $f(1, 1) = 1 + 1 + \log(1) = 2$, also $(1, 1)$ Element von $N_f(2)$;

wegen $D_2 f(x, y) = 0 + 1 + \frac{1}{xy} \cdot x = 1 + \frac{1}{y}$, somit $D_2 f(1, 1) = 2 \neq 0$, ist die Gleichung

$$x + y + \log(xy) = 2$$

nahe $x = 1$ nach y auflösbar durch eine stetig differenzierbare Funktion $x \mapsto y(x)$ mit

$$y'(x) = -\frac{D_1 f(x, y)}{D_2 f(x, y)} = -\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{y}}, \text{ also } y'(1) = -1.$$

Durch weiteres implizites Differenzieren erhalten wir auch

$$y''(x) = -\frac{-\frac{1}{x^2}(1 + \frac{1}{y}) - \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{y'}{y^2}\right)}{\left(1 + \frac{1}{y}\right)^2}, \text{ also } y''(1) = -\frac{-1 \cdot (2) - 2 \cdot (1)}{2^2} = 1.$$

Z.B. gewinnen wir daraus die Taylorentwicklung für y um $x_0 = 1$:

$$y(x) = y(1) + y'(1) \cdot (x - 1) + \frac{y''(1)}{2} \cdot (x - 1)^2 + O\left(|x - 1|^3\right) =$$

$$1 - (x - 1) + \frac{(x - 1)^2}{2} + O\left(|x - 1|^3\right)$$

20.2. Satz über implizite Funktionen

Es seien $U_1 \subseteq \mathbb{R}^k$, $U_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $F\colon U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$, eine stetig differenzierbare Abbildung, $F(x,y) = (F_1(x,y), \ldots, F_m(x,y))$.

Die Bedingung

$$(*) \qquad F(x,y) = 0$$

entspricht einem System von m Gleichungen für $x_1, \ldots, x_k$ und $y_1, \ldots, y_m$.

$\boxed{?}$ Können aus den Gleichungen $(*)$ die m Variablen $y_1, \ldots, y_m$ durch die k Variablen $x_1, \ldots, x_k$ „ausgedrückt" werden?

Legt $(*)$ durch seine Lösungsmenge $y \in \mathbb{R}^m$ als Funktion von $x \in \mathbb{R}^k$ fest?

Nehmen wir einmal probeweise an, es wäre so; d.h. es sei $y = g(x)$ und g differenzierbar. Für $1 \leq j \leq m$ erhalten wir dann durch Einsetzen in $(*)$ die Gleichung

$$F_j(x, g(x)) = 0$$

und daraus durch partielle Differentiation nach x_l $(1 \leq l \leq k)$ gemäß der Kettenregel

$$0 = D_{x_l}(F_j(x,g(x))) = D_{x_l}F_j(x,g(x)) + \sum_{p=1}^{m} D_{y_p}F_j(x,g(x)) \cdot D_{x_l}g_p(x).$$

Das resultierende Gleichungssystem können wir als linearisierte Form von $(*)$ auffassen. Dazu führen wir noch eine kompaktere Notation für entsprechende Teilmatrizen der Jacobi-Matrix von F ein:

$$(20.3) \qquad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_k)} := \left(D_{x_j}F_i\right)_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq k}} & [(m \times k)\text{-Teilmatrix}] \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)} := \left(D_{y_j}F_i\right)_{1\leq i,j\leq m} & [(m \times m)\text{-Teilmatrix}]. \end{cases}$$

Damit lautet die gewonnene Linearisierung von $(*)$ dann

$$(20.4) \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(x,g(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,g(x)) \cdot Dg(x) = 0.$$

Nun gilt folgende Äquivalenz:

(20.4) ist auflösbar nach „dy"$= Dg(x)$ $\iff$ $\frac{\partial F}{\partial y}(x,g(x))$ ist invertierbar.

Dass diese Bedingung sogar hinreichend für lokale Auflösbarkeit des ursprünglichen Gleichungssystems $(*)$ nach y ist, beweisen wir im folgenden

Theorem: Es sei $(a,b) \in U_1 \times U_2 \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ mit $F(a,b) = 0$. Weiters gelte, dass

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \quad \text{invertierbar ist.} \tag{20.5}$$

Dann gibt es offene Umgebungen V_1 von a mit $V_1 \subseteq U_1$ und V_2 von b mit $V_2 \subseteq U_2$ und eine eindeutige stetig differenzierbare Abbildung $g : V_1 \to V_2$ mit $g(a) = b$ und der Eigenschaft:

$$\forall (x,y) \in V_1 \times V_2 : \qquad F(x,y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = g(x).$$

Es gilt dann auch

$$Dg(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x)) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)). \tag{20.6}$$

Bemerkung: Proposition 20.1 ist somit ein Spezialfall dieses Theorems für $k = m = 1$, $F(x,y) = f(x,y) - c$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = D_2 f$ (bzw. falls $D_2 f(x_0, y_0) = 0$ ist, vertausche die Rollen von x und y).

Beispiel: $F \colon \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \end{pmatrix}$

Für die Ausgangssituation im Theorem haben wir $k = 1$ und $m = 2$.

$\boxed{?}$ Ist innerhalb der Lösungsmenge des Gleichungssystems $F(x,y,z) = 0$ nahe des Lösungspunktes $(1,2,1)$ zumindest lokal (y,z) als Funktion von x darstellbar?

Es ist $\frac{\partial F}{\partial(y,z)} = \begin{pmatrix} 2y & 2z \\ 3y^2 & 3z^2 \end{pmatrix}$ und $\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{pmatrix} 2x \\ 3x^2 \end{pmatrix}$.

Wir setzen $B := \frac{\partial F}{\partial(y,z)}(1,2,1) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$, dann ist $\det B = -12 \neq 0$, also B invertierbar und $B^{-1} = \frac{-1}{12} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$. Weiters setzen wir $A := \frac{\partial F}{\partial x}(1,2,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

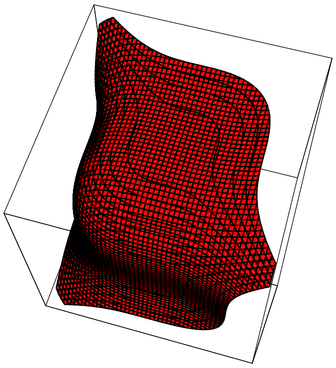
Aus dem Theorem folgt: $\exists V_1 \subseteq \mathbb{R}$ offen, $1 \in V_1$, und $\exists V_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $(2,1) \in V_2$, sowie $g \colon V_1 \to V_2$ stetig differenzierbar mit $g(1) = (2,1)$ so, dass

$$\forall (x,y,z) \in V_1 \times V_2 : \qquad F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = g(x)$$

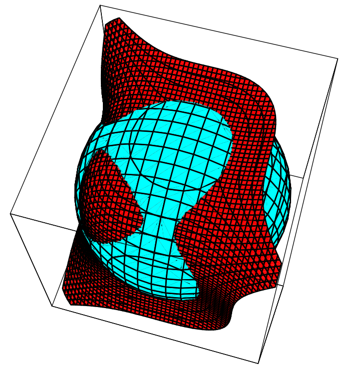
und weiters

$$Dg(1) = -B^{-1} \cdot A = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -12 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

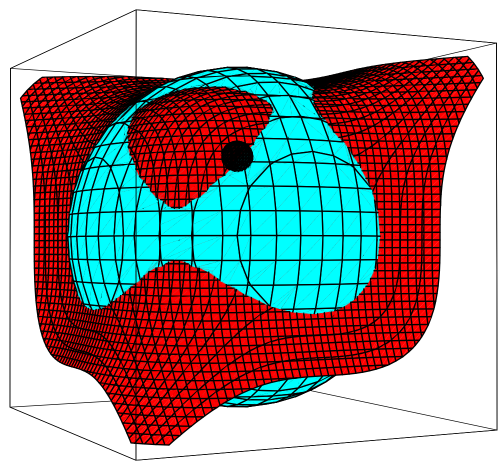
In der geometrischen Interpretation stellt $g\colon \mathbb{R} \supseteq V_1 \to \mathbb{R}^2$ lokal die Schnittkurve der beiden Flächen $F_1(x,y,z) = 0$ und $F_2(x,y,z) = 0$ dar, nämlich mittels Parametrisierung in der Form $x \mapsto (x, g(x))$:



$F_1(x,y,z) = 0$ beschreibt eine Sphäre mit Radius $\sqrt{6}$ um den Ursprung. Ein Ausschnitt der durch $F_2(x,y,z) = 0$ gegebenen Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ ist in der Graphik links dargestellt und der Schnitt dieser mit der Sphäre ist im rechten Bild illustriert.



Hier stellen wir die Situation noch einmal in einer anderen Ansicht dar, in der zur Verdeutlichung eine kleine Kugelumgebung um den Punkt $(1,2,1)$ eingeschwärzt wurde:



Zur Information: Die obigen Illustrationen wurden in Mathematica mit den folgenden Eingaben erzeugt. Zunächst werden die speziellen Graphik-Pakete eingelesen (z.B. für Niveauflächen von Funktionen dreier Variablen)

```
<< Graphics`ContourPlot3D`
```

Zur Vorbereitung (keine Abbildung oben) erzeugen wir die Sphäre mittels

```
cp1 = ContourPlot3D[x^2 + y^2 + z^2  - 6, {x, -2.5, 2.5}, {y, -2.5, 2.5},
       {z, -2.5, 2.5},  Lighting -> False, ContourStyle -> {RGBColor[0, 1, 1]},
       PlotPoints -> {5, 5}]
```

und dann die durch F_2 gegebene Fläche (Abbildung oben links)

```
cp2 = ContourPlot3D[x^3 + y^3 + z^3  - 10, {x, -2.5, 2.5}, {y, -2.5, 2.5},
       {z, -2.5, 2.5}, Lighting -> False, ContourStyle -> {RGBColor[1, 0, 0]},
       PlotPoints -> {8, 8}, ViewPoint -> {-0.428, 1.498, 3.004}]
```

nun werden die erzeugten Graphiken zusammen dargestellt (Abbildung oben rechts):

```
Show[cp1, cp2, ViewPoint -> {-0.428, 1.498, 3.004}]
```

Die Erzeugung der kleinen schwarzen Kugelumgebung kann z.B. so vorgenommen werden (wir brauchen viele `PlotPoints`, um bei dem kleinen Radius noch Punkte innerhalb der Sphäre zu erfassen; ohne Abbildung)

```
cp3 = ContourPlot3D[(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2  - 0.04, {x, -2.5, 2.5},
       {y, -2.5, 2.5}, {z, -2.5, 2.5}, Lighting -> False,
       ContourStyle -> {RGBColor[0, 0, 0]}, PlotPoints -> {12,12},
       ViewPoint -> {-0.428, 1.498, 3.004}]
```

schließlich wurde diese in die kombinierte Ansicht mit angepasster `Viewpoint`-Option eingefügt

```
Show[cp1, cp2, cp3, ViewPoint -> {1.508, 3.029, -0.026}]
```

Beweis des Theorems:

OBdA ist $(a,b) = (0,0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ (andernfalls ist dies stets durch Translation erreichbar, wobei die Ableitung unverändert bleibt).

Wir setzen $A := \frac{\partial F}{\partial x}(0,0)$ [eine $(m \times k)$-Matrix] und $B := \frac{\partial F}{\partial y}(0,0)$ [eine invertierbare $(m \times m)$-Matrix].

1) <u>Umformulierung in ein Fixpunktproblem mit Parametern:</u>

Wir betrachten die Abbildung $G : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$, $G(x,y) := y - B^{-1} \cdot F(x,y)$;

dann gilt: $F(x,y) = 0 \iff G(x,y) = y$
(d. h. y ist Fixpunkt von $y \mapsto G(x,y)$ bei gegebenem x)

Es ist

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = \underbrace{I_m - B^{-1}\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}_{\text{Matrix mit stetigen Funktionen als Komponenten}} \qquad \left[\text{wobei } I_m = \begin{pmatrix} 1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & 1 \end{pmatrix} \right],$$

also ist $(x,y) \mapsto \frac{\partial G}{\partial y}$ stetig und $\frac{\partial G}{\partial y}(0,0) = 0$. Daher gibt es $W_1 \times W_2 \underset{\text{offen}}{\subseteq} U_1 \times U_2$ mit $(0,0) \in W_1 \times W_2$ und

$$(*) \qquad \left\| \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) \right\|_{\text{op}} \leq \frac{1}{2} \qquad \forall (x,y) \in W_1 \times W_2;$$

Wähle $r > 0$ so, dass $\overline{B_r(0)} \subseteq W_2$ und setze $V_2 := B_r(0)$.

G ist stetig und $G(0,0) = 0 - B^{-1} \cdot 0 = 0$, daher gibt es $V_1 \subseteq W_1$ offen mit $0 \in V_1$:

$$\sup_{x \in V_1} \|G(x,0)\| \leq \tfrac{r}{2} \qquad \text{[weil auch } x \mapsto \|G(x,0)\| \text{ stetig ist].}$$

Seien $x \in V_1$ und $y, \eta \in \overline{V}_2$, dann gilt:

$$(\triangle) \qquad \|G(x,y) - G(x,\eta)\| \leq \sup_{\zeta \in \overline{V}_2} \left\| \frac{\partial G}{\partial y}(x,\zeta) \right\|_{\mathrm{op}} \cdot \|y - \eta\| \underset{[(*)]}{\leq} \frac{1}{2}\|y - \eta\|.$$

Mit $\eta = 0$ erhalten wir aus $(\triangle)$ zusammen mit obigem weiters

$$\frac{1}{2}\|y\| \geq \|G(x,y) - G(x,0)\| \geq \|G(x,y)\| - \|G(x,0)\| \geq \|G(x,y)\| - \frac{r}{2},$$

d.h.: $\qquad \|G(x,y)\| \leq \frac{1}{2}(\|y\| + r) \qquad \forall x \in V_1,\ \forall y \in V_2 = B_r(0).$

Insgesamt gilt also

$$(**) \qquad \forall x \in V_1: \quad y \in \overline{V_2} \quad \Longrightarrow \quad \|G(x,y)\| \leq \frac{1}{2}(r + r) = r,$$

somit bildet $y \mapsto G(x,y)$ die abgeschlossene Kugel $\overline{V}_2 = \overline{B_r(0)}$ in sich ab, falls $x \in V_1$.

2) <u>Entlarvung als Fixpunktproblem im Raum stetiger Funktionen:</u>

$$\mathcal{C}_b(V_1, \mathbb{R}^m) = \{f : V_1 \to \mathbb{R}^m \text{ stetig} : \|f\|_\infty := \sup_{x \in V_1} \|f(x)\| < \infty\}$$

ist ein Banach-Raum [vgl. Korollar 16.18] und

$$X := \{f \in \mathcal{C}_b(V_1, \mathbb{R}^m) : \|f\|_\infty \leq r\}$$

ist eine abgeschlossene Teilmenge (das ist die abgeschlossene r-Kugel bzgl. der Metrik $d(f_1, f_2) = \|f_1 - f_2\|_\infty$; vgl. Beispiel 16.15).

Daher ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. [Sei (f_n) Cauchy-Folge in $X \Rightarrow (f_n)$ Cauchy-Folge in $\mathcal{C}_b \Rightarrow (f_n)$ konvergiert in $\mathcal{C}_b \Rightarrow$ Limes von (f_n) in X, weil X abgeschlossen.]

Wir definieren zunächst eine Abbildung $\Phi_0 : \mathcal{C}_b(V_1, \mathbb{R}^m) \to \mathcal{C}(V_1, \mathbb{R}^m)$ durch $\Phi_0(f)(x) := G(x, f(x))$.

Wegen $(**)$ gilt: $\|f\|_\infty \leq r \Rightarrow \|\Phi_0(f)\|_\infty \leq r$, d.h. $\Phi_0(X) \subseteq X$.

Wir setzen nun $\Phi := \Phi_0\big|_X : X \to X$.

Es ist für $f_1, f_2 \in X$:

$$\begin{aligned} \|\Phi(f_1) - \Phi(f_2)\|_\infty &= \sup_{x \in V_1} \|G(x, f_1(x)) - G(x, f_2(x))\| \\ &\underset{[(\triangle)]}{\leq} \frac{1}{2} \sup_{x \in V_1} \|f_1(x) - f_2(x)\| = \frac{1}{2}\|f_1 - f_2\|_\infty, \end{aligned}$$

d. h. Φ ist eine Kontraktion auf dem vollständigen metrischen Raum X.

Nach dem Fixpunktsatz von Banach gilt also: $\exists! g \in X$: $\Phi(g)(x) = g(x)\ \forall x \in V_1$,
d. h. $g : V_1 \to B_r(0) \subseteq \overline{V}_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ ist stetig mit der Eigenschaft, dass

$$g(x) = G(x, g(x)) = g(x) - B^{-1} \cdot F(x, g(x)),$$

was wiederum äquivalent ist zur Gültigkeit von

$$F(x, g(x)) = 0 \qquad \forall x \in V_1.$$

3) <u>Differenzierbarkeit von g:</u>

$(*)$ bedeutet für $(x, y) \in W_1 \times W_2$ und $R := B^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$, dass $\left\|I_m - R\right\|_{\text{op}} \leq \frac{1}{2}$ gilt.

Daher ist R injektiv [denn $Rz = 0 \ \Rightarrow\ \frac{1}{2}\|z\| \geq \|I_m z - Rz\| = \|z\| \ \Rightarrow\ z = 0$], also auch bijektiv [als lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ in sich].

Somit ist $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ invertierbar; insbesondere ist $\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))$ invertierbar $\forall x \in V_1$.

Sei $x_0 \in V_1$, $y_0 := g(x_0)$ und $A_0 := \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$, $B_0 := \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$.

F ist differenzierbar in (x_0, y_0), daher gibt es nahe (x_0, y_0) eine Abbildung φ mit $\varphi(x, y) = o\left(\|(x - x_0, y - y_0)\|\right) = o(\|x - x_0\| + \|y - y_0\|)$ und

$$F(x, y) = \underbrace{F(x_0, y_0)}_{0} + \underbrace{DF(x_0, y_0)}_{\substack{(A_0, B_0) \\ [(m \times (k+m))\text{-Matrix}]}} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \varphi(x, y),$$

d.h. $F(x, y) = A_0 \cdot (x - x_0) + B_0 \cdot (y - y_0) + \varphi(x, y)$.

Setzen wir $y = g(x)$, so folgt

$$0 = F(x, g(x)) = A_0 \cdot (x - x_0) + B_0 \cdot \big(g(x) - g(x_0)\big) + \varphi(x, g(x))$$

und daraus wegen der Invertierbarkeit von B_0 auch

$$g(x) - g(x_0) = -B_0^{-1} \cdot A_0 \cdot (x - x_0) - \underbrace{B_0^{-1} \cdot \varphi(x, g(x))}_{=: \psi(x)}.$$

•Es bleibt zu zeigen: $\psi(x) = o(\|x - x_0\|)$ (Definition der Differenzierbarkeit!)

Behauptung: $\exists V_1' \subseteq V_1$ offen mit $x_0 \in V_1'$ und $K \geq 0$:

$$\|g(x) - g(x_0)\| \leq K \cdot \|x - x_0\| \quad \forall x \in V_1'.$$

— ist diese Behauptung bewiesen, dann sind wir fertig, denn für $x \to x_0$ folgt daraus

$$\psi(x) = B_0^{-1} \cdot \varphi(x, g(x)) = o(\|x - x_0\| + K \cdot \|x - x_0\|) = o(\|x - x_0\|)).$$

Beweis der Behauptung:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists V' \subseteq V_1 \times V_2$ offen, $(x_0, y_0) \in V', \forall (x,y) \in V'$: $\|\varphi(x,y)\| \le \varepsilon \cdot (\|x - x_0\| + \|y - y_0\|)$.

Es ist

$$(***) \qquad \|g(x) - g(x_0)\| \le \underbrace{\|B_0^{-1} A_0\|_{\text{op}}}_{=:\, c_1} \cdot \|x - x_0\| + \underbrace{\|B_0^{-1}\|_{\text{op}}}_{=:\, c_2} \cdot \|\varphi(x, g(x))\|.$$

Aus der Stetigkeit von g folgt, dass $x \mapsto (x, g(x))$ stetig ist. Daher $\exists V_1' \subseteq V_1$ offen mit $x_0 \in V_1'$, sodass der Graph von g, d.h. $\{(x, g(x)) : x \in V_1'\}$, ganz in V' enthalten ist; dann gilt $\forall x \in V_1'$:

$$\|\varphi(x, g(x))\| \le \varepsilon \cdot (\|x - x_0\| + \|g(x) - g(x_0)\|)\,,$$

somit haben wir vermöge $(***)$ insgesamt

$$\|g(x) - g(x_0)\| \le (c_1 + \varepsilon \cdot c_2)\|x - x_0\| + \varepsilon \cdot c_2 \cdot \|g(x) - g(x_0)\|.$$

Wählen wir $\varepsilon > 0$ so klein, dass $c_2 \cdot \varepsilon < \frac{1}{2}$, dann folgt somit

$$\frac{1}{2}\|g(x) - g(x_0)\| \le (c_1 + \frac{1}{2}) \cdot \|x - x_0\|,$$

d.h. die Behauptung gilt mit $K = 2c_1 + 1$.

4) <u>Formel (20.6) und stetige Differenzierbarkeit:</u>

g ist differenzierbar, daher gilt Formel (20.4) und daraus folgt mittels Invertierbarkeit von $\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))$ $(\forall x \in V_1)$ direkt die Gleichung (20.6):

$$Dg(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)).$$

Gemäß der Voraussetzungen ist die rechte Seite dieser Gleichung stetig abhängig von x, also ist $x \mapsto Dg(x)$ stetig; somit ist g stetig differenzierbar.

$\square$

20.3. Umkehrabbildungen

Es seien $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U_1 \to U_2$ stetig differenzierbar und bijektiv.

$\boxed{?}$ Ist f^{-1} stetig differenzierbar?

Notwendige Bedingung: Falls $f^{-1} : U_2 \to U_1$ differenzierbar ist, folgt aus $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{U_1}$ nach der Kettenregel

$$D(f^{-1})(f(x)) \cdot Df(x) = I_n$$

und somit, dass sowohl $(Df)(x)$ als auch $D(f^{-1})(f(x))$ invertierbar sind. Weiters folgt die Gleichung

$$D(f^{-1})(f(x)) = ((Df)(x))^{-1}.$$

Wie wir zeigen werden, ist die Bedingung der Invertierbarkeit von $(Df)(x)$ zumindest lokal auch hinreichend.

Theorem: Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $a \in U$ sowie $b := f(a) \in \mathbb{R}^n$. Falls

$$Df(a) \quad \text{invertierbar ist,}$$

dann gilt: $\exists\, U_0 \subseteq U$ offen, $a \in U_0$ und $\exists\, V_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $b \in V_0$ mit der Eigenschaft, dass

$$f\big|_{U_0} : U_0 \to V_0 \text{ bijektiv und } g := \left(f\big|_{U_0}\right)^{-1} : V_0 \to U_0 \text{ stetig differenzierbar ist}$$

und es gilt die Gleichung

$$Dg(b) = (Df(a))^{-1}.$$

Beweis: Betrachte die Abbildung $F : \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$, $F(x,y) := x - f(y)$.

Es ist $F(b,a) = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(b,a) = -Df(a)$ invertierbar. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es daher offene Umgebungen $V' \ni b$, $U \supseteq U' \ni a$ und $h : V' \to U'$ stetig differenzierbar mit der Eigenschaft

$$\forall (x,y) \in V' \times U' : \quad \underbrace{F(x,y) = 0}_{\text{d.h. } x = f(y)} \quad \Longleftrightarrow \quad y = h(x).$$

Sei $U_0 \underset{\text{offen}}{\subseteq} U'$ mit $a \in U_0$ so, dass $V_0 := f(U_0) \subseteq V'$. Dann ist $V_0 = h^{-1}(U_0)$, also ist V_0 offen [weil h stetig ist], $b \in V_0$, und $f(U_0) = V_0$, d.h. $f\big|_{U_0}$ ist surjektiv; $\forall x \in V_0$, $\forall y \in U_0$ gilt:

$$y = h(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = f(y)$$

wobei $g := h\big|_{V_0}$ die Menge V_0 in U_0 abbildet.

Also ist $f\big|_{U_0}$ bijektiv mit der Umkehrfunktion g, die ebenfalls stetig differenzierbar ist. $\square$

Definition: Es seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to V$ bijektiv und $\mathcal{C}^1$ (stetig differenzierbar). Falls $f^{-1} : V \to U$ ebenfalls stetig differenzierbar ist, so heißt f ein $\mathcal{C}^1$-*Diffeomorphismus*.

Allgemein: Sind f <u>und</u> f^{-1} beide k-mal stetig differenzierbar, so heißt die Abbildung $\mathcal{C}^k$-*Diffeomorphismus*; oft sagt man für $k = \infty$ (oder auch schon für $k = 1$) einfach *Diffeomorphismus*.

Bemerkung: Ist f ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus und f k-mal stetig differenzierbar, dann ist f sogar ein $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus.

[Beweis induktiv: da in $D(f^{-1})(y) = ((Df)(f^{-1}(y)))^{-1}$ alle Komponentenfunktionen stetig differenzierbar sind, ist $D(f^{-1})$ stetig differenzierbar usw.]

Beispiel: Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$

Wir betrachten $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $(r, \varphi) \mapsto (r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi)$.

Es ist $Df(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r \cdot \sin\varphi \\ \sin\varphi & r \cdot \cos\varphi \end{pmatrix}$, daher $\det(Df(r, \varphi)) = r > 0$ und somit $Df(r, \varphi)$ für alle $(r, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ invertierbar.

Also ist f ein lokaler Diffeomorphismus [f ist $\mathcal{C}^\infty$] und

$$D(f^{-1})(x, y) = (Df(\underbrace{f^{-1}(x, y)}_{(r,\varphi)}))^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r \cdot \sin\varphi \\ \sin\varphi & r \cdot \cos\varphi \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r} \end{pmatrix}.$$

Wegen $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ist $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ und $\frac{x}{r} = \cos\varphi$, $\frac{y}{r} = \sin\varphi$, somit ist

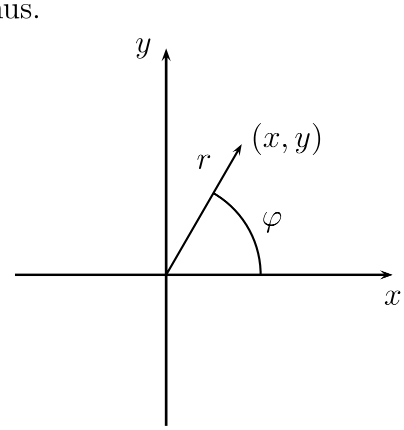
$$D(f^{-1})(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{!}$ f ist nicht global bijektiv $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, denn $f(r, \varphi) = f(r, \varphi + 2k\pi)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$.

• Wir geben eine explizite lokale Umkehrung für $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ an:

$x = r\cos\varphi > 0$ für $(r, \varphi) \in V := \mathbb{R}^+ \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, daher ist $\frac{y}{x} = \tan\varphi$;

somit ist die Umkehrfunktion $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to V$ gegeben durch $(x, y) \mapsto (r(x, y), \varphi(x, y)) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\frac{y}{x})$ und die Polarkoordinatenabbildung f ist bijektiv von V nach $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, dort also ein $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus.



Literaturverzeichnis

[AE99] H. Amann and J. Escher. *Analysis II*. Birkhäuser, Basel, 1999.

[BF96] M. Barner and F. Flohr. *Analysis II*. Walter de Gruyter, Berlin, 1996. 3. Auflage.

[BF00] M. Barner and F. Flohr. *Analysis I*. Walter de Gruyter, Berlin, 2000. 5. Auflage.

[Fis03] G. Fischer. *Lineare Algebra*. Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2003. 14. Auflage.

[For06] O. Forster. *Analysis 1*. Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2006. 8. Auflage.

[Heu03] H. Heuser. *Analysis 1*. BG Teubner, Stuttgart, 2003. 15. Auflage.

[Heu04] H. Heuser. *Analysis 2*. BG Teubner, Stuttgart, 2004. 13. Auflage.

[HW96] E. Hairer and G. Wanner. *Analysis by its history*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[RS02] R. Remmert and G. Schumacher. *Funktionentheorie 1*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2002. 5. Auflage.

[SS03] E. Stein and R. Shakarchi. *Complex Analysis*. Princeton Lectures in Analysis II. Princeton University Press, Princeton, 2003.